



Library of

Wellesley



College.

Presented by

Prof. C. V. Horsford

Nº 28341



LEHRBUCH
ZUR
BAHNBESTIMMUNG
DER
KOMETEN UND PLANETEN

VON

THEODOR R. v. OPPOLZER,

DR. MED., K. K. REGIERUNGSRATH UND PROFESSOR DER ASTRONOMIE AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

ZWEITER BAND.

LEIPZIG,
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN.
1880.

20021

9 65
6 355
97
2

VORREDE.

Es sind nahe zehn Jahre seit dem Erscheinen des ersten Bandes meines Lehrbuches verflossen und erst jetzt folgt der zweite Band: ich glaube nicht, dass diese Verzögerung demselben zum Nachtheile gereicht hat. Vergleiche ich mit dem vorliegenden Bande meine damals gemachten Entwürfe, so findet sich fast keine Spur der ursprünglichen Ausarbeitung erhalten; während diese fast einen kompilatorischen Charakter zeigte, bringt jener mehrfach Neues und Besseres. Dieser Umstand bedingt auch eine gewisse Ungleichförmigkeit in der Bearbeitung der beiden Bände; ich würde Vieles an meinem ersten Werke zu ändern und zu verbessern haben, um dasselbe dem vorliegenden anzupassen.

Mit diesem zweiten Bande ist das von mir nach dem ursprünglichen Plane für das vorliegende Lehrbuch in Aussicht genommene Material erschöpft; allerdings hätte ich gern noch einige Kapitel näher ausarbeiten und einige Zusätze machen wollen; ich zähle zu diesen die Auseinandersetzung der allgemeinen Störungen und eine eingehende Behandlung der Methoden zur Bestimmung der speciellen Störungen für die periodischen Kometen, doch wäre dadurch der ohnehin über Gebühr angewachsene zweite Band nahe um die halbe Bogenzahl stärker geworden. Ich musste daher auf die Aufnahme dieser Kapitel verzichten; übrigens wird die Bearbeitung der periodischen Kometen nach den hier zum Vortrage gebrachten Methoden ohne Schwierigkeit durchführbar sein.

Bei der Herstellung des vorliegenden Werkes war ich vielfach unterstützt durch die werkthätige Hilfe einiger jüngerer Astronomen,

die mit seltener Ausdauer und mit hervorragendem Geschick sich an der Ausführung der Beispiele, der Rechnung der beigegebenen Tafeln und insbesondere bei der mühevollen Korrektur des Druckes theiligten; es sind diess die Herren Ferdinand Anton und Robert Schram, beide Observatoren der k. k. österr. Gradmessung, der Assistent an demselben Institute Herr Franz Kühnert und Herr F. K. Ginzl. Ich kann es nicht unterlassen den Genannten an dieser Stelle meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Keines der vielen Zahlenbeispiele des vorliegenden Werkes ist unkontrollirt geblieben; in der Regel habe ich für die Beispiele die erste Rechnung durchgeführt und einer der genannten Herren hat dieselbe unabhängig wiederholt; hierbei galt als Regel, die letzte Stelle der Rechnung entsprechend den angewandten Hilfsmitteln völlig sicher zu stellen.

Eine besondere Sorgfalt wurde auf die korrekte Herstellung des Satzes verwandt; es wird sich dadurch dieser Band gewiss sehr vorthellhaft seinem Vorgänger gegenüber auszeichnen; trotzdem sind im Texte und in den Formeln einige Fehler stehen geblieben, die ich, soweit mir dieselben bekannt geworden sind, in das am Schlusse aufgeführte Fehlerverzeichniss aufgenommen habe; eine Berichtigung der erheblicheren Fehler wäre vor dem Gebrauche des Werkes jedenfalls zu empfehlen. Die Zahlenangaben der Tafeln werden sich wohl durchwegs korrekt erweisen innerhalb der im Texte näher bezeichneten Genauigkeitsgrenzen.

Wien im November 1879.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

	Seite
I. Ueber die numerische Differentiation und Integration	1
§ 1. Allgemeine Uebersicht über das vorgelegte Problem und über die dabei auftretenden Bezeichnungen.	1
§ 2. Aufstellung einiger Relationen zwischen den Combinationssummen der Quadrate der geraden und ungeraden Zahlen.	8
§ 3. Darstellung einer Funktion durch ihre Differenzwerthe	13
§ 4. Ermittlung der numerischen Differentialquotienten einer Funktion	16
§ 5. Ermittlung der numerischen Integrale einer Funktion	32
A. Einfache Integrale	32
B. Doppelte Integrale	19
Anhang	66
II. Ermittlung der speciellen Störungen	69
§ 1. Allgemeines und Entwickelung der Grundgleichungen	69
A. Encke's Methode der Berechnung der speciellen Störungen	72
§ 2. Transformation der Grundgleichungen	72
§ 3. Die Bestimmung der Coordinaten	82
Berechnung einer Oppositionsephemeride mit strenger Berücksichtigung der Störungen	87
§ 4. Uebergang auf osculirende Elemente bei Encke's Methode	88
§ 5. Rechnungsbeispiel zu Encke's Methode	104
Numerische Rechnung.	117
Beispiel für den Uebergang auf osculirende Elemente	129
B. Specielle Störungen in den polaren Coordinaten	139
§ 1. Aufstellung der Differentialgleichungen.	139
§ 2. Integration der Differentialgleichungen	119
§ 3. Berechnung der Coordinaten	156
Berechnung einer Ephemeride mit strenger Berücksichtigung der Störungen.	161
§ 4. Uebergang auf osculirende Elemente nach Hansen-Tietjen's Methode	163
§ 5. Rechnungsbeispiel zu Hansen-Tietjen's Methode.	173
Numerische Rechnung.	183
Beispiel für den Uebergang auf osculirende Elemente	205
C. Variation der Constanten.	213
§ 1. Aufstellung der Differentialgleichungen.	213
§ 2. Berechnung der Coordinaten und der störenden Kräfte	226
Berechnung einer Ephemeride mit Berücksichtigung der Störungen.	231
§ 3. Rechnungsbeispiel zur Variation der Constanten.	231
Numerische Rechnung.	239

	Seite
<i>D. Allgemeine Uebersicht der Methoden zur strengen Berechnung der speciellen Störungen</i>	255
<i>E. Ermittlung der Störungswerthe mit Rücksicht auf die ersten Potenzen derselben.</i>	257
Numerische Rechnung	266
III. Methode der kleinsten Quadrate	276
<i>A. Theoretische Grundlage der Methode der kleinsten Quadrate und deren Anwendung auf die einfachsten Fälle</i>	<i>276</i>
§ 1. Allgemeine Betrachtungen	276
§ 2. Die gesetzmässige Vertheilung der Beobachtungsfehler	281
§ 3. Das Maass der Präcision	288
§ 4. Der wahrscheinliche Fehler	291
§ 5. Der Durchschnittsfehler und der mittlere Fehler.	298
§ 6. Das Verhältniss der Genauigkeit des arithmetischen Mittels zu der einer Einzelbeobachtung	300
§ 7. Bestimmung des mittleren und des Durchschnittsfehlers aus gleichwerthigen Beobachtungen	301
§ 8. Erläuterung und Prüfung der vorstehenden Methoden durch die Beobachtungen	303
§ 9. Bestimmung des mittleren Fehlers aus ungleichwerthigen Beobachtungen	306
§ 10. Ermittlung des mittleren Fehlers eines Resultates aus der Summe und Differenz directer Beobachtungen	309
<i>B. Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Bestimmung einer oder mehrer unabhängiger Unbekannten aus Beobachtungen</i>	<i>311</i>
§ 1. Allgemeines	311
§ 2. Bildung der Normalgleichungen	314
1. Numerisches Beispiel mit Benützung von Logarithmen	320
2. Numerisches Beispiel mit Benützung der Quadrattafel	327
§ 3. Bestimmung der Eliminationsgleichungen	329
Schema	340
§ 4. Bestimmung der Unbekannten aus den Eliminationsgleichungen	344
Durch succesive Substitution Schema	344
Unabhängige Bestimmung jeder einzelnen Unbekannten, 1. Schema.	348
2. Schema	350
§ 5. Bestimmung der Gewichte und der mittleren Fehler der Unbekannten	353
Schema.	360
§ 6. Behandlung der vorgelegten Aufgabe im Falle, dass die Auflösung der Normalgleichungen besonderen Unsicherheiten unterworfen ist	362
IV. Ableitung der Elemente aus einer beliebig grossen Zahl von Beobachtungen	371
<i>A. Bildung der Normalorte</i>	<i>371</i>
<i>B. Anschluss der Elemente an die Beobachtungen mit strenger Berücksichtigung der Principien der Methode der kleinsten Quadrate</i>	<i>382</i>
§ 1. Allgemeines	382
§ 2. Darstellung der Variationen der Beobachtungen durch die Variationen des Knotens, der Neigung, der Länge in der Bahn und des Radius vectors	383
§ 3. Entwicklung der Differentialquotienten von r und r nach den Elementen in Bahnen mit mässiger Excentricität.	386
Formelzusammenstellung für Planetenbahnen	390
Formelzusammenstellung für Bahnen periodischer Kometen kurzer Umlaufzeit	391

	Seite
§ 4. Entwicklung der Differentialquotienten von r und r' nach den Elementen in nahezu parabolischen Bahnen	396
Formelzusammenstellung.	405
§ 5. Die Differentialquotienten mit Rücksicht auf die Störungen	408
§ 6. Beispiele	410
Planetens-Beispiel 'Erato'	410
Beispiel für periodische Kometen Komet Winnecke III. 1819	416
Beispiel für nahezu parabolische Bahnen Komet I. 1866	418
§ 7. Bestimmung der Bahnelemente eines kleinen Planeten aus den Beobachtungen einer Opposition	428
Beispiel 'Hilda'	438
C. Anschluss der Elemente an die Beobachtungen mit genäherter Berücksichtigung der Principien der Methode der kleinsten Quadrate	464
§ 1. Die Lambert'sche Gleichung	464
§ 2. Ableitung der Elemente aus zwei heliocentrischen Orten	472
§ 3. Variation der Distanzen	480
Beispiel für einen Planeten Concordia	484
§ 4. Variation des Verhältnisses der Distanzen	487
a. Parabolische Elemente	487
Beispiel Komet I. 1847	489
β. Bestimmte Annahme über a	497
γ. Uebergang von der Parabel auf nahezu parabolische Bahnen Hornstein's Methode	498
Beispiel Komet I 1847	501
§ 5. Variation der Distanzen mit Benützung der Variation des Verhältnisses der Distanzen	507
V. Anhang	512
VI. Tafeln	513
Berichtigungen	634

Berichtigungen zum II. Bande von Oppolzer's Lehrbuch der Bahnbestimmung.

Seite 4. Zeile 4 von oben sind die Aufschriften der 2. und 3. Columnne zu vertauschen.

- 5. Formel 3) statt $\sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f(a + [i+1]w)$ lies: $\sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f^{2d+1} a + [i+1]w$

- 5. Formel 4) statt $\sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f(a + [i+\frac{1}{2}]w)$ lies: $\sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f^{2d} a + [i+\frac{1}{2}]w$

- 7. Zeile 4 von oben statt Combination lies: Klasse

- 9. - 4 von unten statt $\sum_{p=1}^{p=d+1} (-1)^{d+1-p} \frac{n^{2p-1}}{2(2d-p+2)} C \{ 2^2, 4^2, \dots, 2d^2 \}$

lies: $\sum_{p=1}^{p=d+1} (-1)^{d+1-p} \frac{n^{2p-1}}{2(2d-p)+2} C \{ 2^2, 4^2, \dots, 2d^2 \}$

- 11. - 4 von oben statt $1^2, 3^2, \dots$ lies: $1^2, 3^2, \dots$

- 18. - 2 von unten statt $C^3 \{ 1 \dots 7^2 \}$ lies: $C^3 \{ 1^2 \dots 7^2 \}$

- 19. in $N_2^{10}(n)$ statt $9 \cdot 10 n^2$ lies $9 \cdot 10 n^8$

- 19. in Formel 10) statt $w^2 \frac{df(l)}{dl^2} =$ lies: $w^2 \frac{d^2 f l}{dl^2} =$

- 20. in $M_2^9(m)$ statt $6 \cdot 7 m^2$ lies: $6 \cdot 7 m^4$

- 34. Zeile 2 von oben statt $\frac{1}{w} \int_a^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(a + [i+n]w) dl$ lies: $\frac{1}{w} \int_a^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(a + [i+n]w) dl$

- 35. in den Formeln 11) statt $P \binom{2d-1}{1}$ lies: P_1^{2d-1}

- 35. in den Formeln 11) statt $Q \binom{2d-1}{1}$ lies: Q_1^{2d-1}

- 38. Zeile 11 von oben statt »von der oberen« lies: »von jenem der oberen«.

- 39. - 4 von unten statt $\int f(a + [i+n]w) dl$ lies: $\int f(a + [i+n]w) dl$

- 43. - 4 von oben statt $m \pm < \frac{1}{4}$ lies: $m < \pm \frac{1}{4}$

- 44. in der Integraltafel sollen die ersten Werthe der absteigenden Differenzen sein: $-649.73. + 38.32. + 12.36, -4.28, + 0.47$

- Seite 45. Zeile 16 von unten statt $S_g = + 646.147$ lies: $S_g = + 946.147$
- 46. - 14 von unten statt $mS_g = + 94.156$ lies: $mS_g = + 94.165$
- 46. - 13 von unten statt $+ 26529.80$ lies: $+ 26529.81$
- 53. - 7 von unten statt $f''a$ lies: $f''(a)$
- 54. Formeln 31) statt $P \binom{2d-1}{1}; Q \binom{2d-1}{1}; P \binom{2d-2}{2}; Q \binom{2d-2}{2}$
lies: $P_1^{2d-1}; Q_1^{2d-1}; P_2^{2d-2}; Q_2^{2d-2}$
- 54. Zeile 11 von unten statt (pag. 45) lies: (pag. 49)
- 60. - 9 von oben statt P_0^2 lies: P_2^0
- 63. - 8 von unten statt »gebildete Summationsreihe« lies: »gebildeten Summationsreihen«.
- 64. Zeile 14 von oben statt $-\frac{1}{24} f''(a + [i + \frac{1}{2}] w)$
lies: $-\frac{1}{24} f'(a + [i + \frac{1}{2}] w)$
- 71. - 10 von unten statt $\frac{x_1}{r_1}$ lies: $\frac{x_1}{r_1^3}$
- 76. - 11 von unten statt $f = \frac{a^2 + a^3 + a^4}{1 + a}$ lies: $f = 2 \frac{a^2 + a^3 + a^4}{1 + a}$
- 78. - 2 von unten statt $\frac{k^2}{r^3}$ lies: $\frac{k^2}{r_0^3}$
- 79. in den Formeln 12) ist statt $\frac{1}{12} \frac{d^2 \xi}{dt^2}$ zu setzen: $\frac{1}{12} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{1}{12} \Sigma (X)$
- 79. in den Formeln 12) ist statt $\frac{1}{12} \frac{d^2 \eta}{dt^2}$ zu setzen: $\frac{1}{12} \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \frac{1}{12} \Sigma (Y)$
- 79. in den Formeln 12) ist statt $\frac{1}{12} \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$ zu setzen: $\frac{1}{12} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \frac{1}{12} \Sigma (Z)$
- 83. Zeile 3 von unten statt $-\sin Q \sin i$ lies: $-\sin Q \cos i$
- 88. - 6 von unten statt »vergleichende« lies: »vergleichbare«
- 89. - 15 von oben am Schlusse statt $\mathcal{A}(p)$ lies: $\mathcal{A}(\sqrt{p})$
- 89. - 7 von unten statt $\left(\frac{\sqrt{p_0} + \mathcal{A}(\sqrt{p})}{k} \right)$ lies: $\left(\frac{\sqrt{p_0} + \mathcal{A}(\sqrt{p})}{k} \right)$
- 99. - 18 von oben statt $\sin 1''$ lies: $\sin 1''$
- 100. - 12 von oben statt »vortesslt« lies: »vorstellt«
- 100. 2. Zeile in Formel I statt $-\sin Q \cos i_0$ lies: $-\sin Q_0 \cos i_0$
- 105. Zeile 4 von oben statt 6.8 lies: 6''8
- 106. - 17 von unten statt $-\sin Q \sin i$ lies: $-\sin Q \cos i$
- 106. - 5 von unten statt $\sin Q \cos i$ lies: $-\sin Q \cos i$
- 108. - 13 von oben statt $\sin \vartheta$ lies: $\varrho \sin \vartheta$
- 108. in Formel IV) ist überall statt ω . w zu setzen
- 108. Zeile 2 von unten statt $+\frac{17}{5760}$ lies: $-\frac{17}{5760}$
- 109. in Formel V) ist in den ersten Gliedern statt f zu setzen: f''
- 111. Zeile 9 von oben statt 2.308069 lies: 2.328069
- 111. - 10 von oben statt 2.728784. 2.128385 lies: 2.728784. 2.028385
- 111. - 13 von oben statt 0.563293 lies: 9.563293

- Seite 112, in der f Columnne, Zeile 2 von oben statt $- 257.64$ lies: $- 257.61$
- 112, in der u Columnne, Zeile 4 von oben statt $+ 10.78$ lies: $+ 10.87$
- 115, Zeile 16, 17 u. 18 von oben in den Gleichungen für X_2 , Y_2 , Z_2 erhalten die Glieder rechts vom $=$ das negative Vorzeichen.
- 130, Zeile 9 von unten statt $(wk): \sqrt{p_0}$ lies: $(wk) \cdot \sqrt{p_0}$
- 133, - 15 von oben statt $s - \frac{1}{2} [\Omega + \Omega_0]$ lies: $S - \frac{1}{2} [\Omega + \Omega_0]$
- 136, - 12 von unten statt $9_n 7834120$ lies: $9_n 7835120$
- 137, - 13 von oben statt 9.0525751 lies: 0.0525751
- 138, - 5 von unten statt $0.604\ 0513$ und $\sin \varphi \sin E$ lies: 9.6040513 und $e'' \sin E$
- 146, Zeile 3 von unten im 3. Gliede links vom $=$ statt $\frac{k^2}{r^2}$ lies: $\frac{k^2}{r^2}$
- 148, in den Formeln IX in der 3. Gleichung statt $\frac{d^2 z}{dt}$ lies: $\frac{d^2 z}{dt^2}$
- 151 ist in dem Differenzschema in der Mitte der Seite überall statt ω , w zu setzen.
- 151 ist in Formel 1 in den Gleichungen für B und C , statt ω , w zu setzen. ausserdem muss die Gleichung für D lauten: $D = \frac{1}{6} f^{111} (a - \frac{1}{2} w$
- 156, Zeile 14 von oben statt W lies: W_1
- 169, in Formeln 25 ist in der ersten Gleichung links vom $=$ statt \sqrt{p} zu setzen: $k \sqrt{p}$
- 170, 4. Zeile der Formeln II) statt r lies: (r)
- 174, Zeile 4 von oben statt $\log 2 k 10^7 \sqrt{p_0}$ lies: $\log 2 (wk) 10^7 \sqrt{p_0}$
- 174, - 5 von oben statt $\log 2 k \sqrt{p_0}$ lies: $\log 2 (wk) \sqrt{p_0}$
- 177, - 6 von unten statt $+\frac{1}{2} \left[\right.$ lies: $-\frac{1}{2} \left[\right.$
- 180, - 10 von unten ist für γ in der Columnne $\mathcal{A}\omega$ statt $- 0.08$ zu setzen: $- 0.07$
- 181, Zeile 5 von oben fehlt $=$ nach $1 + \nu$
- 206, - 9 von oben statt $+\frac{17}{2920}$ lies: $+\frac{17}{1920}$
- 209, - 4 von oben statt Formel lies: Formeln
- 234, - 2 von oben statt 1871 lies: 1872
- 234, - 4 von oben statt 1872 lies: 1873
- 234, - 10 von oben statt $f(a + [i - \frac{1}{2}] w)$ lies: ${}^1 f(a + [i - \frac{1}{2}] w)$
- 234, - 18 von oben statt 1871 lies: 1872
- 234, - 16 von unten statt $f(a + [i - \frac{1}{2}] w)$ lies: ${}^1 f(a + [i - \frac{1}{2}] w)$
- 234, - 8 von unten statt 1871 lies: 1872
- 235, - 8 von unten statt $3 kw =$ lies: $\log 3 kw =$
- 240, - 21 von unten, Columnne Febr. 24 statt 8.942582 lies: 8.942452
- 240, - 17 von unten, Columnne Febr. 24 statt $9_n 424579$ lies: $9_n 424449$
- 240, - 14 von unten, Columnne Febr. 24 statt 9.420233 lies: 9.420103
- 240, - 13 von unten, Columnne Febr. 24 statt 9.983869 lies: 9.983874

- Seite 240, Zeile 8 von unten, Columnne Febr. 24 statt $o_n 842260$ lies: $o_n 842265$
- 240, - 7 von unten statt $8_n 917077$ lies: $8_n 916947$
 - 256, - 2 von oben statt »die Folge« lies: »in Folge«
 - 278, - 10 von oben fehlen die Schlussworte, »ersetzt und $F' - J$ mit $-F' (J)$ vertauscht, was für die folgende Schlussfolgerung erlaubt ist:«
 - 283, Zeile 17 von unten statt $\frac{y}{l}$ lies: $\frac{l}{y}$
 - 293, Formel 3) im Nenner statt $1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt{\frac{k}{2}}$ lies: $1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt{\frac{k}{2}}$
 - 303, Zeile 10 von unten statt und lies: und
 - 304, - 4 von unten statt $\pm 0''962$ lies: $\pm 0''965$
 - 307, - 12 von unten statt Gleichung 1) lies: Gleichung 2
 - 310, - 10 von oben statt das lies: dass
 - 310, Formel 3) soll stehen $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$
 - 326 fehlt in Gleichung 15) links vom $=$ die Schlussklammer }
 - 326, Zeile 13 von unten statt »vermindert« lies: »vermehrt«
 - 327 fehlt in 17) in dem Ausdrücke für 2 S die Schlussklammer }
 - 327, Zeile 19 von oben statt (pag. 326) lies: (pag. 325)
 - 328, - 5 von oben in der Columnne Nr. statt 1 lies: 2
 - 328, - 1 von unten statt $[an] -$ lies: $[an] =$
 - 329, - 19 von oben statt anzusehen lies: anzusetzen
 - 332, - 16 von oben statt nan lies: man
 - 344, - 6 des Schemas statt $y[ab]$ lies: $-y[ab]$
 - 345 sollen die Zahlen im Beispiele, um mit dem Schema der vorhergehenden Seite in Uebereinstimmung zu sein. in folgender Weise versetzt werden:

+ 0.07344	- 1.21719	+ 1.57095	+ 1.26957	- 0.53990
+ 0.00090	0.00000	- 0.00003	- 0.00002	0.00000
	- 0.00252	+ 0.00283	+ 0.00021	+ 0.02155
		+ 0.24796	- 0.09011	+ 0.82334
			- 0.04276	+ 1.28121
				+ 1.52297
 - 348. Zeile 15 von unten statt $-\frac{cf2}{[cf2]}_2$ lies: $-\frac{cf2}{[cf2]} B_2$
 - 350, - 3 von oben statt $\frac{[fn5]}{[ff1]} E_5$ lies: $\frac{[fn5]}{[ff5]} E_5$
 - 353. im Titel statt § 3 lies: § 5
 - 353. Zeile 5 von unten statt pag. 317 lies pag. 316
 - 357, - 11 von oben statt $[nn]$ lies: $[nnu]$
 - 357, - 8 von unten statt pag. 337 lies: pag. 316 Gl. 7
 - 361, - 19 von oben statt Formel 23 (pag. 360) lies: Formel 22) (pag. 359)
 - 369, - 14 von oben statt $[u]$ lies: u
 - 381, - 8 von oben statt $+ 43^m 9^s$ lies: $+ 43^m 57^s$

Seite 381, Zeile 13 von oben statt — 1.0 lies: — 3.0

- 385. Formel 4) statt $\frac{\partial \delta}{\sin \delta \Omega}$ lies: $\frac{\partial \delta}{\sin i \delta \Omega}$

- 388, Zeile 4 von oben statt vorsetzen lies: voraussetzen

- 390, - 12 fehlen die Schlussworte: wobei zu beachten ist, dass sich die Coordinaten α und δ auf dieselbe Fundamentalebene beziehen müssen, auf welche die Grössen Ω , i und ω bezogen sind

- 392, Zeile 3 von unten statt: $\frac{\cos \frac{1}{2} (\pi - \pi_0)}{\cos \frac{1}{2} (\pi - \pi_0)} \delta \Psi$ lies: $\frac{\cos \frac{1}{2} (\pi + \pi_0)}{\cos \frac{1}{2} (\pi - \pi_0)} \delta \Psi$

- 402, Formel 21 muss bei dem letzten Summenzeichen statt $\sum_{n=2}^{n=\infty}$ stehen: $\sum_{n=2}^{n=\infty}$

- 402, Zeile 8 von unten statt $1 - i^n$ lies: $i - i^n$

- 405, - 12 von oben statt α lies: ω

- 412, - 7 und 6 von unten sind die Accente bei i und ω zu streichen.

- 412, - 6 von unten nach $\omega = 33^0 56' 26''$ einzuschalten: (Aequinoctium 1860.0).

- 415, Zeile 6 von unten statt »erwähnen« lies: »zu erwähnen«.

- 427. in $\tilde{\gamma}$ statt $\cos \delta d\alpha$ und $d\delta$ lies: $\cos \delta \delta \alpha$ und $\delta \delta$

- 430. Zeile 12 von unten statt $\left(\frac{d^2 r_0}{dt} \right)$ lies: $\left(\frac{d^2 r_0}{dt^2} \right)$

- 432. Formel 16) statt $\frac{\partial A_3}{\partial \xi_0}$ lies: $\frac{\partial A_3}{\partial \xi_0}$

- 432, - 16) ist in $\frac{\partial A_4}{\partial x_0}$ rechter Hand ξ_0 mit x_0 zu vertauschen

- 435, Zeile 8 von unten statt »Neigung des Aequators« lies: »Neigung in Bezug auf den Aequator«

- 436. Formel 28. 2. Zeile statt $\cos A \cos J. Z$ lies: $\cos A \sin J. Z$

- 441. Zeile 7 von unten in U' statt $52''30$ lies: $52''20$

- 444, - 11 von oben in $\log \gamma_1$ statt 6.26202 lies: 6.26402

- 444, - 17 von oben ist zu setzen: $\log \{ \dots \} 8.14680$
 $\log \alpha_1 5.81405$

- 447, - 4 von unten statt $z_0 \partial \beta : \partial t_0$ lies: $z_0 \partial \alpha : \partial t_0$

- 453. - 21 von unten statt $+ 0.0049$ lies: $+ 0.00049$

- 453. - 20 von unten statt 6.07276 lies: 0.07276

- 454, - 1 von oben statt $6_n 1960 \partial_0$ lies: $6_n 1960 \partial \xi_0$

- 454, - 15 von unten sind die Worte »und addirt dieselben« zu streichen.

- 456. - 17 von oben 2. Columnne statt $8_n 4514142$ lies: $8_n 4514124$

- 456, - 19 von oben 2. Columnne statt $6_n 7341285$ lies: $9_n 7341285$

- 456. - 17 von unten statt i lies: i

- 457, - 6 von oben statt $r : p$ lies: $p : r$

- 458, - 2 von unten statt ∂y lies: ∂t

- 459, - 4 von oben. Coëfficient von ∂x in f_6 statt $+ 67.5$ lies: $+ 67.0$

- 460, - 7 von oben statt Systeme. lies: , Systeme

- 461, - 15 von oben in i statt $+ 4.2377345$ lies: $+ 4.2375345$

Seite 465, Zeile 7 von oben statt pag. 48 lies: pag. 47

- 465 ist in Formel 4) statt $a(1 - \cos E) + a(1 - \cos E')$

zu setzen: $a(1 - e \cos E) + a(1 - e \cos E')$

- 468, Zeile 17 von oben statt -0.25 und 0.25 lies: -0.24 und $+0.24$

- 468, - 18 von oben statt Parabel lies: Ellipse

- 470, - 11 von unten statt 9.9999446 lies: 8.9999446

- 471, - 2 von unten statt Zeichen lies: Zeichen

- 480, - 8 von oben statt (I pag. 146 § 12) lies: (I pag. 146 § 11)

- 483, Formel C_1 erste Zeile statt $\left(\frac{d\lambda_1}{\delta y}\right)$ lies: $\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\right)$

- 486, Zeile 8 von oben statt $\mathcal{A}y$ lies: $\mathcal{A}y$

- 489, - 3 von oben statt $\log M + \delta x$ lies: $\log M + \mathcal{A}x$

- 500, - 7 von oben in den beiden Nennern statt dy lies: δy

- 501, - 5 von oben statt znnächst lies: zunächst.

- 508, - 17 von unten statt $s^2 = r^2 + r'^2 - rr' \cos 2f$

lies: $s^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos 2f$

- 633, - 3 von unten statt \ominus lies: \ominus

Berichtigungen zum II. Bande von Oppolzer's Lehrbuch der Bahnbestimmung.

Seite 4. Zeile 4 von oben sind die Aufschriften der 2. und 3. Columnne zu vertauschen.

- 5. Formel 3) statt $\sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f(a + [i+1]w)$ lies: $\sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f(a + [i+1]w^{2d+1})$

- 5. Formel 4) statt $\sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f(a + [i+\frac{1}{2}]w)$ lies: $\sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f(a + [i+\frac{1}{2}]w^{2d})$

- 7. Zeile 4 von oben statt Combination lies: Klasse

- 9. - 4 von unten statt $\sum_{p=1}^{p=d+1} (-1)^{d+1-p} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)+2}} C\{2^2, 4^2, \dots, 2d^2\}$

lies: $\sum_{p=1}^{p=d+1} (-1)^{d+1-p} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)+2}} C\{2^2, 4^2, \dots, 2d^2\}$

- 11,* - 4 von oben statt $1^2, 3^2, \dots$ lies: $1^2, 3^2, \dots$

- 18. - 2 von unten statt $C^3\{1^2 \dots 7^2\}$ lies: $C^3\{1^2 \dots 7^2\}$

- 19. in $N_2^{10}(n)$ statt $9 \cdot 10 n^2$ lies $9 \cdot 10 n^5$

- 19. in Formel 10) statt $w^2 \frac{df(l)}{dl^2} =$ lies: $w^2 \frac{d^2 f(l)}{dl^2} =$

- 20. in $M_2^9(m)$ statt $6 \cdot 7 m^2$ lies: $6 \cdot 7 m^4$

- 34. Zeile 2 von oben statt $\frac{1}{w} \int_a^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(a + [i+n]w) dl$ lies: $\frac{1}{w} \int_a^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(a + [i+n]w) dl$

- 35. in den Formeln 11) statt $P \binom{2d-1}{1}$ lies: P_1^{2d-1}

- 35. in den Formeln 11) statt $Q \binom{2d-1}{1}$ lies: Q_1^{2d-1}

- 38. Zeile 11 von oben statt »von der oberen« lies: »von jenem der oberen«.

- 39. - 4 von unten statt $\int f(a + [i+n]w) dl$ lies: $\int f(a + [i+n]w) dl$

- 43. - 4 von oben statt $m \pm < \frac{1}{4}$ lies: $m < \pm \frac{1}{4}$

- 44. in der Integraltafel sollen die ersten Werthe der absteigenden Differenzen sein: $-649.73, +38.32, +12.36, -4.28, +0.47$

- Seite 45, Zeile 16 von unten statt $S_g = + 646.147$ lies: $S_g = + 946.147$
- 46, - 14 von unten statt $mS_g = + 94.156$ lies: $mS_g = + 94.165$
- 46, - 13 von unten statt $+ 26529.80$ lies: $+ 26529.81$
- 53, - 7 von unten statt $f'' a$ lies: $f'' (a$
- 54, Formeln 31) statt $P \binom{2d-1}{1}; Q \binom{2d-1}{1}; P \binom{2d-2}{2}; Q \binom{2d-2}{2}$
lies: $P_1^{2d-1}; Q_1^{2d-1}; P_2^{2d-2}; Q_2^{2d-2}$
- 54, Zeile 11 von unten statt (pag. 45) lies: (pag. 49)
- 60, - 9 von oben statt P_0^2 lies: P_2^0
- 63, - 8 von unten statt »gebildete Summationsreihe« lies: »gebildeten Summationsreihen«.
- 64, Zeile 14 von oben statt $-\frac{1}{24} \overset{\bullet}{f}''(a + [i + \frac{1}{2}] w$
lies: $-\frac{1}{24} \overset{\bullet}{f}'(a + [i + \frac{1}{2}] w)$
- 71, - 10 von unten statt $\frac{x_1}{r_1}$ lies: $\frac{x_1}{r_1^3}$
- 76, - 11 von unten statt $f = \frac{\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4}{1 + \alpha}$ lies: $f = 2 \frac{\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4}{1 + \alpha}$
- 78, - 2 von unten statt $\frac{k^2}{r^3}$ lies: $\frac{k^2}{r_0^3}$
- 79, in den Formeln 12) ist statt $\frac{1}{12} \frac{d^2 \xi}{dt^2}$ zu setzen: $\frac{1}{12} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{1}{12} \Sigma (X)$
- 79, in den Formeln 12) ist statt $\frac{1}{12} \frac{d^2 \eta}{dt^2}$ zu setzen: $\frac{1}{12} \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \frac{1}{12} \Sigma (Y)$
- 79, in den Formeln 12) ist statt $\frac{1}{12} \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$ zu setzen: $\frac{1}{12} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \frac{1}{12} \Sigma (Z)$
- 83, Zeile 3 von unten statt $-\sin \varnothing \sin i$ lies: $-\sin \varnothing \cos i$
- 88, - 6 von unten statt »vergleichende« lies: »vergleichbare«
- 89, - 15 von oben am Schlusse statt $\mathcal{A}(p)$ lies: $\mathcal{A}(\sqrt{p})$
- 89, - 7 von unten statt $\left(\frac{\sqrt{p_0} + \mathcal{A}(\sqrt{p})}{k} \right)$ lies: $\left(\frac{\sqrt{p_0} + \mathcal{A}(\sqrt{p})}{k} \right)$
- 99, - 18 von oben statt $\sin 1''$ lies: $\sin 1''$
- 100, - 12 von oben statt »vortesllt« lies: »vorstellt«
- 100, 2. Zeile in Formel I) statt $-\sin \varnothing \cos i_0$ lies: $-\sin \varnothing_0 \cos i_0$
- 105, Zeile 4 von oben statt 6.8 lies: 6''8
- 106, - 17 von unten statt $-\sin \varnothing \sin i$ lies: $-\sin \varnothing \cos i$
- 106, - 5 von unten statt $\sin \varnothing \cos i$ lies: $-\sin \varnothing \cos i$
- 108, - 13 von oben statt $\sin \vartheta$ lies: $q \sin \vartheta$
- 108, in Formel IV) ist überall statt ω, w zu setzen
- 108, Zeile 2 von unten statt $+\frac{17}{5760}$ lies: $-\frac{17}{5760}$
- 109, in Formel V) ist in den ersten Gliedern statt f zu setzen: $\overset{''}{f}$
- 111, Zeile 9 von oben statt 2.308069 lies: 2.328069
- 111, - 10 von oben statt 2.728784, 2.128385 lies: $2_n 728784, 2_n 028385$
- 111, - 13 von oben statt 0.563293 lies: 9.563293

- Seite 112, in der f Columnne, Zeile 2 von oben statt -257.64 lies -257.61
- 112, in der u Columnne, Zeile 4 von oben statt $+10.78$ lies: $+10.87$
- 115, Zeile 16, 17 u. 18 von oben in den Gleichungen für N_2 , Y_2 , Z_2 erhalten die Glieder rechts vom $=$ das negative Vorzeichen.
- 130, Zeile 9 von unten statt $(wk): \sqrt{p_0}$ lies $(wk) \cdot \sqrt{p_0}$
- 133, - 15 von oben statt $s - \frac{1}{2} (\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_0)$ lies: $S - \frac{1}{2} (\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_0)$
- 136, - 12 von unten statt $9_n 7834120$ lies: $9_n 7835120$
- 137, - 13 von oben statt 9.0525751 lies: 0.0525751
- 138, - 5 von unten statt $0.604\ 0513$ und $\sin q \sin E$ lies 9.6040513 und $e'' \sin E$
- 146, Zeile 3 von unten im 3. Gliede links vom $=$ statt $\frac{k^2}{r^2}$ lies: $\frac{k^2}{r^2}$
- 148, in den Formeln IX in der 3. Gleichung statt $\frac{d^2 z}{dt}$ lies: $\frac{d^2 z}{dt^2}$
- 151 ist in dem Differenzschema in der Mitte der Seite überall statt ω , w zu setzen.
- 151 ist in Formel 1 in den Gleichungen für B und C statt ω , w zu setzen. ausserdem muss die Gleichung für D lauten: $D = \frac{1}{6} f''' (a - \frac{1}{2} w)$
- 156, Zeile 14 von oben statt W lies: W_1
- 169, in Formeln 25 ist in der ersten Gleichung links vom $=$ statt \sqrt{p} zu setzen: $k \sqrt{p}$
- 170, 4. Zeile der Formeln II, statt r lies: r
- 174, Zeile 4 von oben statt $\log 2 k 10^7 \sqrt{p_0}$ lies: $\log 2 wk 10^7 \sqrt{p_0}$
- 174, - 5 von oben statt $\log 2 k \sqrt{p_0}$ lies: $\log 2 wk \sqrt{p_0}$
- 177, - 6 von unten statt $+\frac{1}{2} \left[\right.$ lies: $-\frac{1}{2} \left[\right.$
- 180, - 10 von unten ist für γ in der Columnne $\mathcal{A}\omega$ statt -0.08 zu setzen -0.07
- 181, Zeile 5 von oben fehlt $=$ nach $1 + v$
- 206, - 9 von oben statt $+\frac{17}{2920}$ lies: $+\frac{17}{1920}$
- 209, - 4 von oben statt Formel lies: Formeln
- 234, - 2 von oben statt 1871 lies: 1872
- 234, - 4 von oben statt 1872 lies: 1873
- 234, - 10 von oben statt $f(a + [i - \frac{1}{2}]w)$ lies $f'a + [i - \frac{1}{2}]w$
- 234, - 18 von oben statt 1871 lies: 1872
- 234, - 16 von unten statt $f'a + [i - \frac{1}{2}]w$ lies: $f'a + [i - \frac{1}{2}]w$
- 234, - 8 von unten statt 1871 lies: 1872
- 235, - 8 von unten statt $3kw =$ lies: $\log 3kw =$
- 240, - 21 von unten, Columnne Febr. 24 statt 8.942582 lies: 8.942452
- 240, - 17 von unten, Columnne Febr. 24 statt $9_n 424579$ lies: $9_n 424449$
- 240, - 14 von unten, Columnne Febr. 24 statt 9.420233 lies: 9.420103
- 240, - 13 von unten, Columnne Febr. 24 statt 9.983869 lies: 9.983874

- Seite 240, Zeile 8 von unten, Columnne Febr. 24 statt $0_n842260$ lies: $0_n842265$
- 240, - 7 von unten statt $8_n917077$ lies: $8_n916947$
 - 256, - 2 von oben statt »die Folge« lies: »in Folge«
 - 278, - 10 von oben fehlen die Schlussworte, »ersetzt und F' ($-A$) mit $-F''(A)$ vertauscht, was für die folgende Schlussfolgerung erlaubt ist:«
 - 283, Zeile 17 von unten statt $\frac{y}{l}$ lies: $\frac{l}{y}$
 - 293, Formel 3) im Nenner statt $1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt{\frac{k}{2}}$ lies: $1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt{\frac{k}{2}}$
 - 303, Zeile 10 von unten statt nnd lies: und
 - 304, - 4 von unten statt $\pm 0''962$ lies: $\pm 0''965$
 - 307, - 12 von unten statt Gleichung 1) lies: Gleichung 2)
 - 310, - 10 von oben statt das lies: dass
 - 310, Formel 3) soll stehen $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$
 - 326 fehlt in Gleichung 15) links vom $=$ die Schlussklammer }
 - 326, Zeile 13 von unten statt »vermindert« lies: »vermehrt«
 - 327 fehlt in 17) in dem Ausdrucke für 2 S die Schlussklammer }
 - 327, Zeile 19 von oben statt (pag. 326) lies: (pag. 325)
 - 328, - 5 von oben in der Columnne Nr. statt 1 lies: 2
 - 328, - 1 von unten statt $[an] -$ lies: $[an] =$
 - 329, - 19 von oben statt anzusehen lies: anzusetzen
 - 332, - 16 von oben statt nan lies: man
 - 344, - 6 des Schemas statt $y[ab]$ lies: $-y[ab]$
 - 345 sollen die Zahlen im Beispiele, um mit dem Schema der vorübergehenden Seite in Uebereinstimmung zu sein, in folgender Weise versetzt werden:

+ 0.07344	- 1.21719	+ 1.57095	+ 1.26957	- 0.53990
+ 0.00090	0.00000	- 0.00003	- 0.00002	0.00000
	- 0.00252	+ 0.00283	+ 0.00021	+ 0.02155
		+ 0.24796	- 0.09011	+ 0.82334
			- 0.04276	+ 1.28121
				+ 1.52297
 - 348, Zeile 15 von unten statt $-\frac{[cf2]}{[cc2]}_2$ lies: $-\frac{[cf2]}{[cc2]} B_2$
 - 350, - 3 von oben statt $\frac{[fn5]}{[ff1]} E_5$ lies: $\frac{[fn5]}{[ff5]} E_5$
 - 353, im Titel statt § 3 lies: § 5
 - 353, Zeile 5 von unten statt pag. 317 lies pag. 316
 - 357, - 11 von oben statt $[nn]$ lies: $[nnn]$
 - 357, - 8 von unten statt pag. 337 lies: pag. 316 Gl. 7
 - 361, - 19 von oben statt Formel 23 (pag. 360) lies: Formel 22) (pag. 359)
 - 369, - 14 von oben statt (u) lies: u
 - 381, - 8 von oben statt $+ 43^m9^s$ lies: $+ 43^m57^s$

Seite 381, Zeile 13 von oben statt -1.0 lies: -3.0

- 385, Formel 4) statt $\frac{\partial \delta}{\sin \partial \Omega}$ lies: $\frac{\partial \delta}{\sin i \partial \Omega}$
- 388, Zeile 4 von oben statt vorsetzen lies: voraussetzen
- 390, - 12 fehlen die Schlussworte: wobei zu beachten ist, dass sich die Coordinaten α und δ auf dieselbe Fundamentalebene beziehen müssen. auf welche die Grössen Ω , i und ω bezogen sind
- 392, Zeile 3 von unten statt: $\frac{\cos \frac{1}{2}(\pi - \pi_0)}{\cos \frac{1}{2}(\pi - \pi_0)} \partial \Psi$ lies: $\frac{\cos \frac{1}{2}(\pi + \pi_0)}{\cos \frac{1}{2}(\pi - \pi_0)} \partial \Psi$
- 402, Formel 21 muss bei dem letzten Summenzeichen statt $\sum_{n=2}^{n=\infty}$ stehen: $\sum_{n=2}^{n=\infty}$
- 402, Zeile 8 von unten statt $(-1)^n$ lies: $(-1)^n$
- 405, - 12 von oben statt α lies: ω
- 412, - 7 und 6 von unten sind die Accente bei i und ω zu streichen.
- 412, - 6 von unten nach $\omega = 33^\circ 56' 26''$ einzuschalten: (Aequinoctium 1860.0).
- 415, Zeile 6 von unten statt »erwähuen« lies: »zu erwähnen«.
- 427, in ξ) statt $\cos \delta d\alpha$ und $d\delta$ lies: $\cos \delta \partial \alpha$ und $\partial \delta$
- 430, Zeile 12 von unten statt $\left(\frac{d^2 r_0}{d t} \right)$ lies: $\left(\frac{d^2 r_0}{d t^2} \right)$
- 432, Formel 16) statt $\frac{\partial A^3}{\partial \xi_0}$ lies: $\frac{\partial A_3}{\partial \xi_0}$
- 432, - 16) ist in $\frac{\partial A_4}{\partial x_0}$ rechter Hand ξ_0 mit x_0 zu vertauschen
- 435, Zeile 8 von unten statt »Neigung des Aequators« lies: »Neigung in Bezug auf den Aequator«
- 436, Formel 28, 2. Zeile statt $\cos A \cos J. Z$ lies: $\cos A \sin J. Z$
- 441, Zeile 7 von unten in C' statt $52''30$ lies: $52''20$
- 444, - 11 von oben in $\log \gamma_4$ statt 6.26202 lies: 6.26402
- 444, - 17 von oben ist zu setzen: $\log \{ \dots \} 8.14680$
 $\log \alpha_4 5.81405$
- 447, - 4 von unten statt $z_0 (\partial b : \partial \eta_0)$ lies: $z_0 (\partial a : \partial \eta_0)$
- 453, - 21 von unten statt $+0.0049$ lies: $+0.00049$
- 453, - 20 von unten statt 6.07276 lies: 0.07276
- 454, - 1 von oben statt $6_n 1960 \partial_0$ lies: $6_n 1960 \partial \xi_0$
- 454, - 15 von unten sind die Worte »und addirt dieselben« zu streichen.
- 456, - 17 von oben 2. Columnne statt $8_{n4514142}$ lies: $8_{n4514124}$
- 456, - 19 von oben 2. Columnne statt $6_{n7341285}$ lies: $9_{n7341285}$
- 456, - 17 von unten statt i lies: i
- 457, - 6 von oben statt $r : p$ lies: $p : r$
- 458, - 2 von unten statt ∂y lies: $\partial \eta$
- 459, - 4 von oben, Coëfficient von ∂x in f_6 statt $+67.5$ lies: $+67.0$
- 460, - 7 von oben statt Systeme. lies: . Systeme
- 461, - 15 von oben in (1) statt $+4.2377345$ lies: $+4.2375345$

Seite 465, Zeile 7 von oben statt pag. 48 lies: pag. 47

- 465 ist in Formel 4) statt $a(1 - \cos E) + a(1 - \cos E')$

zu setzen: $a(1 - e \cos E) + a(1 - e \cos E')$

- 468, Zeile 17 von oben statt -0.25 und 0.25 lies: -0.24 und $+0.24$

- 468, - 18 von oben statt Parabel lies: Ellipse

- 470, - 11 von unten statt 9.9999446 lies: 8.9999446

- 471, - 2 von unten statt Zeichen lies: Zeichen

- 480, - 8 von oben statt (I pag. 146 § 12) lies: (I pag. 146 § 11)

- 483, Formel C) erste Zeile statt $\left(\frac{d\lambda_1}{dy}\right)$ lies: $\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\right)$

- 486, Zeile 8 von oben statt $\mathcal{A}y$ lies: $\mathcal{A}y$

- 489, - 3 von oben statt $\log M + \partial x$ lies: $\log M + \mathcal{A}x$

- 500, - 7 von oben in den beiden Nennern statt dy lies: ∂y

- 501, - 5 von oben statt zunächst lies: zunächst.

- 508, - 17 von unten statt $s^2 = r^2 + r'^2 - rr' \cos 2f$

lies: $s^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos 2f$

- 633, - 3 von unten statt \ominus lies: \ominus

Ueber die numerische Differentiation und Integration.

§ 1. Allgemeine Uebersicht über das vorgelegte Problem und über die dabei auftretenden Bezeichnungen.

Häufig tritt bei der numerischen Lösung mechanischer Probleme der Fall auf, dass man zu einer Funktion, von der eine Reihe numerischer Werthe durch vorausgehende Operationen ermittelt wurde, die numerischen Werthe der Differentialquotienten und der Integrale für bestimmte Grenzen für diese Funktion zu bestimmen hat.

Ist der analytische Ausdruck dieser Funktion bekannt, so wird es sich wohl im Allgemeinen empfehlen, vorerst durch analytische Operationen die Formen für die Differentialquotienten und die Integrale herzustellen und die so erlangten Ausdrücke der numerischen Operation zu unterziehen; unter Umständen kann aber dieses Verfahren mit grossen Schwierigkeiten verknüpft sein und besonders die analytische Auswerthung der Integrale stösst bisweilen auf fast unüberwindliche Schwierigkeiten. In diesen Fällen wird aber das hier zur Auseinandersetzung gelangende Verfahren der numerischen Differentiation und Integration häufig auf sehr bequeme Weise zum Ziele führen, und wird in jenen Fällen, wo der analytische Ausdruck der Funktion unbekannt ist und dieselbe nur durch eine Reihe von Werthen, denen diese Function genügt, definirt erscheint, nahezu der einzige Ausweg sein, um das verlangte Problem zu lösen.

Ohne vorerst auf die Methode Rücksicht zu nehmen, nach der die numerischen Werthe der vorgelegten Funktion ermittelt sind, setze ich voraus, dieselbe sei durch eine Reihe von numerischen Werthen bestimmt, die zu einem durch das Problem bedingten Argument, welches also als die unabhängig Variable zu betrachten ist, gehören. Es ist klar, dass eine Funktion durch eine beschränkte Zahl von bestimmten Werthen niemals völlig genau definirt sein kann; je mehr Werthe im Allgemeinen aber vorhanden sind, um so sicherer wird man den Gang der Funktion zu beurtheilen im Stande sein. Fasst man diese Betrachtungen geometrisch auf und stellt sich den Gang der Funktion durch eine Curve vor, zu der das Argument (die Variable als Abszisse, der Werth der Funktion als Ordinate

erscheint, so ist es sofort klar, dass der Verlauf der Curve um so genauer bekannt sein wird, je mehr Punkte in einem gegebenen Stücke der Curve bestimmt erscheinen. Diese allgemeinen Betrachtungen über die Definition einer Funktion durch eine Reihe von Spezialwerthen führen sofort zu dem Schlusse, dass die vorgelegte Funktion mindestens innerhalb der in Betracht kommenden Grenzen continuirlich sein muss; denn im Falle einer Discontinuität lässt sich eine Funktion selbst nicht annähernd durch eine beschränkte Zahl spezieller Werthe darstellen. Es kann demnach in der Folge nur auf solche Funktionen Rücksicht genommen werden, die innerhalb der vorgesteckten Grenzen continuirlich sind.

Die vorgelegten numerischen Werthe der Funktion können in Bezug auf die unabhängig Variable (Argument) in gleichen Abständen berechnet sein oder nicht; da die Berechnung der numerischen Werthe der Funktion meist in dieser Richtung keiner Beschränkung unterworfen ist, so wird es sich im Allgemeinen empfehlen, um die möglichste Einfachheit in die Operationen zu bringen, die numerischen Werthe in der That äquidistant in Bezug auf das Argument zu berechnen. Es soll in der Folge stets diese beschränkende Annahme gemacht werden, da sich in der That der allgemeine Fall auf diesen speciellen Fall zurückführen lässt, indem man eine neue Variable als neues Argument einführt, so dass in Bezug auf dieses neue Argument gleiche Abstände erreicht werden; allerdings kann diese Operation unter Umständen ziemlich weitläufig werden.

Das Argument sei ausgedrückt durch $a + (i + n)w$, wo a irgend einen constanten Ausgangswerth der Variablen vorstellt; w ist der gewählte constante Werth für das Intervall, i stelle eine beliebige ganze positive oder negative Zahl die Null nicht ausgenommen vor, und n eine beliebige Grösse, die innerhalb der Grenzen -1 und $+1$ eingeschlossen ist. Es müssen, den gemachten Voraussetzungen nach, die numerischen Werthe der Funktion für eine Reihe äquidistanter Punkte des Arguments bekannt sein, also etwa für $\dots a - 2w, a - w, a, a + w, a + 2w, \dots$; die numerischen Werthe, die diesem Argumente entsprechen, seien ausgedrückt durch $\dots f(a - 2w), f(a - w), f(a), f(a + w), f(a + 2w), \dots$. Man kann demnach das Symbol $a + iw$ als Argument-Index bezeichnen. Setzt man diese numerischen Werthe, die natürlich sowohl in der positiven als negativen Richtung beliebig weit fortgesetzt werden können, vertical unter einander, so kann man, indem man stets den vorausgehenden Funktionswerth von dem unmittelbar folgenden abzieht, Zahlenwerthe erhalten, die den ersten Differenzwerthen der vorgelegten numerischen Werthreihe entsprechen. Die so gebildeten ersten Differenzen seien ebenfalls in eine Verticalreihe rechts neben die erstere angesetzt gedacht, und die Differenzwerthe zwischen die Horizontalreihen der erzeugenden Werthe gesetzt. Für diese Werthreihe möge als Bezeichnung eingeführt werden, dass der Funktion als Exponent-Index I angehängt wird; dieser Funktions-Index weist also unzweideutig auf die Verticalreihe hin. Um die Stellung der Funktion in dieser letzteren genau zu bestimmen, soll als Argument-Index das arithmetische Mittel der umschliessenden Argument-Index benützt werden. Es wird also sein z. B.

$$\begin{aligned} f^1(a - \tfrac{1}{2}w) &= f(a) - f(a - w) \\ f^1(a + \tfrac{7}{2}w) &= f(a + 4w) - f(a + 3w). \end{aligned}$$

Bildet man nun aus diesen ersten Differenzwerthen in analoger Weise die zweite Differenzreihe bezeichnet dieselbe mit dem Funktionsindex II und bestimmt in analoger Weise den Argumentindex, so wird sein z. B.

$$\begin{aligned} f^{11}(a) &= f^1(a + \tfrac{1}{2}w) - f^1(a - \tfrac{1}{2}w) \\ f^{11}(a - 7w) &= f^1(a - \tfrac{1}{2}w) - f^1(a - \tfrac{5}{2}w). \end{aligned}$$

Man wird leicht bemerken, dass die Argumentindex der zweiten, wie überhaupt aller geraden, Differenzwerthe auf derselben Zeile mit dem Argumentindex der Funktion identisch werden; ebenso werden die Argumentindex der ungeraden Differenzwerthe, die zwischen denselben Horizontalreihen eingetragen sind, identisch. Dieses eben angedeutete Verfahren kann beliebig weit fortgesetzt gedacht werden, und man erhält so eine sichere und unzweideutige Bezeichnungsweise für die ersten und höheren Differenzwerthe; der Funktionsindex gibt also die Verticalreihe, der Argumentindex die Horizontalreihe an.

Betrachtet man aber die Funktionsreihe selbst als die Differenzwerthe einer links voranstehenden Verticalreihe, die dadurch bezeichnet werden soll, dass man den Funktionsindex, I vor das Funktionszeichen setzt und in consequenter Weise die Horizontalzeile durch den Argumentindex fixirt, so wird die Bildung dieser ersten Reihe durch successive Summierung der Funktionswerthe ohne Schwierigkeiten vorgenommen werden können, sobald man über irgend einen Werth in dieser ersten summirten Reihe eine Annahme macht. Diese Annahme ist vorerst willkürlich und es wird sich in der That in der Folge herausstellen, dass diese willkürliche Anfangs-constante mit der sonst bei der Integration auftretenden willkürlichen Constanten in innigem Zusammenhange steht. Sei der willkürliche Werth für $f^1(a - \tfrac{1}{2}w)$ gegeben, so ist offenbar

$$\begin{aligned} f^1(a + \tfrac{1}{2}w) &= f^1(a - \tfrac{1}{2}w) + f(a) \\ f^1(a + \tfrac{3}{2}w) &= f^1(a + \tfrac{1}{2}w) + f(a + w) \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} f^1(a - \tfrac{3}{2}w) &= f^1(a - \tfrac{1}{2}w) - f(a - w) \\ f^1(a - \tfrac{5}{2}w) &= f^1(a - \tfrac{3}{2}w) - f(a - 2w). \end{aligned}$$

Consequenter wäre es allerdings, als Funktionsindex für diese erste summirte Reihe den Index $-I$ zu wählen und denselben an diejenige Stelle zu setzen, wo der Index für die Bezeichnung der Differenzreihe gesetzt wurde, doch würde man durch diese Abänderung die allgemeine übliche Bezeichnung aufgeben und ausserdem die Schreibweise in Etwas erschweren.

Geht man in der Bildung der summirten Reihen weiter und bildet die zweite summirte Reihe in analoger Weise, wobei natürlich wieder eine willkürliche Anfangsconstante auftritt, so kann man diese Reihen beliebig weit fortsetzen; ich will mich aber beschränken auf die Betrachtung der zweiten summirten Reihe, da die dritten und folgenden Reihen mit drei- und mehrfachen eigentlich iterirten Integralen im Zusammenhange stehen, für deren Entwicklung vorerst kein Bedürfniss

vorhanden ist. Mit Rücksicht auf die gemachten Auseinandersetzungen wird sich also folgendes Differenz- und Summationsschema ergeben, in welchem bei der praktischen Anwendung statt der Symbole bestimmte numerische Werthe auftreten.

Argument	1. summirte Reihe	2. summirte Reihe	Funktionswerthe	1. Differenzen	2. Differenzen	3. Differenzen	4. Differenzen	5. Differenzen
.....
.....
$a - 2w$	${}^{II}f'(a - 2w)$	${}^I f'(a - \frac{5}{2}w)$	$f'(a - 2w)$	$f^I(a - \frac{5}{2}w)$	$f^{II}(a - 2w)$	$f^{III}(a - \frac{5}{2}w)$	$f^{IV}(a - 2w)$	$f^V(a - \frac{5}{2}w)$
$a - w$	${}^{III}f'(a - w)$	${}^I f'(a - \frac{3}{2}w)$	$f'(a - w)$	$f^I(a - \frac{3}{2}w)$	$f^{II}(a - w)$	$f^{III}(a - \frac{3}{2}w)$	$f^{IV}(a - w)$	$f^V(a - \frac{3}{2}w)$
a	${}^{II}f'(a)$	${}^I f'(a - \frac{1}{2}w)$	$f'(a)$	$f^I(a - \frac{1}{2}w)$	$f^{II}(a)$	$f^{III}(a - \frac{1}{2}w)$	$f^{IV}(a)$	$f^V(a - \frac{1}{2}w)$
$a + w$	${}^{III}f'(a + w)$	${}^I f'(a + \frac{1}{2}w)$	$f'(a + w)$	$f^I(a + \frac{1}{2}w)$	$f^{II}(a + w)$	$f^{III}(a + \frac{1}{2}w)$	$f^{IV}(a + w)$	$f^V(a + \frac{1}{2}w)$
$a + 2w$	${}^{II}f'(a + 2w)$	${}^I f'(a + \frac{3}{2}w)$	$f'(a + 2w)$	$f^I(a + \frac{3}{2}w)$	$f^{II}(a + 2w)$	$f^{III}(a + \frac{3}{2}w)$	$f^{IV}(a + 2w)$	$f^V(a + \frac{3}{2}w)$
.....
...

Aus der Entstehung dieser Werthe leitet man leicht ab, dass für die Differenz zweier Differenzwerthe mit einem geraden Funktionsindex (hier und in der Folge ist für die nun abzuleitenden Relationen der Funktionsindex der summirten Reihen negativ zu denken), der mit $2d$ bezeichnet werden soll, die Relation besteht

$$f^{2d}(a + i_n w) - f^{2d}(a + i, w) = \sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f^{2d+1}(a + [i + \frac{1}{2}] w) \quad 1)$$

für die ungeraden Funktionswerthe

$$f^{2d-1}(a + [i_n + \frac{1}{2}] w) - f^{2d-1}(a + [i, + \frac{1}{2}] w) = \sum_{i=i_1+1}^{i=i_n} f^{2d}(a + i w) = \sum_{i=i_1}^{i=i_n-1} f^{2d}(a + [i + 1] w) \quad 2)$$

Ausserdem wird es auch in der Folge nöthig werden, für die arithmetischen Mittel zweier unmittelbar auf einander folgender Differenz- oder Summenwerthe derselben Verticalreihe eine unzweideutige Bezeichnungsweise einzuführen. Es soll dies dadurch geschehen, dass man den Funktionsindex unverändert belässt, für den Argumentindex aber das arithmetische Mittel der Argumentindex der benützten Werthe ansetzt. Es wird so sein z. B.

$$f^{2d}(a + [i + \frac{1}{2}] w) = \frac{1}{2} \left\{ f^{2d}(a + [i + 1] w) + f^{2d}(a + i w) \right\}$$

$$f^{2d-1}(a + i w) = \frac{1}{2} \left\{ f^{2d-1}(a + [i + \frac{1}{2}] w) + f^{2d-1}(a + [i - \frac{1}{2}] w) \right\}$$

Diese Bezeichnungsweise ist offenbar ebenso unzweideutig wie die frühere. Man wird als sicheres Merkmal, ob man mit wirklich im Schema vorkommenden Differenzwerthen oder mit arithmetischen Mitteln derselben zu thun hat, leicht die Regel ableiten, dass für die im Schema auftretenden Differenzwerthe sich gerade Funktionsindex mit ganzen Argumentindex und ungerade Funktionsindex mit gebrochenen Argumentindex verbinden, dass aber das Umgekehrte für die arithmetischen

Mittel gilt: nämlich gerade Funktionsindex combiniren sich mit gebrochenen Argumentindex, ungerade mit ganzen.

Für die Differenz zweier in derselben Verticalreihe stehenden arithmetischen Mittel werden sich ähnliche Summenformeln finden lassen, denn es ist vorerst nach der Entstehung des arithmetischen Mittels und unter Benutzung der Relation 1)

$$\begin{aligned} & f^{2d}(a + [i_n + \tfrac{1}{2}]w) - f^{2d}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) \\ &= \tfrac{1}{2} \left\{ f^{2d}(a + [i_n + 1]w) + f^{2d}(a + i_n w) \right\} - \tfrac{1}{2} \left\{ f^{2d}(a + [i + 1]w) + f^{2d}(a + i w) \right\} \\ &= \tfrac{1}{2} \left\{ \sum_{i=i_n+1}^{i=i_n} f^{2d+1}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \sum_{i=i_n}^{i=i_n-1} f^{2d+1}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) \right\} \end{aligned}$$

Denkt man sich diese Summen zerlegt und vereinigt je zwei Glieder der verschiedenen Summenreihen zu einem arithmetischen Mittel mit Benützung des vor der Klammer stehenden Factors $\tfrac{1}{2}$, so findet sich leicht

$$f^{2d}(a + [i_n + \tfrac{1}{2}]w) - f^{2d}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) = \sum_{i=i_n}^{i=i_n-1} f^{2d+1}(a + [i + 1]w) \quad 3$$

und ebenso für die ungeraden Funktionsindex

$$f^{2d-1}(a + i_n w) - f^{2d-1}(a + i w) = \sum_{i=i_n}^{i=i_n-1} f^{2d}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) \quad 4$$

Die Formeln 1) 2) 3) und 4) können aber unter eine gemeinsame Form gebracht werden. Bezeichnet man mit l den Funktionsindex, mit k eine Zahl, die je nach dem Werth des Funktionsindex $\tfrac{1}{2}$ oder 0 zu setzen ist, so ist

$$f^l(a + [i_n + k]w) - f^l(a + [i + k]w) = \sum_{i=i_n}^{i=i_n-1} f^{l+1}(a + [i + k + \tfrac{1}{2}]w) \quad 5$$

wobei natürlich für die summirten Werthe l negativ anzunehmen ist.

In der Folge wird häufig von Combinationssummen derselben Klasse Gebrauch gemacht werden und es stellt sich die Nothwendigkeit heraus, für dieselben zweckmässige Bezeichnungen einzuführen. Die Combinationen sind hierbei ohne Wiederholung verstanden. Die zu combinirenden Elemente seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, die Klasse sei k , so stellt das Symbol

$$C^k \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots \}$$

die Summe aller Combinationen der Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ ohne Wiederholung zur Klasse k vor. Es wird also sein z. B.

$$C^2 \{ 4, 16, 36 \} = 4 \times 16 + 4 \times 36 + 16 \times 36 = 784.$$

weiter wird man zu beachten haben, dass für die Klasse 0 die Definition dieses Symbols sei

$$C^0 \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots \} = 1$$

Die Berechnung der Combinationssummen erscheint höchst weitläufig und fast unausführbar, wenn die Anzahl der Elemente eine beträchtliche wird; die Herren Anton und Schram, Observatoren der k. k. österreichischen Gradmessung,

die ich mit der Berechnung der weiter unten nothwendigen numerischen Coëfficienten betraut habe, haben sich aber einen Rechnungsmechanismus zurecht gelegt, der die Arbeit ganz ausserordentlich erleichtert und so kurz ist, dass alle Combinationssummen, die zwischen 9 Elementen, die durch ganze Zahlen in dem vorliegenden speciellen Falle dargestellt sind, zu allen Klassen bis 9 leicht innerhalb einer Stunde erlangt werden können, selbst wenn die Elemente beträchtlich grosse Zahlen sind. — Die bei dem vorliegenden Problem auftretenden Elemente sind entweder die Quadrate der geraden oder der ungeraden Zahlen

4, 16, 36, 64, 100, 144, 196, 256, 324

1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361

Denkt man sich alle Elemente in eine horizontale Zeile gesetzt, darunter in der zweiten Zeile die Einheit und multiplicirt man die Elemente mit diesem Factor, so erhält man die dritte Zeile, die nothwendig wieder die Elemente gibt; hiebei werden die Producte unter die Factoren gesetzt, nur das erste wird fortgelassen und als erster Werth in die 4. Zeile und zwar in die Verticalreihe des 2. Elementes gestellt. Die übrigen Werthe in der 4. Zeile werden einfach erhalten, indem man je zwei Werthe der voranstehenden Verticalcolumnen der 3. und 4. Zeile addirt; ist diese Addition durchgeführt, so bildet man wieder die Producte aus der 4. Zeile und den oben stehenden Elementen und setzt diese Producte in die 5. Zeile, jedoch das erste abermals als ersten Werth in die 6. Zeile, eine Verticalreihe nach links einrückend u. s. w.. Um die Beschreibung klar zu stellen, setze ich hier den Beginn der Rechnung für die Summencombination der Elemente $2^2, 4^2, \dots$ an.

4	16	36	64	100	144	196
1	1	1	1	1	1	1
	16	36	64	100	144	196
	4	20	56	120	220	364
		720	3584	12000	31680	71344
		64	784	4368	16368	48048
			50176	436800	2356992	9417408
			2304	52480	489280	2846272
				5248000	70456320	557869312
				147456	5395456	75851776
					776945664	14866948096
					14745600	791691264
						155171487744
						2123366400

Verfolgt man die Entstehung dieser Zahlen analytisch, so erkennt man sofort, dass, wenn man die Verticalcolumnen herabgeht und die je zweite Zahl heraushebt, diese so herausgehobenen Zahlen nichts anderes sind als die Summen der Combinationen aller Elemente bis zu dem gewählten zur Combination 0, 1, 2,

Die Zahlen, welche die Herren Anton und Schram gefunden haben und die ich wegen der wichtigen Rolle, die dieselben in der folgenden Untersuchung spielen, hier anführe, sind die folgenden:

$C^0 \{ 2^2 \}$	= 1	$C^0 \{ 2^2, \dots, 14^2 \}$	= 1
$C^1 \{ 2^2 \}$	= 4	$C^1 \{ 2^2, \dots, 14^2 \}$	= 560
$C^0 \{ 2^2, 4^2 \}$	= 1	$C^2 \{ 2^2, \dots, 14^2 \}$	= 11939 2
$C^1 \{ 2^2, 4^2 \}$	= 20	$C^3 \{ 2^2, \dots, 14^2 \}$	= 12263 680
$C^2 \{ 2^2, 4^2 \}$	= 64	$C^4 \{ 2^2, \dots, 14^2 \}$	= 63372 1088
$C^0 \{ 2^2, \dots, 6^2 \}$	= 1	$C^5 \{ 2^2, \dots, 14^2 \}$	= 15658 63936 0
$C^1 \{ 2^2, \dots, 6^2 \}$	= 56	$C^6 \{ 2^2, \dots, 14^2 \}$	= 15729 48511 14
$C^2 \{ 2^2, \dots, 6^2 \}$	= 784	$C^7 \{ 2^2, \dots, 14^2 \}$	= 41617 98141 00
$C^3 \{ 2^2, \dots, 6^2 \}$	= 2304	$C^0 \{ 2^2, \dots, 16^2 \}$	= 1
$C^0 \{ 2^2, \dots, 8^2 \}$	= 1	$C^1 \{ 2^2, \dots, 16^2 \}$	= 816
$C^1 \{ 2^2, \dots, 8^2 \}$	= 120	$C^2 \{ 2^2, \dots, 16^2 \}$	= 26275 2
$C^2 \{ 2^2, \dots, 8^2 \}$	= 4368	$C^3 \{ 2^2, \dots, 16^2 \}$	= 42828 032
$C^3 \{ 2^2, \dots, 8^2 \}$	= 52480	$C^4 \{ 2^2, \dots, 16^2 \}$	= 37732 23168
$C^4 \{ 2^2, \dots, 8^2 \}$	= 14745 6	$C^5 \{ 2^2, \dots, 16^2 \}$	= 17789 12378 88
$C^0 \{ 2^2, \dots, 10^2 \}$	= 1	$C^6 \{ 2^2, \dots, 16^2 \}$	= 41659 06530 304
$C^1 \{ 2^2, \dots, 10^2 \}$	= 220	$C^7 \{ 2^2, \dots, 16^2 \}$	= 40683 66247 5264
$C^2 \{ 2^2, \dots, 10^2 \}$	= 16368	$C^8 \{ 2^2, \dots, 16^2 \}$	= 10654 20324 86100
$C^3 \{ 2^2, \dots, 10^2 \}$	= 48928 0	$C^0 \{ 2^2, \dots, 18^2 \}$	= 1
$C^4 \{ 2^2, \dots, 10^2 \}$	= 53954 56	$C^1 \{ 2^2, \dots, 18^2 \}$	= 1140
$C^5 \{ 2^2, \dots, 10^2 \}$	= 14745 600	$C^2 \{ 2^2, \dots, 18^2 \}$	= 52713 6
$C^0 \{ 2^2, \dots, 12^2 \}$	= 1	$C^3 \{ 2^2, \dots, 18^2 \}$	= 12795 9680
$C^1 \{ 2^2, \dots, 12^2 \}$	= 364	$C^4 \{ 2^2, \dots, 18^2 \}$	= 17649 50553 6
$C^2 \{ 2^2, \dots, 12^2 \}$	= 48048	$C^5 \{ 2^2, \dots, 18^2 \}$	= 14004 15544 320
$C^3 \{ 2^2, \dots, 12^2 \}$	= 28462 72	$C^6 \{ 2^2, \dots, 18^2 \}$	= 61802 66760 6016
$C^4 \{ 2^2, \dots, 12^2 \}$	= 75851 776	$C^7 \{ 2^2, \dots, 18^2 \}$	= 13904 37378 29376 0
$C^5 \{ 2^2, \dots, 12^2 \}$	= 79169 1264	$C^8 \{ 2^2, \dots, 18^2 \}$	= 13288 04867 44719 36
$C^6 \{ 2^2, \dots, 12^2 \}$	= 21233 66400	$C^9 \{ 2^2, \dots, 18^2 \}$	= 34519 61852 55936 00

$C^0\{1^2\} = 1$	$C^0\{1^2, \dots, 13^2\} = 1$
$C^1\{1^2\} = 1$	$C^1\{1^2, \dots, 13^2\} = 455$
$C^0\{1^2, 3^2\} = 1$	$C^2\{1^2, \dots, 13^2\} = 77077$
$C^1\{1^2, 3^2\} = 10$	$C^3\{1^2, \dots, 13^2\} = 60925 \ 15$
$C^2\{1^2, 3^2\} = 9$	$C^4\{1^2, \dots, 13^2\} = 23067 \ 3443$
$C^0\{1^2, \dots, 5^2\} = 1$	$C^5\{1^2, \dots, 13^2\} = 38412 \ 78805$
$C^1\{1^2, \dots, 5^2\} = 35$	$C^6\{1^2, \dots, 13^2\} = 21878 \ 08947 \ 9$
$C^2\{1^2, \dots, 5^2\} = 259$	$C^7\{1^2, \dots, 13^2\} = 18261 \ 46822 \ 5$
$C^3\{1^2, \dots, 5^2\} = 225$	
$C^0\{1^2, \dots, 7^2\} = 1$	$C^0\{1^2, \dots, 15^2\} = 1$
$C^1\{1^2, \dots, 7^2\} = 84$	$C^1\{1^2, \dots, 15^2\} = 680$
$C^2\{1^2, \dots, 7^2\} = 1974$	$C^2\{1^2, \dots, 15^2\} = 17945 \ 2$
$C^3\{1^2, \dots, 7^2\} = 12916$	$C^3\{1^2, \dots, 15^2\} = 23434 \ 840$
$C^4\{1^2, \dots, 7^2\} = 11025$	$C^4\{1^2, \dots, 15^2\} = 16014 \ 89318$
$C^0\{1^2, \dots, 9^2\} = 1$	$C^5\{1^2, \dots, 15^2\} = 55742 \ 80348 \ 0$
$C^1\{1^2, \dots, 9^2\} = 165$	$C^6\{1^2, \dots, 15^2\} = 88616 \ 58206 \ 04$
$C^2\{1^2, \dots, 9^2\} = 8778$	$C^7\{1^2, \dots, 15^2\} = 49408 \ 31601 \ 000$
$C^3\{1^2, \dots, 9^2\} = 17281 \ 0$	$C^8\{1^2, \dots, 15^2\} = 41088 \ 30350 \ 625$
$C^4\{1^2, \dots, 9^2\} = 10572 \ 21$	
$C^5\{1^2, \dots, 9^2\} = 89302 \ 5$	$C^0\{1^2, \dots, 17^2\} = 1$
$C^0\{1^2, \dots, 11^2\} = 1$	$C^1\{1^2, \dots, 17^2\} = 969$
$C^1\{1^2, \dots, 11^2\} = 286$	$C^2\{1^2, \dots, 17^2\} = 37597 \ 2$
$C^2\{1^2, \dots, 11^2\} = 28743$	$C^3\{1^2, \dots, 17^2\} = 75296 \ 468$
$C^3\{1^2, \dots, 11^2\} = 12349 \ 48$	$C^4\{1^2, \dots, 17^2\} = 83741 \ 58078$
$C^4\{1^2, \dots, 11^2\} = 21967 \ 231$	$C^5\{1^2, \dots, 17^2\} = 51857 \ 32163 \ 82$
$C^5\{1^2, \dots, 11^2\} = 12881 \ 6766$	$C^6\{1^2, \dots, 17^2\} = 16995 \ 83602 \ 6324$
$C^6\{1^2, \dots, 11^2\} = 10805 \ 6025$	$C^7\{1^2, \dots, 17^2\} = 26104 \ 27537 \ 55556$
	$C^8\{1^2, \dots, 17^2\} = 14320 \ 09163 \ 03962 \ 5$
	$C^9\{1^2, \dots, 17^2\} = 11871 \ 51971 \ 33062 \ 5$

§. 2. Aufstellung einiger Relationen zwischen den Combinationssummen der Quadrate der geraden und ungeraden Zahlen.

Betrachtet man das Product

$$P_{(d-1)} = (n + [d-1]) (n + [d-2]) \dots (n+2) (n+1) n (n-1) (n-2) \dots (n - [d-2]) (n - [d-1]) \quad 1$$

wo n eine beliebige, d eine ganze positive Zahl vorstellt, und multiplicirt je zwei symmetrisch gegen die Mitte gelegenen Factoren mit einander, so erhält man zunächst

$$P_{(d-1)} = n/n^2 - 1^2 (n^2 - 2^2) (n^2 - 3^2) \dots (n^2 - [d-2]^2) (n^2 - [d-1]^2) \quad 2$$

Führt man die angezeigten Multiplicationen wirklich aus, und macht von der oben

in § 1 (pag. 5) erläuterten Bezeichnungsweise für die Combinationssummen Gebrauch, so kann man offenbar das Product durch die folgende Summenform ausdrücken:

$$P_{(d-1)} = \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{\frac{d-p}{2}} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}} C \{1^2, 2^2, \dots, (d-2)^2, (d-1)^2\}.$$

Führt man unter dem Combinationszeichen statt der Quadrate der Zahlen die Quadrate der geraden Zahlen für die Elemente ein, so findet sich sofort

$$P_{(d-1)} = \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{\frac{d-p}{2}} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}} C \{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\}. \quad 3)$$

Kehrt man nun zur Gleichung 1) zurück und führt in dieselbe ein

$$n = m + \frac{1}{2}, \quad 4)$$

so erhält man sogleich, wenn man die Multiplication der Summen und Differenzen ausführt für das obige Product

$$P_{(d-1)} = (m + [d - \frac{1}{2}]) (m^2 - [d - \frac{3}{2}]^2) (m^2 - [d - \frac{5}{2}]^2) \dots (m^2 - [\frac{3}{2}]^2) (m^2 - [\frac{1}{2}]^2). \quad 5)$$

Transformirt man diesen Ausdruck durch Einführung des Combinationszeichens in eine Summenformel und reducirt die Elemente auf die Quadrate der ungeraden Zahlen, so erhält man

$$P_{(d-1)} = (m + [d - \frac{1}{2}]) \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{\frac{d-p}{2}} \frac{m^{2p-2}}{2^{2(d-p)}} C \{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\}. \quad 6)$$

Durch Gleichsetzung der Ausdrücke 3) und 6) und Einstellung des Werthes n aus 4) in letzter Gleichung resultirt die folgende wichtige Relation

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{\frac{d-p}{2}} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}} C \{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\} \\ &= (n + d - 1) \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{\frac{d-p}{2}} \frac{(n - \frac{1}{2})^{2p-2}}{2^{2(d-p)}} C \{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\}. \end{aligned} \quad 7)$$

Ehe ich auf die Ableitung einiger Folgerungen übergehe, die man aus der Gleichung 7) erhalten kann, will ich vorerst auf einige Relationen eingehen, die sich aus den Ausdrücken 2) und 5) erhalten lassen. Bezeichnet man mit $P_{(d)}$ das mit $P_{(d-1)}$ analoge Product, welches man bekommt, wenn man bis zu dem Gliede $(n^2 - d^2)$ vorschreitet, so findet sich

$$P_{(d)} = (n^2 - d^2) P_{(d-1)}. \quad 8)$$

$$P_{(d)} = (m - d + \frac{1}{2})(m + d + \frac{1}{2}) P_{(d-1)}. \quad 9)$$

Führt man in 8) die Combinationssummen für P ein, so wird

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{p=d+1} (-1)^{\frac{d+1-p}{2}} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p+2)}} C \{2^2, 4^2, \dots, (2d)^2\} = \\ &= (n^2 - d^2) \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{\frac{d-p}{2}} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}} C \{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\}. \end{aligned}$$

Ändert man links vom Gleichheitszeichen die Grenzen für p in 0 und d ab, so erhält man auch

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{n^{2p+1}}{2^{2(d-p)}} C\{2^2, 4^2, \dots, (2d)^2\} = \\ = (n^2 - d^2) \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}} C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\}. \quad 10) \end{aligned}$$

Aus der Gleichung 9) findet sich durch ähnliche Schlussfolgerungen

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{m^{2p}}{2^{2(d-p)}} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2\} = \\ = (m + d - \frac{1}{2})(m - d + \frac{1}{2}) \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{m^{2p-2}}{2^{2(d-p)}} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\}. \quad 11) \end{aligned}$$

Betrachtet man Combinationen aus e und $e + 1$ Elementen, so enthalten die vorstehenden Gleichungen 10) und 11) die Relationen, die zwischen den Combinationssummen dieser Elemente bestehen und zwar gilt die erste Gleichung, wenn die Quadrate der geraden Zahlen, die zweite, wenn die Quadrate der ungeraden Zahlen in Betracht kommen.

Multipliziert man die Gleichung 11) mit dm und integrirt, wobei zu beachten ist, dass der Werth Null für die Integrationseonstante durch die Specialisirung $m = 0$ resultirt, so findet sich

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{m^{2p+1}}{(2p+1) 2^{2(d-p)}} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2\} = \\ = \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} \left\{ \frac{m^{2p+1}}{2p+1} - \left(\frac{2d-1}{2} \right)^2 \frac{m^{2p-1}}{2p-1} \right\} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\}. \end{aligned}$$

Führt man in diese Gleichung die Specialisirung $m = \frac{1}{2}$ ein, so erhält man nach einer leichten Umformung

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2\} + 4d(d-1) \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p-1)} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\} \\ = -2 \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\}}{(2p+1)(2p-1)}. \end{aligned}$$

Schreibt man der Kürze halber für $d-1$ den Buchstaben δ im zweiten Gliede links vom Gleichheitszeichen und führt überdies in demselben für p die Grenzen 0 und $(d-1)$ ein, so erhält man die in der Folge verwendete Relation

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2\} + 4d\delta \sum_{p=0}^{p=\delta} \frac{(-1)^{\delta-p}}{(2p+1)} C\{1^2, 3^2, \dots, (2\delta-1)^2\} = \\ = -2 \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\}}{(2p+1)(2p-1)}. \quad 12) \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise könnten weitere Relationen entwickelt werden, doch begnüge ich mich mit den hier angeführten Relationen und gehe auf einige Gleichungen über, die sich aus 7) ableiten lassen und die für die folgenden Untersuchungen von Bedeutung sind.

Setzt man in Gleichung 7) den Specialwerth $n = \frac{1}{2}$ ein und beachtet, dass

rechts vom Gleichheitszeichen für $p = 1$ der auftretende, unbestimmte Factor $(n - \frac{1}{2})^{2p-2} = 0^0$ offenbar der Einheit gleich gesetzt werden muss, so findet sich leicht die bemerkenswerthe Relation

$$\sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} C \{ 2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2 \} = (-1)^{d-1} \{ 2d-1 \}^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2. \quad 13)$$

Setzt man aber in 7) $n = 0$, so erhält man

$$\sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} C \{ 1^2, 3^2, \dots (2d-3)^2 \} = 0, \quad 14)$$

welche Formel aber dadurch beschränkt erscheint, dass die Gültigkeit derselben für den Fall $d = 1$ besonders untersucht werden muss. Schreibt man jedoch in 7) für $p = \pi + 1$ und $d = \delta + 1$, und führt nach erfolgter Umsetzung für π und δ wieder $p = d$ ein, so erhält man für $n = 0$, den Fall $d = 0$ als in der Folge nicht wichtig, anschliessend

$$\sum_{p=0}^{p=d} (-1)^{d-p} C \{ 1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2 \} = 0. \quad 15)$$

Setzt man endlich $n = 1$, so erhält man aus 7) sofort

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} C \{ 2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2 \} = \frac{d}{2^{2d}} \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} C \{ 1^2, 3^2, \dots (2d-3)^2 \},$$

und mit Rücksicht auf 14)

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} C \{ 2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2 \} = \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} C \{ 1, 2, \dots, d-1 \} = 0. \quad 16)$$

Die Gleichung 7) wird aber auch eine Reihe von Relationen bieten, die leicht erhalten werden können, wenn man auf diese Gleichung wiederholt die Differentiation und Integration anwendet, wobei noch eine vor diesen Operationen mit einer willkürlichen Potenz von n oder m ausgeführte Multiplication die Relationen vervielfältigt. Ich werde nur jene Relationen hier ableiten, von denen später Gebrauch gemacht wird.

Durch Differentiation erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{(2p-1) n^{2p-2}}{2^{2(d-p)}} C \{ 2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2 \} = \\ & = \left(\frac{2d-1}{2} \right) \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{(2p-2) (n - \frac{1}{2})^{2p-3}}{2^{2(d-p)}} C \{ 1^2, 3^2, \dots (2d-3)^2 \} + \\ & + \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{(2p-1) (n - \frac{1}{2})^{2p-2}}{2^{2(d-p)}} C \{ 1^2, 3^2, \dots (2d-3)^2 \}. \end{aligned} \quad 17)$$

Diese hier ausgeführte Differentiation erleichtert sich ganz ausserordentlich und führt sofort zu übersichtlichen Resultaten, wenn man rechts vom Gleichheitszeichen in 7) statt n , m substituirt und die Differentiation rechts nach m ausführt und nachher, da

$$dm = dn,$$

wieder n statt m in die Formel einführt. Weitere Relationen durch die Differentiation abzuleiten, scheint für die nächsten Zwecke nicht nöthig. Für die Ausführung der Integration denke ich mir vorerst die Gleichung 7) beiderseits mit n multiplicirt und dann linker Hand die Integration nach n , rechter Hand nach m ausgeführt, was gestattet ist, da ja $dm = dn$. Bezeichnet man die auftretende Integrationsconstante mit J , so wird

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} n^{2p+1}}{(2p+1) 2^{2(d-p)}} C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\} =$$

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} \left\{ \frac{m^{2p+1}}{(2p+1)} + \frac{1}{2} \frac{m^{2p}}{2^p} + \frac{2d-1}{2} \left[\frac{m^{2p}}{2^p} + \frac{1}{2} \frac{m^{2p-1}}{(2p-1)} \right] \right\} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\} + J.$$

Der Werth der Integrationsconstante findet sich in zweifacher Weise, wenn man $n = 0$ setzt und auch $m = 0$

$$J = \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} \left\{ \frac{1}{(2p+1) 2^{2p+1}} - \frac{1}{2 \cdot 2^p \cdot 2^p} + \frac{2d-1}{2} \left(\frac{1}{2 \cdot 2^{2p-1} \cdot 2^{2p-1}} - \frac{1}{2^p \cdot 2^{2p}} \right) \right\} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\}$$

$$J = \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} \frac{C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\}}{2^{2p+1} (2p+1)}$$

Die Gleichsetzung beider Resultate ergibt nach Ausführung einiger offenkundiger Reductionen

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)} C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\} = \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^p} \left\{ \frac{2d-1}{(2p-1)} - \frac{1}{2p+1} \right\} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\}. \quad 18)$$

Es soll die Gleichung 7) nochmals in abgeänderter Form vorgenommen werden. Ersetzt man nämlich rechter Hand die Combinationssumme der Elemente $1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2$ durch $1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2$, indem man von der Relation 11) des vorliegenden Paragraphen Gebrauch macht und beachtet, dass

$$\frac{n+d-1}{(m+d-\frac{1}{2})(m-d+\frac{1}{2})} = \frac{1}{n-d},$$

ist, so findet sich sofort

$$(n-d) \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}} C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2\}. \quad 19)$$

Multiplicirt man links mit dn , rechts mit dm , integrirt und bestimmt die Integrationsconstante in zweifacher Weise, indem man einerseits dieselbe durch $n = 0$, andererseits durch $m = 0$ ermittelt und setzt die beiden Resultate einander gleich, so findet sich

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)} C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\} = d \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{p} C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2\}. \quad 20)$$

Diese Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, zu welchen zahlreichen und verschiedenartigen Resultaten man durch das vorstehende Verfahren gelangen kann: ich habe dieselben so gewählt, dass die gewonnenen Relationen später Verwendung finden.

§ 3. Darstellung einer Funktion durch ihre Differenzwerthe.

Lässt man in irgend einer Funktion von a , den Werth a in $(a + nw)$ übergehen, so wird sich stets, sobald die Funktion nicht discontinuirlich ist, innerhalb der gestellten Grenzen eine Entwicklung nach steigenden Potenzen von nw bewerkstelligen lassen. Um die Convergenz dieser Reihen für praktische Zwecke hinreichend rasch zu gestalten, wird es allerdings nothwendig sein, nw keinen allzugrossen Werth zu ertheilen, doch lassen sich hierüber keine allgemeinen Regeln feststellen und es wird dem praktischen Takte des Rechners von Fall zu Fall überlassen bleiben müssen, die Wahl entsprechend dem vorgesteckten Ziele zu treffen.

Die eben hingestellte Behauptung rechtfertigt sich sofort durch Benutzung des Taylor'schen Lehrsatzes und man wird bemerken, dass die oben aufgestellte Einschränkung ebenfalls für den letzteren gilt. Man hat also nach demselben

$$f(a + nw) = f(a) + nw \frac{df(a)}{da} + \frac{n^2 w^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 f(a)}{da^2} + \dots$$

Denkt man sich diese Entwicklung bis $(nw)^m$ durchgeführt und sei dadurch die Reihe so weit fortgesetzt, dass die vorgeschriebene Genauigkeitsgrenze in der Entwicklung erreicht wird, so kann man die übrigen Glieder, die mit höheren Potenzen von nw als m multiplicirt sind, fortlassen, ohne der Genauigkeit etwas zu vergeben. Hiermit aber erscheint die vorgelegte Funktion innerhalb der vorgesteckten Grenzen mit einer arithmetischen Reihe der m^{ten} Ordnung identificirt. Rechnet man nun mit den entwickelten Coëfficienten eine Reihe in Bezug auf das Argument äquidistanter Werthe, indem man für n der Reihe nach die Werthe $\dots -2, -1, 0, +1, +2, \dots$ setzt, so erhält man eine Folge von Funktionswerthen, die der in § 1 auseinandergesetzten Bezeichnungsweise entsprechend, mit $\dots f(a - 2w), f(a - w), f(a), f(a + w), f(a + 2w) \dots$ bezeichnet werden sollen. Bildet man entsprechend den Vorschriften des § 1 die ersten und höheren Differenzwerthe, so erhält man das folgende Schema

.....		
$f(a - 2w)$	$f^1(a - \frac{5}{2}w)$	$f^{11}(a - 2w)$
$f(a - w)$	$f^1(a - \frac{3}{2}w)$	$f^{11}(a - w)$
$f(a)$	$f^1(a - \frac{1}{2}w)$	$f^{11}(a)$
$f(a + w)$	$f^1(a + \frac{1}{2}w)$	$f^{11}(a + w)$
$f(a + 2w)$	$f^1(a + \frac{3}{2}w)$	$f^{11}(a + 2w)$
.....

in welchem Schema nothwendig, der Voraussetzung nach, die m^{ten} Differenzen constant sein müssen. Um über die Bezeichnungsweise des Argumentindex eine sichere Regel zu haben, denke man sich unter m eine gerade Zahl; dies schränkt die Allgemeinheit der folgenden Ableitung nicht ein, weil, wenn die Entwicklung nach Potenzen von nw für ein ungerades m schon hinreichend genau wäre, die Entwicklung um eine Ordnung weiter geführt werden kann, wodurch nur eine Genauigkeitszunahme erreicht wird. Ist also m gerade, so wird nothwendig die Relation für die $(m-1)^{\text{ten}}$ Differenzwerthe bestehen:

$$\begin{aligned} f^{m-1}\left(a + \frac{3}{2}w\right) &= f^{m-1}\left(a + \frac{1}{2}w\right) + f^m(a) \\ f^{m-1}\left(a + \frac{5}{2}w\right) &= f^{m-1}\left(a + \frac{1}{2}w\right) + 2f^m(a) . \end{aligned}$$

oder allgemein

$$f^{m-1}\left(a + \left[n + \frac{1}{2}\right]w\right) = f^{m-1}\left(a + \frac{1}{2}w\right) + nf^m(a) .$$

Wendet man sich zu den $(m-2)^{\text{ten}}$ Differenzwerthen, so wird man finden

$$\begin{aligned} f^{m-2}(a+w) &= f^{m-2}(a) + f^{m-1}\left(a + \frac{1}{2}w\right) \\ f^{m-2}\left(a + 2w\right) &= f^{m-2}(a) + 2f^{m-1}\left(a + \frac{1}{2}w\right) + f^m(a) \\ f^{m-2}\left(a + 3w\right) &= f^{m-2}(a) + 3f^{m-1}\left(a + \frac{1}{2}w\right) + 3f^m(a) \end{aligned}$$

oder allgemein

$$f^{m-2}(a+nw) = f^{m-2}(a) + nf^{m-1}\left(a + \frac{1}{2}w\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f^m(a) .$$

Weiter erhält man für die $(m-3)^{\text{ten}}$ Differenzwerthe allgemein

$$f^{m-3}\left(a + \left[n + \frac{1}{2}\right]w\right) = f^{m-3}\left(a + \frac{1}{2}w\right) + nf^{m-2}(a) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f^{m-1}\left(a + \frac{1}{2}w\right) + \frac{n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3} n(n-1) f^m(a) .$$

Setzt man dieses Verfahren fort, bis man zur Reihe der Funktionswerthe selbst gelangt, so findet sich der allgemeine Ausdruck für dieselben leicht

$$\begin{aligned} f(a+nw) &= f(a) + nf^{\text{I}}\left(a + \frac{1}{2}w\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f^{\text{II}}(a) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{\text{III}}\left(a + \frac{1}{2}w\right) + \left. \begin{aligned} &+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{\text{IV}}(a) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} f^{\text{V}}\left(a + \frac{1}{2}w\right) + \dots \end{aligned} \right\} 1) \end{aligned}$$

welcher Ausdruck die bekannte Interpolationsformel ist und die vorgelegte Funktion der Voraussetzung nach in hinreichender Annäherung darstellt.

Die Formel 1) soll nun in Etwas abgeändert geschrieben werden, um später den Ausgangspunkt der Funktion beliebig wählen zu können. Ich setze nämlich statt n den allgemeineren Ausdruck $i+n$, wo i eine beliebige ganze Zahl vorstellt; dann kann man auch schreiben

$$f(a + [i+n]w) = f(a+iw) + nf^{\text{I}}\left(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f^{\text{II}}(a+iw) + \dots \quad 2)$$

führt man in diesem Ausdrucke die arithmetischen Mittel der ungeraden Differenzen nach der oben (pag. 4) festgesetzten Schreibweise ein und erinnert sich, dass darnach ist

$$f^{\frac{2d-1}{2}}\left(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w\right) = f^{\frac{2d-1}{2}}(a+iw) + \frac{1}{2} f^{\frac{2d}{2}}(a+iw) ,$$

so erhält man nach einer unmittelbar ersichtlichen Reduction aus 2) den Ausdruck:

$$f'(a + [i + n]w) = f'(a + iw) + nf^I(a + iw) + \frac{n^2}{1 \cdot 2} f^{II}(a + iw) + \frac{n(n^2 - 1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{III}(a + iw) + \\ + \frac{n^2(n^2 - 1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}(a + iw) + \frac{n(n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} f^V(a + iw) + \dots \quad (3)$$

Denkt man sich die in den Factoren angezeigten Multiplicationen ausgeführt, jeden Factor nach Potenzen von n geordnet und die in § 1 (pag. 5) angezeigte Combinationsbezeichnung angewendet, so erhält man, wenn man überdies den Differenzindex durch $2d$ oder $2d - 1$ bezeichnet, je nachdem derselbe gerade oder ungerade ist, die folgende Gleichung, durch welche die obige Reihe in einer Summenform ausgedrückt erscheint:

$$f'(a + [i + n]w) = f'(a + iw) + \sum_{d=1}^{d=\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} n^{2p-1}}{2^{2(d-p)} (2d-1)!} C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\} f'^{2d-1}(a + iw) + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} n^{2p}}{2^{2(d-p)} (2d)!} C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\} f'^{2d}(a + iw) \right\} \quad (4)$$

Für d ist in dieser Gleichung als obere Grenze ∞ gesetzt, in der Anwendung wird aber d nur soweit mitgenommen zu werden brauchen, so weit die Differenzwerthe, multiplicirt in den zugehörigen meist sehr kleinen Factor, etwas Merkliches geben, und man wird selten bei zweckmässiger Wahl der Intervalle w über $d = 4$ hinauszugehen haben.

Man kann der Gleichung 4) auch eine andere Form geben, deren Kenntniss für die folgenden Entwicklungen erwünscht erscheint. Führt man nämlich in der Gleichung 2) statt der geraden Differenzwerthe die arithmetischen Mittel derselben ein, so hat man nach den Festsetzungen des § 1 (pag. 4) anzunehmen

$$f'^{2d}(a + iw) = f'^{2d}(a + [i + \frac{1}{2}]w) - \frac{1}{2} f'^{2d+1}(a + [i + \frac{1}{2}]w);$$

setzt man überdies, wie dies in Gleichung 4) geschehen, statt n den Werth $m + \frac{1}{2}$, so findet sich ähulich wie früher

$$f'(a + [i + n]w) = f'(a + [i + \frac{1}{2}]w) + mf'(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \frac{m^2 - (\frac{1}{2})^2}{1 \cdot 2} f^{II}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \\ + \frac{m(m^2 - (\frac{1}{2})^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{III}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \frac{(m^2 - (\frac{1}{2})^2)(m^2 - (\frac{3}{2})^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots$$

Durch Einführung der Combinationsbezeichnung erhält man dann

$$f'(a + [i + n]w) = f'(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \sum_{d=1}^{d=\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} m^{2p-1}}{2^{2(d-p)} (2d-1)!} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\} f'^{2d-1}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} m^{2p}}{2^{2(d-p)} (2d)!} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2\} f'^{2d}(a + [i + \frac{1}{2}]w) \right\} \quad (5)$$

Die Gleichungen 4) und 5) bilden die Grundlagen für die weiteren Entwicklungen und sind nichts anderes, als die Darstellung einer Funktion durch die

Differenzwerthe. Die hiefür gewählte neue Bezeichnungsweise wird aber die Uebersichtlichkeit der weiteren Transformationen erleichtern und die Gesetzmässigkeit der auftretenden numerischen Factoren auffinden lassen.

§ 4. Ermittlung der numerischen Differentialquotienten einer Funktion.

Wiewohl die Ausführung der numerischen Differentiation weniger nöthig erscheint, weil in sehr vielen Fällen, wenn die numerischen Werthe einer Funktion gegeben sind, auch der analytische Ausdruck derselben bekannt ist, also die Differentiation auf directen Wege ausgeführt werden kann, so tritt doch häufig in der astronomischen Praxis (z. B. bei Ermittlung der speciellen Störungen, Ableitung der Differentialquotienten nach Ephemeridenorten) der Fall ein, dass in der That die Funktion nur durch eine Reihe numerischer Werthe definit erscheint und das Verlangen gestellt wird, den ersten und die höheren Differentialquotienten für dieselbe numerisch zu bestimmen. Ich werde daher die hiefür nöthigen Formeln hier ableiten.

Differentiirt man den Ausdruck 4) in § 3 pag. 15) q mal nach dem Argumente

$$a + [i + n] w = l,$$

wobei der Buchstabe l als Abkürzung eingeführt wird, so ist

$$dl = w dn \tag{1}$$

und man hat

$$\begin{aligned} w^q \frac{d^q f(l)}{dl^q} &= \sum_{d=1}^{d=q} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C \{ 2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2 \}}{2^{p(d-p)} 2^{d-1}!} \cdot \frac{d^q n^{2p-1}}{dn^q} f^{(2d-1)}(a+iw) + \\ &+ \sum_{d=1}^{d=q} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C \{ 2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2 \}}{2^{p(d-p)} 2^d!} \cdot \frac{d^q n^{2p}}{dn^q} f^{(2d)}(a+iw). \end{aligned}$$

Löst man hier die Summen nach d und p auf, so findet sich

$$\begin{aligned} w^q \frac{d^q f(l)}{dl^q} &= f^{(1)}(a+iw) \left\{ \frac{d^q n}{dn^q} \right\} + \\ &+ \frac{f^{(2)}(a+iw)}{1 \cdot 2} \left\{ \frac{d^q n^2}{dn^q} \right\} + \\ &+ \frac{f^{(3)}(a+iw)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left\{ \frac{d^q n^3}{dn^q} - \frac{C^1 \{ 2^2 \}}{2^2} \frac{d^q n}{dn^q} \right\} + \\ &+ \frac{f^{(4)}(a+iw)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left\{ \frac{d^q n^4}{dn^q} - \frac{C^1 \{ 2^2 \}}{2^2} \frac{d^q n^2}{dn^q} \right\} + \\ &+ \frac{f^{(5)}(a+iw)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left\{ \frac{d^q n^5}{dn^q} - \frac{C^1 \{ 2^2, 4^2 \}}{2^2} \frac{d^q n^3}{dn^q} + \frac{C^2 \{ 2^2, 4^2 \}}{2^4} \frac{d^q n}{dn^q} \right\} + \\ &+ \frac{f^{(6)}(a+iw)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left\{ \frac{d^q n^6}{dn^q} - \frac{C^1 \{ 2^2, 4^2 \}}{2^2} \frac{d^q n^4}{dn^q} + \frac{C^2 \{ 2^2, 4^2 \}}{2^4} \frac{d^q n^2}{dn^q} \right\} + \\ &+ \frac{f^{(7)}(a+iw)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \left\{ \frac{d^q n^7}{dn^q} - \frac{C^1 \{ 2^2, \dots, 6^2 \}}{2^2} \frac{d^q n^5}{dn^q} + \frac{C^2 \{ 2^2, \dots, 6^2 \}}{2^4} \frac{d^q n^3}{dn^q} - \frac{C^3 \{ 2^2, \dots, 6^2 \}}{2^6} \frac{d^q n}{dn^q} \right\} + \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{2}$$

wobei das Gesetz der Fortschreitung in diesem Ausdrucke sofort klar ist; ausserdem wird man leicht bemerken, dass alle jene Coëffizienten, wo q grösser ist, als der Exponent von n , verschwinden.

$$\left. \begin{aligned} N_1^8(n) &= \frac{1}{8!} \left\{ -2 \cdot \frac{C^3 \{ 2^2 \dots 6^2 \}}{2^6} + 4 n^2 \frac{C^2 \{ 2^2 \dots 6^2 \}}{2^4} - 6 n^4 \frac{C^1 \{ 2^2 \dots 6^2 \}}{2^2} + 8 n^6 \right\} \\ N_1^{10}(n) &= \frac{1}{10!} \left\{ +2 \cdot \frac{C^4 \{ 2^2 \dots 8^2 \}}{2^8} - 4 n^2 \frac{C^3 \{ 2^2 \dots 8^2 \}}{2^6} + 6 n^4 \frac{C^2 \{ 2^2 \dots 8^2 \}}{2^4} - 8 n^6 \frac{C^1 \{ 2^2 \dots 8^2 \}}{2^2} + 10 n^8 \right\} \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} 5$$

Das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke ist offenkundig und man erhält mit denselben

$$\begin{aligned} w \cdot \frac{df^{(k)}}{dl} &= f^I(a+iw) + N_1^3(n) f^{III}(a+iw) + N_1^5(n) f^V(a+iw) + N_1^7(n) f^{VII}(a+iw) + \dots \\ &+ n [f^{II}(a+iw) + N_1^4(n) f^{IV}(a+iw) + N_1^6(n) f^{VI}(a+iw) + N_1^8(n) f^{VIII}(a+iw) + \dots] \end{aligned} \quad 6$$

Die Tafel I enthält die Logarithmen der hier entwickelten Werthe von $N_1^d(n)$ nach dem Argumente n und schreitet bis $N_1^{10}(n)$ fort, also bis zur Berücksichtigung zehnter Differenzen, was die Grenzen der gewöhnlichen Anwendung weit überschreitet. Die äussersten Argumente sind ± 0.25 , weil, wie dies der Anblick der Formel zeigt, für die Fälle $n > \pm \frac{1}{4}$ die Rechnung bequemer und kürzer wird nach der Formel, die m enthält. Da n in den obigen Ausdrücken für die N -Coëfficienten durchaus quadratisch auftritt, so werden dieselben für alle positiven und negativen Werthe die gleichen. Die Tafel ist 7stellig von Herrn F. K. Ginzcl berechnet worden, dem practischen Bedürfniss entsprechend aber auf 6 Stellen abgekürzt, so dass der Fehler der Tafel nicht häufig eine halbe Einheit der 6. Stelle betragen wird. Die Reihe selbst ist, um gleich die logarithmischen Werthe bequem tabuliren zu können, in zwei Reihen zerfällt; in der zweiten erscheint n als gemeinsamer Factor herausgehoben.

In analoger Weise wie aus 2) die Gleichungen 5) abgeleitet wurden, erhält man aus 4) (pag. 17) die Relationen

$$\left. \begin{aligned} M_1^3(m) &= \frac{1}{3!} \left\{ -\frac{C^1 \{ 1^2 \}}{2^2} + 3 m^2 \right\} \\ M_1^5(m) &= \frac{1}{5!} \left\{ +\frac{C^2 \{ 1^2, 3^2 \}}{2^4} - 3 m^2 \frac{C^1 \{ 1^2, 3^2 \}}{2^2} + 5 m^4 \right\} \\ M_1^7(m) &= \frac{1}{7!} \left\{ -\frac{C^3 \{ 1^2, 5^2 \}}{2^6} + 3 m^2 \frac{C^2 \{ 1^2, 5^2 \}}{2^4} - 5 m^4 \frac{C^1 \{ 1^2, 5^2 \}}{2^2} + 7 m^6 \right\} \\ M_1^9(m) &= \frac{1}{9!} \left\{ +\frac{C^4 \{ 1^2 \dots 7^2 \}}{2^8} - 3 m^2 \frac{C^3 \{ 1^2 \dots 7^2 \}}{2^6} + 5 m^4 \frac{C^2 \{ 1^2 \dots 7^2 \}}{2^4} - 7 m^6 \frac{C^1 \{ 1^2 \dots 7^2 \}}{2^2} + 9 m^8 \right\} \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ M_1^4(m) &= \frac{1}{4!} \left\{ -2 \frac{C^1 \{ 1^2, 3^2 \}}{2^2} + 4 m^2 \right\} \\ M_1^6(m) &= \frac{1}{6!} \left\{ +2 \frac{C^2 \{ 1^2 \dots 5^2 \}}{2^4} - 4 m^2 \frac{C^1 \{ 1^2 \dots 5^2 \}}{2^2} + 6 m^4 \right\} \\ M_1^8(m) &= \frac{1}{8!} \left\{ -2 \frac{C^3 \{ 1^2 \dots 7^2 \}}{2^6} + 4 m^2 \frac{C^2 \{ 1^2 \dots 7^2 \}}{2^4} - 6 m^4 \frac{C^1 \{ 1^2 \dots 7^2 \}}{2^2} + 8 m^6 \right\} \\ M_1^{10}(m) &= \frac{1}{10!} \left\{ +2 \frac{C^4 \{ 1^2 \dots 9^2 \}}{2^8} - 4 m^2 \frac{C^3 \{ 1^2 \dots 9^2 \}}{2^6} + 6 m^4 \frac{C^2 \{ 1^2 \dots 9^2 \}}{2^4} - 8 m^6 \frac{C^1 \{ 1^2 \dots 9^2 \}}{2^2} + 10 m^8 \right\} \end{aligned} \right\} 7$$

und mit denselben

$$w \frac{df(l)}{dl} = f^I(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_1^3(m) f^{III}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_1^5(m) f^V(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots \quad 8)$$

$$+ n [f^{II}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_1^4(m) f^{IV}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_1^6(m) f^{VI}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots]$$

Die logarithmischen M -Coëfficienten, die wie oben für positive und negative Werthe identisch werden, finden sich in Tafel II, und zwar mit dem Argumente m zwischen den Grenzen $\mp 0,25$. Durch Benützung der Formeln 6) und 8) ist man daher in den Stand gesetzt, jeden geforderten ersten Differentialquotienten zu bestimmen.

Für $q = 2$ erhält man aus Gleichung 2)

$$\left. \begin{aligned} N_2^4(n) &= \frac{1}{4!} \left\{ -2 \frac{C^1 \{2^2\}}{2^2} + 3 \cdot 4 n^2 \right\} \\ N_2^6(n) &= \frac{1}{6!} \left\{ +2 \frac{C^2 \{2^2, 4^2\}}{2^4} - 3 \cdot 4 n^2 \frac{C^1 \{2^2, 4^2\}}{2^2} + 5 \cdot 6 n^4 \right\} \\ N_2^8(n) &= \frac{1}{8!} \left\{ -2 \frac{C^3 \{2^2, \dots, 6^2\}}{2^6} + 3 \cdot 4 n^2 \frac{C^2 \{2^2, \dots, 6^2\}}{2^4} - 5 \cdot 6 n^4 \frac{C^1 \{2^2, \dots, 6^2\}}{2^2} + 7 \cdot 8 n^6 \right\} \\ N_2^{10}(n) &= \frac{1}{10!} \left\{ +2 \frac{C^4 \{2^2, \dots, 8^2\}}{2^8} - 3 \cdot 4 n^2 \frac{C^3 \{2^2, \dots, 8^2\}}{2^6} + 5 \cdot 6 n^4 \frac{C^2 \{2^2, \dots, 8^2\}}{2^4} - 7 \cdot 8 n^6 \frac{C^1 \{2^2, \dots, 8^2\}}{2^2} + 9 \cdot 10 n^8 \right\} \\ &\dots \dots \dots \\ N_2^5(n) &= \frac{1}{5!} \left\{ -2 \cdot 3 \frac{C^1 \{2^2, 4^2\}}{2^2} + 4 \cdot 5 n^2 \right\} \\ N_2^7(n) &= \frac{1}{7!} \left\{ +2 \cdot 3 \frac{C^2 \{2^2, \dots, 6^2\}}{2^4} - 4 \cdot 5 n^2 \frac{C^1 \{2^2, \dots, 6^2\}}{2^2} + 6 \cdot 7 n^4 \right\} \\ N_2^9(n) &= \frac{1}{9!} \left\{ -2 \cdot 3 \frac{C^3 \{2^2, \dots, 8^2\}}{2^6} + 4 \cdot 5 n^2 \frac{C^2 \{2^2, \dots, 8^2\}}{2^4} - 6 \cdot 7 n^4 \frac{C^1 \{2^2, \dots, 8^2\}}{2^2} + 8 \cdot 9 n^6 \right\} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad 9)$$

und damit

$$w^2 \frac{df(l)}{dl^2} = f^{II}(a + iw) + N_2^4(n) f^{IV}(a + iw) + N_2^6(n) f^{VI}(a + iw) + N_2^8(n) f^{VIII}(a + iw) + \dots$$

$$+ n [f^{III}(a + iw) + N_2^5(n) f^V(a + iw) + N_2^7(n) f^{VII}(a + iw) + N_2^9(n) f^{IX}(a + iw) + \dots] \quad 10)$$

Die Logarithmen der in diesen Ausdrücken auftretenden Coëfficienten sind in der Tafel III aufgenommen.

Ganz ähnlich ist in Gleichung 4) für $q = 2$

$$\left. \begin{aligned} M_2^4(m) &= \frac{1}{4!} \left\{ -2 \frac{C^1 \{1^2, 3^2\}}{2^2} + 3 \cdot 4 m^2 \right\} \\ M_2^6(m) &= \frac{1}{6!} \left\{ +2 \frac{C^2 \{1^2, \dots, 5^2\}}{2^4} - 3 \cdot 4 m^2 \frac{C^1 \{1^2, \dots, 5^2\}}{2^2} + 5 \cdot 6 m^4 \right\} \\ M_2^8(m) &= \frac{1}{8!} \left\{ -2 \frac{C^3 \{1^2, \dots, 7^2\}}{2^6} + 3 \cdot 4 m^2 \frac{C^2 \{1^2, \dots, 7^2\}}{2^4} - 5 \cdot 6 m^4 \frac{C^1 \{1^2, \dots, 7^2\}}{2^2} + 7 \cdot 8 m^6 \right\} \\ M_2^{10}(m) &= \frac{1}{10!} \left\{ +2 \frac{C^4 \{1^2, \dots, 9^2\}}{2^8} - 3 \cdot 4 m^2 \frac{C^3 \{1^2, \dots, 9^2\}}{2^6} + 5 \cdot 6 m^4 \frac{C^2 \{1^2, \dots, 9^2\}}{2^4} - 7 \cdot 8 m^6 \frac{C^1 \{1^2, \dots, 9^2\}}{2^2} + 9 \cdot 10 m^8 \right\} \\ &\dots \dots \dots \\ M_2^5(m) &= \frac{1}{5!} \left\{ -2 \cdot 3 \frac{C^1 \{1^2, 3^2\}}{2^2} + 4 \cdot 5 m^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad 11)$$

$$\begin{aligned}
 M_2^7(m) &= \frac{1}{7!} \left\{ +2 \cdot 3 \frac{C^2\{1^2 \dots 5^2\}}{2^4} - 4 \cdot 5 m^2 \frac{C^1\{1^2 \dots 5^2\}}{2^2} + 6 \cdot 7 m^4 \right\} \\
 M_2^9(m) &= \frac{1}{9!} \left\{ -2 \cdot 3 \frac{C^3\{1^2 \dots 7^2\}}{2^6} + 4 \cdot 5 m^2 \frac{C^2\{1^2 \dots 7^2\}}{2^4} - 6 \cdot 7 m^4 \frac{C^1\{1^2 \dots 7^2\}}{2^2} + 8 \cdot 9 m^6 \right\} \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} M_2^7(m) \\ M_2^9(m) \\ \dots \end{aligned}} \right\} 11$$

daher also der Ausdruck :

$$\begin{aligned}
 w^2 \frac{d^2 f(l)}{dl^2} &= f^{II}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + M_2^4(m) f^{IV}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + M_2^6(m) f^{VI}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \dots \\
 &\quad + M_2^8(m) f^{VIII}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \dots \\
 &\quad + m [f^{III}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + M_2^5(m) f^V(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + M_2^7(m) f^{VII}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \\
 &\quad + M_2^9(m) f^{IX}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \dots] \quad 12)
 \end{aligned}$$

dessen logarithmische Coëfficienten sich in der Tafel IV finden.

Indem so ganz allgemein die Berechnung irgend eines Differentialquotienten möglich ist, wird die Betrachtung der speciellen Fälle n und m gleich Null, keine weiteren Schwierigkeiten bieten; es soll auf die letzteren hier näher eingegangen werden, weil gerade diese speciellen Fälle in der Anwendung häufig hervortreten.

Man gelangt sofort zu den diesbezüglichen Ausdrücken, wenn man in den Gleichungen 2) und 4) (pag. 16, 17) nach Ausführung der angezeigten Differentiation beziehungsweise n und $m = 0$ setzt. Eine ganz einfache Ueberlegung zeigt, dass dann alle Differentialquotienten verschwinden, in denen der Exponent von n und m entweder kleiner oder grösser als q ist, und nur jene Coëfficienten übrig bleiben, wo der Exponent von n und m gleich q wird. Man erhält also, indem man in dem Ausdruck $a + [i + n]w = l$ den Werth $n = 0$ einführt, der Reihe nach für die verschiedenen Differentialquotienten:

$$\begin{aligned}
 w \frac{df(a+iw)}{d(a+iw)} &= f^I(a+iw) - \frac{C^1\{2^2\}}{2^2(3)!} f^{III}(a+iw) + \frac{C^2\{2^2, 4^2\}}{2^4(5)!} f^V(a+iw) - \\
 &\quad - \frac{C^3\{2^2 \dots 6^2\}}{2^6(7)!} f^{VII}(a+iw) + \dots \\
 w^2 \frac{d^2 f(a+iw)}{d(a+iw)^2} &= f^{II}(a+iw) - 2 \frac{C^1\{2^2\}}{2^2(4)!} f^{IV}(a+iw) + 2 \frac{C^2\{2^2, 4^2\}}{2^4(6)!} f^{VI}(a+iw) - \\
 &\quad - 2 \frac{C^3\{2^2 \dots 6^2\}}{2^6(8)!} f^{VIII}(a+iw) + \dots \\
 w^3 \frac{d^3 f(a+iw)}{d(a+iw)^3} &= f^{III}(a+iw) - 2 \cdot 3 \frac{C^1\{2^2 \dots 4^2\}}{2^2(5)!} f^V(a+iw) + 2 \cdot 3 \frac{C^2\{2^2 \dots 6^2\}}{2^4(7)!} f^{VII}(a+iw) - \\
 &\quad - 2 \cdot 3 \frac{C^3\{2^2 \dots 8^2\}}{2^6(9)!} f^{IX}(a+iw) + \dots \\
 w^4 \frac{d^4 f(a+iw)}{d(a+iw)^4} &= f^{IV}(a+iw) - 2 \cdot 3 \cdot 4 \frac{C^1\{2^2 \dots 4^2\}}{2^2(6)!} f^{VI}(a+iw) + 2 \cdot 3 \cdot 4 \frac{C^2\{2^2 \dots 6^2\}}{2^4(8)!} f^{VIII}(a+iw) - \\
 &\quad - 2 \cdot 3 \cdot 4 \frac{C^3\{2^2 \dots 8^2\}}{2^6(10)!} f^{X}(a+iw) + \dots \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} w \frac{df(a+iw)}{d(a+iw)} \\ w^2 \frac{d^2 f(a+iw)}{d(a+iw)^2} \\ w^3 \frac{d^3 f(a+iw)}{d(a+iw)^3} \\ w^4 \frac{d^4 f(a+iw)}{d(a+iw)^4} \\ \dots \end{aligned}} \right\} 13a)$$

so dass das Gesetz der Fortschreitung klar vor Augen liegt. Da diese Coëfficienten eine erhöhte Bedeutung haben, so habe ich dieselben vollständig bis zur

20. Differenz angesetzt und zu diesem Ende die obigen Coëfficienten abkürzend geschrieben:

$$w^q \frac{d^q f(a+iw)}{d(a+iw)^q} = f^q(a+iw) + N_q^{q+2} f^{q+2}(a+iw) + N_q^{q+4} f^{q+4}(a+iw) \\ + N_q^{q+6} f^{q+6}(a+iw) + \dots \quad 13b)$$

In der folgenden Zusammenstellung sind die mitgetheilten Zahlen im Zähler und Nenner relative Primzahlen.

	Zähler	Nenner		Zähler	Nenner
$N_1^1 = +$	1 :	1	$N_2^2 = +$	1 :	1
$N_1^3 = -$	1 :	6	$N_2^4 = -$	1 :	12
$N_1^5 = +$	1 :	30	$N_2^6 = +$	1 :	90
$N_1^7 = -$	1 :	140	$N_2^8 = -$	1 :	560
$N_1^9 = +$	1 :	630	$N_2^{10} = +$	1 :	3150
$N_1^{11} = -$	1 :	2772	$N_2^{12} = -$	1 :	16632
$N_1^{13} = +$	1 :	12012	$N_2^{14} = +$	1 :	84084
$N_1^{15} = -$	1 :	51480	$N_2^{16} = -$	1 :	111840
$N_1^{17} = +$	1 :	218790	$N_2^{18} = +$	1 :	1969110
$N_1^{19} = -$	1 :	923780	$N_2^{20} = -$	1 :	9237800

$N_3^3 = +$	1 :	1	$N_4^4 = +$	1 :	1
$N_3^5 = -$	1 :	4	$N_4^6 = -$	1 :	6
$N_3^7 = +$	7 :	120	$N_4^8 = +$	7 :	240
$N_3^9 = -$	41 :	3024	$N_4^{10} = -$	41 :	7560
$N_3^{11} = +$	479 :	151200	$N_4^{12} = +$	479 :	153600
$N_3^{13} = -$	59 :	79200	$N_4^{14} = -$	59 :	277200
$N_3^{15} = +$	266681 :	1513512000	$N_4^{16} = +$	266681 :	6054048000
$N_3^{17} = -$	63397 :	1513512000	$N_4^{18} = -$	63397 :	6810804000
$N_3^{19} = +$	9778141 :	977728752000	$N_4^{20} = +$	9778141 :	1888643760000

$N_5^5 = +$	1 :	1	$N_6^6 = +$	1 :	1
$N_5^7 = -$	1 :	3	$N_6^8 = -$	1 :	4
$N_5^9 = +$	13 :	144	$N_6^{10} = +$	13 :	240
$N_5^{11} = -$	139 :	6048	$N_6^{12} = -$	139 :	12096
$N_5^{13} = +$	37 :	6480	$N_6^{14} = +$	37 :	15120
$N_5^{15} = -$	4201 :	2993760	$N_6^{16} = -$	4201 :	7983360
$N_5^{17} = +$	3739217 :	10897286400	$N_6^{18} = +$	3739217 :	32691859200
$N_5^{19} = -$	364919 :	1358914560	$N_6^{20} = -$	364919 :	14529715200

Zähler		Nenner	Zähler		Nenner
$N_7^7 = +$	1 :	1	$N_8^8 = +$	1 :	1
$N_7^9 = -$	5 :	12	$N_8^{10} = -$	1 :	3
$N_7^{11} = +$	31 :	240	$N_8^{12} = +$	31 :	360
$N_7^{13} = -$	311 :	8640	$N_8^{14} = -$	311 :	15120
$N_7^{15} = +$	2473 :	2 59200	$N_8^{16} = +$	2473 :	5 18400
$N_7^{17} = -$	4679 :	19 00800	$N_8^{18} = -$	4679 :	42 76800
$N_7^{19} = +$	58 39219 :	93405 31200	$N_8^{20} = +$	58 39219 :	2 33513 28000

$N_9^9 = +$	1 :	1	$N_{10}^{10} = +$	1 :	1
$N_9^{11} = -$	1 :	2	$N_{10}^{12} = -$	5 :	12
$N_9^{13} = +$	7 :	40	$N_{10}^{14} = +$	1 :	8
$N_9^{15} = -$	67 :	1260	$N_{10}^{16} = -$	67 :	2016
$N_9^{17} = +$	2021 :	1 34400	$N_{10}^{18} = +$	2021 :	2 41920
$N_9^{19} = -$	21713 :	53 22240	$N_{10}^{20} = -$	21713 :	106 44480

$N_{11}^{11} = +$	1 :	1	$N_{12}^{12} = +$	1 :	1
$N_{11}^{13} = -$	7 :	12	$N_{12}^{14} = -$	1 :	2
$N_{11}^{15} = +$	41 :	180	$N_{12}^{16} = +$	41 :	240
$N_{11}^{17} = -$	757 :	10080	$N_{12}^{18} = -$	757 :	15120
$N_{11}^{19} = +$	5473 :	2 41920	$N_{12}^{20} = +$	5473 :	4 03200

$N_{13}^{13} = +$	1 :	1	$N_{14}^{14} = +$	1 :	1
$N_{13}^{15} = -$	2 :	3	$N_{14}^{16} = -$	7 :	12
$N_{13}^{17} = +$	23 :	80	$N_{14}^{18} = +$	161 :	720
$N_{13}^{19} = -$	619 :	6048	$N_{14}^{20} = -$	619 :	8640

$N_{15}^{15} = +$	1 :	1	$N_{16}^{16} = +$	1 :	1
$N_{15}^{17} = -$	3 :	4	$N_{16}^{18} = -$	2 :	3
$N_{15}^{19} = +$	17 :	48	$N_{16}^{20} = +$	17 :	60

$N_{17}^{17} = +$	1 :	1	$N_{18}^{18} = +$	1 :	1
$N_{17}^{19} = -$	5 :	6	$N_{18}^{20} = -$	3 :	4

Stellt man in den Gleichungen 4) pag. 17 statt l den Werth $a + [i + \frac{1}{2}]w$ ein, indem hierbei $m = 0$ vorausgesetzt ist, so finden sich die Differentialquotienten

$$\begin{aligned}
 w \frac{d f(a + [i + \frac{1}{2}] w)}{d(a + [i + \frac{1}{2}] w)} &= f^I(a + [i + \frac{1}{2}] w) - \frac{C^1 \{1^2\}}{2^2 (3)!} f^{III}(a + [i + \frac{1}{2}] w) + \\
 &+ \frac{C^2 \{1^2, 3^2\}}{2^4 (5)!} f^V(a + [i + \frac{1}{2}] w) - \frac{C^3 \{1^2, \dots, 5^2\}}{2^6 (7)!} f^{VII}(a + [i + \frac{1}{2}] w) + \dots \\
 w^2 \frac{d^2 f(a + [i + \frac{1}{2}] w)}{d(a + [i + \frac{1}{2}] w)^2} &= f^{II}(a + [i + \frac{1}{2}] w) - 2 \frac{C^1 \{1^2, 3^2\}}{2^2 (4)!} f^{IV}(a + [i + \frac{1}{2}] w) + \\
 &+ 2 \frac{C^2 \{1^2, \dots, 5^2\}}{2^4 (6)!} f^{VI}(a + [i + \frac{1}{2}] w) - 2 \frac{C^3 \{1^2, \dots, 7^2\}}{2^6 (8)!} f^{VIII}(a + [i + \frac{1}{2}] w) + \dots \\
 w^3 \frac{d^3 f(a + [i + \frac{1}{2}] w)}{d(a + [i + \frac{1}{2}] w)^3} &= f^{III}(a + [i + \frac{1}{2}] w) - 2 \cdot 3 \frac{C^1 \{1^2, 3^2\}}{2^2 (5)!} f^V(a + [i + \frac{1}{2}] w) + \\
 &+ 2 \cdot 3 \frac{C^2 \{1^2, \dots, 5^2\}}{2^4 (7)!} f^{VII}(a + [i + \frac{1}{2}] w) - 2 \cdot 3 \frac{C^3 \{1^2, \dots, 7^2\}}{2^6 (9)!} f^{IX}(a + [i + \frac{1}{2}] w) + \dots \\
 w^4 \frac{d^4 f(a + [i + \frac{1}{2}] w)}{d(a + [i + \frac{1}{2}] w)^4} &= f^{IV}(a + [i + \frac{1}{2}] w) - 2 \cdot 3 \cdot 4 \frac{C^1 \{1^2, \dots, 5^2\}}{2^2 (6)!} f^{VI}(a + [i + \frac{1}{2}] w) + \\
 &+ 2 \cdot 3 \cdot 4 \frac{C^2 \{1^2, \dots, 7^2\}}{2^4 (8)!} f^{VIII}(a + [i + \frac{1}{2}] w) - 2 \cdot 3 \cdot 4 \frac{C^3 \{1^2, \dots, 9^2\}}{2^6 (10)!} f^{X}(a + [i + \frac{1}{2}] w) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{14a}$$

In ähnlicher Weise wie früher erhält man allgemein

$$\begin{aligned}
 w^q \frac{d^q f(a + [i + \frac{1}{2}] w)}{d(a + [i + \frac{1}{2}] w)^q} &= f^q(a + [i + \frac{1}{2}] w) + M_{q^{q+2}} f^{q+2}(a + [i + \frac{1}{2}] w) + \\
 &+ M_{q^{q+4}} f^{q+4}(a + [i + \frac{1}{2}] w) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{14b}$$

Die in diesem Ausdrucke enthaltenen *M*-Coëfficienten folgen hier, wie vorher die *N*-Coëfficienten, im Zähler und Nenner als relative Primzahlen mitgetheilt:

	Zähler	Nenner		Zähler	Nenner
$M_0^0 = +$	1 :	1	$M_1^1 = +$	1 :	1
$M_0^2 = -$	1 :	8	$M_1^3 = -$	1 :	24
$M_0^4 = +$	3 :	128	$M_1^5 = +$	3 :	640
$M_0^6 = -$	5 :	1024	$M_1^7 = -$	5 :	7168
$M_0^8 = +$	35 :	32768	$M_1^9 = +$	35 :	2 949 12
$M_0^{10} = -$	63 :	2 621 44	$M_1^{11} = -$	63 :	28 835 84
$M_0^{12} = +$	231 :	41 943 04	$M_1^{13} = +$	231 :	545 259 52
$M_0^{14} = -$	429 :	335 544 32	$M_1^{15} = -$	143 :	1677 72160
$M_0^{16} = +$	6435 :	21474 83648	$M_1^{17} = +$	0435 :	3 65072 22016
$M_0^{18} = -$	12155 :	1 71798 69184	$M_1^{19} = -$	12155 :	32 64175 14496
$M_0^{20} = +$	46189 :	27 48779 06944			

	Zähler	Nenner
$M_2^2 = +$	1 :	1
$M_2^4 = -$	5 :	24
$M_2^6 = +$	259 :	5760
$M_2^8 = -$	3229 :	3 22560
$M_2^{10} = +$	1 17469 :	516 09600
$M_2^{12} = -$	71 56487 :	1 36249 34400
$M_2^{14} = +$	24308 98831 :	1983 79044 86400
$M_2^{16} = -$	609 97921 :	211 60431 45216
$M_2^{18} = +$	14 14330 03757 :	20 72029 44779 55072
$M_2^{20} = -$	2558 72967 81661 :	15747 42380 32458 54720

	Zähler	Nenner
$M_3^3 = +$	1 :	1
$M_3^5 = -$	1 :	8
$M_3^7 = +$	37 :	1920
$M_3^9 = -$	3229 :	9 67680
$M_3^{11} = +$	10679 :	172 03200
$M_3^{13} = -$	5 50499 :	45416 44800
$M_3^{15} = +$	24308 98831 :	9918 95224 32000
$M_3^{17} = -$	35 88113 :	70 53477 15072
$M_3^{19} = +$	74138 42303 :	6 90676 48259 85024

$M_4^4 = +$	1 :	1
$M_4^6 = -$	7 :	24
$M_4^8 = +$	47 :	640
$M_4^{10} = -$	17281 :	9 67680
$M_4^{12} = +$	19 97021 :	4644 86400
$M_4^{14} = -$	12 06053 :	11678 51520
$M_4^{16} = +$	2 46157 17239 :	9918 95224 32000
$M_4^{18} = -$	42 65404 47313 :	7 14164 56151 04000
$M_4^{20} = +$	7992 35115 02753 :	5550 07887 80236 80000

$M_5^5 = +$	1 :	1
$M_5^7 = -$	5 :	24
$M_5^9 = +$	47 :	1152
$M_5^{11} = -$	1571 :	1 93536
$M_5^{13} = +$	1 53617 :	928 97280
$M_5^{15} = -$	12 06053 :	35035 54560
$M_5^{17} = +$	14479 83367 :	1983 79044 86400
$M_5^{19} = -$	2 24494 97227 :	1 42832 91230 20800

$M_6^6 = +$	1 :	1
$M_6^8 = -$	3 :	8
$M_6^{10} = +$	209 :	1920
$M_6^{12} = -$	28067 :	9 67680
$M_6^{14} = +$	2 30443 :	309 65760
$M_6^{16} = -$	153 13957 :	81749 60640
$M_6^{18} = +$	24 99387 65093 :	53562 34211 32800
$M_6^{20} = -$	7 07268 85883 :	61214 10527 23200

	Zähler	Nenner
$M_7^7 = +$	1 :	1
$M_7^9 = -$	7 :	24
$M_7^{11} = +$	133 :	1920
$M_7^{13} = -$	2159 :	1 38240
$M_7^{15} = +$	2 30443 :	663 55200
$M_7^{17} = -$	9 00821 :	11678 51520
$M_7^{19} = +$	1 31546 71847 :	7651 76315 90400

$M_8^8 = +$	1 :	1
$M_8^{10} = -$	11 :	24
$M_8^{12} = +$	871 :	5760
$M_8^{14} = -$	8521 :	1 93536
$M_8^{16} = +$	55 99613 :	4644 86400
$M_8^{18} = -$	3910 80857 :	12 26244 09600
$M_8^{20} = +$	31 61002 58731 :	38258 81579 52000

$M_9^9 = +$	1 :	1
$M_9^{11} = -$	3 :	8
$M_9^{13} = +$	67 :	640
$M_9^{15} = -$	8521 :	3 22560
$M_9^{17} = +$	3 29389 :	516 09600
$M_9^{19} = -$	205 83203 :	1 36249 34100

	Zähler	Nenner		Zähler	Nenner
$M_{10}^{10} = +$	1 :	1	$M_{11}^{11} = +$	1 :	1
$M_{10}^{12} = -$	13 :	24	$M_{11}^{13} = -$	11 :	24
$M_{10}^{14} = +$	77 :	384	$M_{11}^{15} = +$	817 :	5760
$M_{10}^{16} = -$	4097 :	64512	$M_{11}^{17} = -$	2651 :	64512
$M_{10}^{18} = +$	5 74123 :	309 65760	$M_{11}^{19} = +$	3 32387 :	309 65760
$M_{10}^{20} = -$	341 39621 :	66178 25280			

$M_{12}^{12} = +$	1 :	1	$M_{13}^{13} = +$	1 :	1
$M_{12}^{14} = -$	5 :	8	$M_{13}^{15} = -$	13 :	24
$M_{12}^{16} = +$	493 :	1920	$M_{13}^{17} = +$	377 :	1920
$M_{12}^{18} = -$	85177 :	9 67680	$M_{13}^{19} = -$	58279 :	9 67680
$M_{12}^{20} = +$	6 04841 :	221 18400			

$M_{14}^{14} = +$	1 :	1	$M_{15}^{15} = +$	1 :	1
$M_{14}^{16} = -$	17 :	24	$M_{15}^{17} = -$	5 :	8
$M_{14}^{18} = +$	1843 :	5760	$M_{15}^{19} = +$	97 :	384
$M_{14}^{20} = -$	16333 :	1 38240			

	Zähler	Nenner		Zähler	Nenner
$M_{16}^{16} = +$	1 :	1	$M_{17}^{17} = +$	1 :	1
$M_{16}^{18} = -$	19 :	24	$M_{17}^{19} = -$	17 :	24
$M_{16}^{20} = +$	749 :	1920			
<hr/>					
$M_{18}^{18} = +$	1 :	1	$M_{19}^{19} = +$	1 :	1
$M_{18}^{20} = -$	7 :	8			

Schliesslich muss noch bemerkt werden, dass die bisherigen Entwicklungen sofort auch die Möglichkeit an die Hand geben, eine Funktion nach steigenden Potenzen von n oder m zu entwickeln. Am bequemsten werden die Formeln, wenn man von einem Argumentwerthe oder dem Mittel derselben ausgeht, denn es ist nach dem Taylor'schen Lehrsatz:

$$\left. \begin{aligned} f(a + [i + n]w) &= f(a + iw) + nw \frac{df(a + iw)}{d(a + iw)} + \frac{n^2 w^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 f(a + iw)}{d^2(a + iw)^2} + \dots \\ \text{und analog:} \\ f(a + [i + \frac{1}{2} + m]w) &= F(a + [i + \frac{1}{2}]w) + mw \frac{dF(a + [i + \frac{1}{2}]w)}{d(a + [i + \frac{1}{2}]w)} + \\ &\quad + \frac{m^2 w^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 F(a + [i + \frac{1}{2}]w)}{d^2(a + [i + \frac{1}{2}]w)^2} + \dots \end{aligned} \right\} 15)$$

wobei zu beachten ist, dass in der letztern Formel statt $f(a + [i + \frac{1}{2}]w)$ geschrieben wurde $F(a + [i + \frac{1}{2}]w)$, da nach der Idee des Taylor'schen Lehrsatzes offenbar unter dieser Funktion der Werth der vorgelegten Funktion für das Mittel der Argumente zu verstehen ist; denn durch die Bezeichnung mittels des Buchstabens f könnte eine Verwechslung mit dem arithmetischen Mittel zweier Funktionswerthe eintreten; in der unten folgenden Formel 17) ist auf diesen Umstand Rücksicht genommen und in der That unter $f(a + [i + \frac{1}{2}]w)$ das arithmetische Mittel zweier Funktionswerthe zu verstehen.

Man findet leicht, dass mit Rücksicht auf die früher gewählten Bezeichnungen pag. 21 (13b) und pag. 23 (14b) die folgenden Relationen bestehen:

$$\left. \begin{aligned} f(a + [i + n]w) &= f(a + iw) + n \left\{ f^I(a + iw) + N_1^3 f^{III}(a + iw) + N_1^5 f^V(a + iw) + \dots \right\} \\ &\quad + \frac{n^2}{1 \cdot 2} \left\{ f^{II}(a + iw) + N_2^4 f^{IV}(a + iw) + N_2^6 f^{VI}(a + iw) + \dots \right\} \\ &\quad + \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left\{ f^{III}(a + iw) + N_3^5 f^V(a + iw) + N_3^7 f^{VII}(a + iw) + \dots \right\} \\ &\quad + \frac{n^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left\{ f^{IV}(a + iw) + N_4^6 f^{VI}(a + iw) + N_4^8 f^{VIII}(a + iw) + \dots \right\} \\ &\quad \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} 16)$$

und:

$$\begin{aligned}
 f(a + [i + \tfrac{1}{2} + m]w) &= \left\{ f(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + M_0^2 f^{II}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \right. \\
 &\quad \left. + M_0^4 f^{IV}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \dots \right\} \\
 &+ m \left\{ f^I(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + M_1^3 f^{III}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \right. \\
 &\quad \left. + M_1^5 f^V(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \dots \right\} \\
 &+ \frac{m^2}{1 \cdot 2} \left\{ f^{II}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + M_2^4 f^{IV}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \right. \\
 &\quad \left. + M_2^6 f^{VI}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \dots \right\} \\
 &+ \frac{m^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left\{ f^{III}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + M_3^5 f^V(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \right. \\
 &\quad \left. + M_3^7 f^{VII}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \dots \right\} \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

wobei die hier auftretenden N und M -Coefficienten der oben angeführten Zusammenstellung zu entnehmen sind und wie schon bemerkt, unter $f(a + [i + \tfrac{1}{2}]w)$ in der That das arithmetische Mittel zweier Funktionswerthe zu verstehen ist.

Es sollen nun die vorstehend entwickelten Formeln durch ausführliche Beispiele erläutert werden.

Ich benütze hiefür die Störungen, die der Planet (62) Erato in der X -Coordinate erfährt, die mit ξ bezeichnet werden sollen und in Einheiten der 7. Decimale zu verstehen sind. Die angeführten Zahlen können leicht aus den später bei der Störungsrechnung gegebenen ausführlichen Beispielen hergeholt werden. Man hat so, wenn man die Differenzwerthe bildet:

ξ	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^V	f^{VI}	f^{VII}	f^{VIII}
1871 April 26 + 230820.18	— 44270.38							
Juni 5 + 186549.80	— 53152.62	— 8882.24						
Juli 15 + 133397.18	— 60339.54	+ 1695.32	+ 893.35					
Aug. 24 + 73057.64	— 64937.79	— 4598.25	+ 2588.67	+ 795.70	— 97.65	— 186.28		
Octob. 3 + 8119.85	— 66151.67	— 1213.88	+ 3384.37	+ 511.77	— 283.93	— 174.86	+ 11.42	
Nov. 12 — 58031.82	+ 63469.41	+ 2682.26	+ 3896.14	+ 52.98	— 458.79	— 76.92	+ 65.50	
Dec. 22 — 121501.23	— 56838.03	+ 6631.38	+ 3949.12	— 503.75	— 556.73			
1872 Jan. 31 — 178339.26	— 46761.28	+ 10076.75	+ 3445.37					
März 11 — 225100.54								

Um vorerst die Formel 13 (pag. 20) durch ein Beispiel zu belegen, soll der erste und zweite Differentialquotient von ξ für 1871 October 3 ermittelt werden. Da hier das Argument für ξ die Zeit ist, so ist es klar, dass diese Differentialquotienten nach der Zeit verstanden sind, und um sofort in den obigen Formeln w der Einheit gleich setzen zu können, soll für die Zeiteinheit in den hier folgenden Beispielen stets das gewählte Intervall von 40 Tagen angenommen werden; es wird daher, wenn man die Differentialquotienten auf den mittlern Sonnentag als Einheit

beziehen will, der erhaltene erste, zweite, dritte Differentialquotient beziehungsweise durch $40, 40^2, 40^3 \dots\dots$ zu dividiren sein.

Für den ersten Differentialquotienten stellt sich also die Rechnung wie folgt:

$$\begin{aligned} f^1(a + iw) &= - 65544.73 \\ N_1^3 f^{III}(a + iw) &= - 606.71 \\ N_1^5 f^V(a + iw) &= - 12.38 \\ N_1^7 f^{VII}(a + iw) &= - 0.32 \\ 10^7 \cdot \frac{d\xi}{d\tau} &= - 66164.14 \end{aligned}$$

Für den zweiten Differentialquotienten wird:

$$\begin{aligned} f^{II}(a + iw) &= - 1213.88 \\ N_2^4 f^{IV}(a + iw) &= - 42.65 \\ N_2^6 f^{VI}(a + iw) &= - 1.94 \\ N_2^8 f^{VIII}(a + iw) &= - 0.12 \\ 10^7 \cdot \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= - 1258.59 \end{aligned}$$

Zur Erläuterung der Formel 14) (pag. 23) wählen wir als Datum 1871 Sept. 13. also ein Zeitmoment, welches in die Mitte eines Intervalls fällt; man erhält, indem man wieder als Zeiteinheit 40 Tage ansetzt, für den ersten Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} f^1(a + [i + \frac{1}{2}]w) &= - 64937.79 \\ M_1^3 f^{III}(a + [i + \frac{1}{2}]w) &= - 141.02 \\ M_1^5 f^V(a + [i + \frac{1}{2}]w) &= - 1.33 \\ M_1^7 f^{VII}(a + [i + \frac{1}{2}]w) &= - 0.01 \\ 10^7 \cdot \frac{d\xi}{d\tau} &= - 65080.15 \end{aligned}$$

Für den zweiten Differentialquotienten stellt sich die Rechnung wie folgt:

$$\begin{aligned} f^{II}(a + [i + \frac{1}{2}]w) &= - 2906.06 \\ M_2^4 f^{IV}(a + [i + \frac{1}{2}]w) &= - 136.19 \\ M_2^6 f^{VI}(a + [i + \frac{1}{2}]w) &= - 8.12 \\ M_2^8 f^{VIII}(a + [i + \frac{1}{2}]w) &= - 0.66 \dots (\text{die 8. Differenz constant vorausgesetzt}). \\ 10^7 \cdot \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= - 3051.03 \end{aligned}$$

Um ein Beispiel für die Anwendung der Formel 6) (pag. 18) zu erhalten, soll der erste Differentialquotient der oben hingeschriebenen ξ Funktionen entwickelt werden für das Datum 1871 Sept. 23. Es ist also, indem man von October 3 als nächstliegenden Werth ausgeht, $u = - 0.25$ anzunehmen; man gelangt hiermit bis an die Grenze der N Tafeln (Tafel I) und man sieht, dass mit derselben Berechtigung als Ausgangspunkt das arithmetische Mittel zweier Argumente, nämlich Sept. 13 hätte gewählt werden können; in der That wird in der Folge von dieser Wahl Gebrauch gemacht werden. Die Rechnung stellt sich wie folgt, indem die 8. Differenz als constant angenommen und überall, wo die Bildung der arithmetischen Mittel auf eine halbe Einheit der 2. Decimale führte, dieselbe fortgelassen wurde:

$d, \dots\dots$	3	5	7
$\log f^d(a+iw)$	3.561131	2 _n 509737	1.64513
$\log N_1^d(-0.25)$	9 _n 131672	8.409656	7 _n 73029

$d, \dots\dots\dots$	4	6	8
$\log f^d(a+iw)$	2.709075	2 _n 24269	1.816
$\log N_1^d(-0.25)$	8 _n 862827	7.97348	7 _n 173

$f^i(a+iw) = -$	65544.73	$f^{ii}(a+iw) = -$	1213.88
$N_1^3(-0.25)f^{iii}(a+iw) = -$	492.95	$N_1^4(-0.25)f^{iv}(a+iw) = -$	37.32
$N_1^5(-0.25)f^{v}(a+iw) = -$	9.54	$N_1^6(-0.25)f^{vi}(a+iw) = -$	1.65
$N_1^7(-0.25)f^{vii}(a+iw) = -$	0.24	$N_1^8(-0.25)f^{viii}(a+iw) = -$	0.10
$S_u = -$	66047.46	$S_g = -$	1252.95
$u S_g = +$	313.24	$\log S_g =$	3 _n 097933
$10^7 \cdot \frac{d\xi}{dt} = -$	65734.22	$\log u =$	9 _n 397940

Es ist hierbei klar, dass die hier und in den folgenden Beispielen logarithmisch ausgeführte Multiplikation von S_g mit u nur der Allgemeinheit halber durchgeführt ist, während in dem speciellen hier vorliegenden Falle natürlich die directe Division von S_g durch 4 kürzer wäre.

Zur Erläuterung der Formel 10) (pag. 19) soll der zweite Differentialquotient der ξ -Funktion für das Datum 1871 Sept. 23, October 3 als Ausgangspunkt genommen, berechnet werden. Man erhält mit Benutzung der Tafel III:

$d, \dots\dots$	4	6	8
$\log f^d(a+iw)$	2.709075	2 _n 24269	1.816
$\log N_2^d(-0.25)$	8 _n 716699	7.78287	6 _n 961

$d, \dots\dots$	5	7
$\log f^d(a+iw)$	2 _n 569737	1.64513
$\log N_2^d(-0.25)$	9 _n 379457	8.73952

$f^{ii}(a+iw) = -$	1213.88	$f^{iii}(a+iw) = +$	3040.25
$N_2^1(-0.25)f^{iv}(a+iw) = -$	26.65	$N_2^3(-0.25)f^v(a+iw) = +$	88.96
$N_2^6(-0.25)f^{vi}(a+iw) = -$	1.06	$N_2^7(-0.25)f^{vii}(a+iw) = +$	2.42
$N_2^8(-0.25)f^{viii}(a+iw) = -$	0.06	$S_g = +$	3731.63
$S_u = -$	1241.65	$\log S_g =$	3.571898
$u S_g = -$	932.91	$\log u =$	9 _n 397940
$10^7 \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = -$	2174.56		

Will man nun dieselben Differentialquotienten beziehungsweise nach S_g und 12 pag. 19, 20 rechnen, so wird man für den ersten Differentialquotienten haben, indem man beachtet, dass der Ausgangspunkt Sept. 13, also $m = +\frac{1}{4}$ anzunehmen ist mit Hilfe der Tafel II:

$d, \dots\dots$	3	5	7
$\log f^d (a + [i + \frac{1}{2}] w)$	3.529478	2 _n 45321	1.0577
$\log M_1^d (+0.25)$	8 _n 017729	6.97498	6 _n 1103
$d, \dots\dots$	4	6	8
$\log f^d (a + [i + \frac{1}{2}] w)$	2.815398	2 _n 25665	1.8162
$\log M_1^d (+0.25)$	9 _n 206482	8.62283	7 _n 9665
$f^I (a + [i + \frac{1}{2}] w) = -$	64937.79	$f^{II} (a + [i + \frac{1}{2}] w) = -$	2906.06
$M_1^3 (+0.25) f^{III} (a + [i + \frac{1}{2}] w) = -$	35.25	$M_1^4 (+0.25) f^{IV} (a + [i + \frac{1}{2}] w) = -$	129.38
$M_1^5 (+0.25) f^V (a + [i + \frac{1}{2}] w) = -$	0.27	$M_1^6 (+0.25) f^{VI} (a + [i + \frac{1}{2}] w) = -$	7.58
$M_1^7 (+0.25) f^{VII} (a + [i + \frac{1}{2}] w) =$	0	$M_1^8 (+0.25) f^{VIII} (a + [i + \frac{1}{2}] w) = -$	0.61
$S_u = -$	64973.31	$S_g = -$	3043.63
$m S_g = -$	760.91	$\log S_g =$	3 _n 483392
$10^7 \cdot \frac{d\xi}{dt} = -$	65734.22	$\log m =$	9.397940

Für den zweiten Differentialquotienten für dasselbe Datum hat man zu rechnen nach 12) (pag. 20) unter Zuziehung der Tafel IV :

$d, \dots\dots$	4	6	8
$\log f^d (a + [i + \frac{1}{2}] w)$	2.815398	2 _n 25665	1.8162
$\log M_2^d (+0.25)$	9 _n 248178	8.55646	7 _n 8908
$d, \dots\dots$	5	7	
$\log f^d (a + [i + \frac{1}{2}] w)$	2 _n 45321	1.0577	
$\log M_2^d (+0.25)$	9 _n 05912	8.2338	
$f^{II} (a + [i + \frac{1}{2}] w) = -$	2906.06	$f^{III} (a + [i + \frac{1}{2}] w) = +$	3384.37
$M_2^4 (+0.25) f^{IV} (a + [i + \frac{1}{2}] w) = -$	115.76	$M_2^5 (+0.25) f^V (a + [i + \frac{1}{2}] w) = +$	32.53
$M_2^6 (+0.25) f^{VI} (a + [i + \frac{1}{2}] w) = -$	6.50	$M_2^7 (+0.25) f^{VII} (a + [i + \frac{1}{2}] w) = +$	0.20
$M_2^8 (+0.25) f^{VIII} (a + [i + \frac{1}{2}] w) = -$	0.51	$S_g = +$	3417.10
$S_u = -$	3028.83	$\log S_g =$	3.533658
$m S_g = +$	854.28	$\log m =$	9.397940
$10^7 \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = -$	2174.55		

Vergleicht man die nach den beiden Formelsystemen erhaltenen Resultate, so wird man die befriedigendste Uebereinstimmung finden.

Schliesslich sollen die Formeln 16) und 17) (pag. 26, 27) an dem gewählten Beispiele erläutert werden; indem man 1871 Octob. 3 als Ausgangspunkt annimmt und sich überall auf die zweite Decimale beschränkt, stellt sich die Rechnung wie folgt:

d	=	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^d (a + i w)$	= -	65544.73	- 1213.88	+ 3640.25	+ 511.77	- 371.36	- 174.86	+ 44.17	+ 65.50
$N_d^{(2+d)} f^{(2+d)} (a + i w) = -$		606.71	- 42.65	+ 92.84	+ 29.14	- 14.72	- 16.37		
$N_d^{(4+d)} f^{(4+d)} (a + i w) = -$		12.38	- 1.94	+ 2.58	+ 1.91				
$N_d^{(6+d)} f^{(6+d)} (a + i w) = -$		0.32	- 0.12						
		- 66164.14	+ 1258.59	+ 3735.67	+ 542.82	- 386.08	- 191.23	+ 44.17	+ 65.50
Divisor		1	2	6	24	120	720	5040	40320

Dividirt man durch die entsprechenden als Divisoren angesetzten Factoriellen, so wird, wenn man auch hier nicht über die 2. Decimale hinausgeht, indem man bei solchen Entwicklungen t selten die Einheit überschreiten lässt:

$$\xi = + 8119.85 - 66164.14 t \left. \begin{array}{l} - 629.29 t^2 \\ + 622.61 t^3 \\ + 22.62 t^4 \\ - 3.22 t^5 \\ - 0.27 t^6 \\ + 0.01 t^7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } t \text{ gilt als Einheit 40 Tage;} \\ t = 0 \text{ für 1871 Oct. 3.} \end{array}$$

Als Probe kann man den Werth ξ für Aug. 24 ($t = -1$) und Novbr. 12 ($t = +1$) berechnen; man erhält

$$\begin{aligned} \text{Aug. 24} &= + 73057.65 \\ \text{Nov. 12} &= - 58031.83. \end{aligned}$$

was mit den zu Grunde gelegten Werthen hinreichend nahe stimmt.

Nimmt man aber als Ausgangspunkt 1871 Septbr. 13, so hat man nach Formel 17) pag. 27 zu rechnen:

$d.$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^d(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	+ 40588.74	- 64937.79	- 2906.06	+ 3384.37	+ 653.73	- 283.93	- 180.57	+ 11.42	+ 65.50
$M_d^{(2+d)} f^{(2+d)}(a + [i + \frac{1}{2}]w) +$	363.26	- 141.02	- 136.19	+ 35.49	+ 52.67	- 2.38	- 24.56		
$M_d^{(4+d)} f^{(4+d)}(a + [i + \frac{1}{2}]w) +$	15.32	- 1.33	- 8.12	+ 0.22	+ 4.81				
$M_d^{(6+d)} f^{(6+d)}(a + [i + \frac{1}{2}]w) +$	0.88	- 0.01	- 0.66						
$M_d^{(8+d)} f^{(8+d)}(a + [i + \frac{1}{2}]w) +$	0.07								
	+ 40968.27 - 65080.15 + 3051.03 + 3420.08 + 711.21 - 286.31 - 205.13 + 11.42 + 65.50								
Divisor	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320

$$\text{Es ist also } \xi = + 40968.27 - 65080.15 t \left. \begin{array}{l} - 1525.51 t^2 \\ + 570.01 t^3 \\ + 29.63 t^4 \\ - 2.39 t^5 \\ - 0.28 t^6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } t \text{ gilt als Einheit 40 Tage;} \\ t = 0 \text{ für 1871 Sept. 13} \end{array}$$

Rechnet man als Probe die Werthe der Funktion für Aug. 24 ($t = -0.5$) und October 3 ($t = +0.5$) so findet sich in guter Uebereinstimmung

$$\begin{aligned} \text{Aug. 24} &= + 73057.64 \\ \text{Octob. 3} &= + 8119.84. \end{aligned}$$

§. 5. Ermittlung der numerischen Integrale einer Funktion.

A. Einfache Integrale.

Integriert man die Gleichung 4) (pag. 15), nachdem man links mit

$$dl = d(a + (i + n)w),$$

rechts mit dem gleichwerthigen

$$w dn$$

multipliziert hat, so findet sich sogleich

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \int_a^{a+iw} f(a + (i+n)w) dl &= n f(a + iw) + \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} n^{2p}}{2^{2(d-p)} (2d-1)! 2^p} C\{2^2, 4^2, \dots, 2d-2, 2\} f^{(2d-1)}(a + iw) \\ &+ \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} n^{2p+1}}{2^{2(d-p)} (2d)! 2^{p+1}} C\{2^2, 4^2, \dots, 2d-2, 2\} f^{(2d)}(a + iw) + J_n^{-1}, \quad 1 \end{aligned}$$

wobei unter J_n^{-1} die Integrationsconstante zu verstehen ist. Es ist klar, dass bei dem vorliegenden Probleme die Integration zwischen bestimmten Grenzen nur eine praktische Bedeutung hat, dass demnach, wenn man sich auf die einfache Integration beschränkt, die Integrationsconstante aus dem Resultate herausfällt; geht man aber auf die doppelten und mehrfachen (eigentlich iterirten) Integrale über, so wird man die Bestimmung von J_n^{-1} nicht umgehen können. Zu ihrer Bestimmung kann man leicht die Bedingung heranziehen, dass für $n = 0$

$$J_n^{-1} = \frac{1}{w} \int_a^{a+iw} f(a + (i+n)w) dl, \quad 2$$

d. h. die Integrationsconstante J_n^{-1} erhält stets den Werth des Integralen, den dasselbe für die Grenze $a + iw$ annimmt, eine Bedingung, die weiter unten eine Bestimmung der Constante ermöglichen wird.

Behandelt man in ähnlicher Weise die Gleichung 5) (pag. 15) und beachtet, dass

$$dl = d(a + (i + n)w) + d(a + (i + \frac{1}{2} + m)w) = w dm,$$

so wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \int_a^{a+iw} f(a + (i+n)w) dl &= m f(a + (i + \frac{1}{2})w) + \\ &+ \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} m^{2p}}{2^{2(d-p)} (2d-1)! 2^p} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3, 2\} f^{(2d-1)}(a + (i + \frac{1}{2})w) + \\ &+ \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} m^{2p+1}}{2^{2(d-p)} (2d)! 2^{p+1}} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-1, 2\} f^{(2d)}(a + (i + \frac{1}{2})w) + J_m^{-1}. \quad 3 \end{aligned}$$

Für die Auswerthung der Integrationsconstante hat man, ähnlich wie früher, für $m = 0$ die Bedingung

$$J_m^{-1} = \frac{1}{w} \int_a^{a+i+\frac{1}{2}w} f(a + (i+n)w) dl. \quad 4$$

Es sollen vorerst die einfachen bestimmten Integrale, die sich aus den obigen Relationen (1) und (3) (pag. 32) ergeben, vorgenommen werden. Man wird zuerst zu beachten haben, dass man sowohl für n als auch für m ohne Nachtheil für die Genauigkeit der Rechnung die Grenzen -1 und $+1$ nicht überschreiten darf, denn sonst würde jeder Fehler in dem Differenzwerthe vergrößert auf das Resultat übergehen. Nimmt man aber für n und m als Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$, was offenbar möglich ist, so wird dadurch die Genauigkeit der numerischen Rechnung wesentlich gefördert erscheinen.

Die obigen Formeln wird man im Allgemeinen nur anzuwenden haben, sobald für n und m willkürliche Angaben vorliegen, dieselben werden sich aber wesentlich vereinfachen, wenn man, wie dies meistens in der Anwendung gestattet ist, nur von speciellen Werthen für n und m Gebrauch macht. Setzt man die Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ ein, so findet sich sofort aus 1) und 3) (pag. 32):

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \int_{a+[i-\frac{1}{2}]w}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(a+[i+n]w) dl &= f(a+iw) + \\ &+ \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C \{ 1^2, 2^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2 \}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f^{(2d)}(a+iw) \end{aligned} \quad 5$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \int_{a+iw}^{a+[i+1]w} f(a+[i+n]w) dl &= f(a+(i+\frac{1}{2})w) + \\ &+ \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C \{ 1^2, 2^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2 \}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f^{(2d)}(a+(i+\frac{1}{2})w) \end{aligned} \quad 6$$

Man wird aber in der Anwendung meist gezwungen sein, die Integration auf viel weitere Grenzen auszudehnen, als dies oben geschehen ist, und zu diesem Ende wird man für i die Reihe der ganzen Zahlen eintreten lassen und sich erinnern, dass für die vorgelegte continuirliche Function ist:

$$\begin{aligned} \int_{a-\frac{1}{2}w}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(l) dl &= \int_{a-\frac{1}{2}w}^{a+\frac{1}{2}w} f(l) dl + \int_{a+\frac{1}{2}w}^{a+\frac{3}{2}w} f(l) dl + \dots + \int_{a+[i-\frac{1}{2}]w}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(l) dl \\ \int_a^{a+iw} f(l) dl &= \int_a^{a+w} f(l) dl + \int_{a+w}^{a+2w} f(l) dl + \dots + \int_{a+(i-1)w}^{a+iw} f(l) dl \end{aligned}$$

Wenn man von diesen Relationen in 5) und 6) Gebrauch macht und beachtet, dass durch diese Zerlegung die Factoren der Differenzwerthe nicht abgeändert werden und dass nur die Differenzwerthe selbst verschieden sind, je nach der Wahl der Grenze, so erhält man Summen von Differenzwerthen derselben Ordnung mit einem gemeinsamen Factor multiplicirt. erinnert man sich aber der Relation 5) (pag. 5), wo allgemein nachgewiesen wurde, dass:

$$f^l(a+[i_n+k]w) - f^l(a+[i+k]w) = \sum_{i=i_n}^{i=i_n-1} f^{l+i}(a+[i+k+\frac{1}{2}]w)$$

so findet sich sofort statt der Relationen 5) und 6) (pag. 33):

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \int_a^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(a+[i+n]w) dl &= f(a+[i+\frac{1}{2}]w) + \\ &+ \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C' \left\{ \frac{d}{2}, 2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2 \right\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f(a+[i+\frac{1}{2}]w) \\ &- f(a-\frac{1}{2}w) - \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C' \left\{ \frac{d}{2}, 2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2 \right\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f(a-\frac{1}{2}w) \end{aligned} \quad 7)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \int_a^{a+iw} f(a+[i+n]w) dl &= f(a+iw) + \\ &+ \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C' \left\{ \frac{d}{2}, 1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2 \right\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f(a+iw) \\ &- f(a) - \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C' \left\{ \frac{d}{2}, 1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2 \right\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f(a) \end{aligned} \quad 8)$$

Die Bestimmung der einfachen Integrale erscheint demnach mit Hilfe der ersten summirten Reihe ausgeführt; die erste summirte Reihe wird man aber ohne Schwierigkeiten bilden können, sobald nur ein Werth in derselben, etwa $f(a-\frac{1}{2}w)$, gegeben ist, wobei man wegen der Formel 8) sich zu erinnern haben wird, dass ist

$$f(a-\frac{1}{2}w) = f(a) - \frac{1}{2}f'(a).$$

Die Wahl für diesen Anfangswerth in der ersten summirten Reihe ist völlig willkürlich, wie man dies auch sofort bei Betrachtung der Formeln 7) und 8) sieht, denn durch die nachträglich nothwendige Subtraction von $f(a-\frac{1}{2}w)$ oder $f(a)$ verschwindet der angenommene Werth der Anfangsconstante im Integrationsresultate. Es möchte auf den ersten Anblick am bequemsten erscheinen, derselben den Werth $= 0$ zu ertheilen, und in der That wird diese Wahl häufig genug angewendet werden dürfen. Doch in der Anwendung, die bei den astronomischen Rechnungen von dieser Methode gemacht wird, wird es meist bequem sein, diese willkürliche Anfangsconstante so zu wählen, dass das Integral für eine bestimmte untere Grenze, etwa für das Argument oder das Mittel zweier Nachbarargumente, verschwindet; für den ersten Fall wird man haben:

$$f(a-\frac{1}{2}w) = - \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C' \left\{ \frac{d}{2}, 2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2 \right\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f(a-\frac{1}{2}w) \quad 9)$$

und für den zweiten Fall:

$$f(a-\frac{1}{2}w) = - \frac{1}{2}f'(a) - \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C' \left\{ \frac{d}{2}, 1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2 \right\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f'(a) \quad 10)$$

womit also an die Anfangsconstante die oben gestellten Bedingungen geknüpft sind.

Bezeichnet man die Coëfficienten, mit denen die Differenzwerthe verbunden sind, in der Formel 7) mit P , in der Formel 8) (pag. 34) mit Q und ertheilt diesen Buchstaben 2 Index, wo der obere den Hinweis auf den Differenzwerth, der untere den Hinweis auf die Anzahl der Integrationen enthält, also in dem vorliegenden Falle durchaus der Einheit gleich zu setzen ist, so wird man die folgenden Formeln für die Combinationen der verschiedenen Grenzen haben:

Grenzen: $a - \frac{1}{2}w$ und $a + [i + \frac{1}{2}]w$

$$w f(a - \frac{1}{2}w) = -w \{ P_1^1 f^1(a - \frac{1}{2}w) + P_1^3 f^3(a - \frac{1}{2}w) + P_1^5 f^5(a - \frac{1}{2}w) + \dots \}$$

$$\int_{a - \frac{1}{2}w}^{a + [i + \frac{1}{2}]w} f(l) dl = w \{ f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + P_1^1 f^1(a + [i + \frac{1}{2}]w) + P_1^3 f^3(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots \} A_1$$

Grenzen: a und $a + iw$

$$w f(a - \frac{1}{2}w) = -w \{ \frac{1}{2} f(a) + Q_1^1 f^1(a) + Q_1^3 f^3(a) + Q_1^5 f^5(a) + \dots \}$$

$$\int_a^{a+iw} f(l) dl = w \{ f(a + iw) + Q_1^1 f^1(a + iw) + Q_1^3 f^3(a + iw) + Q_1^5 f^5(a + iw) + \dots \} B_1$$

Grenzen: $a - \frac{1}{2}w$ und $a + iw$

$$w f(a - \frac{1}{2}w) = -w \{ P_1^1 f^1(a - \frac{1}{2}w) + P_1^3 f^3(a - \frac{1}{2}w) + P_1^5 f^5(a - \frac{1}{2}w) + \dots \}$$

$$\int_{a - \frac{1}{2}w}^{a+iw} f(l) dl = w \{ f(a + iw) + Q_1^1 f^1(a + iw) + Q_1^3 f^3(a + iw) + Q_1^5 f^5(a + iw) + \dots \} C_1$$

Grenzen: a und $a + [i + \frac{1}{2}]w$

$$w f(a - \frac{1}{2}w) = -w \{ \frac{1}{2} f(a) + Q_1^1 f^1(a) + Q_1^3 f^3(a) + Q_1^5 f^5(a) + \dots \}$$

$$\int_a^{a + [i + \frac{1}{2}]w} f(l) dl = w \{ f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + P_1^1 f^1(a + [i + \frac{1}{2}]w) + P_1^3 f^3(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots \} D_1$$

Die Bestimmung der Coëfficienten Q und P hat keine Schwierigkeit, wenn man die eben hingeschriebenen Formeln mit 7) und 8) (pag. 34) vergleicht; es wird sein:

$$P \left(\begin{smallmatrix} 2d-1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C \{ 2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2 \}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)}$$

$$Q \left(\begin{smallmatrix} 2d-1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C \{ 1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2 \}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} \quad (11)$$

Die numerischen Werthe dieser Coëfficienten sind in der hinten angehängten Tafel V aufgenommen, in einer Ausdehnung, die weit die Grenzen der gewöhnlichen Anwendung übertrifft, indem bis zum 20. Differenzwerthe vorgeschritten wurde. Ausserdem sind die Logarithmen der Coëfficienten 20stellig angesetzt, wobei die Unsicherheit der letzten Stelle eine Einheit betragen kann. Die diesbezüglichen

Rechnungen sind mit grosser Sorgfalt unter Benützung zahlreicher Controllen durch die Herren Anton und Schram durchgeführt worden.

Um die eminenten Vortheile dieser Methode anschaulich zu machen, will ich dieselbe zur Berechnung der Gammafunction:

$$\int_0^t e^{-u} du$$

anwenden. Man gelangt durch eine sehr einfache Rechnung zur numerischen Tafel dieses bestimmten Integrales, während die Anwendung der Reihen zur Auswerthung dieses Integrales ein sehr beschwerliches Verfahren ist; in der That verdient die eben auseinander gesetzte Methode zur Auswerthung numerischer bestimmter Integrale viel häufiger angewendet zu werden, als dies sonst geschieht, besonders wenn es sich um die Anlegung einer Integraltafel handelt. Ich werde die Rechnung so anlegen, dass nur Fehler von wenigen Einheiten in der 10. Decimale auftreten können, eine Genauigkeit, die durch Anwendung der sonst üblichen Reihen nur mit einem ungeheuren Aufwande von Arbeit erlangt werden könnte; ausserdem habe ich das Intervall ($w = 0.1$) verhältnissmässig sehr gross gewählt, um zu zeigen, wie bald der Einfluss der höheren Differenzwerthe verschwindend klein wird. Bei der symmetrischen Form der Function ist es klar, dass die Anfangsconstante gleich 0 gesetzt werden kann, wenn man die Functionen für die Argumente 0.05, 0.15, 0.25 berechnet. Um nicht nachträglich bei der Bildung des Integrals mit w multipliciren zu müssen, habe ich diese Multiplication sofort bei der Berechnung der Differentialquotienten, die in der mit $w e^{-u} = f$ überschriebenen Columnne angesetzt sind, ausgeführt und das folgende Zahlensystem erhalten, wobei jedoch wegen des Formates die 8. und 9. Differenzwerthe fortgelassen werden mussten, die übrigens für die Integration keinen wesentlichen Beitrag mehr leisten und leicht von Fall zu Fall, wenn zur Uebung ein Beispiel ausgerechnet wird, nachgetragen werden können.

Mit Hilfe dieser Summations- und Differenztafel ist es ein Leichtes, den Werth des Integrales für eine obere Grenze, die zwischen oder auf ein Argument fällt, anzugeben, indem die untere Grenze der gewählten Bestimmung der Anfangsconstante nach nothwendig = 0 anzunehmen ist; so erhält man z. B. für $t = 0.50$ nach der Formel A_1) (pag. 35):

f	$(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	$= +$	0.461 6059 810
$P_1^1 f^I$	$(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	$= -$	3238 249.8
$P_1^3 f^{III}$	$(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	$= -$	11 375.6
$P_1^5 f^V$	$(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	$= -$	118.3
$P_1^7 f^{VII}$	$(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	$= -$	2.1
<hr/>			
		$\int_{t=0}^{t=0.5}$	$e^{-u} du = +$
			0.461 2810 064

für $t = 0.75$ nach der Formel C_1) (pag. 35):

Arg. = t	f	$we^{-it} = f$	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^V	f^{VI}	f^{VII}
0.05	+0.000 0000 000	+0.099 7503 122	-0 0000 000	-1 9751 885	0000 000	+1165 596	000 000	-113 887	00 000
0.15	0.099 7503 122	+0.097 7751 237	-1 9751 885	-1 8586 289	+1165 596	+1051 709	-113 887	-98 407	+15 480
0.25	0.197 5254 359	+0.093 9413 063	-3 8338 174	-1 6368 984	+2217 305	+839 415	-212 294	-70 150	+28 257
0.35	0.291 4667 422	+0.088 4705 905	-5 4707 158	-1 3312 264	+3056 720	+556 971	-282 444	-33 884	+36 266
0.45	0.379 9373 327	+0.081 6686 483	-6 8019 422	-9698 573	+3613 691	+240 643	-316 328	+4 395	+38 279
0.55	0.461 6059 810	+0.073 8968 488	-7 7717 995	-5844 239	+3854 334	-71 290	-311 933	+38 873	+34 478
0.65	0.535 5028 298	+0.065 5406 254	-8 3562 234	-2061 195	+3783 044	-344 350	-273 060	+64 757	+25 884
0.75	0.601 0434 552	+0.056 9782 825	-8 5623 429	+1377 499	+3438 694	-552 653	-208 303	+79 205	+14 448
0.85	0.658 0217 377	+0.048 5536 895	-8 4245 930	+4263 540	+2886 041	-681 751	-129 098	+81 642	+2 437
0.95	0.706 5754 272	+0.040 5554 505	-7 9982 390	+6467 830	+2204 290	-729 207	-47 456	+73 403	-8 239
1.05	0.747 1308 777	+0.033 2039 945	-7 3514 560	+7942 913	+1475 083	-703 260	+25 947	+57 471	-15 932
1.15	0.780 3348 722	+0.026 6468 298	-6 5571 647	+8714 736	+771 823	-619 842	+83 418	+37 397	-20 074
1.25	0.806 9817 020	+0.020 9611 387	-5 6856 911	+8866 717	+151 981	-499 027	+120 815	+16 882	-20 515
1.35	0.827 9428 407	+0.016 1621 193	-4 7990 194	+8519 671	-347 046	-361 330	+137 697	-1 227	-18 109
1.45	0.844 1049 600	+0.012 2150 670	-3 9470 523	+7811 295	-708 376	-224 860	+136 470	-14 915	-13 688
1.55	0.856 3691 712	+0.009 0491 442	-3 1659 228	+6878 059	-933 236	-103 305	+121 555	-23 442	-8 527
1.65	0.871 9401 985	+0.006 5710 273	-2 4781 169	+5841 518	-1036 541	-5 192	+98 113	-26 948	-3 506
1.75	0.876 6172 607	+0.004 6770 622	-1 8939 651	+4799 785	-1041 733	+65 973	+71 165	-26 342	+606
1.85	0.879 8803 363	+0.003 2630 756	-1 4139 866	+3824 025	-975 760	+110 796	+44 823	-22 876	+3 466
1.95	0.882 1118 278	+0.002 2314 915	-1 0315 841	+2959 061	-864 964	+132 743	+21 947	-17 848	+5 028
2.05	0.884 1118 278	+0.001 4958 135	-7356 780	+2226 840	-732 221	+136 842	+4 099	-12 414	+5 434
2.15	0.883 6076 413	+0.000 9828 195	-5129 940	+1631 461	-595 379	+128 527	-8 315	-7 382	+5 032
2.25	0.884 5904 608	+0.000 6329 716	-3498 479	+1164 609	-466 852	+112 830	-15 697	-3 293	+4 089
2.35	0.885 2234 324	+0.000 3995 846	-2333 870	+810 587	-354 022	+93 840	-18 990	+286	+3 007
2.45	0.885 6230 170	+0.000 2472 563	-1523 283	+550 405	-260 182	+74 564	-19 276	+1 615	+1 901
2.55	0.885 8702 733	+0.000 1499 685	-972 878	+364 787	-185 618	+56 903	-17 661	+2 631	+1 016
2.65	0.886 0202 418	+0.000 0891 594	-608 091	+236 072	-128 715	+41 873	-15 030	+2 942	+311
2.75	0.886 1094 012	+0.000 0519 575	-372 019	+149 230	-86 842	+29 785	-12 088	+2 829	+113
2.85	0.886 1613 587	+0.000 0296 786	-222 789	+92 173	-57 057	+20 526	-9 259	+2 458	+371
2.95	0.886 1910 373	+0.000 0166 170	-130 616	+55 642	-36 531	+13 725	-6 801	+1 994	+464
3.05	0.886 2076 543	+0.000 0091 196	-74 974	+32 836	-22 806	+8 918	-4 807	+1 521	+473
3.15	0.886 2167 739	+0.000 0049 058	-42 138	+18 948	-13 888	+5 632	-3 286	+1 119	+402
3.25	0.886 2216 797	+0.000 0025 868	-23 190	+10 692	-8 256	+3 465	-2 167	+780	+339
3.35	0.886 2242 665	+0.000 0013 370	-12 498	+5 901	-4 791	+2 078	-1 387	+516	+264
3.45	0.886 2256 035	+0.000 0006 773	-6 597	+3 188	-2 713	+1 207	-871	+359	+157
3.55	0.886 2262 808	+0.000 0003 364	-3 409	+1 682	-1 506	+695	-512	+197	+162
3.65	0.886 2266 172	+0.000 0001 637	-1 727	+871	-811	+380	-315	+144	+53
3.75	0.886 2267 809	+0.000 0000 781	-856	+440	-431	+209	-171	+72	+72
3.85	0.886 2268 590	+0.000 0000 365	-416	+218	-222	+110	-99	+45	+37
3.95	0.886 2269 122	+0.000 0000 167	-198	+106	-112	+56	-27	+27	+14
4.05	0.886 2269 197	+0.000 0000 075	-92	+50	-56	+29	-14	+13	+8
4.15	0.886 2269 230	+0.000 0000 033	-42	+23	-27	+15	-9	+5	
4.25	0.886 2269 244	+0.000 0000 014	-19	+11	-12	+6			
4.35	0.886 2269 250	+0.000 0000 006	-8	+5	-6	+2			
4.45	0.886 2269 253	+0.000 0000 003	-3	+1	-4				
4.55	0.886 2269 254	+0.000 0000 001	-2	+1	-0				
4.65	0.886 2269 254	+0.000 0000 000	-1	+1					

$$\begin{array}{rcl}
 f(a+iw) & = & + \quad 0.629 \ 5325 \ 964.5 \\
 Q_1^1 f^1(a+iw) & = & + \quad \quad \quad 7077 \ 889.9 \\
 Q_1^3 f^{\text{III}}(a+iw) & = & + \quad \quad \quad 48 \ 313.9 \\
 Q_1^5 f^{\text{V}}(a+iw) & = & + \quad \quad \quad 532.8 \\
 Q_1^7 f^{\text{VII}}(a+iw) & = & + \quad \quad \quad 5.8 \\
 Q_1^9 f^{\text{IX}}(a+iw) & = & + \quad \quad \quad 0.1
 \end{array}$$

$$\int_{t=0}^{t=0.75} e^{-t} dt = + \quad 0.630 \ 2452 \ 707$$

Will man aber für die untere Grenze nicht 0 haben, sondern ebenfalls einen Werth, der entweder mit einem Argumentwerthe oder dem Mittelwerthe übereinkommt, so wird man einfach nach A_1 oder D_1 einerseits, und B_1 oder C_1 (pag. 35) andererseits, den Werth des Integrales für diese Grenze berechnen und von der oberen Grenze in Abzug bringen; es wird also sofort mit Benützung der Zahlen der obigen Beispiele:

$$\int_{t=0.50}^{t=0.75} e^{-t} dt = + \quad 0.168 \ 9642 \ 643 .$$

Wendet man alternirend die Formeln A_1 und C_1 an, indem man von Intervall zu Intervall fortschreitet, so gelangt man zu der im Anhange als Tafel X enthaltenen Integraltafel, die ich deshalb in extenso mittheile, da dieses Integral in so vielen Untersuchungen eine wichtige Rolle spielt und eine Tafel für dasselbe in der hier gegebenen Genauigkeit meines Wissens nicht besteht. Indem so durch die Formeln A_1 C_1 die Werthe des Integrals von 0.05 zu 0.05 des Argumentes erhalten waren, wurden die zwischenliegenden Werthe für das Intervall 0.01 durch einfache Interpolation abgeleitet.

Schliesslich kann in diesem Falle die Richtigkeit der Rechnung leicht geprüft werden, denn das vorgelegte Integral zwischen den Grenzen 0 und ∞ nimmt den Werth $\frac{1-\pi}{2}$ an; der numerische Werth desselben ändert sich aber nicht mehr von der Grenze 4.6 ab innerhalb der gesetzten Genauigkeitsgrenze. Es ist also

$$\int_0^{\infty} e^{-t} dt = 0.886 \ 2269 \ 254 ,$$

während andererseits bis auf die 11. Decimale richtig ist

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.886 \ 2269 \ 254.5 ,$$

so dass der durch die numerische Integration erhaltene Werth auf eine halbe Einheit der letzten mitgenommenen Stelle stimmt, was eine bessere Uebereinstimmung ist, als im Allgemeinen erwartet werden kann; doch würde eine Abweichung von 4 Einheiten bei sorgfältiger Rechnung wenig Wahrscheinlichkeit für sich haben, denn bezeichnet man die Anzahl sämmtlicher Werthe mit n und beachtet, dass durchschnittlich die Unsicherheit der letzten Stelle des angesetzten Funktionswerthes

etwa 0.25 Einheiten beträgt, so ist der durchschnittlich zu erwartende Fehler bei der Anwendung der einfachen Integration:

$$u = \frac{\sqrt{w}}{4},$$

also im vorgelegten Falle, wo $w = .16$ anzunehmen ist:

$$u = 1.7.$$

Man wird demnach behaupten dürfen, dass selbst am Ende in der angeführten Integraltafel die eingesetzten Werthe selten um 2 oder mehr Einheiten falsch sein werden; ein Fehler von 1 Einheiten hat aber kaum mehr eine beträchtliche Wahrscheinlichkeit für sich.

Es kann aber unter Umständen erwünscht sein, von den oben angenommenen bestimmten speciellen Grenzen abzugehen, wobei vorausgesetzt ist, dass hiebei die Herstellung einer Integraltafel selbst nicht beabsichtigt ist. Man wird ähnlich, wie dies bei der Differentiation hervorgehoben wurde, stets jene Form anwenden, die es ermöglicht, dass man n oder m kleiner als $\pm \frac{1}{4}$ anzunehmen im Stande ist, um die möglichste Convergenz in die Formel zu bringen, wobei also von den Formeln 1) und 3) (pag. 32) Gebrauch zu machen wäre. Die Rechnung würde aber recht beschwerlich werden und es wäre viel einfacher, in der Nähe der Grenzen durch alternirende Anwendung der Gleichung A_i und C_i (pag. 35) sich kleine Integraltafeln herzustellen, nach denen man den Werth des Integrales für die obere und untere Grenze nach den Regeln der Interpolation ermittelt. Es wird sich aber wieder ein Ausweg finden lassen, der in bequemerer Weise das Ziel erreichen lässt. Es sei die vorgesteckte Grenze so gelegen, dass die Grösse n vortheilhaft wird ($n < \pm \frac{1}{4}$); es liegt also das geforderte Argument näher an einem berechneten Argumentwerthe als an dem Mittel der letztern. Man wird dem entsprechend das Integral nach Formel C_i bis zum Argumentwerthe bestimmen und dann die erforderliche Correction hinzufügen. Es wird also sein:

$$\int_a^{a+i+n|w} f(l) dl = w \left\{ f(a+iw) + Q_1^1 f'(a+iw) + Q_1^3 f'''(a+iw) + \dots \right\} + \int_{a+iw}^{a+i+n|w} f(l) dl + J_1, \quad (12)$$

wo J_1 eine willkürliche Integrationsconstante ist und nach Einsetzung der Grenzen verschwindet; ich will auf dieselbe daher nicht weiter Rücksicht nehmen. Multiplieirt man die Gleichung 16) pag 26 links mit dl , rechts mit $w dn$, was nach der Eingangs dieses Paragraphen gemachten Auseinandersetzung erlaubt ist, so ergibt sich, wenn man integrirt:

$$\begin{aligned} \int f(a+[i+n]w) dl = w & \left[n f(a+iw) + \frac{n^2}{1 \cdot 2} \left\{ f'(a+iw) + N_1^3 f'''(a+iw) + N_1^5 f^{(5)}(a+iw) + \dots \right\} \right. \\ & + \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left\{ f''(a+iw) + N_2^4 f^{(4)}(a+iw) + N_2^6 f^{(6)}(a+iw) + \dots \right\} \\ & + \frac{n^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left\{ f'''(a+iw) + N_3^5 f^{(5)}(a+iw) + N_3^7 f^{(7)}(a+iw) + \dots \right\} \\ & + \dots \left. \right] \end{aligned}$$

wobei die Integrationsconstante gleich fortgelassen ist. Setzt man in dieses Integral die Grenzen n und 0 , und führt den so erhaltenen Werth in die Gleichung 12) (pag. 39) ein, so erhält man leicht:

$$\int_0^{a+i+n|w} f(l) dl = w \left[f'(a+iw) + n f''(a+iw) + \right. \\
+ f'''(a+iw) \left\{ Q_1^1 + \frac{n^2}{2} \right\} \\
+ f^{(4)}(a+iw) \left\{ \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right\} \\
+ f^{(5)}(a+iw) \left\{ Q_1^3 + \frac{n^2}{1 \cdot 2} N_1^3 + \frac{n^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right\} \\
+ f^{(6)}(a+iw) \left\{ \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} N_2^4 + \frac{n^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right\} \\
+ f^{(7)}(a+iw) \left\{ Q_1^5 + \frac{n^2}{1 \cdot 2} N_1^5 + \frac{n^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} N_3^5 + \frac{n^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \right\} \\
+ \dots \dots \dots \left. \dots \dots \right] \quad (13)$$

ein Ausdruck, dessen Coefficienten leicht in Tafeln gebracht werden können; doch um die Logarithmen derselben tabuliren zu können, wird es sich empfehlen, in den Coefficienten der geraden Differenzwerthe n^2 als gemeinsamen Factor herauszuheben und zu schreiben:

$$\int_0^{a+i+n|w} f(l) dl = w \left[f'(a+iw) + n f''(a+iw) + Q_1^1(n) f'''(a+iw) + Q_1^3(n) f^{(4)}(a+iw) \right. \\
+ Q_1^5(n) f^{(5)}(a+iw) + \dots + n^3 \left\{ Q_1^2(n) f^{(4)}(a+iw) + Q_1^4(n) f^{(6)}(a+iw) \right. \\
\left. \left. + Q_1^6(n) f^{(7)}(a+iw) + \dots \dots \dots \right\} \right] \quad E_1)$$

wo also $Q_1^1(n)$, $Q_1^3(n)$, $Q_1^5(n)$ die folgende Bedeutung haben werden:

$$\left. \begin{aligned} Q_1^1(n) &= Q_1^1 + \frac{n^2}{1 \cdot 2} \\ Q_1^3(n) &= Q_1^3 + \frac{n^2}{1 \cdot 2} N_1^3 + \frac{n^4}{4!} \\ Q_1^5(n) &= Q_1^5 + \frac{n^2}{1 \cdot 2} N_1^5 + \frac{n^4}{4!} N_3^5 + \frac{n^6}{6!} \\ Q_1^7(n) &= Q_1^7 + \frac{n^2}{1 \cdot 2} N_1^7 + \frac{n^4}{4!} N_3^7 + \frac{n^6}{6!} N_5^7 + \frac{n^8}{8!} \\ \dots \dots \dots \\ Q_1^2(n) &= \frac{1}{3!} \\ Q_1^4(n) &= \frac{1}{3!} N_2^4 + \frac{n^2}{5!} \\ Q_1^6(n) &= \frac{1}{3!} N_2^6 + \frac{n^2}{5!} N_4^6 + \frac{n^4}{7!} \\ Q_1^8(n) &= \frac{1}{3!} N_2^8 + \frac{n^2}{5!} N_4^8 + \frac{n^4}{7!} N_6^8 + \frac{n^6}{9!} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Diese Coëfficienten sind von Herrn F. K. Ginzcl in ähnlicher Weise wie in § 4 die N - und M -Coëfficienten berechnet worden und als Tafel VI. im Anhange aufgenommen. Der constante Coëfficient $Q_1^2(n)$ hat hierbei keine Aufnahme gefunden.

Zu der Gleichung E_1 wäre zu erwähnen, dass die Integrationeconstante fortgelassen werden konnte, weil vorausgesetzt wird, dass eine bestimmte Annahme für die untere Integrationsgrenze gemacht ist. Gewöhnlich wird aber die untere Grenze bestimmten Bedingungen zu genügen haben, die bereits durch die Annahme über $f(a - \frac{1}{2}w)$, der willkürlichen Anfangseconstante, erfüllt sind; wenn dies nicht der Fall ist, so müsste man nach derselben Formel E_1 den Ausdruck für die untere Grenze berechnen und von dem obigen in Abzug bringen.

Der Fall, dass die vorgelegte Grenze näher dem Mittel zweier Argumente liegt, erledigt sich in ähnlicher Weise wie der vorige, man wird hierbei $m < \pm \frac{1}{4}$ zu wählen haben. Es wird zunächst sein

$$\int_a^{a+(i+\frac{1}{2}+m)n} f(l) dl = w \left\{ f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + P_1^1 f'(a + [i + \frac{1}{2}]w) + P_1^3 f'''(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots \right\} + \int_a^{a+[i+\frac{1}{2}+m]n} f(l) dl + J; \quad 15$$

die durch J angezeigte Integrationeconstante beachte ich nicht weiter, weil dieselbe durch die Einführung der untern Grenze, über die aber vorerst gar nichts festgesetzt ist, verschwindet.

Multipliziert man die Gl. 17, (pag. 27) links mit dl , rechts mit $w dm$, was auf dasselbe hinauskommt, und integrirt, so erhält man

$$\begin{aligned} \int f(a + [i + \frac{1}{2} + m]w) dl = w \left\{ m \left\{ f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_0^2 f''(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \right. \right. \\ \left. \left. + M_0^4 f^{IV}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots \right\} \right. \\ \left. + \frac{m^2}{1 \cdot 2} \left\{ f'(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_1^3 f'''(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \right. \right. \\ \left. \left. + M_1^5 f^V(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots \right\} \right. \\ \left. + \frac{m^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left\{ f''(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_2^4 f^{IV}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \right. \right. \\ \left. \left. + M_2^6 f^{VI}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots \right\} \right. \\ \left. \dots \dots \dots \right\} \end{aligned}$$

Setzt man hier die Grenzen m und 0 ein und substituirt in die obige Gleichung 15, so findet sich

$$\begin{aligned} \int_a^{a+(i+\frac{1}{2}+m)n} f(l) dl = w \left\{ f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + m f'(a + [i + \frac{1}{2}]w) \right. \\ \left. + f''(a + [i + \frac{1}{2}]w) \left\{ P_1^1 + \frac{m^2}{2!} \right\} \right. \\ \left. + f'''(a + [i + \frac{1}{2}]w) \left\{ m M_0^2 + \frac{m^3}{3!} \right\} \right. \\ \left. + f^{IV}(a + [i + \frac{1}{2}]w) \left\{ P_1^3 + \frac{m^2}{2!} M_1^3 + \frac{m^4}{4!} \right\} \right\} \quad 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n < \pm \frac{1}{4}, \quad \int f(l) dl = 0 \\
 w^1 f(a - \frac{1}{2}w) = -w \left[(n + \frac{1}{2}) f(a) + Q_1^1(n) f^I(a) + Q_1^3(n) f^{III}(a) + Q_1^5(n) f^V(a) + \dots \right. \\
 \left. + n^3 \left\{ \frac{1}{6} f^{II}(a) + Q_1^4(n) f^{IV}(a) + Q_1^6(n) f^{VI}(a) + \dots \right\} \right] \\
 m \pm < \frac{1}{4}, \quad \int f(l) dl = 0 \\
 w^1 f(a - \frac{1}{2}w) = -w \left[P_1^1(m) f(a - \frac{1}{2}w) + P_1^3(m) f^{III}(a - \frac{1}{2}w) + P_1^5(m) f^V(a - \frac{1}{2}w) + \dots \right. \\
 \left. + m \left\{ f(a - \frac{1}{2}w) + P_1^2(m) f^{II}(a - \frac{1}{2}w) + P_1^4(m) f^{IV}(a - \frac{1}{2}w) + \dots \right\} \right]
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\int f(l) dl = 0} \right\} H_1$$

Die Q_1 -Coëfficienten finden sich in Tafel VI,
 „ P_1 — „ „ „ „ „ „ VII.

Für die Anwendung der vorstehenden Formeln soll abermals das Beispiel der weiter unten folgenden Störungsrechnung für den Planeten Erato entlehnt werden. Aus der Summationstafel für die X-Coordinate findet sich :

	${}^n f$	${}^1 f$	f	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^V	f^{VI}	f^{VII}	f^{VIII}
1872 Mai 30	-281174.16		+13320.20		-1205.10	+418.56	+187.76		-40.87		
Juli 9	-288519.16	-7345.00	+11749.31	-1570.89	-786.54	+468.15	+49.59	-138.17	+21.38	+62.25	-30.13
Aug. 18	-284114.85	+4404.31	+9391.88	-2357.43	-318.39	+400.95	-67.20	-116.79	+53.50	+32.12	-30.52
Sept. 27	-270318.66	+13796.19	+6716.06	-2675.82	+82.56	+400.95	-130.49	-63.29	+55.10	+1.60	-21.06
Nov. 6	-249806.41	+20512.25	+4122.80	-2593.26	+353.02	+270.46	-138.68	-8.19	+35.64	-19.46	-4.63
Dec. 16	-225171.36	+24635.05	+1882.56	-2240.24	+484.80	+131.78	-111.23	+27.45	+11.55	-24.09	+10.12
1873 Jan. 25	-198653.75	+26517.61	+127.12	-1755.44	+505.35	+20.55	+39.00	-2.42	-13.97	+6.81	
März 6	-172009.02	+26644.73	+1122.97	-1250.09	+51.68	-72.23	+36.58	-9.58	-7.16	+6.62	
Apr. 15	-146487.26	+25521.76	-1919.39	-796.42	+453.67	-87.33	+27.00	-9.58	-0.54	+1.88	
Mai 25	-122884.89	+23602.37	-2349.47	-430.08	+366.34	-95.98	+8.65	+16.88	-8.78	+1.34	+1.88
Juli 4	-101631.99	+21252.90	-2509.19	-159.72	+270.36	-87.75	+8.23	+8.10	+3.22	-1.64	
Aug. 13	-82888.28	+18743.71	-2486.30	+22.89	+182.61	-71.42	+16.33	+2.54	+1.58	-0.08	
Sept. 22	-66630.87	+16257.41	-2352.22	+134.08	+111.19	-52.55	+18.87	-1.44	+1.50	+0.37	
Nov. 1	-52725.68	+13905.19	-2159.50	+192.72	+58.64	-35.12	+17.43	-3.92	+1.87		
					+23.52	+13.51		-0.61			

Zu dieser Summationstafel ist in Erinnerung zu bringen, dass für dieselbe als Zeiteinheit 40 Tage gewählt sind. — Wir wollen vorerst durch Anwendung der Formel A_1 (p. 35) eine Integraltafel für die einfachen Integrale zwischen den Grenzen 1872 Oct. 17 bis 1873 Mai 5 herstellen. Man erhält so:

	1872 Oct. 17,	1872 Nov. 26,	1873 Jan. 5,	1873 Feb. 14,	1873 Mz. 26,	1873 Mai 5
${}^1 f(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	+ 20512.250	+ 24635.050	+ 26517.610	+ 26644.730	+ 25521.760	+ 23602.370
$P_1^1 f^I(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	- 108.052	- 93.343	- 73.143	- 52.087	- 33.184	- 17.920
$P_1^3 f^{III}(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	- 0.798	- 0.389	- 0.061	+ 0.153	+ 0.258	+ 0.283
$P_1^5 f^V(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	- 0.003	+ 0.010	+ 0.015	+ 0.014	+ 0.010	+ 0.006
$P_1^7 f^{VII}(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	+ 0.001	+ 0.001	+ 0.001	+ 0.000	+ 0.000	+ 0.000
	+ 20403.40	+ 24541.33	+ 26444.42	+ 26592.81	+ 25488.84	+ 23584.74

Bestimmt man nach Formel B_1 (p. 35) den Werth des einfachen Integrales zwischen den Grenzen 1872 Sept. 27 bis 1873 Mai 25, so wird man haben:

	1872 Sept. 27.	1872 Novb. 6.	1872 Dec. 16.	1873 Jan. 25.	1873 Mz. 6.	1873 April 15.	1873 Mai 25
$\int (a + iw) +$	17154.220 +	22573.650 +	25576.330 +	26581.170 +	26083.245 +	24562.065 +	22427.635
$Q_1^1 f^1 (a + iw) +$	219.545 +	201.396 +	166.487 +	125.230 +	85.271 +	51.104 +	24.575
$Q_1^3 f^{III} (a + iw) +$	5.129 +	3.073 +	1.164 —	0.238 —	1.062 —	1.400 —	1.403
$Q_1^5 f^V (a + iw) +$	0.113 —	0.030 —	0.105 —	0.119 —	0.100 —	0.069 —	0.039
$Q_1^7 f^{VII} (a + iw) —$	0.006 —	0.015 —	0.013 —	0.007 —	0.003	0.000 +	0.002
	+ 17379.00	+ 22778.07	+ 25743.86	+ 26706.04	+ 26167.35	+ 24611.70	+ 22450.77

Stellt man die beiderseitigen Resultate zusammen, so erhält man eine vollständige Tafel für das vorgelegte einfache Integral innerhalb der gestellten Grenzen; ich setze dieselbe hier an, nebst ihren Differenzwerthen, um nachträglich die aus der Formeln G_1 (pag. 42) resultirenden Werthe einer strengen Prüfung unterziehen zu können.

	$40 \frac{d\tilde{z}}{dt}$	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^V	f^{VI}
1872 Septb. 27	+17379.00						
Octb. 17	+20403.40	+3024.40					
Novb. 6	+22778.07	+2374.67	— 649.77	+38.36			
» 26	+24541.33	+1763.26	— 611.41	+50.68	+12.32	— 4.24	
Decb. 16	+25743.86	+1202.53	— 560.73	+58.76	+ 8.08	— 3.81	+0.43
1873 Jan. 5	+26444.42	+ 700.56	— 501.97	+63.03	+ 4.27	— 3.21	+0.60
» 25	+26706.04	+ 261.62	— 438.94	+64.09	+ 1.06	— 2.53	+0.68
Febr. 14	+26592.81	— 113.23	— 374.85	+62.62	— 1.47	— 1.97	+0.56
März 6	+26167.35	— 425.46	— 312.23	+59.18	— 3.44	— 1.32	+0.65
» 26	+25488.84	— 678.51	— 253.05	+54.42	— 4.76	— 0.85	+0.47
April 15	+24611.70	— 877.14	— 198.63	+48.81	— 5.61	— 0.39	+0.46
Mai 5	+23584.74	— 1026.96	— 149.82	+42.81	— 6.00		
» 25	+22450.77	— 1133.97	— 107.01				

Es soll nun zur Erläuterung der Formeln G_1 (p. 42) die directe Berechnung des Integralwerthes für 1873 Jänner 15 vorgenommen werden, wobei beide Formeln verwendet werden sollen. Die Rechnung nach der ersten stellt sich, wenn man $n = -0.25$ setzt, wie folgt:

d	1	3	5	7
$f^d (a + iw)$	—1502.765	—15.565	+37.790	—10.565
$\log f^d (a + iw)$	$3_n 176891$	$1_n 19215$	1.5774	$1_n 0239$
$\log Q_1^d (-0.25)$	$8_n 716699$	8.00997	$7_n 3338$	6.6760

d	4	6	8
$\log f^d (a + iw)$	$1_n 8587$	$0_n 3838$	0.8331
$\log Q_1^d (-0.25)$	$8_n 1261$	7.2469	$6_n 4512$

$$\begin{aligned}
 f(a+iw) &= + 26581.170 & \frac{1}{6}f^{VI}(a+iw) &= + 84.22 \\
 n f(a+iw) &= - 31.780 & Q_1^1 f^{IV}(a+iw) &= + 0.97 \\
 Q_1^1(n) f^I(a+iw) &= + 78.269 & Q_1^6 f^{VI}(a+iw) &= 0 \\
 Q_1^3(n) f^{III}(a+iw) &= - 0.159 & S_g &= + 85.10 \\
 Q_1^5(n) f^V(a+iw) &= - 0.082 \\
 Q_1^7(n) f^{VII}(a+iw) &= - 0.005 \\
 S_u &= + 26627.413 \\
 n^3 S_g &= - 1.331 \\
 \int_{1873 \text{ Jan. } 15} f(l) dl &= + 26626.08
 \end{aligned}$$

Benützt man aber die zweite der Formeln (G_1) (pag. 42), so hat man $m = +0.25$ anzunehmen und erhält:

d	1	3	5	7
$\log f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$3_n244386$	1.3128	1.5911	1_n1452
$\log P_1^d(+0.25)$	8.862827	7_n6118	6.7039	5_n8960

d	2	4	6	8
$f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$+ 195.075$	$- 91.730$	$+ 4.565$	$+ 8.465$
$\log f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	2.69467	1_n9625	0.6594	0.9276
$\log P_1^d(+0.25)$	9_n05912	8.3284	7_n6458	6.9851

$f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$= + 26517.610$	$f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$= + 1004.810$
$P_1^1(m) f^I(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$= - 128.001$	$P_1^2(m) f^{II}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$= - 56.727$
$P_1^3(m) f^{III}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$= - 0.084$	$P_1^4(m) f^{IV}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$= - 1.954$
$P_1^5(m) f^V(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$= + 0.020$	$P_1^6(m) f^{VI}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$= - 0.020$
$P_1^7(m) f^{VII}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$= + 0.001$	$P_1^8(m) f^{VIII}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	$= + 0.008$
S_u	$= + 26389.546$	S_g	$= + 646.117$
$m S_g$	$= + 236.537$		
$\int_{1873 \text{ Jan. } 15} f(l) dl$	$= + 26626.08$		

Man könnte zur Kenntniß des eben ermittelten Werthes auch gelangen, indem man die obige Integraltafel benützt und man findet durch Interpolation aus derselben einen Werth des Integrales, der völlig mit dem obigen Resultate stimmt.

Hätte man die Aufgabe, das einfache Integral für das Datum 1873 Jan. 21 zu ermitteln, so wird man hiezu nur die erste Formel von (G_1) (pag. 42) benütze können. Da $n = -0.10$ ist, findet sich:

d	1	3	5	7
$f^d(a+iw)$	$- 1502.765$	$- 15.565$	$+ 37.790$	$- 10.565$
$\log f^d(a+iw)$	$3_n176891$	1_n19215	1.5774	1_n0239
$\log Q_1^d(-0.10)$	$8_n893947$	8.15983	7_n4760	6.8147

d	4	6	8
$\log f^d(a+iw)$	1_n8587	0_n3838	0.8331
$\log Q_1^d(-0.10)$	8_n1401	7.2643	6_n4701

$$\begin{aligned}
 f(a+iw) &= + 26581.170 & \frac{1}{6}f''(a+iw) &= + 84.22 \\
 n f(a+iw) &= - 12.712 & Q_1^4(n)f^{iv}(a+iw) &= + 1.00 \\
 Q_1^4(n)f^I(a+iw) &= + 117.717 & S_g &= + 85.22 \\
 Q_1^3(n)f^{III}(a+iw) &= - 0.224 \\
 Q_1^5(n)f^V(a+iw) &= - 0.113 \\
 Q_1^7(n)f^{VII}(a+iw) &= - 0.007 \\
 S_u &= + 26685.831 \\
 n^3 S_g &= - 0.085 \\
 \int_{1873 \text{ Jan. } 21} f(l) dl &= + 26685.75
 \end{aligned}$$

welchen Werth die Interpolation in der obigen Integraltafel bestätigt.

Für 1873 Jan. 9 müsste die zweite der Formeln G_1 (pag 42) angewendet werden; es ist $m = +0.10$ und die Rechnung wird:

d	1	3	5	7
$\log f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	3 _n 244386	1.3128	1.5911	1 _n 1452
$\log P_1^d(+0.10)$	8.669007	7 _n 4991	6.6044	5 _n 8020

d	2	4	6	8
$f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 495.075	- 91.730	+ 4.565	+ 8.465
$\log f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	2.694671	1 _n 9625	0.6594	0.9276
$\log P_1^d(+0.10)$	9 _n 091080	8.3634	7 _n 6820	7.0218

$tf(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= + 26517.610	$f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= + 1004.840
$P_1^1(m)f^I(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= - 81.921	$P_1^2(m)f^{II}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= - 61.059
$P_1^3(m)f^{III}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= - 0.065	$P_2^4(m)f^{IV}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= - 2.118
$P_1^5(m)f^V(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= + 0.016	$P_1^6(m)f^{VI}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= - 0.022
$P_1^7(m)f^{VII}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= + 0.001	$P_1^8(m)f^{VIII}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= + 0.009
S_u	= + 26435.641	S_g	= + 941.650
$m S_g$	= + 94.156		

$$\int_{1873 \text{ Jan. } 9} f(l) dl = + 26529.80$$

Die Interpolation in der obigen Integraltafel bestätigt dieses Resultat.

Die eben angeführten Beispiele mögen genügen und zeigen, wie die einfachen Integrale mit Hilfe der Q_1 - und P_1 -Tafeln (Tafel VI. VII) durch eine sehr einfache Rechnung erhalten werden.

In den bisherigen Beispielen wurde die Voraussetzung gemacht, dass für die untere Grenze des Integrales bereits eine Bestimmung getroffen ist. Um aber auch für die Bestimmung der untern Grenze ein angemessenes Beispiel zu haben, wähle ich die Störungen in der mittlern siderischen Bewegung (Zeiteinheit 40 Tage der Erato zur Zeit der Jupiternähe im Jahre 1873—74. Es eignet sich nämlich ein Beispiel aus der Variation der Constanten viel besser, weil die Störungen in den Coordinaten selbst abhängig sind von der Wahl der Osculationsepöche in Folge der indirecten Glieder; durch die Wahl dieses Beispiels jedoch bleiben die Störungs-

werthe unabhängig von dieser Epoche. Aus der Störungstafel entlehne ich die folgenden Werthe:

	$w^2 \frac{d^2 \mu}{dt^2}$	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^V	f^{VI}	f^{VII}
1873 Aug. 13 —	8"3841							
Sept. 22 —	7.4606	+ 0.9235	+ 0.6164	+ 0.0493	— 0.0671	— 0.0428	+ 0.0039	+ 0.0232
Nov. 1 —	5.8714	+ 1.5892	+ 0.6657	— 0.0606	— 0.1099	— 0.0157	+ 0.0271	+ 0.0199
Dec. 11 —	3.6771	+ 2.1943	+ 0.6051	— 0.1862	— 0.1256	+ 0.0313	+ 0.0470	— 0.0036
1874 Jan. 20 —	1.0639	+ 2.6132	+ 0.4189	— 0.2805	— 0.943	+ 0.0747	+ 0.0434	— 0.0386
März 1 +	1.6877	+ 2.7516	+ 0.1384	— 0.3001	— 0.0196	+ 0.0795	+ 0.0048	— 0.0390
April 10 +	4.2776	+ 2.5899	— 0.1617	— 0.2402	+ 0.0599	+ 0.0795	— 0.0342	— 0.0072
Mai 20 +	6.4656	+ 2.1800	— 0.4019	— 0.1350	+ 0.1052	+ 0.0453	— 0.0414	+ 0.0068
			— 0.5369		+ 0.1091	+ 0.0039	— 0.0346	

Es soll nun für die erste summirte Reihe nach der Formel A_1) die Anfangsconstante so bestimmt werden, dass das einfache Integral für die Grenze 1873 Dec. 31 verschwindet, man hat daher den Werth, der für Jan. 20 angesetzt ist, als $f(a)$ anzusehen und es kommt der Werth $f(a - \frac{1}{2}w)$ zwischen die Zeilen, die zu 1873 Dec. 11 und 1874 Jan. 20 gehören. Man findet nach A_1) (pag. 35):

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{24} f^I(a - \tfrac{1}{2}w) &= - 0''1088.8 \\
 + \frac{17}{5760} f^{III}(a - \tfrac{1}{2}w) &= - 8.3 \\
 - \frac{367}{967680} f^V(a - \tfrac{1}{2}w) &= - 0.3 \\
 \hline
 f(a - \tfrac{1}{2}w) &= - 0''1097
 \end{aligned}$$

Will man aber, dass das einfache Integral für 1874 Jan. 20 verschwindet, so gibt die Formel B_1) (pag. 35) für den Anfangswerth der ersten summirten Reihe, der zwischen die Zeilen 1873 Dez. 11 und 1874 Jan. 20 zu setzen ist:

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{2} f^I(a) &= + 0''5319.5 \\
 + \frac{1}{12} f^I(a) &= + 0.2235.3 \\
 - \frac{11}{720} f^{III}(a) &= + 14.3 \\
 + \frac{191}{60480} f^V(a) &= + 2.4 \\
 - \frac{2497}{3628800} f^{VII}(a) &= + 0.3 \\
 \hline
 f(a + \tfrac{1}{2}w) &= + 0''7602
 \end{aligned}$$

Setzt man diese Anfangswerthe in die erste summirte Reihe ein und bildet das Summationschema und nachher die einfachen Integrale für dieselben Grenzen, so wird man sich überzeugen können, dass das gebildete Integral je nach der gesetzten Bedingung für die gewählte Epoche verschwindet.

Als Beispiel der Anwendung der Formeln II_1) (p. 43) soll die Anfangsconstante so bestimmt werden, dass das einfache Integral für die Grenze 1874 Jan. 10 verschwindet: der für $f(a - \frac{1}{2}w)$ nach II_1) berechnete Werth ist natürlich zwischen

die Zeilen 1873 Dez. 11 und 1874 Jan. 20 zu setzen, innerhalb welcher Grenzen das eben gewählte Datum fällt. Vermöge der Wahl dieser Grenze wird man mit gleichem Vortheil sowohl die erste als die zweite Formel anwenden können; gebraucht man die erste, so hat man $n = -0.25$ und die Rechnung stellt sich mit Hilfe der Tafel VI wie folgt:

d	1	3	5	7
$f^d(a)$	+ 2.68240	— 0.29030	+ 0.07710	— 0.03880
$\log f^d(a)$	0.428524	9 _n 46285	8.8871	8 _n 5888
$\log Q_1^d(0.25)$	8 _n 716699	8.00997	7 _n 3338	6.6760

d	4	6
$\log f^d(a)$	8 _n 2923	7.6812
$\log Q_1^d(0.25)$	8 _n 1261	7.2469

$(n + \frac{1}{2})f'(a) = - 0''.2659.7$	$\frac{1}{6}f''(a) = + 0''.0230.7$
$Q_1^1(n)f''(a) = - 0.1397.1$	$Q_1^4f^{iv}(a) = + 0.0002.6$
$Q_1^3(n)f'''(a) = - 0.0029.7$	$Q_1^6f^{vi}(a) = + 0.0000.1$
$Q_1^5(n)f^{v}(a) = - 0.0001.7$	$S_g = - 0.0233.4$
$Q_1^7(n)f^{vii}(a) = - 0.0000.2$	
$S_u = - 0.4088.4$	
$n^3 S_g = - 0.0003.6$	
$\frac{1}{2}f(a - \frac{1}{2}w) = + 0''.4092$	

Wendet man dagegen die zweite Formel an, so wird man zu setzen haben $m = +0.25$ und erhält mit Benützung der Tafel VII:

d	1	3	5	7
$\log f^d(a - \frac{1}{2}w)$	0.417173	9 _n 44793	8.8733	8 _n 5866
$\log P_1^d(0.25)$	8.862827	7 _n 61180	6.7039	5 _n 8960

d	2	4	6
$f^d(a - \frac{1}{2}w) +$	0.27865	— 0.05695	+ 0.02410
$\log f^d(a - \frac{1}{2}w)$	9.44506	8 _n 7555	8.3820
$\log P_1^d(0.25)$	9 _n 05912	8.3284	7 _n 6458

$P_1^1(m)f'(a - \frac{1}{2}w) = + 0''.1905.5$	$f'(a - \frac{1}{2}w) = - 2''.3705.0$
$P_1^3(m)f'''(a - \frac{1}{2}w) = + 0.0011.5$	$P_1^2(m)f''(a - \frac{1}{2}w) = - 0.0319.3$
$P_1^5(m)f^{v}(a - \frac{1}{2}w) = + 0.0000.4$	$P_1^4(m)f^{iv}(a - \frac{1}{2}w) = - 0.0012.1$
$P_1^7(m)f^{vii}(a - \frac{1}{2}w) = 0.0$	$P_1^6(m)f^{vi}(a - \frac{1}{2}w) = - 0.0001.1$
$S_u = + 0.1917.4$	$S_g = - 2.4037.5$
$m S_g = - 0.6009.4$	
$\frac{1}{2}f(a - \frac{1}{2}w) = + 0''.4092$	

in völliger Uebereinstimmung mit dem obigen Werthe. Man kann sich auch durch Einsetzung dieser Anfangsconstante in die erste summirte Reihe und Bildung des Integrales für die Grenze 1874 Jan. 20 leicht überzeugen, dass die Bestimmung der Anfangsconstante richtig ausgeführt worden ist.

B) Doppelte Integrale.

Integriert man die Gleichungen 1) und 3) des vorliegenden Paragraphen (pag. 32) nochmals, so wird man vorerst zu beachten haben, dass man für J_n^1 und J_m^1 die durch die Gleichungen 2) und 4) (pag. 32) definirten Werthe einzusetzen hat: es ist aber mit Rücksicht auf die Gleichungen 8) und 7) (pag. 34) anzunehmen:

$$J_n^1 = f(a + iw) + \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C \{1^2, 3^2, \dots (2d-1)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f^{2d-1}(a + iw)$$

$$J_m^1 = f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C \{2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f^{2d-1}(a + [i + \frac{1}{2}]w)$$

Es wird also aus 1) und 3), nachdem man links mit dl , rechts beziehungsweise mit $w dn$ und $w dm$ multiplicirt hat, durch nochmalige Integration erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{w^2} \iint f(l) dl^2 &= n f(a + iw) + \frac{n^2}{2} f^{2d-1}(a + iw) + \\ &+ \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} n^{2p+1} C \{2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2\}}{2^{2(d-p)} (2d-1)! 2p (2p+1)} f^{2d-1}(a + iw) \\ &+ \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} n^{2p+2} C \{2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2\}}{2^{2(d-p)} (2d)! (2p+1) (2p+2)} f^{2d}(a + iw) \\ &+ n \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C \{1^2, 3^2, \dots (2d-1)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f^{2d-1}(a + iw) \\ &+ J_n^2 \end{aligned} \right\} \quad 18)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{w^2} \iint f(l) dl^2 &= m f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \frac{m^2}{2} f^{2d-1}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \\ &+ \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} m^{2p+1} C \{1^2, 3^2, \dots (2d-3)^2\}}{2^{2(d-p)} (2d-1)! 2p (2p+1)} f^{2d-1}(a + [i + \frac{1}{2}]w) \\ &+ \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} m^{2p+2} C \{1^2, 3^2, \dots (2d-1)^2\}}{2^{2(d-p)} (2d)! (2p+1) (2p+2)} f^{2d}(a + [i + \frac{1}{2}]w) \\ &+ m \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C \{2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f^{2d-1}(a + [i + \frac{1}{2}]w) \\ &+ J_m^2 \end{aligned} \right\} \quad 19)$$

Die Werthe der auftretenden Integrationsconstanten bestimmen sich leicht aus:

$$\frac{1}{w^2} \iint_{a+iw}^{a+iw} f(l) dl^2 = J_n^2$$

$$\frac{1}{w^2} \iint_{a+[i+\frac{1}{2}]w}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(l) dl^2 = J_m^2$$

und würden gebraucht werden, wenn man auf dreifache Integrale übergeht, die ich jedoch hier nicht mehr zur Untersuchung aufgenommen habe, da dieselben in der praktischen Anwendung wohl kaum je gebraucht werden. Man kann demnach

diese Integrationsconstanten vorerst ganz ausser Acht lassen, da der später nothwendige Uebergang auf bestimmte Integrale dieselben verschwinden macht.

Geht man sofort auf bestimmte Grenzen über, so empfiehlt es sich, für n die Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$, anzunehmen; unter dieser Voraussetzung verwandelt sich die Gleichung 18) in:

$$\frac{1}{w^2} \iint_{a+[i-\frac{1}{2}]w}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(l) dl^2 = f(a+iw) + \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\}}{2^{2d} (2d-1)! 2^p (2p+1)} f^{2d-1}(a+iw) \\ + \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f^{2d-1}(a+iw), \quad (20)$$

Wendet man auf diesen Ausdruck die Reductionsformel 20) pag. 12) an, indem für das letzte Glied gesetzt wird:

$$\frac{1}{2^{2d} (2d)!} \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{p+1}} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2\} = \frac{1}{2^{2d} (2d)!} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)} C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\} \\ - \frac{1}{2^{2d} (2d-1)!} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^p} C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\}$$

so erhält man sogleich:

$$\frac{1}{w^2} \iint_{a+[i-\frac{1}{2}]w}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(l) dl^2 = f(a+iw) + \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} (1-2d) C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f^{2d-1}(a+iw) \quad (21)$$

Vergleicht man die Ausdrücke 21) und 7) (pag. 34) so findet sich, dass die numerischen Werthe, mit denen die Differenzwerthe in den beiderseitigen Formeln multiplicirt sind, identisch sind bis auf den Factor $(1-2d)$. Die zu gleichen d gehörigen Factoren werden daher aus den für 21) erhaltenen Werthen gefunden, wenn man dieselben einfach mit dem Factor $(1-2d)$ multiplicirt. Die Rechnung dieser Coëfficienten wird mit Hilfe dieser Bemerkung sehr einfach, doch erwähne ich gleich hier, dass die unten mitgetheilten Coëfficienten zur Controle auch nach der obigen Formel 20) berechnet wurden.

Ehe ich an die weitere Transformation von 21) gehe, will ich die Gleichung 19) ähnlichen Reductionen unterziehen und die Entwicklungen für dieselbe auf denselben Standpunkt bringen. Setzt man in Gl. 19) (pag. 49) die Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ für m ein, so findet sich sofort:

$$\frac{1}{w^2} \iint_{a+iw}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(l) dl^2 = f(a+[i+\frac{1}{2}]w) + \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\}}{2^{2d} (2d-1)! 2^p (2p+1)} f^{2d-1}(a+[i+\frac{1}{2}]w) \\ + \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f^{2d-1}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$$

Zur Zusammenziehung dieses Ausdruckes wende ich die Gleichung 18) pag. 12) an. Ersetzt man das letzte Glied nach derselben, so resultirt sofort:

$$\frac{1}{w^2} \iint_{a+\frac{1}{2}w}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(l) dl^2 = {}^{11}f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} 2^{2d-1} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1) (2p-1)} f^{2d-1}(a + [i + \frac{1}{2}]w) \quad 22j$$

womit leicht die Coëfficienten für die Doppelintegrale berechnet werden können. Es zeigt sich nach diesen Formeln kein so einfacher Zusammenhang zwischen den Coëfficienten der einfachen und Doppelintegrale und doch besteht ein solcher, der sehr zweckmässig zur Controle der numerischen Entwicklungen benützt werden kann. Gebraucht man nämlich die Gleichung 12) (pag. 10), und beachtet, dass in derselben $\delta = (d-1)$ geschrieben ist, so erhält man für den Coëfficienten von $f^{2d-1}(a + [i + \frac{1}{2}]w)$ sofort:

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} 2^{2d-1} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1) (2p-1)} = - \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} (2d-1) C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} \\ - \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{\delta-p} \left(\frac{d-1}{2}\right) C\{1^2, 3^2, \dots, (2\delta-1)^2\}}{2^{2\delta} (2\delta)! (2p+1)}$$

Die rechts stehenden Coëfficienten sind aber völlig identisch mit jenen, welche bei den einfachen Integralen gefunden wurden; bezeichnet man demnach einen Coëfficienten der vorgelegten Reihe mit $K_{(d)}^{(i)}$, so besteht die Relation für ein bestimmtes d :

$$- K_{(d)}^{(2)} = (2d-1) K_{(d)}^{(1)} + \left(\frac{d-1}{2}\right) K_{(d-1)}^{(1)}$$

welche Gleichung zweckmässig zur Controle benützt werden kann und auch benützt wurde.

Beachtet man, ähnlich wie bei dem einfachen Integrale, dass ist:

$$\iint_{a-\frac{1}{2}w}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(l) dl^2 = \iint_{a-\frac{1}{2}w}^{a+\frac{1}{2}w} f(l) dl^2 + \iint_{a+\frac{1}{2}w}^{a+\frac{3}{2}w} f(l) dl^2 + \dots + \iint_{a+[i-\frac{1}{2}]w}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(l) dl^2 \\ \iint_a^{a+iw} f(l) dl^2 = \iint_a^{a+w} f(l) dl^2 + \iint_{a+w}^{a+2w} f(l) dl^2 + \dots + \iint_{a+[i-1]w}^{a+iw} f(l) dl^2$$

und erinnert sich der Relation 5) (pag. 5), so kann man aus 21) und 22) ableiten:

$$\frac{1}{w^2} \iint_{a-\frac{1}{2}w}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(l) dl^2 = {}^{11}f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} (1-2d) C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f^{2d-2}(a + [i + \frac{1}{2}]w) \quad 23 \\ - {}^{11}f(a - \frac{1}{2}w) - \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} (1-2d) C\{2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f^{2d-2}(a - \frac{1}{2}w) \\ \frac{1}{w^2} \iint_a^{a+iw} f(l) dl^2 = {}^{11}f(a + iw) + \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} 2^{2d-1} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1) (2p-1)} f^{2d-2}(a + iw) \quad 24) \\ - {}^{11}f(a) - \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} 2^{2d-1} C\{1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1) (2p-1)} f^{2d-2}(a)$$

Die Ausmittlung der Doppelintegrale in Bezug auf die gewählten Grenzen erscheint somit bestimmt, sobald die 2^{te} summirte Reihe gebildet ist. Um aber diese zu erhalten, muss eine Anfangsconstante zur Bildung der ersten und eine weitere An-

fangsconstante zur Bildung der zweiten summirten Reihe angenommen sein, so dass in der That, wie es die allgemeine Forderung eines Doppelintegrals mit sich bringt, zwei willkürliche Constanten in dem Probleme auftreten, deren Bestimmung aber nur durch anderweitige Bedingungen des Problems vorgenommen werden kann. Diese Bestimmung wird gewöhnlich dadurch geleistet werden können, dass das vorgelegte Doppelintegral die Eigenschaft haben muss, für einen bestimmten Argumentwerth einen gewissen Werth zu ergeben, und dass das zugehörige einfache Integral ebenfalls einer solchen Bedingung genügen muss. Bei den astronomischen Rechnungen in der Störungstheorie wird es sich wohl meistens empfehlen, der Bedingung zu genügen, dass sowohl das einfache als auch das doppelte Integral für die untere Grenze verschwindet. Diese Annahme soll nun weiter verfolgt werden.

Nimmt man die Formel 23) (pag. 51) vor, so wird zunächst die Bedingung, dass das Doppelintegral für die Grenze $(a - \frac{1}{2}w)$ verschwindet, ausgedrückt sein durch:

$${}^{II}f(a - \frac{1}{2}w) = - \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{C \{ 2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2 \}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f^{2d-2}(a - \frac{1}{2}w), \quad 25)$$

dass aber das einfache Integral für dieselbe Grenze verschwindet, nach Formel 7) pag. 34 des vorliegenden Paragraphen:

$${}^I f(a - \frac{1}{2}w) = - \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C \{ 2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2 \}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} f^{2d-1}(a - \frac{1}{2}w), \quad 26)$$

Genügen die Anfangsconstanten der summirten Reihe diesen Bedingungen, so ist die gestellte Forderung erfüllt. In der That gibt die Formel 26) unmittelbar jenen Werth an, den man an der betreffenden Stelle in das Summationsschema einzutragen hat, um die erste summirte Reihe bilden zu können. Die Formel 25) dagegen entspricht nur einem arithmetischen Mittel zweier Werthe, nämlich von ${}^{II}f(a-w)$ und ${}^{II}f(a)$; da aber ${}^I f(a - \frac{1}{2}w)$ durch 26) gegeben ist, so kann man ohne Schwierigkeit berechnen:

$$\begin{aligned} {}^{II}f(a) &= {}^{II}f(a - \frac{1}{2}w) + \frac{1}{2} {}^I f(a - \frac{1}{2}w) \\ \text{oder } {}^{II}f(a-w) &= {}^{II}f(a - \frac{1}{2}w) - \frac{1}{2} {}^I f(a - \frac{1}{2}w) \end{aligned} \quad 27)$$

welche beiden Formeln nach Belieben gewählt werden können. Wenn sich auch gegen diese Art der Bestimmung der Anfangsconstante nichts einwenden lässt, so zieht man es, soweit mir der Gebrauch bekannt ist, vor, eine unmittelbare Bestimmung der Anfangsconstante ${}^{II}f(a-w)$ oder ${}^{II}f(a)$ zu erlangen. Schreibt man in den Formeln 25), 26):

$$\begin{aligned} f^{2d-2}(a - \frac{1}{2}w) &= \frac{1}{2} f^{2d-2}(a-w) + \frac{1}{2} f^{2d-2}(a) \\ f^{2d-1}(a - \frac{1}{2}w) &= f^{2d-2}(a) - f^{2d-2}(a-w) \end{aligned}$$

und beachtet, dass je nachdem die erste oder zweite der Formeln 27) verwendet wird, der letztere Werth mit *plus* oder *minus* $\frac{1}{2}$ multiplicirt werden muss, so findet sich, wenn man in 27) die Werthe aus 25) und 26) einsetzt:

$$\begin{aligned} {}^{11}f(a) &= \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C \{ 2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2 \}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} \{ df(a-w) + (d-1) f^{2d-2}(a) \} \\ {}^{11}f(a-w) &= \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C \{ 2^2, 4^2, \dots, (2d-2)^2 \}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} \{ (d-1) f^{2d-2}(a-w) + df(a) \} \end{aligned} \quad (28)$$

Man kann also die Anfangsconstanten ${}^{11}f(a)$ und ${}^{11}f(a-w)$ ohne Schwierigkeit nach 28) ermitteln. Zur Controle kann man nach 26) berechnen $f(a-\frac{1}{2}w)$, wobei die Relation bestehen muss:

$$f(a-\frac{1}{2}w) = {}^{11}f(a) - {}^{11}f(a-w)$$

Hiermit erscheint die Bestimmung der Integrationsconstanten für die Grenze $-\frac{1}{2}$ erledigt und es soll nun die analoge Bestimmung für die Grenze 0 vorgenommen werden, d. h. die Constanten sind so zu bestimmen, dass das einfache und doppelte Integral für diese Grenze verschwindet.

Die Bedingung, dass das einfache Integral für die Grenze 0 verschwindet, ist nach Formel 10) (pag. 34) ausgedrückt durch:

$$f(a-\frac{1}{2}w) = - \left\{ \frac{1}{2}f(a) + \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C \{ 1^2, 3^2, \dots, (2d-1)^2 \}}{2^{2d} (2d-1)! (2p+1)} f^{2d-1}(a) \right\}; \quad (29)$$

dieselbe Bedingung für das Doppelintegral ergibt aus 24) (pag. 51):

$${}^{11}f(a) = - \sum_{d=1}^{d=\infty} \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{2(2d-1) C \{ 1^2, 3^2, \dots, (2d-3)^2 \}}{2^{2d} (2d)! (2p+1) (2p-1)^2} f^{2d-2}(a). \quad (30)$$

Da die beiden hierdurch bestimmten Werthe im Summationschema auftreten, so können dieselben ohne weitere Transformation zur Bildung der ersten und zweiten summirten Reihe verwendet werden und es ist die gestellte Aufgabe hiermit erledigt.

Bezeichnet man die Coëfficienten, mit denen die Differenzwerthe verbunden sind in der Formel 23) (pag. 51) mit P , in der Formel 24) (pag. 51) mit Q , und ertheilt diesen Buchstaben, wie dies bei den einfachen Integralen (nach pag. 35) geschehen ist, zwei Index, wo der obere auf den Differenzwerth, der untere auf die Ordnung der Integration hinweist, welcher letzterer Index also in diesem Fall gleich 2 ist, so wird man die folgenden 4 Formelsysteme für die Combinationen der eben abgehandelten Grenzen haben:

Grenzen: $a-\frac{1}{2}w$ und $a+[i+\frac{1}{2}]w$

$$\begin{aligned} w^2 {}^{11}f(a) &= w^2 \{ P_1^1 f(a-w) + P_1^3 [2f^{11}(a-w) + f^{11}a] + P_1^5 [3f^{1v}(a-w) + 2f^{1v}(a)] + \dots \} \\ w^2 {}^{11}f(a-\frac{1}{2}w) &= -w^2 \{ P_1^1 f^{11}(a-\frac{1}{2}w) + P_1^3 f^{111}(a-\frac{1}{2}w) + P_1^5 f^{1v}(a-\frac{1}{2}w) + \dots \} \\ \iint_{a-\frac{1}{2}w}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(l) dl^2 &= w^2 \{ {}^{11}f(a+[i+\frac{1}{2}]w) + P_2^0 f(a+[i+\frac{1}{2}]w) + P_2^2 f^{11}(a+[i+\frac{1}{2}]w) + \dots \} \end{aligned} \quad A_{ii}$$

Grenzen: a und $a+iw$

$$\begin{aligned} w^2 {}^{11}f(a) &= -w^2 \{ Q_2^0 f(a) + Q_2^2 f^{11}(a) + Q_2^4 f^{1v}(a) + \dots \} \\ w^2 {}^{11}f(a-\frac{1}{2}w) &= -w^2 \{ \frac{1}{2}f(a) + Q_1^1 f^1(a) + Q_1^3 f^{111}(a) + Q_1^5 f^{1v}(a) + \dots \} \\ \iint_a^{a+iw} f(l) dl^2 &= w^2 \{ {}^{11}f(a+iw) + Q_2^0 f(a+iw) + Q_2^2 f^{11}(a+iw) + Q_2^4 f^{1v}(a+iw) + \dots \} \end{aligned} \quad B_{ii}$$

Grenzen: $a - \frac{1}{2}w$ und $a + iw$

$$\begin{aligned} w^{2-11} f(a) &= w^2 \{ P_1^1 f(a-w) + P_1^3 [2f^{11}(a-w) + f^{11}(a)] + P_1^5 [3f^{11}(a-w) + 2f^{11}(a)] + \dots \} \\ w^{2-1} f(a - \frac{1}{2}w) &= -w^2 \{ P_1^1 f^{11}(a - \frac{1}{2}w) + P_1^3 f^{11}(a - \frac{1}{2}w) + P_1^5 f^{11}(a - \frac{1}{2}w) + \dots \} \\ \iint_{a-\frac{1}{2}w}^{a+iw} f(l) dl^2 &= w^2 \{ {}^{11}f(a+iw) + Q_2^0 f(a+iw) + Q_2^2 f^{11}(a+iw) + \dots \} \end{aligned}$$

Grenzen: a und $a + [i + \frac{1}{2}]w$

$$\begin{aligned} w^{2-11} f(a) &= -w^2 \{ Q_2^0 f(a) + Q_2^2 f^{11}(a) + Q_2^4 f^{11}(a) + \dots \} \\ w^{2-1} f(a - \frac{1}{2}w) &= -w^2 \{ \frac{1}{2} f(a) + Q_1^1 f^{11}(a) + Q_1^3 f^{11}(a) + \dots \} \\ \iint_a^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(l) dl^2 &= w^2 \{ {}^{11}f(a+[i+\frac{1}{2}]w) + P_2^0 f(a+[i+\frac{1}{2}]w) + P_2^2 f^{11}(a+[i+\frac{1}{2}]w) + \dots \} \end{aligned}$$

Die numerischen Werthe der hier auftretenden P - und Q -Coëfficienten sind, wie früher die bei der einfachen Integration vorkommenden Werthe, in der hinten angeführten Tafel V aufgenommen; in derselben ist, indem ich die mit dem Index i unten versehenen Buchstaben (vergl. pag. 35) noch einmal anführe, gesetzt worden:

$$\left. \begin{aligned} P\binom{2d-1}{1} &= \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C\{2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} \\ Q\binom{2d-1}{1} &= \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} C\{1^2, 3^2, \dots (2d-1)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} \\ P\binom{2d-2}{2} &= \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} (1-2d) C\{2^2, 4^2, \dots (2d-2)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1)} \\ Q\binom{2d-2}{2} &= \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p} 2(2d-1) C\{1^2, 3^2, \dots (2d-3)^2\}}{2^{2d} (2d)! (2p+1) (2p-1)} \end{aligned} \right\} \quad 31)$$

Die bisher entwickelten Formeln sind an specielle Grenzen gebunden. Es kann aber unter Umständen erwünscht sein, von denselben abzugehen, wiewohl dies selten genug der Fall sein wird; ich setze wie bei den einfachen Integralen voraus, dass nur ein specieller Werth nöthig ist, und hierbei die Herstellung einer vollständigen Integraltafel nicht beabsichtigt wird.

Um wieder eine möglichst rasche Convergenz herzustellen, wird man n und m stets kleiner als $\frac{1}{4}$ annehmen müssen und die Benützung der Formeln 18) und 19) (pag. 45) wird sofort das gewünschte Ziel erreichen lassen. Die Anwendung dieser Formeln wird jedoch sehr beschwerlich sein und man würde jedenfalls, wenn sich nicht andere Hilfsmittel beschaffen liessen, wesentlich an Zeit ersparen, wenn man in der Nähe der geforderten Grenze durch alternirende Anwendung der Gleichungen A_n) und B_n) (pag. 53) sich kleine Integraltafeln herstellen würde, nach denen man den Werth des Integrales für die obere und untere Grenze mit Hilfe der Interpolation ermitteln könnte. Hierbei wäre nur zu beachten, dass die Berücksichtigung der Bedingungen für das einfache Integral noch einer besonderen Aufmerksamkeit bedarf. Es wird sich aber die vorgelegte Aufgabe durch Transformation und Herstellung von allgemeinen Hilfstafeln in bequemerer Weise lösen lassen.

Es soll zunächst die willkürliche Grenze so gelegen gedacht sein, dass die

Wahl von n vortheilhaft ist, also diese Grenze näher an einen Argumentwerth zu liegen kommt als $\frac{1}{4}w$. Integriert man die Gleichung B_n) bis zum Argumentwerthe und legt die wegen n nöthige Correction hinzu, so erhält man:

$$\iint_{a+iv}^{a+[i+n]w} f(l) dl^2 = w^2 \{ {}^n f(a+iv) + Q_2^0 f(a+iv) + Q_2^2 f^{II}(a+iv) + \dots \} + \iint_{a+iv}^{a+[i+n]w} f(l) dl^2 + J_2. \quad (32)$$

wo J_2 eine willkürliche Integrationsconstante ist, die nach Einsetzung der unteren Grenze verschwindet und vorerst ausser Acht gelassen werden kann. Multiplicirt man die Gleichung 16) (pag. 26) links mit $\frac{dl^2}{w^2}$, rechts mit dn^2 und integrirt zweimal, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w^2} \iint f(l) dl^2 = & \left[\frac{n^2}{1 \cdot 2} f(a+iv) + -\frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \{ f^I(a+iv) + N_1^3 f^{III}(a+iv) + \dots \} \right. \\ & + \frac{n^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \{ f^{II}(a+iv) + N_2^4 f^{IV}(a+iv) + \dots \} \quad (33) \\ & + \frac{n^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \{ f^{III}(a+iv) + N_3^5 f^V(a+iv) + \dots \} \\ & + \dots \\ & \left. + n J_1 + J_2 \right] \end{aligned}$$

wo J_1 und J_2 die durch die Doppelintegration auftretenden Constanten sind. J_2 zu bestimmen, ist nicht nöthig, da es nach Einsetzen der Grenzen wegfällt; J_1 aber muss berücksichtigt werden. Es ist aber offenbar, wenn man das Resultat der ersten Integration ins Auge fasst (pag. 32):

$$J_1 = \int f(a+[i+n]w) dl$$

oder mit Berücksichtigung der Formel B_1) (pag. 35):

$$J_1 = {}^1 f(a+iv) + Q_1^1 f^I(a+iv) + Q_1^3 f^{III}(a+iv) + Q_1^5 f^V(a+iv) + \dots$$

Setzt man in 33) die Grenzen n und 0, sowie J_1 ein, so findet sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w^2} \iint_{a+iv}^{a+[i+n]w} f(l) dl^2 = & {}^n f(a+iv) \\ & + \frac{n^2}{2!} f(a+iv) \\ & + n f^I(a+iv) \left\{ Q_1^1 + \frac{n^2}{3!} \right\} \\ & + n^4 f^{II}(a+iv) \left\{ \frac{1}{4!} \right\} \\ & + n f^{III}(a+iv) \left\{ Q_1^3 + \frac{n^2}{3!} N_1^3 + \frac{n^4}{5!} \right\} \\ & + n^4 f^{IV}(a+iv) \left\{ \frac{N_2^4}{4!} + \frac{n^2}{6!} \right\} \\ & + \dots \end{aligned}$$

Führt man diesen Werth in 32) ein und beachtet, dass J_2 durch die Einführung der Grenzen verschwindet, so erhält man das Doppelintegral für die Grenze $a+[i+n]w$:

$$\begin{aligned}
 \iint f(l) d l^2 &= w^2 \left[{}^n f(a+i w) \right. \\
 &\quad + f(a+i w) \left\{ Q_2^0 + \frac{n^2}{2!} \right\} \\
 &\quad + f''(a+i w) \left\{ Q_2^2 + \frac{n^4}{4!} \right\} \\
 &\quad + f^{iv}(a+i w) \left\{ Q_2^4 + \frac{n^4}{4!} N_2^4 + \frac{n^6}{6!} \right\} \\
 &\quad + f^{vi}(a+i w) \left\{ Q_2^6 + \frac{n^4}{4!} N_2^6 + \frac{n^6}{6!} N_4^6 + \frac{n^8}{8!} \right\} \\
 &\quad + \dots \dots \dots \left. \dots \right] \\
 &+ w^2 n \left[f(a+i w) + f'(a+i w) \left\{ Q_1^1 + \frac{n^2}{3!} \right\} \right. \\
 &\quad + f'''(a+i w) \left\{ Q_1^3 + \frac{n^2}{3!} N_1^3 + \frac{n^4}{5!} \right\} \\
 &\quad + \dots \dots \dots \left. \dots \right]
 \end{aligned}$$

Das vorstehende Doppelintegral lässt sich daher leicht in die folgende Form bringen :

$$\begin{aligned}
 \iint f(l) d l^2 &= w^2 \left[{}^n f(a+i w) + Q_2^0(n) f(a+i w) + Q_2^2(n) f''(a+i w) + Q_2^4(n) f^{iv}(a+i w) + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + n \left\{ f'(a+i w) + Q_2^1(n) f'(a+i w) + Q_2^3(n) f'''(a+i w) + Q_2^5(n) f^{v}(a+i w) + \dots \right\} \right]
 \end{aligned}$$

34a)

wo die hier auftretenden Coëfficienten die nachstehende Bedeutung haben :

$$\begin{aligned}
 Q_2^0(n) &= Q_2^0 + \frac{n^2}{2!} \\
 Q_2^2(n) &= Q_2^2 + \frac{n^4}{4!} \\
 Q_2^4(n) &= Q_2^4 + \frac{n^4}{4!} N_2^4 + \frac{n^6}{6!} \\
 Q_2^6(n) &= Q_2^6 + \frac{n^4}{4!} N_2^6 + \frac{n^6}{6!} N_4^6 + \frac{n^8}{8!} \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \\
 Q_2^1(n) &= Q_1^1 + \frac{n^2}{3!} \\
 Q_2^3(n) &= Q_1^3 + \frac{n^2}{3!} N_1^3 + \frac{n^4}{5!} \\
 Q_2^5(n) &= Q_1^5 + \frac{n^2}{3!} N_1^5 + \frac{n^4}{5!} N_3^5 + \frac{n^6}{7!} \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

35)

Diese Coëfficienten finden sich in der Tafel VIII. Zu der Formel 34) wäre nur zu bemerken, dass die Integrationsconstante fortgelassen wurde, weil die Annahme gemacht ist, dass bestimmte Bedingungen für die untere Integrationsgrenze gelten, die bereits durch die Einführung der ersten Summationconstanten ${}^n f(a)$ und $f(a - \frac{1}{2} w)$ erfüllt sind. Es gibt somit die Formel 34) den vollständigen Werth des Doppelintegrals unter den eben angeführten Voraussetzungen.

Durch die bisherigen Erörterungen ist für die Fälle vorgesorgt, wo das Integral für die speciellen Grenzen a oder $a - \frac{1}{2}w$ verschwindet; es soll jetzt die Bestimmung der Anfangsconstanten, ${}^u f(a)$ und ${}^v f(a - \frac{1}{2}w)$, vorgenommen werden, wenn der Bedingung genügt werden soll, dass das einfache und doppelte Integral für eine willkürliche untere Grenze verschwindet, wobei vorerst nur die Beschränkung statt hat, dass die Wahl von $n < \frac{1}{4}$ möglich ist; die Bestimmung der Anfangsconstante ${}^v f(a - \frac{1}{2}w)$ für diese Bedingung bietet die Formel II_v (pag. 43). Denkt man sich für ${}^u f(a)$ vorerst Null geschrieben, so gibt die Gleichung 34a), auf die betreffende Anfangsconstante angewendet, einen Werth für das Doppelintegral, der von Null verschieden ist. Derselbe, mit umgekehrten Zeichen angewandt, gibt aber den Werth dieser Constante; man hat also:

$$w^2 {}^u f(a) = -w^2 \{ Q_2^0(n) f'(a) + Q_2^2(n) f''(a) + Q_2^4(n) f^{iv}(a) + \dots \} \\ + n \{ {}^v f(a) + Q_2^1(n) f'(a) + Q_2^3(n) f^{iii}(a) + \dots \} \quad 34b)$$

womit die gestellte Aufgabe gelöst erscheint.

Ist die willkürliche Grenze so gelegen, dass sie dem Mittel zweier Argumente näher ist, so hat man $m \equiv \frac{1}{4}$ und ähnlich wie vorher:

$$\iint f(l) dl^2 = w^2 \{ {}^u f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + P_2^0 f''(a + [i + \frac{1}{2}]w) + P_2^2 f^{iv}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots \} + \\ + \iint_{a + [i + \frac{1}{2}]w}^{a + [i + \frac{1}{2} + m]w} f(l) dl^2 \quad 36)$$

wobei die Integrationsconstante fortgelassen ist. Multiplicirt man die Gleichung 17) (pag. 27) links mit $\frac{dl^2}{w^2}$, rechts mit dm^2 und integrirt zweimal, so erhält man:

$$\frac{1}{w^2} \iint f(l) dl^2 = \left[\frac{m^2}{1 \cdot 2} \left\{ f'(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_0^2 f''(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_0^4 f^{iv}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots \right\} \right. \\ + \frac{m^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left\{ f^{iv}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_1^3 f^{vi}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_1^5 f^{viii}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots \right\} \\ + \frac{m^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left\{ f^{viii}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_2^4 f^{x}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_2^6 f^{xii}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots \right\} \\ + \dots \quad \left. \dots \right] \quad 37) \\ + m(J)_1 + (J)_2$$

Es wird wieder die Bestimmung der Integrationsconstante $(J)_1$ nothwendig werden; man wird dafür mit Rücksicht auf Gl. 4) (pag. 32) und A_1 (pag. 35) finden:

$$(J)_1 = {}^v f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + P_1^1 f'(a + [i + \frac{1}{2}]w) + P_1^3 f^{iii}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots$$

Setzt man diesen Werth, sowie die Grenzen m und 0 in 37) ein, so erhält man statt 36):

$$\frac{1}{w^2} \iint f(l) dl^2 = {}^u f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + {}^v f(a + [i + \frac{1}{2}]w) \left\{ m \right\} \\ + f(a + [i + \frac{1}{2}]w) \left\{ P_2^0 + \frac{m^2}{2!} \right\} \quad \left| \right.$$

$$\left. \begin{aligned} &+ f^{(1)}(a + [i + \frac{1}{2}]w) \left\{ P_1^1 m + \frac{m^3}{3!} \right\} \\ &+ f^{(2)}(a + [i + \frac{1}{2}]w) \left\{ P_2^2 + \frac{m^2}{2!} M_0^2 + \frac{m^4}{4!} \right\} \\ &+ \dots \end{aligned} \right\}$$

mit Hilfe welches Ausdruckes sich der Werth des Doppelintegrals 36) auf folgende Gestalt bringen lässt:

$$\begin{aligned} \iint f(l) dl^2 = w^2 \left[{}^{11}f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + P_2^0(m) f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + P_2^2(m) f^{(1)}(a + [i + \frac{1}{2}]w) \right. \\ \left. + P_2^4(m) f^{(2)}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots + m \left\{ f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + P_2^1(m) f^{(1)}(a + [i + \frac{1}{2}]w) \right. \right. \\ \left. \left. + P_2^3(m) f^{(2)}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \dots \right\} \right] \quad 38 \end{aligned}$$

wo die hier vorkommenden Coëfficienten $P_2^0(m)$, $P_2^2(m)$ $P_2^4(m)$, $P_2^3(m)$ durch nachstehende Ausdrücke defnirt sind:

$$\left. \begin{aligned} P_2^0(m) &= P_2^0 + \frac{m^2}{2!} \\ P_2^2(m) &= P_2^2 + \frac{m^2}{2!} M_0^2 + \frac{m^4}{4!} \\ P_2^4(m) &= P_2^4 + \frac{m^2}{2!} M_0^4 + \frac{m^4}{4!} M_2^4 + \frac{m^6}{6!} \\ &\dots \dots \dots \\ P_2^1(m) &= P_1^1 + \frac{m^2}{3!} \\ P_2^3(m) &= P_1^3 + \frac{m^2}{3!} M_1^3 + \frac{m^4}{5!} \\ P_2^5(m) &= P_1^5 + \frac{m^2}{3!} M_1^5 + \frac{m^4}{5!} M_3^5 + \frac{m^6}{7!} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad 39)$$

Die in der Formel 38) auftretenden Coëfficienten sind wie die vorhergehenden von Herrn F. K. Ginzel berechnet und in der Tafel IX aufgenommen, es bietet daher keine Schwierigkeit, mit denselben das Doppelintegral für eine willkürliche Grenze zu berechnen. Die Integrationseonstanten sind wieder wie früher fortgelassen, weil die Annahme gemacht ist, dass bestimmte Bedingungen für die untere Grenze gelten, die bereits durch die Einführung der ersten Summationsconstanten ${}^{11}f(a)$ und $f(a - \frac{1}{2}w)$ erfüllt sind; es gibt demnach die Formel 38) den vollständigen Werth des Doppelintegrals.

Soll das Doppelintegral für eine willkürliche Grenze verschwinden, für die $m < \pm \frac{1}{2}$ gewählt werden kann, was in Verbindung mit der Formel 34b) die Möglichkeit an die Hand gibt, die Lage der untern Grenze ganz willkürlich annehmen zu dürfen, so erhält man durch ähnliche Schlüsse wie früher die Relation:

$$\begin{aligned} w^2 {}^{11}f(a - \frac{1}{2}w) = -w^2 \left[P_2^0(m) f(a - \frac{1}{2}w) + P_2^2(m) f^{(1)}(a - \frac{1}{2}w) + P_2^4(m) f^{(2)}(a - \frac{1}{2}w) + \dots \right. \\ \left. + m \left\{ f(a - \frac{1}{2}w) + P_2^1(m) f^{(1)}(a - \frac{1}{2}w) + P_2^3(m) f^{(2)}(a - \frac{1}{2}w) + \dots \right\} \right] \quad 40) \end{aligned}$$

Hierbei hat man sich zu erinnern, dass ist:

$${}^u f(a) = {}^u f(a - \tfrac{1}{2}w) + \tfrac{1}{2} {}^u f(a - \tfrac{1}{2}w)$$

Die für die Doppelintegrale gestellte Aufgabe erscheint hiermit erledigt und es erübrigt nur noch, die Formeln zusammenzutragen und durch Beispiele zu erläutern.

Man hat für den Werth des Doppelintegrals für die willkürliche obere Grenze die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} n < \pm \tfrac{1}{2} \\ \iint f(l) dl^2 &= w^2 \left[{}^u f(a + iw) + Q_2^0(n) f(a + iw) + Q_2^2(n) f''(a + iw) + Q_2^4(n) f^{iv}(a + iw) + \dots \right. \\ &\quad \left. + n \left\{ {}^u f(a + iw) + Q_2^1(n) f'(a + iw) + Q_2^3(n) f'''(a + iw) + \dots \right\} \right] \\ m < \pm \tfrac{1}{2} \\ \iint f(l) dl^2 &= w^2 \left[{}^u f(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + P_2^0(m) f(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + P_2^2(m) f''(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \dots \right. \\ &\quad \left. + P_2^4(m) f^{iv}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \dots + m \left\{ {}^u f(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + P_2^1(m) f'(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + P_2^3(m) f'''(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \dots \right\} \right] \end{aligned} \right\} G_{11})$$

Für die untern Grenzen wird man haben, wenn an diese die Bedingung geknüpft ist, dass das einfache und doppelte Integral für dieselben verschwindet:

$$\left. \begin{aligned} n < \pm \tfrac{1}{2}, \quad \int f(l) dl = \iint f(l) dl^2 = 0 \\ w^2 {}^u f(a - \tfrac{1}{2}w) &= -w^2 \left[(n + \tfrac{1}{2}) f(a) + Q_1^1(n) f'(a) + Q_1^3(n) f'''(a) + Q_1^5(n) f^{v}(a) + \dots \right. \\ &\quad \left. + n^3 \left\{ \tfrac{1}{6} f''(a) + Q_1^4(n) f^{iv}(a) + Q_1^6(n) f^{vi}(a) + \dots \right\} \right] \\ w^2 {}^u f(a) &= -w^2 \left[Q_2^0(n) f(a) + Q_2^2(n) f''(a) + Q_2^4(n) f^{iv}(a) + \dots \right. \\ &\quad \left. + n \left\{ {}^u f(a - \tfrac{1}{2}w) + \tfrac{1}{2} f(a) + Q_2^1(n) f'(a) + Q_2^3(n) f'''(a) + \dots \right\} \right] \\ m < \pm \tfrac{1}{2}, \quad \int f(l) dl = \iint f(l) dl^2 = 0 \\ w^2 {}^u f(a - \tfrac{1}{2}w) &= -w^2 \left[P_1^1(m) f'(a - \tfrac{1}{2}w) + P_1^3(m) f'''(a - \tfrac{1}{2}w) + P_1^5(m) f^{v}(a - \tfrac{1}{2}w) + \dots \right. \\ &\quad \left. + m \left\{ f(a - \tfrac{1}{2}w) + P_1^2(m) f''(a - \tfrac{1}{2}w) + P_1^4(m) f^{iv}(a - \tfrac{1}{2}w) + \dots \right\} \right] \\ w^2 {}^u f(a - \tfrac{1}{2}w) &= -w^2 \left[P_2^0(m) f(a - \tfrac{1}{2}w) + P_2^2(m) f''(a - \tfrac{1}{2}w) + P_2^4(m) f^{iv}(a - \tfrac{1}{2}w) + \dots \right. \\ &\quad \left. + m \left\{ {}^u f(a - \tfrac{1}{2}w) + P_2^1(m) f'(a - \tfrac{1}{2}w) + P_2^3(m) f'''(a - \tfrac{1}{2}w) + \dots \right\} \right] \\ {}^u f(a) &= {}^u f(a - \tfrac{1}{2}w) + \tfrac{1}{2} {}^u f(a - \tfrac{1}{2}w) \end{aligned} \right\} H_{11})$$

Die Q_1 -Coëfficienten finden sich in Tafel VI.

» P_1	»	»	»	»	VII.
» Q_2	»	»	»	»	VIII.
» P_2	»	»	»	»	IX.

Nehmen wir zur Erläuterung der im Vorhergehenden entwickelten Formeln das auf pag. 43 angeführte Erato-Beispiel vor, in dem bereits die zweite summirte Reihe gebildet ist. Wir wollen zuerst durch die Anwendung der Formel A_{ii} (pag. 53) eine Integraltafel für das Doppelintegral zwischen den Grenzen 1872 Oct. 17 bis 1873 Mai 5 herstellen. Bei diesem und den folgenden Beispielen ist wie oben die Zeiteinheit 10 Tage gewählt, so dass w der Einheit gleich zu setzen ist. Man erhält:

	1872 Oct. 17,	1872 Nov. 26,	1873 Jan. 5,	1873 Feb. 14,	1873 Mz. 26,	1873 Mai 5
${}^{11}f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	-260062.535	-237488.885	-211912.555	-185331.385	-159248.140	-134686.075
$P_0^2 f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	-225.810	-125.112	-41.868	-20.747	-63.382	-88.935
$P_2^2 f^{II}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+1.928	+3.709	+4.383	+4.246	+3.630	+2.819
$P_2^4 f^{IV}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+0.255	+0.237	+0.174	+0.102	+0.042	0
$P_2^6 f^{VI}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+0.019	+0.010	+0.002	+0.003	+0.004	+0.004
$P_2^8 f^{VIII}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+0.001	0	+0.001	+0.001	0	0
	-260286.14	-237610.04	-211949.86	-185306.29	-159181.09	-134594.32

Bestimmt man nach der Formel B_{ii} (pag. 53) den Werth des Doppelintegrals zwischen den Grenzen 1872 Sept. 27 bis 1873 Mai 25, so wird sich ergeben:

	1872 Sept. 27,	1872 Nov. 6,	1872 Dec. 16,	1873 Jan. 25,	1873 Mz. 6,	1873 Apr. 15,	1873 Mai 25
${}^{11}f(a+iw)$	-270318.660	-249806.410	-225171.360	-198653.750	-172009.020	-146487.260	-122884.890
$Q_2^0 f(a+iw)$	+559.672	+343.567	+156.880	+10.593	-93.581	-159.941	-195.789
$Q_2^2 f^{II}(a+iw)$	-0.344	-1.471	-2.020	-2.105	-1.890	-1.526	-1.126
$Q_2^4 f^{IV}(a+iw)$	-0.067	-0.071	-0.057	-0.037	-0.018	-0.004	-0.004
$Q_2^6 f^{VI}(a+iw)$	-0.004	-0.003	-0.001	0	+0.001	+0.001	+0.001
	-269759.40	-249464.39	-225016.56	-198645.30	-172104.51	-146648.73	-123081.80

Man ist nun in der Lage, durch Vereinigung der vorstehenden Werthe die unten folgende Integraltafel herzustellen, aus der man den Werth des Integrals für eine beliebige, innerhalb der Ausdehnung der Tafel gelegene Grenze durch Interpolation bestimmen kann. Den Werth des Integrals für eine solche beliebige Grenze auf dem eben gezeigten Wege zu erlangen, wäre indess sehr umständlich und es wird deshalb die Formel G_{ii} zu diesem Zwecke durch passende Beispiele später erläutert werden.

	ξ	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^V	f^{VI}
1872 Sept. 27	-269759.40						
» Oct. 17	-260286.14	+9473.26					
» Nov. 6	-249464.39	+10821.75	+1348.49	-315.89			
» » 26	-237610.04	+11854.35	+1032.60	-293.47	+22.42	+5.14	-2.15
» Dec. 16	-225016.56	+12593.48	+739.13	-265.91	+27.56	+2.99	-1.59
1873 Jan. 5	-211949.86	+13066.70	+473.22	-235.36	+30.55	+1.40	-1.62
» » 25	-198645.30	+13304.56	+237.86	-203.41	+31.95	-0.22	-0.96
» Febr. 14	-185306.29	+13339.01	+34.45	-171.68	+31.73	-1.18	-0.94
» März 6	-172104.51	+13201.78	-137.23	-141.13	+30.55	-2.12	-0.50
» » 26	-159181.09	+12923.42	-278.36	-112.70	+28.43	-2.62	-0.24
» April 15	-146648.73	+12532.36	-391.06	-86.89	+25.81	-2.86	
» Mai 5	-134594.32	+12054.41	-477.95	-63.94	+22.95		
» » 25	-123081.80	+11512.52	-541.89				

Wählt man als obere Grenze für den Integralwerth 1873 Jan. 15, so können hierfür sowohl die erste als auch die zweite Formel G_{II} (pag. 59) mit gleichem Vortheil zur Anwendung gebracht werden. Man findet mit Hilfe der ersten, indem man $n = -0.25$ setzt:

d	0	2	4	6
$\log f(a+iw)$	2.104214	2.70359	1 _n 8587	0 _n 384
$\log Q_2^d(n)$	9.059121	7 _n 60248	6.6984	5 _n 891

d	1	3	5	7
$f^d(a+iw)$	-1502.765	-15.565	+37.790	-10.565
$\log f^d(a+iw)$	3 _n 176891	1 _n 19215	1.5774	1 _n 024
$\log Q_2^d(n)$	8 _n 862827	8.13271	7 _n 4501	6.789

${}^n f(a+iw) -$	198653.750	$f(a+iw) +$	26581.170
$Q_2^0(n)f(a+iw) +$	14.566	$Q_2^1(n)f^1(a+iw) +$	109.577
$Q_2^2(n)f^{II}(a+iw) -$	2.023	$Q_2^3(n)f^{III}(a+iw) -$	0.211
$Q_2^4(n)f^{IV}(a+iw) -$	0.004	$Q_2^5(n)f^V(a+iw) -$	0.011
$S_g -$	198641.211	$Q_2^7(n)f^{VII}(a+iw) -$	0.001
$n S_u -$	6672.631	$S_u +$	26690.524

$$\iint_{1873 \text{ Jan. } 15} f(l) dl^2 = -205313.84$$

Für die Anwendung der zweiten Formel G_{II} (pag. 59) ergibt sich, indem man $m = +0.25$ setzt:

d	0	2	4	6
$f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w) +$	1004.840	+495.075	-91.730	+4.565
$\log f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	3.002097	2.69467	1 _n 96251	0.6594
$\log P_2^d(m)$	8 _n 017729	7.70848	7 _n 07825	6.4385

d	1	3	5	7
$\log f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	3 _n 244386	1.3128	1.5911	1 _n 1452
$\log P_2^d(m)$	8.716699	7 _n 5254	6.6274	5 _n 8236

${}^n f(a+[i+\frac{1}{2}]w) -$	211912.555	$f(a+[i+\frac{1}{2}]w) =$	+26517.610
$P_2^0(m)f(a+[i+\frac{1}{2}]w) -$	10.467	$P_2^1(m)f^1(a+[i+\frac{1}{2}]w) -$	91.429
$P_2^2(m)f^{II}(a+[i+\frac{1}{2}]w) +$	2.530	$P_2^3(m)f^{III}(a+[i+\frac{1}{2}]w) -$	0.069
$P_2^4(m)f^{IV}(a+[i+\frac{1}{2}]w) +$	0.110	$P_2^5(m)f^V(a+[i+\frac{1}{2}]w) +$	0.017
$P_2^6(m)f^{VI}(a+[i+\frac{1}{2}]w) +$	0.001	$P_2^7(m)f^{VII}(a+[i+\frac{1}{2}]w) +$	0.001
$S_g -$	211920.381	$S_u +$	26426.130
$m S_u +$	6606.532		

$$\iint_{1873 \text{ Jan. } 15} f(l) dl^2 = -205313.85$$

Die auf beide Arten erhaltenen Werthe des Doppelintegrals stimmen somit vollständig innerhalb der Unsicherheit der Rechnung; die Interpolation aus der obigen Integraltafel bestätigt ebenfalls das gefundene Resultat.

Soll das Doppelintegral für das Datum 1873 Jan. 21 bestimmt werden, so wird man hierzu die erste Formel G_{II} (pag. 59) verwenden können und $n = -0.10$ zu setzen haben. Die Rechnung stellt sich wie folgt:

d	0	2	4	6
$\log f^I(a+iw)$	2.104214	2.70359	1 _n 8587	0 _n 384
$\log Q_2^d(n)$	8.946125	7 _n 61935	6.7095	5 _n 901
d	1	3	5	7
$f^d(a+iw)$	— 1502.765	— 15.565	+ 37.790	— 10.565
$\log f^d(a+iw)$	3 _n 176891	1 _n 19215	1.5774	1 _n 024
$\log Q_2^d(n)$	8 _n 912045	8.17612	7 _n 4917	6.830
${}^{II}f(a+iw)$	— 198653.750			
$Q_2^0(n)f^I(a+iw)$	+ 11.229	$Q_2^1(n)f^I(a+iw)$	+ 122.726	
$Q_2^2(n)f^{II}(a+iw)$	— 2.103	$Q_2^3(n)f^{III}(a+iw)$	— 0.233	
$Q_2^4(n)f^{IV}(a+iw)$	— 0.037	$Q_2^5(n)f^V(a+iw)$	— 0.117	
$Q_2^6(n)f^{VI}(a+iw)$	0	$Q_2^7(n)f^{VII}(a+iw)$	— 0.007	
S_g		— 198644.661		
nS_u		+ 2670.354		

$$\iint_{1873 \text{ Jan. } 21} f(l) dP^2 = - 201315.01$$

welches Resultat durch die obige Integraltafel leicht bestätigt werden kann.

Für 1873 Jan. 9 muss die zweite Formel G_{II} (pag. 59) in Anwendung gebracht werden und es ist $m = +0.10$ zu setzen:

d	0	2	4	6	8
$f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 1004.840	+ 495.075	— 91.730	+ 4.565	+ 8.465
$\log f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	3.002097	2.694671	1 _n 9625	0.6594	0.9276
$\log P_2^d(m)$	8 _n 564271	7.915576	7 _n 2504	6.5973	5 _n 9533
d	1	3	5	7	
$f^d(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	3 _n 244386	1.3128	1.5911	1 _n 1452	
$\log P_2^d(m)$	8.636822	7 _n 4800	6.5877	5 _n 7862	
${}^{II}f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= — 211912.555				${}^I f(a+[i+\frac{1}{2}]w) = + 26517.610$
$P_2^0(m)f^I(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	— 36.844	$P_2^1(m)f^I(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= — 76.069		
$P_2^2(m)f^{II}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 4.076	$P_2^3(m)f^{III}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= — 0.062		
$P_2^4(m)f^{IV}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 0.163	$P_2^5(m)f^V(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= + 0.015		
$P_2^6(m)f^{VI}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	+ 0.002	$P_2^7(m)f^{VII}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	= + 0.001		
$P_2^8(m)f^{VIII}(a+[i+\frac{1}{2}]w)$	— 0.001				$S_u + 26441.495$
S_g		— 211945.159			
mS_u		+ 2644.149			

$$\iint_{1873 \text{ Jan. } 9} f(l) dP^2 = - 209301.01$$

Die directe Interpolation bestätigt dieses Resultat.

Weitere Beispiele zur Erläuterung der Anwendung der Q - und P -Tafeln zur Berechnung der Doppelintegrale erscheinen wohl nicht nöthig und ich gehe daher auf die Anwendung der Formeln über, welche zur Bestimmung der Anfangsconstante der 2^{ten} summirten Reihe dienen, nachdem über die Anfangsconstante der 1^{ten} summirten Reihe bereits früher Beispiele durchgeführt wurden. Der Rechnung lege ich das schon auf pag. 47 angesetzte Beispiel zu Grunde. Es soll die Anfangsconstante der 2^{ten} summirten Reihe für verschiedene Zeitgrenzen so bestimmt werden, dass das Integral für diese Datum (untere Grenzen) verschwindet.

Als erstes Beispiel wähle ich für die untere Grenze das Datum 1873 Dec. 31 und knüpfe daran die Bedingung, dass das Doppelintegral für diese Grenze verschwindet. Die Formel A_{II} (pag. 53) gibt für ${}^u f(a)$, welcher Werth auf die Zeile 1874 Jan. 20 zu setzen ist:

$$\begin{aligned} + \frac{1}{24} f'(a-w) &= - 0''1532,1 \\ - \frac{17}{5760} \left[2f''(a-w) + f''(a) \right] &= - 0.0028,8 \\ + \frac{367}{967680} \left[3f^{IV}(a-w) + 2f^{IV}(a) \right] &= - 0.0001,1 \\ \hline {}^u f(a) &= - 0''1562 ; \end{aligned}$$

soll aber das Doppelintegral für 1874 Jan. 20 verschwinden, so gibt die Formel B_{II} (pag. 53) für ${}^u f(a)$, welcher Werth wieder auf die Zeile 1874 Jan. 20 zu setzen ist:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{12} f'(a) &= + 0''0886,6 \\ + \frac{1}{240} f''(a) &= + 0.0005,8 \\ - \frac{31}{60480} f^{IV}(a) &= + 0.0000,1 \\ \hline {}^u f(a) &= + 0''0892 . \end{aligned}$$

Setzt man nun die so ermittelten Anfangsconstanten als Anfangswerth in die zweite summirte Reihe und ebenso die zugehörigen auf pag. 47 ermittelten Werthe für die erste summirte Reihe, bildet das Summationschema für jeden Fall und berechnet dann nach den Formeln A_{II} und B_{II} (pag. 53) den Werth der Integrale für die zwei Grenzen, so wird man sich leicht überzeugen, dass in der That die Werthe dieser Integrale für die angesetzten Grenzen Null werden, welche Controle für die Richtigkeit der Bestimmung der Anfangsconstanten stets vorgenommen werden kann. Man wird für den ersten Fall (1873 Dec. 31), indem ich nur die Argumentwerthe und die dadurch gebildete Summationsreihe anführe und mich wegen der Differenzwerthe auf die pag. 47 mitgetheilten Zahlen beziehe, und, um überdies die Stellung der Anfangsconstanten hervorzuheben, dieselben in eckige Klammern setze, erhalten:

$$\begin{array}{rcccl} & {}^u f & {}^I f & f & \\ 1873 \text{ Nov. } 1 & - 3''6139 & & - 5''8714 & \\ & & + 3.5674 & & \\ \text{» Dec. } 11 & - 0.0465 & & - 3.6771 & \\ & & [- 0.1097] & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 {}^{11}f & f & f \\
 1874 \text{ Jan. } 20 & [- 0.1562] & - 1.0639 \\
 & - 1.1730 & \\
 \text{» März } 1 & - 1.3298 & + 1.6877
 \end{array}$$

Man findet dann durch Anwendung der Formel A_1 (pag. 35) für das einfache Integral für die Grenze 1873 Dec. 31:

$$\begin{aligned}
 {}^1f(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) &= - 0.1097 \\
 + \frac{1}{24} f^1(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) &= + 0.1088,8 \\
 - \frac{17}{5760} f^{\text{III}}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) &= + 0.0008,3 \\
 + \frac{367}{967680} f^{\text{V}}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) &= + 0.0000,3 \\
 \hline
 \int_{1873 \text{ Dec. } 31} f(l) dl &= 0''0000 ;
 \end{aligned}$$

für das Doppelintegral nach A_{11} (pag. 53):

$$\begin{aligned}
 {}^{11}f(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) &= - 0''1013,5 \\
 - \frac{1}{24} f^{\text{II}}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) &= + 0.0987,7 \\
 + \frac{17}{1920} f^{\text{IV}}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) &= + 0.0024,6 \\
 - \frac{367}{193536} f^{\text{VI}}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) &= + 0.0001,1 \\
 \hline
 \iint_{1873 \text{ Dec. } 31} f(l) dl^2 &= 0''0000 .
 \end{aligned}$$

so dass in der That die Anfangswerthe der summirten Reihen als richtig erwiesen sind.

Für das Datum 1874 Jan. 20 wird mit Rücksicht auf die obigen Werthe (pag. 47 u. 63) das folgende Summationsschema sich ergeben:

$$\begin{array}{rcl}
 {}^{11}f & f & f \\
 1872 \text{ Novbr. } 1 & - 5''1083 & - 5''8714 \\
 & & + 4''4373 \\
 \text{» Decbr. } 11 & - 0.6710 & - 3.6771 \\
 & & [+ 0.7602] \\
 1874 \text{ Jan. } 20 & [+ 0.0892] & - 1.0639 \\
 & - 0.3037 & \\
 \text{» März } 1 & - 0.2145 & + 1.6877
 \end{array}$$

Mittelst der Formel B_1 pag. 35 findet man:

$$\begin{aligned}
 {}^1f(a + iw) &= + 0''2282,5 \\
 - \frac{1}{12} f^1(a + iw) &= - 0.2235,3 \\
 + \frac{11}{720} f^{\text{III}}(a + iw) &= - 0.0044,4 \\
 - \frac{191}{60480} f^{\text{V}}(a + iw) &= - 0.0002,4 \\
 + \frac{2497}{3628800} f^{\text{VII}}(a + iw) &= - 0.0000,3 \\
 \hline
 \int_{1873 \text{ Jan. } 20} f(l) dl &= 0''0000
 \end{aligned}$$

und durch Anwendung der Formel B_n (pag. 53) :

$$\begin{aligned}
 {}^{11}f(a+iv) &= + 0.0892,0 \\
 + \frac{1}{12} f(a+iv) &= - 0.0886,6 \\
 - \frac{1}{240} f^{11}(a+iv) &= - 0.0005,8 \\
 + \frac{31}{60480} f^{1v}(a+iv) &= - 0.0000,1 \\
 \int \int f(l) dl^2 &= 0.0000
 \end{aligned}$$

Als Beispiel der Anwendung der Formeln H_n (pag. 59) endlich soll die Anfangsconstante so bestimmt werden, dass das einfache und doppelte Integral für die Grenze 1874 Jan. 10 verschwindet; die Bestimmung der Anfangsconstante ${}^{11}f(a-\frac{1}{2}w)$ ist bereits dieser Bedingung gemäss auf pag. 48 durchgeführt und es erübrigt nur die Bestimmung von ${}^{11}f(a)$. Man erhält hierfür nach H_n (pag. 59), indem man beachtet, dass beide Formeln mit gleicher Berechtigung in Anwendung gezogen werden können, zuerst, wenn man $n = -0.25$ setzt:

d	0	2	3
$\log f^d(a)$	0,026901	9.14114	8,2923
$\log Q_2^d(n)$	9.059121	7,60248	6.6984

d	1	3	5	7
$f^d(a)$	+ 2.68240	- 0.29030	+ 0.07710	- 0.03880
$\log f^d(a)$	0.428524	9,46285	8.8871	8,589
$\log Q_2^d(n)$	8,862827	8.13271	7,4501	6.789

$$\begin{aligned}
 Q_2^0(n) f(a) &= - 0.1219,1 & f(a-\frac{1}{2}w) + \frac{1}{2} f(a) &= - 0.1227,5 \text{ (pag. 48)} \\
 Q_2^2(n) f^{11}(a) &= - 0.0005,5 & Q_2^1(n) f^1(a) &= - 0.1955,9 \\
 Q_2^4(n) f^{1v}(a) &= - 0.0000,1 & Q_2^3(n) f^{111}(a) &= - 0.0039,4 \\
 S'_g &= - 0.1224,7 & Q_2^5(n) f^v(a) &= - 0.0002,2 \\
 n S_u &= + 0.0806,3 & Q_2^7(n) f^{v11}(a) &= - 0.0000,2 \\
 {}^{11}f(a) &= + 0.0418 & S_u &= - 0.3225,2
 \end{aligned}$$

Durch Benützung der zweiten Formel ($m = +0.25$) findet sich:

d	0	2	4
$f^d(a-\frac{1}{2}w)$	- 2.37050	+ 0.27865	- 0.05695
$\log f^d(a-\frac{1}{2}w)$	0,374840	9.44506	8,7555
$\log P_2^d(m)$	8,017729	7.70848	7,0783

d	1	3	5
$\log f^d(a-\frac{1}{2}w)$	0.417173	9,44793	8.8733
$\log P_2^d(m)$	8.716699	7,52542	6.6274

$$\begin{array}{rcl}
P_2^0(m)f(a-\frac{1}{2}w) & = & + 0''0246,9 \quad f(a-\frac{1}{2}w) = + 0''4092,0 \text{ (p. 48)} \\
P_2^2(m)f''(a-\frac{1}{2}w) & = & + 0.0014,2 \quad P_2^4(m)f^{(4)}(a-\frac{1}{2}w) = + 0.1361,0 \\
P_2^4(m)f^{(4)}(a-\frac{1}{2}w) & = & + 0.0000,7 \quad P_2^3(m)f'''(a-\frac{1}{2}w) = + 0.0009,4 \\
S_g & = & + 0''0261,8 \quad P_2^5(m)f^{(5)}(a-\frac{1}{2}w) = + 0.0000,3 \\
mS_u & = & + 0.1365,7 \quad S_u = + 0''5462,7 \\
{}^{11}f(a-\frac{1}{2}w) & = & - 0''1627,5 \\
\frac{1}{2}{}^{11}f(a-\frac{1}{2}w) & = & + 0.2046,0 \\
{}^{11}f(a) & = & + 0''0418,
\end{array}$$

mit dem obigen Werthe völlig übereinstimmend.

Das Summationschema wird also, mit Weglassung der Differenzwerthe:

$$\begin{array}{rcl}
& {}^{11}f & f \\
1873 \text{ Nov. 1} & - 4''4537 & - 5''8714 \\
& & + 4''0863 \\
& \text{» Dec. 11} & - 0.3674 \quad [+ 0.4092] \\
1874 \text{ Jan. 20} & [+ 0.0418] & - 1.0639 \\
& & - 0.6547 \\
& \text{» März 1} & - 0.6129 \quad + 1.6877
\end{array}$$

Bestimmt man nun nach den Formeln G_i und G_{ii} (pag. 42, 59) die Werthe der Integrale für 1874 Jan. 10, so überzeugt man sich leicht, dass das einfache und doppelte Integral in der That für die angesetzte Grenze verschwindet.

Anhang.

Es wird sich bei der Ermittlung der speciellen Störungswerthe häufig der Fall ereignen, dass man den Werth eines einfachen oder doppelten Integrales kennen muss, der die Grenzen der durch die vorausgehenden Rechnungen erhaltenen Störungswerthe überschreitet; es ist klar, dass eine genaue Annahme in diesem Falle nicht gemacht werden kann, doch genügen in den meisten Fällen ganz beiläufige Näherungen. Wie die letzteren erhalten werden können, ist der Gegenstand der folgenden Auseinandersetzungen.

Sei $f^d(m)$ irgend ein Differenzwerth der d^{ten} Differenzreihe, so wird der diesem Werthe in der Richtung der Fortschreitung folgende Werth sein:

$$f^d(m+1) = f^d(m) + f^{d+1}(m-\frac{1}{2}) + f^{d+2}(m-1) + f^{d+3}(m-\frac{3}{2}) + \dots,$$

welcher Ausdruck völlig bekannte Differenzwerthe enthält, und eine genügende Annäherung erreichen lässt, da ja vorausgesetzt wird, dass die Berechnung der vorgelegten Funktion innerhalb hinreichend enger Intervalle ausgeführt, oder allgemein, dass die Funktion nach Potenzen des Argumentes entwickelt ist.

Wollte man die Rechnung rückwärts fortsetzen, so wird man, sich auf bekannte Differenzwerthe beschränkend, haben:

$$f^d(m-1) = f^d(m) - f^{d+1}(m+\frac{1}{2}) + f^{d+2}(m+1) - f^{d+3}(m+\frac{3}{2}) + \dots$$

Indem man auf das Intervall $f^d(m \pm 2)$, wo das Zeichen je nach der Richtung des Fortschreitens zu nehmen ist, übergeht, hat man vorerst für das obere Zeichen:

$$f^d(m+2) = f^d(m+1) + f^{d+1}(m+\frac{1}{2}) + f^{d+2}(m) + f^{d+3}(m-\frac{1}{2}) \dots$$

wo jetzt rechter Hand noch unbekannte Differenzwerthe vorkommen. Man beachtet, dass ist:

$$\begin{aligned} f^d(m+1) &= f^d(m) + f^{d+1}(m-\frac{1}{2}) + f^{d+2}(m-1) + f^{d+3}(m-\frac{3}{2}) + \dots \\ f^{d+1}(m+\frac{1}{2}) &= f^{d+1}(m-\frac{1}{2}) + f^{d+2}(m-1) + f^{d+3}(m-\frac{3}{2}) + \dots \\ f^{d+2}(m) &= f^{d+2}(m-1) + f^{d+3}(m-\frac{3}{2}) + \dots \\ f^{d+3}(m-\frac{1}{2}) &= f^{d+3}(m-\frac{3}{2}) + \dots \\ &\dots \dots \end{aligned}$$

und findet daher leicht:

$$f^d(m+2) = f^d(m) + 2f^{d+1}(m-\frac{1}{2}) + 3f^{d+2}(m-1) + 4f^{d+3}(m-\frac{3}{2}) + \dots$$

und für die Fortsetzung der Funktionswerthe nach rückwärts:

$$f^d(m-2) = f^d(m) - 2f^{d+1}(m+\frac{1}{2}) + 3f^{d+2}(m+1) - 4f^{d+3}(m+\frac{3}{2}) + \dots$$

oder allgemein zum Uebergang auf einen beliebigen Differenzwerth:

$$f^d(m \pm n) = f^d(m) \pm n f^{d+1}(m \mp \frac{1}{2}) + \frac{n(n+1)}{1.2} f^{d+2}(m \mp 1) \pm \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} f^{d+3}(m \mp \frac{3}{2}) + \dots \quad (1)$$

welches Resultat übrigens sofort aus der Newton'schen Interpolationsformel erhalten werden kann. Mit Hilfe dieser Formel wird man sich also ohne Schwierigkeit die im Differenzschema noch fehlenden Differenzwerthe direct bilden können. Ich ziehe dieses Verfahren dem sonst üblichen vor, die Differenzen mit Rücksicht auf den Gang der Funktion im Voraus zu bilden.

Ein specieller Fall, der bei der Methode der Variation der Constanten in Betracht kommt, lässt sich direct noch etwas einfacher erledigen, indem man unmittelbar zur Kenntniss des geforderten Integralwerthes gelangt.

Es sei die Rechnung bis zu dem Intervalle $(a+iw)$ vorgeschritten und es wird das einfache Integral der vorgelegten Funktion für das Argument $(a+[i+1]w)$ gefordert. Man hat hierfür zunächst die Formel:

$$\int_a^{a+[i+1]w} f(l) dl = w \left\{ f(a+[i+1]w) - \frac{1}{12} f''(a+[i+1]w) + \frac{11}{720} f'''(a+[i+1]w) - \dots \right\}$$

Lässt man, was völlig gestattet ist, in diesem Falle die aus den dritten Differenzen resultirende Correction des Integrales weg und beachtet, dass ist, indem wir mit im Differenzschema wirklich vorkommenden Grössen zu thun haben:

$$\begin{aligned} f(a+[i+1]w) &= \frac{1}{2} f(a+[i+\frac{1}{2}]w) + \frac{1}{2} f(a+[i+\frac{3}{2}]w) \\ f'(a+[i+1]w) &= \frac{1}{2} f'(a+[i+\frac{1}{2}]w) + \frac{1}{2} f'(a+[i+\frac{3}{2}]w), \end{aligned}$$

so erhält man leicht nach (1), da $f(a+[i+\frac{1}{2}]w)$ schon durch die Summation

selbst gegeben ist, die vorkommenden Funktionswerthe durch bekannte Zahlen ausdrückend:

$$\begin{aligned} f'(a + [i + \tfrac{3}{2}]w) &= f'(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + f'(a + iw) + f'(a + [i - \tfrac{1}{2}]w) + \\ &\quad + f''(a + [i - 1]w) + \dots \\ f''(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) &= f''(a + [i - \tfrac{1}{2}]w) + f''(a + [i - 1]w) + f'''(a + [i - \tfrac{3}{2}]w) + \dots \\ f'''(a + [i + \tfrac{3}{2}]w) &= f'''(a + [i - \tfrac{1}{2}]w) + 2f''(a + [i - 1]w) + 3f'''(a + [i - \tfrac{3}{2}]w) + \dots \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die obige Integralformel ein, so findet man:

$$\begin{aligned} \int_{a+(i+1)w}^{a+(i-1)w} f(l) dl &= w \left\{ f'(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \tfrac{1}{2}f'(a + iw) \right\} + \\ &\quad + \frac{w}{24} \left\{ 10f''(a + [i - \tfrac{1}{2}]w) + 9f''(a + [i - 1]w) + 8f'''(a + [i - \tfrac{3}{2}]w) + \right. \\ &\quad \left. + 7f'''(a + [i - 2]w) + \dots \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

Würde man dieses Verfahren für die Fortsetzung der Rechnung nach rückwärts benützen, so erhielte man:

$$\begin{aligned} \int_{a+(i-1)w}^{a+(i+1)w} f(l) dl &= w \left\{ f'(a + [i - \tfrac{1}{2}]w) - \tfrac{1}{2}f'(a + iw) \right\} \\ &\quad + \frac{w}{24} \left\{ 10f''(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) - 9f''(a + [i + 1]w) + 8f'''(a + [i + \tfrac{3}{2}]w) - \right. \\ &\quad \left. - 7f'''(a + [i + 2]w) + \dots \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

welche Formeln in der Anwendung wegen der einfachen Zahlencoefficienten Vortheile bieten.

Ermittlung der speciellen Störungen.

§ 1. Allgemeines und Entwicklung der Grundgleichungen.

Die Methoden der Bahnbestimmung, die im ersten Bande vorgetragen wurden, haben die störende Wirkung der Planeten auf die Bewegung des in Betracht kommenden Himmelskörpers nicht berücksichtigt; der Einfluss dieser letzteren wird jedoch, wenn man die Bewegung desselben durch eine längere Zeit verfolgt, sehr merklich, und kann dann ohne Nachtheil für die Genauigkeit der Bahnbestimmung nicht übergangen werden. Die Berechnung dieser störenden Einwirkung kann aber, wie es in der Einleitung zum ersten Bande angedeutet wurde, nach zwei wesentlich verschiedenen Formen durchgeführt werden, indem man einerseits von einem Punkte der Bahn ausgehend, an dem der Ort und die Bewegung (gleiche Tangente) in der gestörten und ungestörten Bahn identisch sind, die Störungen Schritt für Schritt verfolgt und deren Anwachsen successive berechnet; man nennt diese Art der Berechnung die Methode der speciellen Störungen, und diejenigen Elemente, die für einen gegebenen Augenblick den Ort und die Bewegung des Himmelskörpers identisch mit der gestörten finden lassen, die osculirenden Elemente. Andererseits kann man aber die Zeit unbestimmt lassen, indem man die in Betracht kommenden Störungswerthe als Funktionen der unbestimmt gelassenen Zeit darstellt. Die Ermittlung der Coëfficienten dieser Funktionen stösst aber in der Regel, wenn die Excentricitäten und Neigungen der Bahnen nicht klein sind, auf ganz erhebliche Schwierigkeiten und deren Ermittlung ist nach den bisherigen Methoden sehr zeitraubend und kann bisweilen in Folge des Anwachsens der Rechnungsoperationen zu einem übermässigen Umfange, als nahezu unausführbar bezeichnet werden. Jedoch bietet diese Methode in ihrer Anwendung auf die grossen Planeten, wo es sich darum handelt, die Störungen durch Jahrhunderte zu verfolgen, ganz wesentliche Vortheile und gewährt manchen Einblick in den Mechanismus des Sonnensystems, der bei der Anwendung der speciellen Störungen nicht möglich wäre. Da aber für die nächsten Zwecke des vorliegenden Lehrbuches die Auseinandersetzung der speciellen Störungen genügt, so werde ich mich hier auf dieselbe beschränken.

Auf pag. 40 des ersten Bandes wurden die Kräfte, mit der die Sonne und der in Betracht kommende Himmelskörper auf einander wirken, gefunden:

$$X_0 = -k^2 (1 + m) \frac{x}{r^3}$$

$$Y_0 = -k^2 (1 + m) \frac{y}{r^3}$$

$$Z_0 = -k^2 (1 + m) \frac{z}{r^3}$$

wobei gesetzt ist:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

überdiess stellt m die Masse des Himmelskörpers in Einheiten der Sonnenmasse und k die bekannte Constante des Sonnensystems vor.

Tritt nun ein dritter Körper hinzu, dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 sind, und dessen Masse m_1 in Einheiten der Sonnenmasse ist, so wird die Wirkung dieses störenden Planeten in der Entfernung q und in der Zeiteinheit sein:

$$\frac{km_1}{q^2},$$

wobei q berechnet wird nach:

$$q^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2.$$

Zerlegt man die eben hingeschriebene Gesamtwirkung nach den Coordinaten-Achsen und bedenkt, dass die Cosinus der Winkel, welche die Linie q mit den drei Achsen einschliesst, der Reihe nach durch:

$$\frac{x_1 - x}{q}, \frac{y_1 - y}{q}, \frac{z_1 - z}{q}$$

dargestellt werden, so erhält man die Kräfte, die der störende Planet auf den gestörten Himmelskörper direct ausübt, für die drei Achsen

$$k^2 m_1 \frac{x_1 - x}{q^3}, k^2 m_1 \frac{y_1 - y}{q^3}, k^2 m_1 \frac{z_1 - z}{q^3}.$$

Doch muss noch eine weitere indirecte Einwirkung berücksichtigt werden; da die Bewegung auf den Mittelpunkt der Sonne als Anfangspunkt der Coordinaten bezogen wird, so muss man noch die Kräfte in Rechnung ziehen, welche der störende Planet auf die Sonne ausübt. Bezeichnet man mit r_1 die heliocentrische Entfernung desselben, also seinen Radiusvector, so ist:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

und die die Sonne bewegenden Kräfte sind:

$$k^2 m_1 \frac{x_1}{r_1^3}, k^2 m_1 \frac{y_1}{r_1^3}, k^2 m_1 \frac{z_1}{r_1^3},$$

die naturgemäss von den obigen in Abzug gebracht werden müssen, um die relative Bewegung gegen das Sonnencentrum zu erhalten; hiermit wird also als das Resultat der Einwirkung des störenden Planeten zu setzen sein:

$$\begin{aligned} X &= k^2 m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\} \\ Y &= k^2 m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} \\ Z &= k^2 m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} . \end{aligned}$$

Würde man weitere störende Planeten berücksichtigen, so ist es klar, dass ganz ähnliche Ausdrücke für die Kräfte entstehen, die sich nur dadurch unterscheiden, dass die entsprechend abgeänderten Massen und Coordinaten in Rechnung zu ziehen sind; man wird also erhalten:

$$\begin{aligned} X &= k^2 m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\} + k^2 m_2 \left\{ \frac{x_2 - x}{\varrho_2^3} - \frac{x_2}{r_2^3} \right\} + k^2 m_3 \left\{ \frac{x_3 - x}{\varrho_3^3} - \frac{x_3}{r_3^3} \right\} + \dots \\ &= \Sigma k^2 m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\} \\ Y &= k^2 m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho_1^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} + k^2 m_2 \left\{ \frac{y_2 - y}{\varrho_2^3} - \frac{y_2}{r_2^3} \right\} + k^2 m_3 \left\{ \frac{y_3 - y}{\varrho_3^3} - \frac{y_3}{r_3^3} \right\} + \dots \\ &= \Sigma k^2 m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} \\ Z &= k^2 m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\varrho_1^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} + k^2 m_2 \left\{ \frac{z_2 - z}{\varrho_2^3} - \frac{z_2}{r_2^3} \right\} + k^2 m_3 \left\{ \frac{z_3 - z}{\varrho_3^3} - \frac{z_3}{r_3^3} \right\} + \dots \\ &= \Sigma k^2 m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} , \end{aligned}$$

und da:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= X_o + X \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y_o + Y \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z_o + Z \end{aligned}$$

ist, so erhält man als Grundgleichungen der gesamten Störungstheorie:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 (1 + m) \frac{x}{r^3} &= \Sigma k^2 m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 (1 + m) \frac{y}{r^3} &= \Sigma k^2 m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 (1 + m) \frac{z}{r^3} &= \Sigma k^2 m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} , \end{aligned}$$

welche man jedoch, in Anbetracht, dass die Massen derjenigen Himmelskörper, auf die die Störungsrechnung nach der hier vorgetragenen Methode zur Anwendung kommt, stets der Null gleichgesetzt werden dürfen, in der folgenden einfacheren Form schreiben kann:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \frac{x}{r^3} &= \Sigma k^2 m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 \frac{y}{r^3} &= \Sigma k^2 m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 \frac{z}{r^3} &= \Sigma k^2 m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} \end{aligned} \quad 1$$

Vergleicht man diese Grundgleichungen der Störungstheorie mit jenen, welche für das Problem zweier Körper gelten (Band I pag. 40 (1)), so findet man linker Hand vom Gleichheitszeichen eine völlige Uebereinstimmung, rechter Hand aber steht anstatt der Null die Summe der störenden Kräfte. Je kleiner aber die störenden Massen m_1 sind, um so mehr wird sich der Ausdruck rechter Hand der Null annähern, und da die Massen der Planeten in Theilen der Sonnenmasse genommen kleine Grössen sind, so wird diese Ueberlegung sofort den Schluss erlauben, dass in der That in der ersten Annäherung die Störungen vernachlässigt werden können, ohne dass das erlangte Resultat allzusehr von der Wahrheit abweichen würde. Man wird jedoch hierbei noch in Erwägung ziehen müssen, dass die Ausdrücke rechter Hand selbst bei der Kleinheit der Massen bedeutende Werthe erlangen können, wenn die Nenner q und r_1 sehr klein werden; die Kleinheit von r_1 hat vorerst keine Bedeutung in unserem Sonnensystem, wohl aber kann besonders für Kometenbahnen unter Umständen q ganz ausserordentlich klein werden; in der That findet man Beispiele, wo Kometenbahnen durch die störende Einwirkung der Planeten total geändert wurden; es ist sogar einigermaßen wahrscheinlich, dass die Kometen von kurzer Umlaufszeit ihre stark von der Parabel abweichenden Bahnen hierdurch erhalten haben. Die für die Kometen gemachte Bemerkung gilt ebenfalls für die Trabanten, bei denen in Folge der Kleinheit von q nicht einmal die Differentialgleichung für die ungestörte Bewegung um die Sonne eine Näherung abgeben würde, und man bei Weitem brauchbarere Näherungen erhält, wenn man die Gleichungen so umsetzt, dass die Sonne als störender Körper auftritt, dessen Einfluss in der ersten Näherung übergangen werden kann.

Die Gleichungen 1 (pag. 71) lassen sofort erkennen, dass man dieselben in zwei wesentlich verschiedenen Formen für die Rechnung benützen kann; einerseits wird man die Störungen in den Coordinaten selbst berechnen können, wobei die Wahl der Coordinaten noch dem Ermessen überlassen bleibt, andererseits weiss man, dass die obigen drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, falls keine Störungen vorhanden sind, sechs Constanten, die Elemente, enthalten, durch deren entsprechende Variation offenbar erreicht werden kann, dass den Störungsgleichungen genügt wird. Beide Arten der Lösung sollen im Folgenden auseinandergesetzt und vorerst die Störung in den Coordinaten entwickelt werden, wobei die zwei Hauptmethoden in Betracht kommen, je nachdem man die rechtwinkligen oder die polaren Coordinaten wählt.

A). Encke's Methode der Berechnung der speciellen Störungen.

§ 2. Transformation der Grundgleichungen.

Encke's Methode der Störungsrechnung beruht auf der unmittelbaren Verwendung der obigen Störungsgleichungen; dieselbe wurde durch Encke unabhängig von Bond aufgefunden; wiewohl Bond in der Auffindung der Methode das

Prioritätsrecht unbezweifelt in Anspruch nehmen kann, so geben doch die lichtvolle Darstellung der Methode, die vorgenommenen zweckentsprechenden Transformationen und die glückliche Anwendung Encke das unbestrittene Verdienst, dieselbe der Praxis zugeführt zu haben; man kann daher diese Methode in der gegenwärtigen Form wohl an Encke's Namen knüpfen.

Encke's Methode ermittelt die Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten. Bezeichnet man die ungestörten, auf ein fixes in den Sonnenmittelpunkt als Anfangspunkt gelegtes Coordinatensystem bezogenen, Coordinaten mit x_0, y_0, z_0 , die Störungen in den einzelnen Coordinaten mit ξ, η, ζ , so sind die thatsächlich stattfindenden, also gestörten, Coordinaten x, y, z dargestellt durch:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta \\ z &= z_0 + \zeta \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

Die zweimalige Differentiation dieser Gleichungen nach der Zeit giebt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{d^2 x_0}{dt^2} &= \frac{d^2 \xi}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= \frac{d^2 \eta}{dt^2} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{d^2 z_0}{dt^2} &= \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

Bezeichnet man mit r_0 den ungestörten Radiusvector, so ist

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$

und nach Band I pag. 40 hat man für die ungestörte Bewegung die Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} &= -k^2 (1+m) \frac{x_0}{r_0^3} \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= -k^2 (1+m) \frac{y_0}{r_0^3} \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} &= -k^2 (1+m) \frac{z_0}{r_0^3}; \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (2) und führt in denselben für die zweiten Differentialquotienten der gestörten Coordinaten die auf pag. 71 gefundenen Gleichungen ein, so findet man sofort die Encke'schen Grundgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \sum k^2 m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\} + k^2 (1+m) \left\{ \frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} \right\} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \sum k^2 m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} + k^2 (1+m) \left\{ \frac{y_0}{r_0^3} - \frac{y}{r^3} \right\} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \sum k^2 m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} + k^2 (1+m) \left\{ \frac{z_0}{r_0^3} - \frac{z}{r^3} \right\} \end{aligned} \right\} \quad 3)$$

Die Berechnung der ersten Glieder rechts vom Gleichheitszeichen bietet im Allgemeinen wenig Schwierigkeit, doch sowohl in diesen Gliedern, als auch in den zweiten sind die Störungswerthe ξ, η, ζ , also jene Werthe selbst enthalten, die man

zu bestimmen sucht; doch ist es wesentlich zu bemerken, dass in den ersten Gliedern wegen des Factors m_1 die Substitution x_0, y_0, z_0 für x, y, z erlaubt erscheint, ohne dass man mehr als Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt. Man kann demnach diese ersten Glieder, wenn man die Störungswerte zweiter Ordnung übergehen will, direct berechnen, und bezeichnet dieselben deshalb als die directen Glieder; später wird aber gezeigt werden, wie man in diesen directen Gliedern auch die Störungswerte zweiter und höherer Ordnung ohne Mühe aufnehmen kann.

Eine wesentliche Schwierigkeit bieten aber die zweiten Glieder; vorerst stehen dieselben in einer Form, die eine genaue Berechnung ohne Anwendung sehr grosser Tafeln nicht gestattet, und ferner bedarf man zu ihrer Ermittlung einer verhältnissmässig genauen Kenntniss der Störungswerte; da diese Glieder in Folge des letzteren Umstandes nur durch eine indirecte Rechnung erlangt werden können, bezeichnet man dieselben als die indirecten Glieder.

Der erstere oben angeführte Nachtheil kann leicht genug behoben werden: man kann nämlich leicht finden, dass ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} &= \frac{1}{r_0^3} \left\{ \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) x - \xi \right\} \\ \frac{y_0}{r_0^3} - \frac{y}{r^3} &= \frac{1}{r_0^3} \left\{ \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) y - \eta \right\} \\ \frac{z_0}{r_0^3} - \frac{z}{r^3} &= \frac{1}{r_0^3} \left\{ \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) z - \zeta \right\} \end{aligned} \right\} \quad 4.$$

und es ist dadurch zunächst der Vortheil erreicht, dass für alle drei Coordinaten das schwierig zu berechnende Glied auf den allen drei gemeinsamen Ausdruck: $1 - \frac{r_0^3}{r^3}$, reducirt erscheint.

Es ist offenbar:

$$r^2 = (x_0 + \xi)^2 + (y_0 + \eta)^2 + (z_0 + \zeta)^2,$$

also auch:

$$r^2 = r_0^2 + (2x_0 + \xi)\xi + (2y_0 + \eta)\eta + (2z_0 + \zeta)\zeta,$$

und man wird daher schreiben können:

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + \frac{2}{r_0^2} \left\{ (x_0 + \frac{1}{2}\xi)\xi + (y_0 + \frac{1}{2}\eta)\eta + (z_0 + \frac{1}{2}\zeta)\zeta \right\} = 1 + 2q,$$

wobei q eine Grösse von der Ordnung der Störungen sein wird und bestimmt erscheint durch die Relation:

$$q = \frac{(x_0 + \frac{1}{2}\xi)\xi + (y_0 + \frac{1}{2}\eta)\eta + (z_0 + \frac{1}{2}\zeta)\zeta}{r_0^2}; \quad 5)$$

es wird also:

$$\frac{r_0^3}{r^3} = (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}}$$

sein, oder wenn man nach Potenzen von q entwickelt, so findet sich sofort:

$$\frac{r_0^3}{r^3} = 1 - 3q + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} q^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^3 + \dots$$

Setzt man demnach:

$$f = 3 \left\{ 1 - \frac{5}{2} q + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} q^2 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^3 + \dots \right\} \quad 6)$$

so wird sich f leicht mit Hilfe des Argumentes q berechnen lassen. Indem ich vorerst nicht darauf eingehe, wie die Berechnung dieser Tafel durchgeführt werden kann, bemerke ich nur, dass die Tafel XI mit dem Werthe q als Argument $\log f$ unmittelbar ergibt; als Grenzwerte für q sind -0.03 und $+0.03$ angenommen, was für alle Fälle, die bei dieser Methode eintreten können, mehr als ausreichend ist. Die Tafel selbst bedarf wohl kaum einer näheren Erläuterung; dieselbe ist auf 6 Decimalen beschränkt, da diese Genauigkeit selbst bei den umfassendsten Störungsrechnungen genügend erscheint.

Man kann daher mit Rücksicht auf (4) schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} &= \frac{1}{r_0^3} (f q x - \xi) \\ \frac{y_0}{r_0^3} - \frac{y}{r^3} &= \frac{1}{r_0^3} (f q y - \eta) \\ \frac{z_0}{r_0^3} - \frac{z}{r^3} &= \frac{1}{r_0^3} (f q z - \zeta); \end{aligned}$$

setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (3) (pag. 73) ein und nimmt, da die Massen der Himmelskörper, die dieser Rechnungsmethode unterworfen werden, stets unmerklich sind,

$$m = 0$$

an, so erhalten die Gleichungen die folgende Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= k^2 \Sigma m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{q^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\} + \frac{k^2}{r_0^3} \left\{ f q x - \xi \right\} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= k^2 \Sigma m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{q^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} + \frac{k^2}{r_0^3} \left\{ f q y - \eta \right\} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= k^2 \Sigma m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{q^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} + \frac{k^2}{r_0^3} \left\{ f q z - \zeta \right\} \end{aligned} \right\} \quad 7)$$

Ehe ich diese Gleichungen weiter für die praktische Anwendung verwerte, will ich dieselben auf jene einfachere Form bringen, die dieselben annehmen, wenn man nur die ersten Potenzen der Störungen mitnehmen will; man hat dann offenbar:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{x_0 \xi + y_0 \eta + z_0 \zeta}{r_0^2} \\ q^2 &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \\ \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= k^2 \Sigma m_1 \left\{ \frac{x_1 - x_0}{q^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\} + \frac{k^2}{r_0^3} \left\{ 3 q x - \xi \right\} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= k^2 \Sigma m_1 \left\{ \frac{y_1 - y_0}{q^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} + \frac{k^2}{r_0^3} \left\{ 3 q y - \eta \right\} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= k^2 \Sigma m_1 \left\{ \frac{z_1 - z_0}{q^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} + \frac{k^2}{r_0^3} \left\{ 3 q z - \zeta \right\} \end{aligned} \right\} \quad 8)$$

In vielen Fällen wird man mit diesen Gleichungen, die also der f -Tafel nicht bedürfen, eine genügende Genauigkeit erhalten; doch ist die Abkürzung der Rechnung nicht allzu bedeutend und es wird sich daher wohl empfehlen in der Regel

von den strengen Gleichungen (7) Gebrauch zu machen. Uebrigens lassen sich für den Fall, dass man nur die ersten Potenzen der störenden Massen berücksichtigen will, wesentlich bequemere Rechnungsformen angeben, auf die später eingegangen wird.

Ich werde nun zeigen, wie man ohne grosse Schwierigkeit die Werthe der f -Tafel herstellen kann. An sich würde schon die Anwendung der in (6) angegebenen Reihe nicht unbequem sein, doch würde man, um die letzte Stelle in der Tafel XI sicher zu stellen, einer zehnstelligen Rechnung bedürfen, welche wegen der dabei nothwendigen Interpolationen ziemlich beschwerlich ausfallen würde; ich werde demnach die Rechnungsoperationen so transformiren, dass man in der zehnstelligen Tafel jede Interpolation vermeidet. Vorerst will ich aber für f die geschlossene Form hinschreiben, die unter Umständen mit Vortheil benützt werden kann.

Man erhält zunächst:

$$f = \frac{1 - (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}}}{q};$$

schreibt man nun, um die Form $\frac{0}{0}$ zu vermeiden, die für unendlich kleine Werthe von q eintritt:

$$2q = (\sqrt{1 + 2q} - 1)(\sqrt{1 + 2q} + 1)$$

so erhält man:

$$\frac{1}{2}f = \frac{1 - (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 + 2q} - 1} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 2q}};$$

führt man nun die, mit Rücksicht auf

$$\{1 - (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}}\} : \{\sqrt{1 + 2q} - 1\} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2q}} + \frac{1}{1 + 2q} + \frac{1}{(1 + 2q)^{\frac{3}{2}}}$$

geschlossen mögliche Division aus, und setzt der Kürze halber:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 2q}};$$

so ist:

$$f = \frac{\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4}{1 + \alpha}$$

womit die verlangte Form erreicht ist, welche in der That eine bequeme und sichere Rechnung gestattet, aber für die Anwendung zehnstelliger Tafeln beschwerlich wäre. Der obigen Reihe für f kann man aber sofort eine stärkere Convergenz ertheilen, wenn man die folgende Transformation benützt:

$$f = - (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}} \frac{1 - (1 + 2q)^{\frac{3}{2}}}{q}.$$

Die Entwicklung gibt:

$$\frac{f}{3} = (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2}q - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} q^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} q^4 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} q^5 - \dots \right\};$$

setzt man also für den Klammerausdruck:

$$(1 + q)^{\frac{1}{2}} + R$$

so wird R gefunden durch die Vergleichung der beiden Werthe und es ist:

$$R = -\frac{1}{24}q^2 + \frac{1}{16}q^3 - \frac{11}{128}q^4 + \frac{91}{768}q^5 - \frac{171}{1024}q^6 + \frac{495}{2048}q^7 - \dots;$$

schreibt man also:

$$(q) = \frac{R}{\sqrt{1+q}}$$

so wird:

$$\frac{f}{3} = (1 + 2q)^{-\frac{1}{2}} (1 + q)^{\frac{1}{2}} (1 + (q))$$

oder unter Anwendung der logarithmischen Reihe:

$$\log f = \log 3 - \frac{3}{2} \log (1 + 2q) + \frac{1}{2} \log (1 + q) + \text{Mod} \{ (q) - \frac{1}{2} (q)^2 + \frac{1}{3} (q)^3 - \dots \}.$$

Das letzte Glied kann selbst für die Grenzwerte von q mit Hilfe 7 stelliger Tafeln auf 11 Decimalstellen genau bestimmt werden, und es erscheint demnach die Berechnung der Werthe für $\log f$ mit Hilfe zehnstelliger Tafeln ohne jede Interpolation in den letzteren hergestellt.

Die hinten angehängte f -Tafel ist nach dieser Formel durch Herrn F. Anton mit grosser Sorgfalt 10stellig berechnet und ist daher völlig auf eine halbe Einheit der letzten Stelle richtig. Für einen Fall ($q = + 0.0251$) musste, um die sichere Richtigstellung der letzten Decimale zu erhalten, der Logarithmus 12stellig berechnet werden. In Nummer 2130 der astronomischen Nachrichten habe ich die Fehler der Eneke'schen 7 stelligen Tafel, die sich nach dieser Rechnung ergaben, mitgetheilt; die daselbst angeführten Correctionen können daher benützt werden, falls das Bedürfniss nach einer völlig correcten 7 stelligen Tafel eintreten sollte.

Ich werde nun zeigen, wie man die Gleichungen (7) (pag. 75) der Störungsrechnung zu Grunde legen kann und setze vorerst voraus, dass die Störungsrechnung bereits im Gange ist; die Vorschriften, die man beim Beginne derselben zu befolgen hat, werde ich später vornehmen.

Die Störungsrechnung selbst gibt die zweiten Differentialquotienten der Störungswerthe; wendet man auf die durch die Rechnung für gewisse fixe Zeitintervalle festgestellten Werthe die doppelte Summation an, wie dies bei der mechanischen Quadratur ausführlich erläutert wurde, so gelangt man durch diese zu genäherten Integralwerthen, die für die Zeit der Störungsrechnung durch Correctionen, die von dem Argumentwerthen und deren geraden Differenzen abhängen, streng erhalten werden können. Man hat nämlich mit Uebergang von Gliedern, die wohl nie merkbares bewirken können nach B_n (pag. 53), w der Einheit gleichsetzend:

$$\iint_{a+iv} f(x) dx^2 = {}''f(a+iv) + \frac{1}{12}f'(a+iv) - \frac{1}{240}f''(a+iv) + \dots;$$

wäre der letzte Werth des 2^{ten} Differentialquotienten $f'(a + (i-1)w)$ gefunden worden, so findet man, wenn man die Summation ausführt, streng ${}''f(a+iv)$; ebenso würde, wenn die Rechnung nach rückwärts fortgesetzt bis zu $f'(a - (i-1)w)$ gelangt wäre, ${}''f(a-iv)$ erhalten werden. Das Resultat dieser Betrachtungen führt

uns zu dem Schlusse, dass für das nächste Intervall, für welches die Störungsrechnung noch nicht fortgeführt erscheint, durch die mechanische Doppel-Quadratur der doppelt summirte Werth bekannt ist; man hat demnach durch die Hilfsmittel der mechanischen Quadratur bereits einen Näherungswerth für ξ , η , ζ , der in die Formeln (7) eingesetzt einen schon sehr genäherten Werth für den zu berechnenden zweiten Differentialquotienten abgeben wird; ist einmal dieser Werth ermittelt, so wird man denselben benützen, um einen der Wahrheit näher kommenden Integralwerth der Rechnung zu Grunde zu legen und die Operationen so lange fortsetzen, bis keine Aenderung der berechneten Werthe eintritt. Dieses Verfahren wäre aber sehr zeitraubend und beschwerlich, und man sieht sofort ein, dass man das Ziel weit rascher erreichen kann, wenn man nach dem Gange der Funktion, etwa mit Hilfe der auf pag. 67 entwickelten Formeln, den zu erwartenden zweiten Differentialquotienten extrapolirt und den so erhaltenen Werth sofort zur Correktion des doppelt summirten Werthes benützt. In der That erreicht man dadurch meist schon im ersten Versuche eine so bedeutende Annäherung, dass die zweite Rechnung bereits die genauen Werthe ergibt, ein Verfahren, welches von Encke für diesen Fall in Vorschlag gebracht und vielfach angewendet wurde. Dieses Rechnungsverfahren vermeidet jedoch nicht völlig die indirecte Rechnung, indem die Erfahrung lehrt, dass es, wenn die Störungen nur halbwegs anwachsen, eben unmöglich wird, den zu erwartenden Werth mit einem solchen Grade der Sicherheit zu bestimmen, dass die Wiederholung der Rechnung mit dem verbesserten Werthe immer vermieden werden könnte. Es lässt sich jedoch eine Vorschrift angeben, die auch diesen Mangel behebt.

Das Glied $-\frac{1}{240}f''(a + iw)$ fügt in der Regel wenig merkbares hinzu, und man kann den Werth des Integrales ohne Mitnahme dieses Gliedes als genügend genau ansehen; man kann dieses Glied also entweder ganz übergehen, oder dasselbe, was vorzuziehen ist, überschlagsweise nach dem Gange der Funktion in Rechnung ziehen; bei der Kleinheit des Factors, mit dem der zweite Differenzwerth zu multipliciren ist, wird die Unsicherheit über den Gang der Funktion, die nothwendigerweise die Extrapolation mit sich bringt, von keiner Erheblichkeit sein und man kann daher die Behauptung aufstellen, dass das Glied $-\frac{1}{240}f''(a + iw)$ schon vor Beginn der Rechnung des diesbezüglichen Störungsintervalles als genügend genau bekannt angesehen werden kann.

Gibt man den Gleichungen (7) (pag. 75) durch Einführen einiger Abkürzungen eine concisere Form, indem man setzt:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma k^2 m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\} &= \Sigma (X) \\ \Sigma k^2 m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} &= \Sigma (Y) \\ \Sigma k^2 m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\varrho^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\} &= \Sigma (Z) \\ \frac{k^2}{r^3} &= h \end{aligned} \right\} \quad 9)$$

so wird geschrieben werden können:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + h \xi &= \Sigma(X) + h f q x \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + h \eta &= \Sigma(Y) + h f q y \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + h \zeta &= \Sigma(Z) + h f q z \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

in diesen Ausdrücken kann man die Werthe für die gestörten Coordinaten des Planeten als bekannt voraussetzen nach den obigen Auseinandersetzungen; denn es genügt für dieselben die Störungen nur beiläufig zu kennen, da die Coordinaten selbst durchaus mit Grössen von der Ordnung der Störungen multiplicirt erscheinen. Man wird also mit Rücksicht auf den Gang der Funktionswerthe und auf die Regeln der mechanischen Integration leicht genügende Annäherungen für dieselben erhalten, die keiner Verbesserung bedürfen. Setzt man nun:

$$\left. \begin{aligned} S_{(x)} &= {}^n f_{(x)}(a + i w) + \frac{1}{12} \Sigma(X) - \frac{1}{240} f''_{(x)}(a + i w) \\ S_{(y)} &= {}^n f_{(y)}(a + i w) + \frac{1}{12} \Sigma(Y) - \frac{1}{240} f''_{(y)}(a + i w) \\ S_{(z)} &= {}^n f_{(z)}(a + i w) + \frac{1}{12} \Sigma(Z) - \frac{1}{240} f''_{(z)}(a + i w) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

welche Werthe als völlig bekannt angesehen werden dürfen, so ist mit Rücksicht auf die obige (pag. 77) für die mechanische Integration angesetzte Formel, wenn man dieselbe auf alle drei Coordinaten anwendet und statt des Doppelintegrals beziehungsweise die Werthe ξ , η und ζ schreibt:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= S_{(x)} + \frac{1}{12} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = S_{(x)} + \frac{1}{12} h f q x - \frac{1}{12} h \xi \\ \eta &= S_{(y)} + \frac{1}{12} \frac{d^2 \eta}{dt^2} = S_{(y)} + \frac{1}{12} h f q y - \frac{1}{12} h \eta \\ \zeta &= S_{(z)} + \frac{1}{12} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = S_{(z)} + \frac{1}{12} h f q z - \frac{1}{12} h \zeta \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

man findet also:

$$\left. \begin{aligned} \xi (1 + \frac{1}{12} h) &= S_{(x)} + \frac{1}{12} h f q x \\ \eta (1 + \frac{1}{12} h) &= S_{(y)} + \frac{1}{12} h f q y \\ \zeta (1 + \frac{1}{12} h) &= S_{(z)} + \frac{1}{12} h f q z \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

man ist aber mit Rücksicht auf (5) (pag. 74):

$$r_0^2 q = (x_0 + \frac{1}{2} \xi) \xi + (y_0 + \frac{1}{2} \eta) \eta + (z_0 + \frac{1}{2} \zeta) \zeta; \quad (14)$$

wo wieder die in den runden Klammern stehenden Werthe mit Rücksicht auf den Factor von der Ordnung der Störungen als hinreichend genau bekannt angesehen werden können, indem die Werthe $\frac{1}{2} \xi$, $\frac{1}{2} \eta$ und $\frac{1}{2} \zeta$ durch Extrapolation hierfür mit genügender Schärfe zu erhalten sind. Führt man nun für ξ , η und ζ in (14) die Werthe aus (13) ein und schreibt der Kürze wegen:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{x_0 + \frac{1}{2} \xi}{r_0^2 (1 + \frac{1}{12} h)} \\ b &= \frac{y_0 + \frac{1}{2} \eta}{r_0^2 (1 + \frac{1}{12} h)} \\ c &= \frac{z_0 + \frac{1}{2} \zeta}{r_0^2 (1 + \frac{1}{12} h)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

welche Werthe also wieder direct erhalten werden, so wird:

$$q = \frac{aS_{(x)} + bS_{(y)} + cS_{(z)}}{1 - \frac{h}{12}f(ax + by + cz)} \quad , \quad (16)$$

womit der Werth von q sofort direct gegeben ist, sobald der Werth von f bekannt ist; diese scheinbar indirecte Rechnung wird aber durch den verhältnissmässig einfachen Gang der f -Funktion so erleichtert, dass aus diesem Umstande kein Nachtheil für die directe Rechnung erwächst. Da überdiess der Nenner oder vielmehr der Logarithmus des Nenners in (16) in Folge des kleinen Factors $\frac{h}{12}$ selbst bei sehr stark anwachsenden Störungen einen fast linearen Gang zeigt, so scheint es zweckmässig zur Bestimmung des Werthes von f nicht den Gang der vorausgehenden Werthreihe für f zu benützen, sondern einfach den Werth des Nenners zu extrapoliren, und den so erlangten Näherungswerth von q als Argument für die f -Tafel zu benützen. In dem weiter unten folgenden Beispiele wird man sich leicht überzeugen, dass auch diese Operation in der That als direct bezeichnet werden kann, indem eine Verbesserung und Wiederholung der Rechnung niemals nöthig erscheint.

Indem der Werth von q hiermit also durch ein directes Verfahren bestimmt erscheint, erhält man durch die Verbindung der Gleichungen (10) und (13) (pag 79):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Sigma (X) + hfqx - \frac{h}{1 + \frac{1}{12}h} \left\{ S_{(x)} + \frac{1}{12} h f q x \right\} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \Sigma (Y) + hfqy - \frac{h}{1 + \frac{1}{12}h} \left\{ S_{(y)} + \frac{1}{12} h f q y \right\} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \Sigma (Z) + hfqz - \frac{h}{1 + \frac{1}{12}h} \left\{ S_{(z)} + \frac{1}{12} h f q z \right\} \end{aligned}$$

oder indem man setzt:

$$h' = \frac{h}{1 + \frac{1}{12}h} \quad (17)$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Sigma (X) + h' \{ f q x - S_{(x)} \} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \Sigma (Y) + h' \{ f q y - S_{(y)} \} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \Sigma (Z) + h' \{ f q z - S_{(z)} \} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

womit die als direct zu bezeichnende Berechnung des geforderten zweiten Differentialquotienten erreicht ist.

Die vorausgehenden Vorschriften sind aber nur verwendbar, wenn die Störungsrechnung bereits im Gange ist und bedürfen einer Modification, wenn man, von bestimmten osculirenden Elementen ausgehend, die Rechnung beginnt. Es sind nämlich in diesem Falle die doppelt summirten Werthe " $f(a + iw)$ " unbekannt, die der obigen Rechnung als Grundlage gedient haben. Der Umstand aber, dass die indirecten Glieder wegen des kleinen Factors h' anfänglich einen sehr geringen Einfluss üben, gestattet auch hier, die nothwendigen Näherungen rasch durchzuführen.

Hierbei mag bemerkt werden, dass h' mit der Grösse des gewählten Zeitintervalles anwächst, weshalb letzteres nicht allzu gross angenommen werden darf. Ueber die Grösse des anzuwendenden Intervalles entscheiden die speciellen Umstände und es können hierüber keine allgemeinen Vorschriften gegeben werden; 40tägige Intervalle sind im Allgemeinen bei der Berechnung der speciellen Störungen der kleinen Planeten ausreichend, wiewohl bei starker Annäherung an Jupiter dieses Intervall fast zu gross erscheint; im Allgemeinen wirkt entscheidend für die Wahl des Intervalles die Masse des störenden Körpers, die Grösse der Annäherung und die Bewegung des gestörten Körpers. Es kann daher z. B. bei Kometen oft erwünscht sein, das Intervall im Verlaufe der Rechnung abzuändern, wobei jedoch stets gehörig auf die richtige Bestimmung der Integrationsconstanten zu achten ist. Man wird das Intervall demnach stets so zu wählen haben, dass sich die Störungen hinreichend regelmässig gestalten und demnach die Sicherheit der mechanischen Quadraturen nicht in Frage stellen. Man wird also bei Beginn der Rechnung vorerst die indirecten Glieder der Null gleich setzen, und indem man zweckmässig die Osculationsepoche so wählt, dass dieselbe in die Mitte eines Intervalles fällt, zwei Orte vor und zwei Orte nach der Osculationsepoche rechnen. Für diese Zeit wird man, ohne Erhebliches zu übergehen, in der Rechnung der Werthe $\Sigma(X)$, $\Sigma(Y)$, $\Sigma(Z)$ die ungestörten Coordinaten anwenden dürfen, da die Störungen zweiter Ordnung in der That ganz unbedeutend sind. Indem man diese Werthe vorerst mit den gesuchten zweiten Differentialquotienten identificirt, wird man die so erhaltene Werthreihe benützen, um die Anfangsconstanten für die erste und zweite Summation (vergl. pag. 35, 53) nach den Formeln:

$$f(a - \frac{1}{2}w) = -\frac{1}{24}f'(a - \frac{1}{2}w) + \frac{17}{5760}f'''(a - \frac{1}{2}w) - \dots$$

$$f''(a - w) = \frac{1}{24}f''(a) - \frac{17}{5760}\{2f''(a) + f''(a - w)\} + \dots$$

zu bestimmen, und die Summirung auf einem gesonderten Blatte durchführen; dadurch gelangt man zur Kenntniss der Werthe der zweiten summirten Reihe, die nach den obigen Vorschriften zur genaueren Bestimmung der diesbezüglichen Differentialquotienten verwendet werden; man erhält in der Regel schon dadurch hinreichend genaue Werthe für dieselben; indess kann man, wenn man befürchten sollte, dass diese Werthe keine völlig genügenden Annäherungen ergeben, die Rechnung nochmals mit den so gefundenen Werthen wiederholen. In dem unten folgenden Beispiele werden diese Vorschriften ausführlich besprochen und ich begnüge mich hier deshalb mit diesen Andeutungen; ist aber einmal die Rechnung im Gange, dann kann man sich an die oben auseinander gesetzten Vorschriften gleichmässig halten.

§ 3. Die Bestimmung der Coordinaten.

Die Berechnung der Coordinaten der störenden Planeten kann meist ganz umgangen werden, da man dieselben gesammelt in den Publicationen der astronomischen Gesellschaft Band I und VI findet; da dieselben in dieser Sammlung in bestimmten Zeitintervallen fortlaufend mitgetheilt sind, so wird es zweckmässig erscheinen, sich bei der Störungsrechnung an diese Intervalle zu halten, um jede Interpolation zu vermeiden. Jener Theil der Störungen, der von dem Einflusse des störenden Planeten auf die Sonne herrührt, ist in die Sammlung ebenfalls aufgenommen, wobei die daselbst angeführten Massen benützt sind, die man dann für die anderweitigen Rechnungen anzuwenden hat. Die Coordinaten sind auf bestimmte Aequinoctien bezogen; es ist daher angemessen, auch diese der Rechnung zu Grunde zu legen.

Es wird daher von Zeit zu Zeit die Nothwendigkeit hervortreten, die Störungen auf ein anderes Aequinoctium zu übertragen; indem ich aber diese Transformation auf den Schluss dieses Paragraphen verschiebe, will ich hier die Methode auseinandersetzen, wie man mit Hilfe der astronomischen Ephemeriden, speciell unter Berücksichtigung der Einrichtungen des Berliner Jahrbuches, sich die Coordinaten des störenden Planeten verschaffen kann, da wohl hier und da das Bedürfniss eintreten kann, von den Angaben, die oben citirt wurden, abzuweichen.

Die älteren Bände des Berliner Jahrbuches geben bis zum Jahrgange 1867 inclusive die heliocentrischen Längen λ' , Breiten β' und Entfernungen r_1 der grossen Planeten meist in so engen Intervallen, dass die Interpolation für ein beliebiges Datum ohne Mühe ausgeführt werden kann; die polaren Coordinaten beziehen sich dabei auf das wahre Aequinoctium. In den anderen astronomischen Ephemeriden finden sich die heliocentrischen Orte der grossen Planeten in ähnlicher Weise mitgetheilt und man hat dieselben vorerst auf das der Rechnung zu Grunde liegende fixe mittlere Aequinoctium zu beziehen; dieses geschieht nach den Vorschriften, die im ersten Bande pag. 88 auseinandergesetzt sind; ich will daher hier die Endformeln nur übersichtlich sammeln.

Ist N die für das betreffende Datum geltende Nutation, die ebenfalls in den Ephemeriden Aufnahme findet, ist t_1 die Zeit des betreffenden Datums, t_0 die Zeit der fixen Epoche, auf welche sich das gewählte fixe mittlere Aequinoctium bezieht, und setzt man die Differenz $t_1 - t_0 = \tau$ in Einheiten des tropischen Jahres an, so ist die heliocentrische Länge λ_0' und Breite β_0' in Bezug auf dasselbe Aequinoctium bestimmt durch:

$$\begin{aligned}\lambda_0' &= \lambda' - N - \tau \{ l + \pi \tan \beta' \cos (\lambda' - H) \} \\ \beta_0' &= \beta' + \tau \pi \sin (\lambda' - H),\end{aligned}$$

wobei für die constanten Werthe anzunehmen ist:

$$\begin{aligned}H &= 173^\circ 0' 12'' + 32'' 847 \left\{ \frac{1}{2} [t_1 + t_0] - 1850 \right\} \\ \pi &= 0''.4795 - 0''.000 0062 \left\{ \frac{1}{2} [t_1 + t_0] - 1850 \right\} \\ l &= 50''.23465 + 0''.000 2258 \left\{ \frac{1}{2} [t_1 + t_0] - 1850 \right\};\end{aligned}$$

man wird hierbei die Glieder zweiter Ordnung streng berücksichtigen, wenn man für λ' und β' in den letzten Gliedern rechter Hand die für die Zeit $\frac{t_1 + t_0}{2}$ geltenden Werthe einsetzt; für die Verhältnisse, wie dieselben durch die Planeten geboten werden, genügt es aber, für λ' den Werth

$$\lambda' = 50'' 23 \frac{t_1 - t_0}{2}$$

einzusetzen und für β' den unveränderten Werth anzunehmen.

Sind einmal diese Grössen berechnet, so finden sich die rechtwinkligen Co-ordinaten nach den Formeln:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos \lambda_0' \cos \beta_0' \\ y_1 &= r_1 \sin \lambda_0' \cos \beta_0' \\ z_1 &= r_1 \sin \beta_0' ; \end{aligned}$$

bei dieser Rechnung wird man zweckmässig sofort auch den störenden Einfluss des Planeten auf die Sonne bestimmen und somit zu rechnen haben:

$$- (kw)^2 m_1 \frac{x_1}{r_1^3}, \quad - (kw)^2 m_1 \frac{y_1}{r_1^3}, \quad - (kw)^2 m_1 \frac{z_1}{r_1^3},$$

wobei unter k die Constante des Sonnensystems, unter w das der Störungsrechnung zu Grunde liegende Zeitintervall in Einheiten des mittleren Sonnentages und unter m_1 die Masse des störenden Planeten in Einheiten der Sonnenmasse verstanden ist.

Die Massen der grossen Planeten und die Producte $(kw)^2 m_1$ finden sich unter Annahme des Werthes $w = 40$ in der Tafel XII aufgenommen und hierbei ist vorausgesetzt, dass Alles in Einheiten der siebenten Decimale ausgedrückt erscheint.

Die Berliner Jahrbücher für 1868, 1869 und 1870 geben direct die rechtwinkligen Co-ordinaten und die störenden Kräfte, soweit dieselben von dem Orte des gestörten Planeten unabhängig sind. Vom Jahre 1871 an finden sich Angaben für die heliocentrischen Orte, die unmittelbar die Grössen r_1 , λ_0' und β_0' finden lassen. Der Logarithmus von r_1 und die Grösse β_0' finden sich direct unter den Columnen »log R « und »Breite«, λ_0' findet sich, wenn man zu den Werthen »Länge in der Bahn« die Grösse »Reduction auf die Ecliptik« mit dem angesetzten Zeichen addirt. Es ist natürlich klar, dass man sich an die im Berliner Jahrbuche gewählten Epochen und Aequinoctien halten wird, um die sonst nöthigen, immerhin zeitraubenden, Interpolationen und Reductionen zu vermeiden.

Was nun die Berechnung der ungestörten Co-ordinaten x_0 , y_0 , z_0 und r_0 des gestörten Planeten anlangt, so wird man vorerst die der Rechnung zu Grunde liegenden Elemente auf das mittlere fixe Aequinoctium der Co-ordinaten des störenden Planeten beziehen und hierzu allenfalls die Formeln, die im ersten Bande entwickelt sind (I pag. 81 u. ff.), benützen.

Mit diesen Elementen rechnet man nun vorerst (vergl. I pag. 17):

$$\begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos \Omega & \sin b \sin B &= \sin \Omega & U &= 0 \\ \sin a \cos A &= - \sin \Omega \sin i & \sin b \cos B &= \cos \Omega \cos i & \sin c &= \sin i \\ \omega &= \pi - \Omega, & e'' &= \frac{\sin \varphi}{\sin i''} \\ A' &= A + \omega & B' &= B + \omega & C' &= \omega \end{aligned}$$

damn weiter für die einzelnen Intervalle:

$$\begin{array}{lcl}
 M = M_0 + \mu t & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} & \text{I pag. 47.} \\
 M = E - e'' \sin E & & \\
 r_0 \sin v_0 = a \cos q \sin E & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} & \text{I pag. 48.} \\
 r_0 \cos v_0 = a (\cos E - e) & & \\
 x_0 = r_0 \sin a \sin (A' + v_0) & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} & \text{I pag. 17.} \\
 y_0 = r_0 \sin b \sin (B' + v_0) & & \\
 z_0 = r_0 \sin c \sin (C' + v_0) & &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{(wk)^2}{r_0^3} \\
 R^2 &= r_0^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} h \right\} \\
 h' &= \frac{h}{1 + \frac{1}{2} h} ,
 \end{aligned}$$

wobei $\log (wk)^2 = 9.675283$ (das Intervall w zu 40 Tagen vorausgesetzt) ist, und erhält so alle Coordinaten, die für die Störungsrechnung nöthig sind. Der Umstand, dass es von 10 zu 10 Jahren nöthig ist, das mittlere Aequinoctium abzuändern, um die Angaben des Berliner Jahrbuches ausnützen zu können, stellt schliesslich noch die Aufgabe, die Störungen ξ , η , ζ in den Coordinaten und deren Geschwindigkeiten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ von einem mittleren Aequinoctium auf ein anderes zu übertragen. Um diese Aufgabe vorzunehmen, wird man, da wohl ausschliesslich Ekliptikalcoordinaten bei diesen Rechnungen angewendet werden, die im ersten Bande pag. 84 angeführten Formeln als Ausgangspunkt benützen können.

Bezeichnet man mit x , y , z die Coordinaten in Bezug auf das Ausgangs-Aequinoctium, mit x_1 , y_1 , z_1 die auf das neue Aequinoctium bezogenen Coordinaten, so hat man, wenn als Ausgangspunkt der Zählung die Knotenlinie zwischen den beiden in Betracht kommenden Ekliptiken angenommen wird, die Relationen:

$$\begin{array}{lcl}
 x = \cos \beta \cos (\lambda - H) & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} & 1) \\
 y = \cos \beta \sin (\lambda - H) & & \\
 z = \sin \beta & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 x_1 = \cos (\beta + d\beta) \cos (\lambda + d\lambda - H - l) & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} & 2) \\
 y_1 = \cos (\beta + d\beta) \sin (\lambda + d\lambda - H - l) & & \\
 z_1 = \sin (\beta + d\beta) & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 x_1 = x & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} & 3) \\
 y_1 = y \cos \pi + z \sin \pi & & \\
 z_1 = -y \sin \pi + z \cos \pi. & &
 \end{array}$$

Wählt man, wie es in der Störungsrechnung geschieht, die Richtung nach dem jeweiligen mittleren Frühljahrsunkte als die positive X-Achse, so erhält man leicht aus (1) und (2), wenn man die so gezählten Coordinaten durch den Exponentialindex „o“ unterscheidet:

$$x = x^0 \cos H + y^0 \sin H$$

$$y = y^0 \cos H - x^0 \sin H$$

$$z = z^0$$

$$x_1 = x_1^0 \cos (H + l) + y_1^0 \sin (H + l)$$

$$y_1 = y_1^0 \cos (H + l) - x_1^0 \sin (H + l)$$

$$z_1 = z_1^0 ;$$

werden diese Werthe in (3) substituirt, so erhält man für x_1^0 , y_1^0 , z_1^0 die Ausdrücke:

$$x_1^0 = x^0 \{ \cos H \cos (H + l) + \sin H \sin (H + l) \cos \pi \} + y^0 \{ \sin H \cos (H + l) - \\ - \cos H \sin (H + l) \cos \pi \} - z^0 \sin \pi \sin (H + l)$$

$$y_1^0 = x^0 \{ \cos H \sin (H + l) - \sin H \cos (H + l) \cos \pi \} + y^0 \{ \sin H \sin (H + l) + \\ + \cos H \cos (H + l) \cos \pi \} + z^0 \sin \pi \cos (H + l)$$

$$z_1^0 = x^0 \sin H \sin \pi - y^0 \cos H \sin \pi + z^0 \cos \pi.$$

Setzt man also:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -2 \{ \sin^2 \frac{1}{2} l + \sin H \sin (H + l) \sin^2 \frac{1}{2} \pi \} \\ Y_x &= -\sin l + 2 \cos H \sin (H + l) \sin^2 \frac{1}{2} \pi \\ Z_x &= -\sin \pi \sin (H + l) \\ X_y &= \sin l + 2 \sin H \cos (H + l) \sin^2 \frac{1}{2} \pi \\ Y_y &= -2 \{ \sin^2 \frac{1}{2} l + \cos H \cos (H + l) \sin^2 \frac{1}{2} \pi \} \\ Z_y &= \sin \pi \cos (H + l) \\ X_z &= \sin H \sin \pi \\ Y_z &= -\cos H \sin \pi \\ Z_z &= -2 \sin^2 \frac{1}{2} \pi \end{aligned} \right\} \quad 4)$$

so sind die allgemeinen Transformationsformeln, mit denen man die letzten Summations-, Argument- und Differenzwerthe der Störungstafeln zu übertragen hat, wenn man das Aequinoctium ändern will, bestimmt durch:

$$\left. \begin{aligned} x_1^0 &= x^0 + X_x \cdot x^0 + Y_x \cdot y^0 + Z_x \cdot z^0 \\ y_1^0 &= y^0 + X_y \cdot x^0 + Y_y \cdot y^0 + Z_y \cdot z^0 \\ z_1^0 &= z^0 + X_z \cdot x^0 + Y_z \cdot y^0 + Z_z \cdot z^0. \end{aligned} \right\} \quad 5)$$

Die nachstehende Tafel gibt von 10 zu 10 Jahren für das gegenwärtige Jahrhundert die Logarithmen der nach obigen Formeln streng berechneten Coefficienten für die Uebertragung auf das nächstfolgende Jahrzehnt; um keinen Zweifel über die Charakteristik zu lassen, ist dieselbe vollständig angesetzt:

log X_x	log Y_x	log Z_x	log X_y	log Y_y	log Z_y	log X_z	log Y_z	log Z_z
1800 $4_n 4719 - 10$	$7_n 386490 - 10$	$4_n 4728 - 10$	$7.386490 - 10$	$4_n 4720 - 10$	$5_n 36305 - 10$	$4.4810 - 10$	$5.36291 - 10$	$0_n 43 - 10$
1810 $4_n 4720 - 10$	$7_n 386510 - 10$	$4_n 4674 - 10$	$7.386510 - 10$	$4_n 4720 - 10$	$5_n 36308 - 10$	$4.4756 - 10$	$5.36294 - 10$	$0_n 43 - 10$
1820 $4_n 4720 - 10$	$7_n 386529 - 10$	$4_n 4619 - 10$	$7.386529 - 10$	$4_n 4721 - 10$	$5_n 36311 - 10$	$4.4702 - 10$	$5.36297 - 10$	$0_n 43 - 10$
1830 $4_n 4721 - 10$	$7_n 386549 - 10$	$4_n 4563 - 10$	$7.386549 - 10$	$4_n 4721 - 10$	$5_n 36314 - 10$	$4.4647 - 10$	$5.36300 - 10$	$0_n 43 - 10$
1840 $4_n 4721 - 10$	$7_n 386568 - 10$	$4_n 4506 - 10$	$7.386568 - 10$	$4_n 4721 - 10$	$5_n 36317 - 10$	$4.4591 - 10$	$5.36303 - 10$	$0_n 43 - 10$
1850 $4_n 4721 - 10$	$7_n 386588 - 10$	$4_n 4448 - 10$	$7.386588 - 10$	$4_n 4722 - 10$	$5_n 36320 - 10$	$4.4535 - 10$	$5.36307 - 10$	$0_n 43 - 10$
1860 $4_n 4722 - 10$	$7_n 386607 - 10$	$4_n 4390 - 10$	$7.386607 - 10$	$4_n 4722 - 10$	$5_n 36323 - 10$	$4.4478 - 10$	$5.36310 - 10$	$0_n 43 - 10$
1870 $4_n 4722 - 10$	$7_n 386627 - 10$	$4_n 4331 - 10$	$7.386627 - 10$	$4_n 4723 - 10$	$5_n 36325 - 10$	$4.4420 - 10$	$5.36313 - 10$	$0_n 43 - 10$
1880 $4_n 4723 - 10$	$7_n 386646 - 10$	$4_n 4271 - 10$	$7.386646 - 10$	$4_n 4723 - 10$	$5_n 36328 - 10$	$4.4362 - 10$	$5.36316 - 10$	$0_n 43 - 10$
1890 $4_n 4723 - 10$	$7_n 386666 - 10$	$4_n 4211 - 10$	$7.386666 - 10$	$4_n 4723 - 10$	$5_n 36330 - 10$	$4.4303 - 10$	$5.36318 - 10$	$0_n 43 - 10$
1900 $4_n 4723 - 10$	$7_n 386685 - 10$	$4_n 4149 - 10$	$7.386685 - 10$	$4_n 4724 - 10$	$5_n 36332 - 10$	$4.4243 - 10$	$5.36320 - 10$	$0_n 43 - 10$

Da man aber wohl auch häufig den Uebergang in der umgekehrten Richtung oder auch in anderen Intervallen zu machen hat, so dürfte es sich empfehlen, ähnlich wie dies bei den Präcessionsconstanten geschehen ist, die Entwicklung der diesbezüglichen Glieder nach Potenzen der Zeit vorzunehmen.

Bleibt man bei den Gliedern 2^{ter} Ordnung inclusive stehen, so erhält man leicht aus 4):

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{1}{2} l^2 - \frac{1}{2} (\pi \sin H)^2 \\ Y_x &= -l + \frac{1}{2} \pi \cos H \cdot \pi \sin H \\ Z_x &= -\pi \sin H - l \pi \cos H \\ X_y &= l + \frac{1}{2} \pi \cos H \cdot \pi \sin H \\ Y_y &= -\frac{1}{2} l^2 - \frac{1}{2} (\pi \cos H)^2 \\ Z_y &= \pi \cos H - l \pi \sin H \\ X_z &= \pi \sin H \\ Y_z &= -\pi \cos H \\ Z_z &= -\frac{1}{2} \pi^2. \end{aligned} \right\} \quad 6)$$

Die in diesen Ausdrücken erscheinenden Präcessionsconstanten haben die Form:

$$\left. \begin{aligned} l &= \lambda (t_1 - t_0) + \lambda' (t_1 - t_0)^2 \\ \pi &= \gamma (t_1 - t_0) + \gamma' (t_1 - t_0)^2 \\ H &= H_0 + \alpha (t_0 - 1850) + \beta (t_1 - t_0) \end{aligned} \right\} \quad 7)$$

wobei die numerischen Werthe sich aus der Vergleichung mit I pag. 81 wie folgt, ergeben:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= + 50''23465 + 0''000 \ 22576 (t_0 - 1850) & \lambda' &= + 0''000 \ 11288 \\ \gamma &= + 0''47950 - 0''000 \ 00624 (t_0 - 1850) & \gamma' &= - 0''000 \ 00312 \\ H_0 &= 173^\circ 0' 12'', \ \alpha = + 32''847, \ \beta = - 8''694 \end{aligned} \right\} \quad 8)$$

Vor Allem wird es nöthig sein, die Glieder von der Form $\pi \sin H$ und $\pi \cos H$ näher zu entwickeln. Es ist klar, dass hierzu die Band I pag. 77 gegebenen Ausdrücke nicht unmittelbar verwerthet werden dürfen, weil dieselben sich vorerst auf die fixe Ausgangsepoche 1850 beziehen und überdies die durch die allgemeine Präcession bewirkte Aenderung in der Zählung von H nicht enthalten.

Man findet aus 7) zunächst:

$$\begin{aligned} \pi \sin H &= \{ \gamma \sin H_0 + \gamma \alpha \cos H_0 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) + \{ \gamma' \sin H_0 + \gamma \beta \cos H_0 + \\ &\quad + \alpha \gamma' \cos H_0 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0)^2 \\ \pi \cos H &= \{ \gamma \cos H_0 - \gamma \alpha \sin H_0 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) + \{ \gamma' \cos H_0 - \gamma \beta \sin H_0 - \\ &\quad - \alpha \gamma' \sin H_0 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0)^2; \end{aligned}$$

führt man hierin die Werthe aus 8) ein, und lässt diejenigen Glieder, welche Produkte $(t_0 - 1850)^2$ in $(t_1 - t_0)$ und $(t_0 - 1850)$ in $(t_1 - t_0)^2$ ergeben, weg, so erhält man Ausdrücke von der Form:

$$\left. \begin{aligned} \pi \sin H &= \{ z_0 + z_1 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) + z_0' (t_1 - t_0)^2 \\ \pi \cos H &= \{ \zeta_0 + \zeta_1 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) + \zeta_0' (t_1 - t_0)^2 \end{aligned} \right\} \quad 9)$$

wobei zu Folge der obigen Ausdrücke die constanten Grössen die folgenden numerischen Werthe haben;

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= + 0''05841 & z_1 &= - 0''000\ 07655 \\ \ddot{z}_0 &= - 0''47593 & \ddot{z}_1 &= - 0''000\ 00311 \\ z_0' &= + 0''0000\ 1967 \\ \ddot{z}_0' &= + 0''0000\ 0556 \end{aligned} \right\} \quad 10)$$

Es wird sich also, wenn man:

$$\lambda = \lambda_0 + 2\lambda'(t_0 - 1850)$$

schreibt, aus 6) ergeben:

$$\begin{aligned} X_x &= -\frac{1}{2} \{ \lambda_0^2 + z_0^2 \} (t_1 - t_0)^2 \\ Y_x &= - \{ \lambda_0 + 2\lambda'(t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) + \{ \frac{1}{2} z_0 \ddot{z}_0 - \lambda' \} (t_1 - t_0)^2 \\ Z_x &= - \{ z_0 + z_1 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) - \{ z_0' + \lambda_0 \ddot{z}_0 \} (t_1 - t_0)^2 \\ X_y &= \{ \lambda_0 + 2\lambda'(t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) + \{ \frac{1}{2} z_0 \ddot{z}_0 + \lambda' \} (t_1 - t_0)^2 \\ Y_y &= -\frac{1}{2} \{ \lambda_0^2 + \ddot{z}_0^2 \} (t_1 - t_0)^2 \\ Z_y &= \{ \ddot{z}_0 + \ddot{z}_1 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) + \{ \ddot{z}_0' - \lambda_0 z_0 \} (t_1 - t_0)^2 \\ X_z &= \{ z_0 + z_1 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) + z_0' (t_1 - t_0)^2 \\ Y_z &= - \{ \ddot{z}_0 + \ddot{z}_1 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) + \ddot{z}_0' (t_1 - t_0)^2 \\ Z_z &= -\frac{1}{2} \lambda'^2 (t_1 - t_0)^2. \end{aligned}$$

oder numerisch und in Einheiten der zehnten Decimale:

$$\begin{aligned} X_x &= - 296.57 (t_1 - t_0)^2 \\ Y_x &= \{ - 2435.445 - 10.95 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) - 5.48 (t_1 - t_0)^2 \\ Z_x &= \{ - 2832 + 3.71 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) + 1.66 (t_1 - t_0)^2 \\ X_y &= \{ + 2435.445 + 10.95 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) + 5.47 (t_1 - t_0)^2 \\ Y_y &= - 296.60 (t_1 - t_0)^2 \\ Z_y &= \{ - 2307.4 - 0.15 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) - 0.69 (t_1 - t_0)^2 \\ X_z &= \{ + 2832 - 3.71 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) + 0.95 (t_1 - t_0)^2 \\ Y_z &= \{ + 2307.4 + 0.15 (t_0 - 1850) \} (t_1 - t_0) + 0.27 (t_1 - t_0)^2 \\ Z_z &= - 0.03 (t_1 - t_0)^2. \end{aligned}$$

Zu den voranstehenden Formeln wäre zu bemerken, dass man bei der Uebertragung auf ein anderes Aequinoctium in der Summationstafel der Störungen in den drei Coordinaten sowohl die summirten Werthe, als auch die Funktions- und Differenzwerthe, wie sie vor der Uebertragung statt haben, entsprechend transformiren muss. Hierbei wird man die zusammengehörigen Werthe der zweiten summirten Reihe als x -, y -, z -Coordinaten auffassen, ebenso die zusammengehörigen Werthe der ersten summirten Reihe u. s. f. und für jedes System dieser zusammengehörigen Werthe die Transformation ausführen. Die Aenderungen in den Differenzwerthen werden in der Regel so klein sein, dass es kaum nöthig sein wird, auf diese Aenderungen Rücksicht zu nehmen.

Schliesslich ist in diesem Paragraphen noch zu erwähnen, wie man die Störungswerthe ξ , η , ζ bei Ableitung einer Oppositionsephemeride verwerthen kann.

ξ, η, ζ sind auf die Ekliptik bezogen, während die Ephemeride sich gewöhnlich auf den Aequator bezieht. Um den Uebergang auf die letztere Ebene zu bewerkstelligen, hat man, wenn ε die Schiefe der Ekliptik bezeichnet und ξ', η', ζ' die neuen Werthe vorstellen, nach I (pag. 12) die Formeln:

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi \\ \eta' &= \eta \cos \varepsilon - \zeta \sin \varepsilon \\ \zeta' &= \eta \sin \varepsilon + \zeta \cos \varepsilon ;\end{aligned}$$

diese Werthe wird man an die ungestörten äquatorealen Coordinaten x_0', y_0', z_0' des Planeten anbringen, um die gestörten, der Ephemeridenrechnung zu Grunde zu legenden äquatorealen Coordinaten x', y', z' zu erhalten; diese sind jetzt:

$$\begin{aligned}x' &= x_0' + \xi' \\ y' &= y_0' + \eta' \\ z' &= z_0' + \zeta' .\end{aligned}$$

Man wird eine Reihe von Werthen für ξ, η, ζ für die Nähe der Opposition nach den Formeln A_{II} und B_{II} (pag. 53) rechnen, und aus der so erhaltenen Integraltafel die für die Epochen der Ephemeride geltenden speciellen Werthe entnehmen; es ist klar, dass die Berechnung der Coordinaten wohl niemals genauer, als auf Einheiten der 7^{ten} Decimale ausgeführt zu werden braucht.

§. 4. Uebergang auf osculirende Elemente bei Encke's Methode.

Die Störungswerthe wachsen mit der Zeit fortwährend an und häufig genug tritt der Fall ein, dass die Fortführung der Störungsrechnung wegen der Grösse der Störungen und wegen des unregelmässigen Ganges derselben nach den obigen Vorschriften sehr beschwerlich und die Genauigkeit der Rechnung fraglich wird. Das unten folgende Beispiel zeigt diesen Uebelstand sehr auffällig, und die Rechnung ist eigentlich weiter fortgesetzt, als es für die Sicherheit derselben wünschenswerth erscheint. Es sollte aber gezeigt werden, was die verschiedenen Methoden leisten, und das gewählte Beispiel zeigt ganz auffällig die Vortheile der Methode der Berechnung der Störungen nach den Hansen'schen Coordinaten, wenn die Störungen sehr anwachsen; in der That ist der Uebergang auf osculirende Elemente nach der letzteren Methode ganz überflüssig und ist nur ausgeführt, um vergleichende Resultate zu erlangen.

Wünscht man also aus irgend einem Grunde die Störungen auf die Elemente zu übertragen, so tritt die Nothwendigkeit auf, hierfür geeignete Formeln zu besitzen. Für die Genauigkeit der Rechnung ist es wünschenswerth, sofort den Ueberschuss der gestörten Elemente über die ungestörten zu bestimmen. Die Formeln werden bei dieser Forderung zwar etwas verwickelter, die grössere Mühe aber kommt

gegen die erzielte Genauigkeitszunahme kaum in Betracht; doch soll, um zweckmässige Controlen zu erhalten, später ebenfalls die Methode entwickelt werden, unmittelbar aus den gestörten Coordinaten und den gestörten Geschwindigkeiten die Elemente zu bestimmen.

Vorerst soll vorausgesetzt sein, dass in geeigneter Weise die Störungen des Radiusvector, des ersten Differentialquotienten desselben nach der Zeit, und die Störung des Werthes der Quadratwurzel des Parameters bekannt seien; es soll also, wenn die ungestörten Grössen durch einen angehängten Nullindex dargestellt sind, bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} r - r_0 &= \mathcal{A}(r) \\ \frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt} &= \mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right) \\ \sqrt{p} - \sqrt{p_0} &= \mathcal{A}(\sqrt{p}) \end{aligned}$$

Aus $\mathcal{A}(\sqrt{p})$ leitet sich leicht der Unterschied der Parameter $\mathcal{A}(p)$ ab; denn multiplicirt man in der letzten Gleichung beiderseits mit $\sqrt{p} + \sqrt{p_0}$, so erhält man leicht:

$$p - p_0 = \mathcal{A}(p) = \{2\sqrt{p_0} + \mathcal{A}(\sqrt{p})\} \mathcal{A}(p). \quad 1)$$

Die bekannte Polargleichung für r gibt:

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1,$$

und die Differentiation dieses Ausdruckes unter Berücksichtigung, dass:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{r^2} \sqrt{p} \quad 2)$$

ist, lässt finden:

$$e \sin v = \frac{1}{k} \sqrt{p} \left(\frac{dr}{dt} \right). \quad 3)$$

Die letzteren beiden Gleichungen geben die Hilfsmittel an die Hand, die Excentricität und die wahre Anomalie zu finden, und können leicht auf Formen überführt werden, welche die Unterschiede der gestörten gegen die ungestörten Werthe finden lassen; man wird haben:

$$\begin{aligned} e \sin v &= \left(\frac{\sqrt{p_0} + \mathcal{A}(\sqrt{p})}{k} \right) \left(\frac{dr_0}{dt} + \mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right) \right) = e_0 \sin v_0 + \frac{1}{k} \left\{ \frac{dr_0}{dt} \mathcal{A}(\sqrt{p}) + \sqrt{p_0} \mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right) \right\} \\ e \cos v &= \frac{p_0}{r_0} - 1 + \frac{p - p_0}{r r_0} = e_0 \cos v_0 + \frac{1}{r} \left\{ \mathcal{A}(p) - \frac{p_0}{r_0} \mathcal{A}(r) \right\}, \end{aligned}$$

wobei man für $\frac{dr_0}{dt}$ zu setzen haben wird:

$$\frac{dr_0}{dt} = e_0 \sin v_0 \frac{k}{\sqrt{p_0}}.$$

Setzt man weiter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \left\{ \frac{dr_0}{dt} \mathcal{A}(\sqrt{p}) + \sqrt{p_0} \mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right) \right\} &= g \sin G \\ \frac{1}{r} \left\{ \mathcal{A}(p) - \frac{p_0}{r_0} \mathcal{A}(r) \right\} &= g \cos G \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} e \sin v &= e_0 \sin v_0 + g \sin G \\ e \cos v &= e_0 \cos v_0 + g \cos G \end{aligned}$$

woraus man sofort ableitet:

$$\begin{aligned} e \sin (v - v_0) &= g \sin (G - v_0) \\ e \cos (v - v_0) &= e_0 + g \cos (G - v_0) ; \end{aligned} \quad 4)$$

nun hat man zur Bestimmung des Unterschiedes der wahren Anomalien die Gleichung:

$$\operatorname{tang} (v - v_0) = \frac{g \sin (G - v_0)}{e_0 + g \cos (G - v_0)} . \quad 5)$$

Der Quadrant, in welchem $v - v_0$ zu nehmen ist, kann wohl nie zweifelhaft sein, da $v - v_0$ im Allgemeinen nur ein sehr mässiger Bogen sein kann; sollte aber jemals bei sehr kleiner Excentricität ein Zweifel in dieser Richtung auftreten, so wird man zu beachten haben, dass $\sin (v - v_0)$ das Zeichen des Zählers, $\cos (v - v_0)$ das Zeichen des Nenners hat.

Multiplirt man in 4) die erste Gleichung mit $\sin \frac{1}{2} (v - v_0)$, die zweite mit $\cos \frac{1}{2} (v - v_0)$ und addirt, so findet sich:

$$\mathcal{A}(e) = e - e_0 = \frac{g \cos \left\{ G - \frac{1}{2} (v + v_0) \right\}}{\cos \frac{1}{2} (v - v_0)}$$

wodurch der Unterschied der Excentricitäten ermittelt erscheint; später bedarf man noch des Unterschiedes der Quadrate der Excentricitäten; man findet ähnlich wie in der Gleichung 1):

$$\mathcal{A}(e^2) = e^2 - e_0^2 = \{ 2 e_0 + \mathcal{A}(e) \} \mathcal{A}(e).$$

Da in den elliptischen Elementen anstatt der Excentricität gewöhnlich der Excentricitätswinkel aufgeführt erscheint, so ist es angemessen, ebenfalls die Bestimmung von $\varphi - \varphi_0$ auszuführen. Man wird zu dem Ende aus e_0 und $\mathcal{A}(e)$ den Werth von $e = \sin \varphi$ mit einer genügenden Annäherung berechnen und hat dann:

$$\sin \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) = \frac{\mathcal{A}(e)}{2 \cos \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_0)} .$$

Der durch (5) ermittelte Unterschied der wahren Anomalien kann dazu benützt werden, den Unterschied der mittleren Anomalien zu bestimmen, da die mittlere Anomalie gewöhnlich als Element angesetzt wird. Bei der Kleinheit der Excentricität der Planetenbahnen wird man kaum wesentlich an Sicherheit der Rechnung einbüßen, wenn man M mit Hilfe der bekannten Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} (v - E) &= \sqrt{\frac{r}{p}} \sin \frac{1}{2} \varphi \sin v \\ M &= E - e \sin E \end{aligned} \right\} \quad 6)$$

bestimmt und durch Vergleichung mit M_0 den Werth $M - M_0$ ermittelt. Es scheint aber der vorgesetzten Lösung des Problems angemessen, auch hier die kleine Mehrarbeit nicht zu scheuen und die Formeln direct auf die Unterschiede zurückzuführen. Setzt man:

$$\begin{aligned}\sin v \cos q &= \sin v_0 \cos q_0 + (\sigma) \\ \cos v + e &= \cos v_0 + e_0 + (\gamma) \\ \frac{1}{1 + e \cos v} &= \frac{1}{1 + e_0 \cos v_0} + (\varrho),\end{aligned}$$

so ergibt sich leicht, wenn man beachtet, dass geschrieben werden kann:

$$(\varrho) = \frac{r}{p} - \frac{r_0}{p_0}, \quad 7)$$

$$\begin{aligned}(\sigma) &= 2 \sin \frac{1}{2} (v - v_0) \cos \frac{1}{2} (v + v_0) \cos q - 2 \sin \frac{1}{2} (q - q_0) \sin \frac{1}{2} (q + q_0) \sin v_0 \\ (\gamma) &= \mathcal{A}(e) - 2 \sin \frac{1}{2} (v - v_0) \sin \frac{1}{2} (v + v_0) \\ (\varrho) &= \frac{\mathcal{A}(r)}{p} - \frac{r_0}{p p_0} \mathcal{A}(p); \quad 8)\end{aligned}$$

nun ist aber:

$$\begin{aligned}\sin E &= \frac{\sin v \cos q}{1 + e \cos v} \\ \cos E &= \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v},\end{aligned}$$

demnach wird:

$$\begin{aligned}\sin E &= \sin E_0 + (\varrho) \sin v_0 \cos q_0 + (\sigma) \left\{ \frac{r_0}{p_0} + (\varrho) \right\} \\ \cos E &= \cos E_0 + (\varrho) \{ \cos v_0 + e_0 \} + (\gamma) \left\{ \frac{r_0}{p_0} + (\varrho) \right\}.\end{aligned}$$

Beachtet man aber, dass ist nach (7):

$$\frac{r_0}{p_0} + (\varrho) = \frac{r}{p}$$

und dass geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}\sin v_0 \cos q_0 &= \sin E_0 \frac{p_0}{r_0} \\ \cos v_0 + e_0 &= \cos E_0 \frac{p_0}{r_0}\end{aligned}$$

und setzt:

$$(\lambda) = \frac{p_0}{r_0} (\varrho) = \frac{p_0}{p} \frac{\mathcal{A}(r)}{r_0} - \frac{\mathcal{A}(p)}{p}$$

so kann man auch schreiben $(\lambda) = -\frac{r}{p} g \cos G$ und setzt überdies:

$$\begin{aligned}(\lambda) \sin E_0 + (\sigma) \frac{r}{p} &= g' \sin G' \\ (\lambda) \cos E_0 + (\gamma) \frac{r}{p} &= g' \cos G' \quad 9)\end{aligned}$$

so findet sich leicht:

$$\text{tang}(E - E_0) = \frac{g' \sin(G' - E_0)}{1 + g' \cos(G' - E_0)}. \quad 10)$$

Aus der Vergleichung der Ausdrücke:

$$\begin{aligned}M &= E - e \sin E \\ M_0 &= E_0 - e_0 \sin E_0\end{aligned}$$

folgt sofort:

$$M - M_0 = E - E_0 - 2 e_0 \sin \frac{1}{2} (E - E_0) \cos \frac{1}{2} (E + E_0) - \sin E \mathcal{A}(e), \quad 11)$$

so dass die Gleichungen (8), (9), (10) und (11) die Resultate aus 6) ersetzen.

Es erübrigt nun, um die Dimensionen des Kegelschnittes völlig zu bestimmen, die Ermittlung des Unterschiedes der grossen Halbachsen. Es ist:

$$a - a_0 = \frac{p}{1 - e^2} - \frac{p_0}{1 - e_0^2} = \frac{p - p_0}{1 - e^2} + p_0 \left(\frac{1}{1 - e^2} - \frac{1}{1 - e_0^2} \right) = \frac{p - p_0}{1 - e^2} + a_0 \frac{J(e^2)}{1 - e^2}$$

oder:

$$\frac{J(a)}{a_0} = \frac{a - a_0}{a_0} = \frac{J(p) + a_0 J(e^2)}{p_0 - a_0 J(e^2)}.$$

Gewöhnlich wird aber statt a die tägliche mittlere siderische Bewegung μ angesetzt. Man hat hierfür:

$$\mu = \mu_0 + J\mu = k \{a_0 + J(a)\}^{-\frac{3}{2}} = \mu_0 \left\{ 1 + \frac{J(a)}{a_0} \right\}^{-\frac{3}{2}};$$

es ist also, wenn man eine Reihenentwicklung ausführt und

$$\frac{J(a)}{2 a_0} = q$$

setzt,

$$\mu = \mu_0 \left\{ 1 - 3q + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} q^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^3 + \dots \right\};$$

die in den Klammern stehende Reihe, vom zweiten Gliede angefangen, ist nichts anderes, als der Werth von $-fq$, wobei $\log f$ aus der f -Tafel (Tafel XI) zu entnehmen ist, die bei früheren Entwicklungen (pag. 75) bereits benützt wurde; man hat also zur Berechnung von μ die Formeln:

$$q = \frac{J(p) + a_0 J(e^2)}{2 \{p_0 - a_0 J(e^2)\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mu - \mu_0 = -fq\mu_0.$$

Die Berechnung von $a - a_0$ oder von $\mu - \mu_0$ kann aber auch in einer anderen Weise vorgenommen werden, die zur Controle benützt werden kann und später in geeigneter Weise Verwendung findet.

Das Quadrat der Geschwindigkeit kann nach der Gleichung für g (I pag. 44) dargestellt werden durch:

$$g^2 = k^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right);$$

setzt man nun den Unterschied der Quadrate in der gestörten und ungestörten Bewegung als bekannt voraus und schreibt:

$$J(g^2) = g^2 - g_0^2$$

so wird:

$$\frac{J(g^2)}{k^2} = 2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} \right) = \frac{a - a_0}{a a_0} - \frac{2(r - r_0)}{r r_0};$$

setzt man also abkürzend:

$$\frac{J(g^2)}{k^2} + \frac{2(r - r_0)}{r r_0} = P \quad (12)$$

so wird:

$$\frac{a - a_0}{a a_0} = P$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{a-a_0}{a_0} &= \frac{a_0 P}{1-a_0 P} = 2q \\ \mu - \mu_0 &= -fq\mu_0 \end{aligned} \right\} \quad 13)$$

Die eben entwickelten Formeln setzen die Kenntniss von $\mathcal{A}(r)$, $\mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right)$, $\mathcal{A}(V\bar{p})$ und überdiess, wenn man zur Bestimmung von $\mu - \mu_0$ die zweite Methode benützen will, die Kenntniss von $\mathcal{A}(g^2)$ voraus, sind aber übrigens völlig frei von der Methode, die der Berechnung der Störungen zu Grunde gelegt wurde. Die Ermittlung der eben hingeschriebenen Grössen und die Bestimmung der Bahnlage muss aber verschieden durchgeführt werden je nach der Methode der Störungsrechnung, und es wird vorerst vorausgesetzt, dass die Störungen nach den rechtwinkligen Ekliptikalkoordinaten berechnet sind.

Für die Zeit der gewählten Osculationsepoche sind die Störungen der Coordinaten ξ , η , ζ und die Störungen in den Geschwindigkeiten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ nach der bei der mechanischen Quadratur auseinander gesetzten Methode zu bestimmen; die vorgelegte Aufgabe fordert die Kenntniss der Werthe der einfachen und Doppel-Integrale für die Osculationsepoche, und ich setze zunächst voraus, dass die numerischen Werthe gegeben seien.

Zur Bestimmung des Knotens, der Neigung der Bahn und des Parameters hat man die bekannten Gleichungen (I pag. 41 und 159):

$$\begin{aligned} k V\bar{p} \cos i &= x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \\ k V\bar{p} \sin i \sin \Omega &= y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \\ k V\bar{p} \sin i \cos \Omega &= x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} ; \end{aligned} \quad 14)$$

beachtet man, dass ist:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi, & \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi}{dt} \\ y &= y_0 + \eta, & \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_0}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \\ z &= z_0 + \zeta, & \frac{dz}{dt} &= \frac{dz_0}{dt} + \frac{d\zeta}{dt} \end{aligned} \quad 15)$$

und schreibt:

$$\begin{aligned} X &= \left\{ (x_0 + \xi) \frac{d\eta}{dt} + \xi \frac{dy_0}{dt} \right\} - \left\{ (y_0 + \eta) \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{dx_0}{dt} \right\} \\ Y &= \left\{ (y_0 + \eta) \frac{d\zeta}{dt} + \eta \frac{dz_0}{dt} \right\} - \left\{ (z_0 + \zeta) \frac{d\eta}{dt} + \zeta \frac{dy_0}{dt} \right\} \\ Z &= \left\{ (x_0 + \xi) \frac{d\zeta}{dt} + \xi \frac{dz_0}{dt} \right\} - \left\{ (z_0 + \zeta) \frac{d\xi}{dt} + \zeta \frac{dx_0}{dt} \right\} \end{aligned} \quad 16)$$

so erfordert die Berechnung dieser Formeln die Kenntniss der Werthe x_0 , y_0 , z_0 und $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$, d. i. der ungestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten.

Für die Coordinaten hat man (vergl. I. pag. 16):

$$\begin{aligned}x_0 &= r_0 (\cos u_0 \cos \Omega_0 - \sin u_0 \sin \Omega_0 \cos i_0) \\y_0 &= r_0 (\cos u_0 \sin \Omega_0 + \sin u_0 \cos \Omega_0 \cos i_0) \\z_0 &= r_0 \sin u_0 \sin i_0.\end{aligned}\tag{17}$$

Die Berechnung dieser Formeln gestaltet sich durch Einführung einiger Hilfswinkel etwas bequemer; setzt man nämlich:

$$\begin{aligned}\sin a \sin A &= \cos \Omega_0 \\ \sin a \cos A &= -\sin \Omega_0 \cos i_0 \\ \sin b \sin B &= \sin \Omega_0 \\ \sin b \cos B &= \cos \Omega_0 \cos i_0\end{aligned}\tag{18}$$

so erhält man statt (17):

$$\begin{aligned}x_0 &= r_0 \sin a \sin (A + u_0) \\ y_0 &= r_0 \sin b \sin (B + u_0) \\ z_0 &= r_0 \sin i_0 \sin u_0;\end{aligned}\tag{19}$$

Differentiirt man nun nach der Zeit und beachtet, dass

$$u_0 = v_0 + \omega_0,$$

also

$$\frac{du_0}{dt} = \frac{dv_0}{dt},$$

ist, so wird:

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{dt} &= \sin a \sin (A + u_0) \frac{dr_0}{dt} + r_0 \sin a \cos (A + u_0) \frac{dv_0}{dt} \\ \frac{dy_0}{dt} &= \sin b \sin (B + u_0) \frac{dr_0}{dt} + r_0 \sin b \cos (B + u_0) \frac{dv_0}{dt} \\ \frac{dz_0}{dt} &= \sin i_0 \sin u_0 \frac{dr_0}{dt} + r_0 \sin i_0 \cos u_0 \frac{dv_0}{dt},\end{aligned}$$

führt man für $\frac{dr_0}{dt}$ und $\frac{dv_0}{dt}$ die Werthe ein (vergl. oben (2) und (3) pag. 89):

$$\begin{aligned}\frac{dr_0}{dt} &= e_0 \sin v_0 \frac{k}{\sqrt{p_0}} \\ \frac{dv_0}{dt} &= \frac{k}{r_0^2} \sqrt{p_0}\end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{dt} &= \sin a \frac{k}{\sqrt{p_0}} \left\{ \sin (A + u_0) e_0 \sin v_0 + \cos (A + u_0) (1 + e_0 \cos v_0) \right\} \\ \frac{dy_0}{dt} &= \sin b \frac{k}{\sqrt{p_0}} \left\{ \sin (B + u_0) e_0 \sin v_0 + \cos (B + u_0) (1 + e_0 \cos v_0) \right\} \\ \frac{dz_0}{dt} &= \sin i_0 \frac{k}{\sqrt{p_0}} \left\{ \sin u_0 e_0 \sin v_0 + \cos u_0 (1 + e_0 \cos v_0) \right\}.\end{aligned}$$

Setzt man also:

$$\left. \begin{aligned}\frac{k}{\sqrt{p_0}} (\sin u_0 + e_0 \sin \omega_0) &= c \sin U \\ \frac{k}{\sqrt{p_0}} (\cos u_0 + e_0 \cos \omega_0) &= c \cos U\end{aligned} \right\} \tag{20a}$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= c \sin a \cos (A + U) \\ \frac{dy_0}{dt} &= c \sin b \cos (B + U) \\ \frac{dz_0}{dt} &= c \sin i_0 \cos U \end{aligned} \right\} \quad 21)$$

Die Rechnung für c und U lässt sich aber einfacher stellen; man findet leicht, wenn man statt u_0 setzt $v_0 + \omega_0$ und entwickelt:

$$\left. \begin{aligned} \gamma \sin \Gamma &= \sin v_0 \\ \gamma \cos \Gamma &= \cos v_0 + \sin \varphi_0 \\ U &= \Gamma + \omega_0 \\ c &= \frac{\gamma k}{V p_0} \end{aligned} \right\} \quad 20b)$$

Die Gleichungen (18), (19), (20b) und (21) leisten also die Bestimmung der zur Berechnung von (16) nothwendigen Grössen. Man kann demnach schreiben:

$$\left. \begin{aligned} k V \bar{p} \cos i &= k V \bar{p}_0 \cos i_0 + X \\ k V \bar{p} \sin i \sin \Omega &= k V \bar{p}_0 \sin i_0 \sin \Omega_0 + Y \\ k V \bar{p} \sin i \cos \Omega &= k V \bar{p}_0 \sin i_0 \cos \Omega_0 + Z \end{aligned} \right\} \quad 22)$$

Setzt man überdiess:

$$\begin{aligned} Y &= m \sin M \\ Z &= m \cos M, \end{aligned}$$

so erhält man leicht:

$$\left. \begin{aligned} k V \bar{p} \sin i \sin (\Omega - \Omega_0) &= m \sin (M - \Omega_0) \\ k V \bar{p} \sin i \cos (\Omega - \Omega_0) &= k V \bar{p}_0 \sin i_0 + m \cos (M - \Omega_0) \end{aligned} \right\} \quad 23)$$

und es wird demnach:

$$\tan (\Omega - \Omega_0) = \frac{m \sin (M - \Omega_0)}{k V \bar{p}_0 \sin i_0 + m \cos (M - \Omega_0)},$$

wobei also, was bei sehr kleinen Neigungen möglicher Weise beachtet werden müsste, die Tangente so zu bestimmen ist, dass $\sin (\Omega - \Omega_0)$ das Zeichen des Zählers, $\cos (\Omega - \Omega_0)$ das Zeichen des Nenners erhält.

Multiplieirt man die Gleichungen (23) beziehungsweise mit $\sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0)$ und $\cos \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0)$, addirt und setzt das Resultat dieser Operation mit der ersten der Gleichungen (22) an, so findet sich:

$$\begin{aligned} k V \bar{p} \sin i &= k V \bar{p}_0 \sin i_0 + m \frac{\cos \{ M - \frac{1}{2} (\Omega + \Omega_0) \}}{\cos \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0)} \\ k V \bar{p} \cos i &= k V \bar{p}_0 \cos i_0 + X; \end{aligned}$$

setzt man nun weiter:

$$\begin{aligned} m \frac{\cos \{ M - \frac{1}{2} (\Omega + \Omega_0) \}}{\cos \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0)} &= n \sin N \\ X &= n \cos N, \end{aligned}$$

so findet sich leicht:

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} (i-i_0) &= \frac{n \sin (N-i_0)}{k \sqrt{p_0} + n \cos (N-i_0)} \\ \mathcal{A} (\sqrt{p}) &= \sqrt{p} - \sqrt{p_0} = \frac{n \cos \{ N - \frac{1}{2} (i + i_0) \}}{k \cos \frac{1}{2} (i - i_0)}.\end{aligned}$$

Hiermit erscheint die Lage der Bahnebene und die Grösse $\mathcal{A} (\sqrt{p})$ bestimmt; es erübrigt aber noch, die Lage der Bahn in dieser Ebene, und die Grössen $\mathcal{A} (r)$ sowie $\mathcal{A} \left(\frac{dr}{dt} \right)$ zu bestimmen.

Aus den Gleichungen (vergl. (17) pag. 94):

$$\begin{aligned}x &= r \cos u \cos \Omega - r \sin u \sin \Omega \cos i \\ y &= r \cos u \sin \Omega + r \sin u \cos \Omega \cos i \\ z &= r \sin u \sin i\end{aligned}$$

findet sich leicht:

$$\left. \begin{aligned}r \cos u &= x \cos \Omega + y \sin \Omega \\ r \sin u \cos i &= y \cos \Omega - x \sin \Omega \\ r \sin u \sin i &= z\end{aligned} \right\} \quad 24)$$

führt man in diesen Gleichungen statt x, y, z die Werthe $(x_0 + \xi), (y_0 + \eta), (z_0 + \zeta)$ ein und berücksichtigt ausserdem, dass ist:

$$\begin{aligned}\cos \Omega &= \cos \Omega_0 - 2 \sin \frac{1}{2} (\Omega + \Omega_0) \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0) \\ \sin \Omega &= \sin \Omega_0 + 2 \cos \frac{1}{2} (\Omega + \Omega_0) \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0)\end{aligned}$$

so wird

$$\left. \begin{aligned}r \cos u &= r_0 \cos u_0 + X' \\ r \sin u \cos i &= r_0 \sin u_0 \cos i_0 + Y' \\ r \sin u \sin i &= r_0 \sin u_0 \sin i_0 + \zeta\end{aligned} \right\} \quad 25)$$

wobei offenbar

$$\begin{aligned}X' &= -2 x_0 \sin \frac{1}{2} (\Omega + \Omega_0) \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0) + \xi \cos \Omega + 2 y_0 \cos \frac{1}{2} (\Omega + \Omega_0) \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0) + \\ &\quad + \eta \sin \Omega \\ Y' &= -2 y_0 \sin \frac{1}{2} (\Omega + \Omega_0) \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0) + \eta \cos \Omega - 2 x_0 \cos \frac{1}{2} (\Omega + \Omega_0) \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0) - \\ &\quad - \xi \sin \Omega\end{aligned}$$

angenommen ist.

Diese Formeln lassen sich durch Einführung der folgenden Hilfswinkel etwas zusammenziehen; schreibt man nämlich;

$$\begin{aligned}x_0 &= s \cos S \\ y_0 &= s \sin S \\ \xi &= \sigma \cos \Sigma \\ \eta &= \sigma \sin \Sigma,\end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned}X' &= \sigma \cos (\Sigma - \Omega) + 2 s \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0) \sin \{ S - \frac{1}{2} (\Omega + \Omega_0) \} \\ Y' &= \sigma \sin (\Sigma - \Omega) - 2 s \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0) \cos \{ S - \frac{1}{2} (\Omega + \Omega_0) \}.\end{aligned}$$

Behandelt man die Gleichungen (25) in analoger Weise, wie die Gleichungen (22) (pag. 95) und setzt:

$$\begin{aligned}\zeta &= m' \sin M' \\ Y' &= m' \cos M' \\ \frac{m' \cos \{ M' - \frac{1}{2} (i + i_0) \}}{\cos \frac{1}{2} (i - i_0)} &= n' \sin N' \\ X' &= n' \cos N'\end{aligned}$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned}\text{tang } (u - u_0) &= \frac{n' \sin N' - u_0}{r_0 + n' \cos (N' - u_0)} \\ J(r) = r - r_0 &= \frac{n' \cos \{ N' - \frac{1}{2} (u + u_0) \}}{\cos \frac{1}{2} (u - u_0)}\end{aligned} \right\} \quad 26)$$

und hiermit ist auch ω bekannt, denn man hat:

$$\begin{aligned}\omega &= u - v \\ \omega_0 &= u_0 - v_0\end{aligned}$$

daher:

$$\left. \begin{aligned}\omega - \omega_0 &= (u - u_0) - (v - v_0) \\ r - r_0 &= (\omega - \omega_0) + (\Omega - \Omega_0)\end{aligned} \right\} \quad 27)$$

Um die Störungen in den Elementen zu berechnen, bedarf es nur noch der Kenntniss des Werthes:

$$J \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt}.$$

Differentirt man die Gleichung:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

nach der Zeit, so erhält man:

$$r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt};$$

andererseits besteht die Gleichung:

$$r_0 \frac{dr_0}{dt} = x_0 \frac{dx_0}{dt} + y_0 \frac{dy_0}{dt} + z_0 \frac{dz_0}{dt};$$

durch Subtraction und eine einfache Transformation erhält man, wenn

$$D = (x_0 + \xi) \frac{d\xi}{dt} + \xi \frac{dx_0}{dt} + (y_0 + \eta) \frac{d\eta}{dt} + \eta \frac{dy_0}{dt} + (z_0 + \zeta) \frac{d\zeta}{dt} + \zeta \frac{dz_0}{dt},$$

gesetzt wird, sofort:

$$\frac{dr_0}{dt} J(r) + r J \left(\frac{dr}{dt} \right) = D,$$

und indem man sich erinnert, dass $\frac{dr_0}{dt}$ berechnet werden kann nach:

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{ke_0}{1 p_0} \sin v_0,$$

so hat man:

$$J \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{D - \frac{dr_0}{dt} J(r)}{r} \quad 28)$$

Die Grösse $(r - r_0)$ kann aber auch in anderer Weise leicht erhalten werden, und man kann diesen Werth entweder zur Controle benützen, oder man wird sich

auf diese Methode der Berechnung beschränken, wenn man nicht die Formeln (12) und (13) (pag. 92, 93) rechnen will; ich werde hier ausserdem die Berechnung von $\mathcal{A}(g^2)$ vornehmen, welche Grösse man im vorliegenden Falle ebenfalls nöthig hat.

Es ist:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ r_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2. \end{aligned}$$

Setzt man also:

$$B = \xi (2x_0 + \xi) + \eta (2y_0 + \eta) + \zeta (2z_0 + \zeta) \quad 29)$$

so wird:

$$B = (r - r_0)(r + r_0);$$

um hieraus $r - r_0$ zu bestimmen, kann man den folgenden Kettenbruch benützen:

$$r - r_0 = \frac{B}{2r_0 + \frac{B}{2r_0 + \frac{B}{2r_0 + \dots}}}$$

oder einfacher da r mit genügender Genauigkeit aus den vorangehenden Rechnungen bekannt ist:

$$r - r_0 = \frac{B}{r + r_0} \quad 30)$$

womit eine Controle der zweiten Formel (26) (pag. 97) erlangt werden kann; weiter ist:

$$\begin{aligned} g^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \\ g_0^2 &= \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2; \end{aligned}$$

setzt man also:

$$k^2 \mathcal{A} = \frac{d\xi}{dt} \left(2 \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi}{dt} \right) + \frac{d\eta}{dt} \left(2 \frac{dy_0}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right) + \frac{d\zeta}{dt} \left(2 \frac{dz_0}{dt} + \frac{d\zeta}{dt} \right), \quad 31)$$

so berechnet sich P (vergl. Formel (12) (pag. 92)) nach:

$$P = \mathcal{A} + \frac{2(r - r_0)}{r r_0}, \quad 32)$$

und hiermit erscheinen alle Formeln entwickelt, deren man zu dem Uebergange auf osculirende Elemente bedarf.

Um eine scharfe Controle für die Richtigkeit der Rechnung zu erlangen, wird es sich empfehlen, indem man die Formeln (18), (19), (20b) und (21) auf die neuen osculirenden Elemente anwendet, die gestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten direct abzuleiten, welche innerhalb der Unsicherheit der Rechnung mit den der Rechnung zu Grunde gelegten Werthen nach (15) (pag. 93) stimmen müssen. Hierbei könnte allerdings ein kleiner Fehler in der Bestimmung von μ sich leicht mit der Unsicherheit der Rechnung vermischen; man wird aber in der Bestimmung dieses Elementes kaum einen Fehler begehen können, da vorausgesetzt ist, dass $\mu - \mu_0$ nach beiden oben angeführten Methoden bestimmt wurde, also zwei nahezu unabhängige Resultate für dasselbe Element vorliegen.

Will man jedoch die gestörten Elemente unmittelbar aus den gestörten

Coordinaten und Geschwindigkeiten ableiten, so wird man auf eine sehr kurze Rechnung geführt.

Man bestimmt vorerst nach (15) (pag. 93) die Werthe $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, und erhält so aus (14) (pag. 93) die Elemente \sqrt{p}, i, Ω .

Aus den Gleichungen (24) (pag. 96) erhält man:

$$\begin{aligned} r \cos u &= x \cos \Omega + y \sin \Omega \\ r \sin u &= y \cos \Omega \cos i - x \sin \Omega \cos i + z \sin i; \end{aligned}$$

hierdurch gelangt man zur Kenntniss von r und u , und man kann nachsehen, ob die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

erfüllt wird. Hierauf berechnet man:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right),$$

und hat zur Bestimmung von φ (vergl. (2) und (3) (pag. 89)) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin \varphi \sin v &= \frac{\sqrt{p}}{k} \left(\frac{dr}{dt} \right) \\ \sin \varphi \cos v &= \frac{p}{r} - 1; \end{aligned}$$

aus v findet sich die mittlere Anomalie nach

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2} E &= \tan \frac{1}{2} v \tan (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \\ M &= E - \frac{\sin \varphi}{\sin i''} \sin E \end{aligned}$$

und ausserdem ist:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= u - v \\ \pi &= \omega + \Omega, \end{aligned} \right\} \quad 33)$$

so dass alle Elemente bis auf die grosse Halbachse bestimmt sind, welche letztere sich aber leicht aus:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{p}{\cos^2 \varphi}, \quad \mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}, \\ \log k'' &= 3.550 \ 0066 \end{aligned} \right\} \quad 34)$$

berechnet.

Wie man sieht, ist die Rechnung sehr kurz und bequem, doch hat man, da Fehler in der Bestimmung von μ mit der Zeit anwachsen, den Nachtheil, dass, um die nöthige Genauigkeit zu erlangen, grössere Tafeln zur Berechnung benützt werden müssen. Es erscheint daher zweckmässig, statt der Formeln (34) die oben angeführten Formeln (29), (30), (31) und (32) in Verbindung mit (13) zu benützen. Als Controle für die Richtigkeit der Rechnung kann man wieder die Rückrechnung der Coordinaten und Geschwindigkeiten nach den Formeln (18), (19), (20) und (21) unter Zuziehung der neuen Elemente benützen; allerdings entziehen sich sehr kleine Fehler in der Bestimmung von $\mu - \mu_0$ nach den Formeln (29), (30), (31) und (32) der Controle; man wird demnach diesen Theil der Rechnung einer sorgfältigen Revision unterwerfen.

Ich werde nun die für den Uebergang auf osculirende Elemente nach Encke's Methode der Störungsrechnung erforderlichen Formeln hier zusammentragen.

Man rechnet sich vorerst mittelst der Formeln, die bei der mechanischen Quadratur entwickelt wurden, die Werthe von:

$$\xi, \eta, \zeta \text{ und } \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}.$$

Hierbei wird es zweckmässig sein, für die Zeiteinheit das bei der Störungsrechnung gewählte Intervall anzunehmen, wodurch die sonst nöthige Division der einfachen Integrale, die die Störungen in den Geschwindigkeiten ergeben, durch w zu entfallen hat; um diesen Umstand in der folgenden Rechnung einfach zu berücksichtigen, wird man statt der Constante des Sonnensystems k überall den Werth wk zu setzen haben, wobei w das der Störungsrechnung zu Grunde liegende Zeitintervall in mittleren Sonnentagen ausgedrückt vortesslt.

Dann rechnet man zunächst für die Zeit der neuen Osculationsepoche in der bekannten Weise den ungestörten Radiusvector r_0 , die wahre Anomalie i_0 und das Argument der Breite u_0 nach $u_0 = v_0 + \omega_0$.

Es ist dann:

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos Q_0 \\ \sin a \cos A &= -\sin Q \cos i_0 \\ \sin b \sin B &= \sin Q_0 \\ \sin b \cos B &= \cos Q_0 \cos i_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{I)}$$

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= r_0 \sin a \sin (A + u_0) \\ y_0 &= r_0 \sin b \sin (B + u_0) \\ z_0 &= r_0 \sin i_0 \sin u_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{II)}$$

bestimmt man c und U nach:

$$\left. \begin{aligned} \gamma \sin \Gamma &= \sin v_0 \\ \gamma \cos \Gamma &= \cos v_0 + \sin q_0 \\ U &= \Gamma + \omega_0 \\ c &= \frac{(wk)\gamma}{V\rho_0} \end{aligned} \right\} \quad \text{III)}$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= c \sin a \cos (A + U) \\ \frac{dy_0}{dt} &= c \sin b \cos (B + U) \\ \frac{dz_0}{dt} &= c \sin i_0 \cos U \end{aligned} \right\} \quad \text{IV)}$$

Jetzt wird man sich zu entscheiden haben, ob man die gestörten Elemente direct, oder ob man nur die Störungen derselben bestimmen will; ich sammle zuerst jene Formeln, deren man für die letztere Methode bedarf.

Man ermittelt zunächst:

$$\left. \begin{aligned}
 X &= \left\{ (x_0 + \xi) \frac{dx_0}{dt} + \xi \frac{dy_0}{dt} \right\} - \left\{ (y_0 + \eta) \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{dx_0}{dt} \right\} \\
 Y &= \left\{ (y_0 + \eta) \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{dz_0}{dt} \right\} - \left\{ (z_0 + \zeta) \frac{d\eta}{dt} + \zeta \frac{dy_0}{dt} \right\} \\
 Z &= \left\{ (x_0 + \xi) \frac{d\xi}{dt} + \xi \frac{dz_0}{dt} \right\} - \left\{ (z_0 + \zeta) \frac{d\xi}{dt} + \zeta \frac{dx_0}{dt} \right\} \\
 D &= (x_0 + \xi) \frac{d\xi}{dt} + (y_0 + \eta) \frac{d\eta}{dt} + (z_0 + \zeta) \frac{d\zeta}{dt} + \xi \frac{dx_0}{dt} + \eta \frac{dy_0}{dt} + \zeta \frac{dz_0}{dt} \\
 (wk)^2 A &= \frac{d\xi}{dt} \left(2 \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi}{dt} \right) + \frac{d\eta}{dt} \left(2 \frac{dy_0}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right) + \frac{d\zeta}{dt} \left(2 \frac{dz_0}{dt} + \frac{d\zeta}{dt} \right) \\
 B &= \xi (2x_0 + \xi) + \eta (2y_0 + \eta) + \zeta (2z_0 + \zeta) .
 \end{aligned} \right\} \text{V) }$$

dann wird:

$$\left. \begin{aligned}
 Y &= m \sin M \\
 Z &= m \cos M \\
 \text{tang } (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}_0) &= \frac{m \sin (M - \mathcal{Q}_0)}{(wk) \sqrt{p_0 \sin i_0 + m \cos (M - \mathcal{Q}_0)}} \\
 \frac{m \cos \{ M - \frac{1}{2} (\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_0) \}}{\cos \frac{1}{2} (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}_0)} &= n \sin N \\
 X &= n \cos N \\
 \text{tang } (i' - i_0) &= \frac{n \sin (N - i_0)}{(wk) \sqrt{p_0 + n \cos (N - i_0)}} \\
 A(p) &= \frac{n}{(wk)} \cdot \frac{\cos \{ N - \frac{1}{2} (i + i_0) \}}{\cos \frac{1}{2} (i - i_0)} \\
 A(p) &= \{ 2 \sqrt{p_0} + A(p) \} A(\sqrt{p}) \\
 p &= p_0 + A(p) ;
 \end{aligned} \right\} \text{VI) }$$

weiter wird man zu rechnen haben:

$$\left. \begin{aligned}
 x_0 &= s \cos S \\
 y_0 &= s \sin S \\
 \xi &= \sigma \cos \Sigma \\
 \eta &= \sigma \sin \Sigma \\
 X' &= \sigma \cos (\Sigma - \mathcal{Q}) + 2s \sin \frac{1}{2} (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}_0) \sin \{ S - \frac{1}{2} (\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_0) \} \\
 Y' &= \sigma \sin (\Sigma - \mathcal{Q}) - 2s \sin \frac{1}{2} (\mathcal{Q} - \mathcal{Q}_0) \cos \{ S - \frac{1}{2} (\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_0) \} \\
 \zeta &= m' \sin M' \\
 Y' &= m' \cos M' \\
 \frac{m' \cos \{ M' - \frac{1}{2} (i + i_0) \}}{\cos \frac{1}{2} (i - i_0)} &= n' \sin N' \\
 X' &= n' \cos N' \\
 \text{tang } (u - u_0) &= \frac{n' \sin (N' - u_0)}{r_0 + n' \cos (N' - u_0)} \\
 A(r) &= r - r_0 = \frac{n' \cos \{ N' - \frac{1}{2} (u + u_0) \}}{\cos \frac{1}{2} (u - u_0)} \\
 r &= r_0 + A(r)
 \end{aligned} \right\} \text{VII) }$$

Um $A\left(\frac{dr}{dt}\right)$ zu finden, hat man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_0}{dt} &= \frac{(u \ k) e_0}{\sqrt{p_0}} \sin v_0 \\ \mathcal{A} \left(\frac{dr}{dt} \right) &= \frac{D - \frac{dr_0}{dt} \mathcal{A}(r)}{r} \end{aligned} \right\} \quad \text{VIII)}$$

Für die Ermittlung der Excentricität und der wahren Anomalie ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(u \ k)} \left\{ \frac{dr_0}{dt} \mathcal{A}(\sqrt{p}) + \sqrt{p} \mathcal{A} \left(\frac{dr}{dt} \right) \right\} &= g \sin G \\ \frac{1}{r} \left\{ \mathcal{A}(p) - \frac{p_0}{r_0} \mathcal{A}(r) \right\} &= g \cos G \\ \text{tang } (v - v_0) &= \frac{g \sin (G - v_0)}{e_0 + g \cos (G - v_0)} \\ \mathcal{A}(e) = e - e_0 &= \frac{g \cos \frac{1}{2} (G - \frac{1}{2} (v + v_0))}{\cos \frac{1}{2} (v - v_0)} \\ \sin q &= e_0 + \mathcal{A}(e) \\ \mathcal{A}(e^2) &= \{ 2 e_0 + \mathcal{A}(e) \} \mathcal{A}(e) \\ \sin \frac{1}{2} (q - q_0) &= \frac{\mathcal{A}(e)}{2 \cos \frac{1}{2} (q + q_0)} \end{aligned} \right\} \quad \text{IX)}$$

dann ist:

$$\left. \begin{aligned} \omega - \omega_0 &= (u - u_0) - (v - v_0) \\ u - r_0 &= (\omega - \omega_0) + (\Omega - \Omega_0) \end{aligned} \right\} \quad \text{X)}$$

Um den Unterschied der mittleren Anomalien zu finden, hat man:

$$\left. \begin{aligned} (u) &= 2 \sin \frac{1}{2} (r - r_0) \cos \frac{1}{2} (v + v_0) \cos q - 2 \sin \frac{1}{2} (q - q_0) \sin \frac{1}{2} (q + q_0) \sin v_0 \\ (v) &= \mathcal{A}(e) - 2 \sin \frac{1}{2} (r - r_0) \sin \frac{1}{2} (v + v_0) \\ (k) &= - \frac{r}{p} g \cos G \\ (k) \sin E_0 + (u) \frac{r}{p} &= g' \sin G' \\ (k) \cos E_0 + (v) \frac{r}{p} &= g' \cos G' \\ \text{tang } (E - E_0) &= \frac{g' \sin (G' - E_0)}{1 + g' \cos (G' - E_0)} \\ M - M_0 &= (E - E_0) - \frac{2 e_0}{\sin 1''} \sin \frac{1}{2} (E - E_0) \cos \frac{1}{2} (E + E_0) - \frac{\mathcal{A}(e)}{\sin 1''} \sin E \\ L - L_0 &= (M - M_0) + (u - r_0). \end{aligned} \right\} \quad \text{XI)}$$

Zur Bestimmung des letzten noch unbekannten Elementes μ kann man zur Controle den Werth von q als Argument für die Ermittlung von f aus der f -Tafel (Tafel XI) in zweifacher Weise berechnen; man hat sowohl:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\mathcal{A}(p) + a_0 \mathcal{A}(e^2)}{2 \{ p_0 - a_0 \mathcal{A}(e^2) \}} \\ P &= A + \frac{2 B}{r r_0 (r + r_0)} \\ q &= \frac{a_0 P}{2 (1 - a_0 P)} \end{aligned} \right\} \quad \text{XIIa)}$$

welche beiden Werthe von q innerhalb der Unsicherheit der Rechnung übereinstimmen müssen. Hat man mit q als Argument den Werth von f aus der Tafel XI entnommen, so ist schliesslich:

$$\mu - \mu_0 = -fq\mu_0. \quad \text{XIIb)}$$

Zur Controle für die Richtigkeit der Rechnung wird man die Formeln I) bis IV) (pag. 100) auf die gestörten Elemente anwenden; man erhält dadurch die gestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten, die den folgenden Relationen innerhalb der Unsicherheit der Rechnung genügen müssen:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \xi, & \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi}{dt} \\ y &= y_0 + \eta, & \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_0}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \\ z &= z_0 + \zeta, & \frac{dz}{dt} &= \frac{dz_0}{dt} + \frac{d\zeta}{dt} \end{aligned} \right\} \quad \text{XIII)}$$

Der Uebergang von q auf $\mu - \mu_0$ muss einer besonderen Revision unterzogen werden.

Will man die Elemente aber unmittelbar ableiten, so bestimmt man sich nach Durchrechnung der Formeln I) bis IV) (pag. 100) mittelst der Formeln XIII die gestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten und hat dann zunächst zur Bestimmung des Knotens Ω , der Neigung i und des Parameters p die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sqrt{p} \cos i &= \frac{1}{(wk)} \left\{ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right\} \\ \sqrt{p} \sin i \sin \Omega &= \frac{1}{(wk)} \left\{ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right\} \\ \sqrt{p} \sin i \cos \Omega &= \frac{1}{(wk)} \left\{ x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} \right\} \end{aligned} \quad \text{V)}$$

Der Radiusvektor r und das Argument der Breite u ergibt sich aus:

$$\left. \begin{aligned} r \cos u &= x \cos \Omega + y \sin \Omega \\ r \sin u &= y \cos \Omega \cos i - x \sin \Omega \cos i + z \sin i \end{aligned} \right\} \quad \text{VI)}$$

zur Controle ist:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die Excentricität $\sin \varphi$ und die wahre Anomalie v findet sich aus:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi \sin v &= \frac{\sqrt{p}}{(wk)r} \left\{ x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right\} \\ \sin \varphi \cos v &= \frac{p}{r} - 1, \end{aligned} \right\} \quad \text{VII)}$$

die mittlere Anomalie aus:

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{1}{2} E &= \tan \frac{1}{2} v \cdot \cotg (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) \\ M &= E - \frac{\sin \varphi}{\sin 1''} \sin E \end{aligned} \right\} \quad \text{VIII)}$$

der Abstand des Perihels vom Knoten ω und die Länge des Perihels π nach:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= u - v \\ \pi &= \omega + \Omega \end{aligned} \right\} \quad \text{IX)}$$

die grosse Halbachse und die tägliche mittlere siderische Bewegung endlich aus:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{p}{\cos^2 \varphi}, & \mu &= \frac{k''}{a^2}, \\ \log k'' &= 3.550 \ 0066 \end{aligned} \right\} \quad \text{X)}$$

Als Controle rechnet man die Coordinaten und Geschwindigkeiten nach den Formeln I) bis IV) (pag. 100) mit Anwendung der gestörten Elemente. Die Uebereinstimmung mit den Ausgangswerthen muss völlig innerhalb der Unsicherheit der Rechnung liegen. Um μ schärfer zu erhalten als es nach der obigen Formel möglich ist, rechne man überdies:

$$\left. \begin{aligned} (wk)^2 A &= \frac{d\xi}{dt} \left\{ 2 \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi}{dt} \right\} + \frac{d\eta}{dt} \left\{ 2 \frac{dy_0}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right\} + \frac{d\zeta}{dt} \left\{ 2 \frac{dz_0}{dt} + \frac{d\zeta}{dt} \right\} \\ B &= \xi (2x_0 + \xi) + \eta (2y_0 + \eta) + \zeta (2z_0 + \zeta) \\ P &= A + \frac{2B}{r r_0 (r + r_0)}, & q &= \frac{a_0 P}{2(1 - a_0 P)}, \\ \mu - \mu_0 &= -f q \mu_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{XI)}$$

wobei f mit q als Argument aus der f -Tafel (Tafel XI) zu entnehmen ist.

§. 5. Rechnungsbeispiel zu Encke's Methode.

Es sollen, um die vorstehenden Entwicklungen durch ein Beispiel zu erläutern, die Störungen ermittelt werden, die der Planet ⁽⁶²⁾ Erato durch die Anziehung der Planeten Jupiter und Saturn erleidet. Die Berücksichtigung der anderen grossen Planeten erscheint im Allgemeinen bei den kleinen Planeten nicht geboten, doch werden die Wirkungen der Planeten Mars und Erde wohl hier und da eine merkliche Störung veranlassen. Es wird aber Niemandem, der die folgenden Vorschriften einem genauen Studium unterzieht, Schwierigkeiten verursachen, dieselben auf eine beliebige Anzahl von Planeten zu erweitern.

Vorerst wird man sich hinreichend genäherte osculirende Elemente für den gestörten Planeten zu verschaffen haben; im Falle, dass keine genäherten Störungswerthe bereits vorliegen, wird man die Elemente ohne Rücksicht auf Störungen aus den Beobachtungen ableiten; allerdings wird dann wol stets die Nothwendigkeit hervortreten, die aus diesen Elementen abgeleiteten Störungswerthe einer Neurechnung zu unterziehen, der man dann die Elemente zu Grunde legt, die man mit Hilfe der eben genannten genähert richtigen Störungswerthe gefunden hat.

Es wird sich aber in diesen Fällen empfehlen für die erste Rechnung der Störungen nur die ersten Potenzen der Massen zu berücksichtigen und von den diesem Falle angepassten Formen, die weiter unten empfohlen werden, Gebrauch zu machen.

Für Erato lege ich die folgenden osculirenden Elemente zu Grunde, die sich bereits sehr nahe den Beobachtungen mit Rücksicht auf die Störungen anschliessen; dieselben sind:

(62) Erato

Epoche und Osculation 1874 Decbr. 26,0 mittl. Zeit Berlin.

mittl. Aeq. 1870,0

$L = 219^{\circ} 8' 6.8$

$M = 180 40 48.9$

$\pi = 38 27 17.9$

$\varpi = 125 42 39.7$

$i = 2 12 23.9$

$q = 9 59 14.9$

$\mu = 640'' 89605$

$\log a = 0.4954793$

Diese Elemente sollen nun benützt werden, um die Störungswerthe von der Zeit der Osculationsepoche an nach rückwärts bis 1871 Juni 5 zu ermitteln; ich habe das Beispiel auf eine Rückrechnung angewendet, weil die Anwendung auf den Fall der Rechnung nach vorwärts etwas leichter ist, und ohne Missverständniß ausgeführt werden kann.

Für die in Betracht kommende Zeit gibt das Berliner Jahrbuch die Coordinaten der störenden Planeten bezogen auf das fixe Aequinoctium 1870,0, auf welches sich auch bereits die oben angeführten Elemente beziehen; wäre dieses nicht der Fall, so müssten dieselben mit Hilfe der bekannten Formeln (I pag. 81 auf dieses Aequinoctium übertragen werden.

Wollte man beispielsweise die Störungsrechnung nach vorwärts führen, so müssten, da die Coordinaten der störenden Planeten von 1875,0 bis 1885,0 sich auf das mittlere Aequinoctium 1880,0 beziehen, auch die Elemente des gestörten Planeten auf dieses Aequinoctium reducirt werden. Man würde mit Hilfe der oben erwähnten Formeln als Correctionen der obigen Elemente für die Uebertragung von 1870,0 auf 1880,0 finden:

$$IL = I\lambda = + 8' 22'' 47$$

$$I\varpi = + 6' 50'' 72$$

$$Ii = - 3'' 24.$$

Die erste Aufgabe besteht nun darin, das Intervall für die Störungsrechnung passend zu wählen. Die Erfahrung lehrt, dass man für kleine Planeten in der Regel (allzugrosse Annäherung an Jupiter ausgenommen mit einem Intervalle von 40 Tagen ausreicht, welches auch hier gewählt wird. Man legt weiter zweckmässig die Osculationsepoche in die Mitte eines solchen Intervalles; es werden daher für die Störungsrechnung als Epochen zu gelten haben:

.... 1875 Febr. 24, 1875 Januar 15, 1874 Decbr. 6, 1874 Octbr. 27

womit man auf Epochen geführt wird, für welche die Publikationen der astronomischen Gesellschaft und das Berliner Jahrbuch in den neueren Jahrgängen die Coordinaten der störenden Planeten geben. Es könnte jedoch der Fall eintreten.

dass in Folge der gegebenen Osculationsepoche eine derartige Wahl nicht möglich ist; man wird in diesen Fällen aber dennoch trachten, die bereits gewählten Epochen festzuhalten und durch geeignete Bestimmung der Integrationsconstanten " $f(a$ und " $f(a - \frac{1}{2}w)$ der Bedingung genügen, dass die einfachen und doppelten Integrale für die Osculationsepoche verschwinden; hierfür bieten die Formeln II pag. 59 die geeigneten Hilfsmittel. Da dieser Fall aber selten eintreten wird, so begnüge ich mich mit diesem Hinweise und werde auf diesen Umstand in der Folge nicht weiter Rücksicht nehmen.

Die Rechnung legt man sich, so lange nicht mehr als 2 störende Planeten berücksichtigt werden, zweckmässig so an, dass auf einem Blatte hauptsächlich die von dem gestörten, auf einem anderen die von dem störenden Planeten abhängigen Grössen Aufnahme finden; ausserdem wird man für die Summation in den Coordinaten für jede Coordinate gesondert ein Blatt anlegen. Ich werde diese Blätter der Reihe nach mit Blatt A , B , X , Y , Z bezeichnen; die diesbezüglichen Rechnungen sind in dem folgenden Beispiele in extenso aufgenommen.

Zuerst wird man sich auf einem besonderen Blatte nach den Formeln pag. 83 die Constanten für die Ermittlung der ungestörten Coordinaten und damit schon in dem eigentlichen Rechnungsschema zunächst die von den Störungen unabhängigen Grössen rechnen; die Rechnung selbst führe ich für den gestörten Planeten und für Jupiter 6stellig, für Saturn 5stellig; im Allgemeinen wird aber eine 5stellige, beziehungsweise 4stellige Rechnung genügen.

Zur Ermittlung der Constanten hat man ein für allemal gesondert die Formeln zu rechnen:

$$\left. \begin{array}{lll} \sin a \sin A = \cos \Omega & \sin b \sin B = \sin \Omega & C = 0 \\ \sin a \cos A = -\sin \Omega \sin i & \sin b \cos B = \cos \Omega \cos i & \sin c = \sin i \\ \omega = \pi - \Omega & e'' = \frac{\sin \varphi}{\sin i''} & \\ A' = A + \omega & & \\ B' = B + \omega & & \\ C' = C + \omega = \omega & & \end{array} \right\} 1$$

Im vorliegenden Beispiele findet sich:

$\sin \varphi_0 = 9.239\ 131$	$\cos \varphi = 9.993\ 368$
$\log e'' = 4.553\ 556$	$a \cos \varphi = 0.488\ 847$
$\sin \Omega = 9.909\ 540$	$A = 215^\circ 43' 52'' 4$
$\cos i = 9.999\ 678$	$\cos A = 9.909\ 430$
$\cos \Omega = 9.9766\ 188$	$\sin a = 9.999\ 788$
$\cos \Omega \cos i = 9.9765\ 866$	$B = 125^\circ 41' 27'' 3$
$\sin \Omega \cos i = 9.9909\ 218$	$\sin B = 9.909\ 650$
$C = \omega = 272^\circ 44' 38'' 2$	$\sin b = 9.999\ 890$
$\sin c = \sin i = 8.585\ 501$	$A' = 128^\circ 28' 30'' 6$
	$B' = 38^\circ 26' 5'' 5$
	$C' = 272^\circ 44' 38'' 2$

Mit diesen Constanten lassen sich sofort für alle Intervalle der ganzen Störungsrechnung die ungestörten Coordinaten x_0 , y_0 , z_0 nach den Formeln:

$$\begin{aligned}x_0 &= r_0 \sin a \sin (A' + v_0) \\y_0 &= r_0 \sin b \sin (B' + v_0) \\z_0 &= r_0 \sin c \sin (C' + v_0)\end{aligned}$$

berechnen; im vorliegenden Falle hat man also:

$$\begin{aligned}x_0 &= r_0 \cdot 9.999\,788 \sin (r_0 + 128^\circ 28' 30'' 6) \\y_0 &= r_0 \cdot 9.999\,890 \sin (r_0 + 38^\circ 26' 5'' 5) \\z_0 &= r_0 \cdot 8.585\,501 \sin (v_0 + 272^\circ 44' 38'' 2).\end{aligned}$$

Die hierbei noch nöthigen Grössen r_0 und v_0 erhält man durch das für jedes einzelne Störungsintervall zu rechnende Formelsystem:

$$\left. \begin{aligned}M &= M_0 + \mu t \\M &= E - e'' \sin E \\r_0 \sin r_0 &= a \cos q \sin E \\r_0 \sin v_0 &= a (\cos E - e)\end{aligned} \right\} \quad 11)$$

ausserdem lassen sich nunmehr auch noch die von den Störungswerten ebenfalls unabhängigen Grössen:

$$h = \frac{w k^2}{r_0^3}, \quad R^2 = r_0^2 \left(1 + \frac{1}{12} h\right) \text{ und } h' = \frac{h}{1 + \frac{1}{12} h}$$

für den ganzen Umfang der Störungsrechnung auf einmal durchrechnen, und es ist hierbei unter Voraussetzung eines 10tägigen Intervalles $\log (w k^2) = 9.675\,283$ zu nehmen.

Die diesbezügliche Rechnung ist ihrem ganzen Umfange nach auf den Blättern A_1 und A_2 durchgeführt. Ausserdem sind auf den A -Blättern die Coordinaten der störenden Planeten nach den Publikationen der astronomischen Gesellschaft, und auf den B -Blättern die Grössen X_2 , Y_2 , Z_2 , welche die Wirkung des störenden Planeten auf die Sonne darstellen, aufgenommen; diese Grössen sind gleichfalls den eben citirten Publikationen entnommen. Da an der genannten Stelle für Jupiter und Saturn nach Bessel beziehungsweise die Massen $\frac{1}{1047.879}$ und $\frac{1}{3501.6}$ angenommen sind, so wurde für die vorliegende Rechnung ebenfalls diese Massenannahme gewählt.

Wollte man für die Massen eine andere Annahme machen, so hätte man vorerst die Grössen X_2 , Y_2 , Z_2 mit dem Factor $\frac{m_a}{m_b}$ zu multipliciren, wo m_a die gewählte neue Massenannahme, m_b die den obigen Publikationen zu Grunde liegende Massenannahme wäre. Damit erscheinen nun alle Rechnungen, so weit dieselben ohne Kenntniss der Störungswerte durchführbar sind, beendet.

Nun werden die directen Glieder für die zwei der Osculationsepoche unmittelbar vorangehenden und die zwei unmittelbar folgenden Epochen berechnet; allerdings bedarf es hierzu der Kenntniss der Werthe ξ , η , ζ ; diese Störungswerthe sind aber in der Nähe der Osculationsepoche so klein, dass dieselben keinen sehr merkbaren Einfluss auf das Resultat ausüben können. Die diesbezüglichen Rechnungen sind auf dem Blatte *B* ausgeführt, wobei die Logarithmen der Grössen $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ leicht sofort hingeschrieben werden können, da die Coordinaten des störenden und des gestörten Planeten auf dem Blatte *A* unmittelbar über einander stehen.

Die Rechnung ist für jeden störenden Planeten gesondert durchzuführen und beruht auf folgendem Formelsystem:

$$\begin{array}{lcl}
 q \cos \vartheta \cos \theta = x_1 - x & & \\
 q \cos \vartheta \sin \theta = y_1 - y & & \\
 \sin \vartheta = z_1 - z & & \\
 X_1 = (wk)^2 m_1 \frac{x_1 - x}{q^3} & & \\
 Y_1 = (wk)^2 m_1 \frac{y_1 - y}{q^3} & & \\
 Z_1 = (wk)^2 m_1 \frac{z_1 - z}{q^3} & & \\
 (X) = X_1 + X_2 & & \\
 (Y) = Y_1 + Y_2 & & \\
 (Z) = Z_1 + Z_2 & & \\
 \Sigma (X) = (X)_a + (X)_b + \dots & & \\
 \Sigma (Y) = (Y)_a + (Y)_b + \dots & & \\
 \Sigma (Z) = (Z)_a + (Z)_b + \dots & &
 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{III}$$

die Werthe für die Factoren $(wk)^2 m_1$ sind der Tafel XII zu entnehmen, dabei ist zu beachten, dass $w = 40$ Tagen angenommen ist und dass die Störungswerthe in Einheiten der 7^{ten} Decimale erhalten werden.

Um nun zur Kenntniss der indirecten Glieder zu gelangen, betrachtet man vorerst die directen Glieder als den vollständigen Ausdruck der zweiten Differentialquotienten der Störungswerthe und bildet die erste und zweite summirte Reihe. Da diese Rechnung blos eine vorläufige Bestimmung für die Störungswerthe ergeben soll, so wird dieselbe als Nebenrechnung auf einem gesonderten Blatte durchgeführt. Man hat zur Bestimmung der Anfangsconstanten, da das einfache und das Doppelintegral für die Epoche 1874 Dec. 26.0 verschwinden soll nach II pag. 53:

$$\left. \begin{array}{l}
 f(a - \frac{1}{2}\omega) = -\frac{1}{24}f''(a - \frac{1}{2}\omega) + \frac{17}{5760}f'''(a - \frac{1}{2}\omega) - \dots \\
 {}^{11}f(a - \omega) = \frac{1}{24}f''(a) + \frac{17}{5760} \left\{ 2f''(a) + f''(a - \omega) \right\} + \dots
 \end{array} \right\} \text{IV}$$

welche Bestimmung für jede der einzelnen Coordinaten auszuführen ist. Man er-

hält so, indem man die Werthe mit der fortschreitenden Zeit ansetzt, und ebenso die Differenzwerthe und Summenwerthe bildet, mit Benützung der auf dem Blatte *B* erlangten Werthe von $\Sigma(X)$, $\Sigma(Y)$, $\Sigma(Z)$:

	f'''	f''	f'	f	f	${}''f$	$S_{(x)}$
1874 Oct. 27				-710.99		-667.89	-727.13
Dec. 6			+64.88		+643.56		
		-3.69		-646.11		[- 24.33]	- 78.16
	-0.63		+61.19		[- 2.55]		
1875 Jan. 15		-3.42		-584.92		- 26.88	- 75.61
			+56.87		-587.47		
Feb. 24				-528.05		-614.35	-658.34

						$S_{(y)}$
1874 Oct. 27			+281.64		+268.47	+291.96
Dec. 6		-21.95		-258.66		
		-2.56	+259.69		[+ 9.81]	+ 31.46
	+1.83		-24.51		[+ 1.03]	
1875 Jan. 15		-0.73	+235.18		+ 10.84	+ 30.44
			-25.24		+236.21	
Feb. 24			+209.94		+247.05	+264.53

						$S_{(z)}$
1874 Oct. 27			- 10.01		- 10.05	- 10.88
Dec. 6		+ 0.31		+ 9.67		
		+0.38	- 9.70		[- 0.38]	- 1.19
	-0.19		+ 0.69		[- 0.03]	
1875 Jan. 15		+0.19	- 9.01		- 0.41	- 1.16
			+ 0.88		- 9.04	
Feb. 24			- 8.13		- 9.45	- 10.13

Ich habe die Anfangseonstanten, um ihre Stellung und ihren Werth besonders hervortreten zu lassen, in dem voranstehenden Schema in eckige Klammern eingeschlossen. Nimmehr rechnet man die Werthe vergl. II pag. 79:

$$\left. \begin{aligned} S_{(x)} &= f_{(x)} (a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma(X) - \frac{1}{240} f_{(x)}'' (a + iw) \\ S_{(y)} &= f_{(y)} (a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma(Y) - \frac{1}{240} f_{(y)}'' (a + iw) \\ S_{(z)} &= f_{(z)} (a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma(Z) - \frac{1}{240} f_{(z)}'' (a + iw) \end{aligned} \right\} \quad V)$$

welche Werthe ich rechts neben die doppelt summirten Werthe oben angesetzt habe, und deren Logarithmen auf dem Blatte *A* Aufnahme finden könnten; um aber die Rechnung möglichst scharf zu gestalten, werden mit diesen Werthen die indirecten Glieder auf dem Nebenblatte nur provisorisch berechnet und nachher die damit verbesserten Werthe erst in das eigentliche Rechnungsschema eingetragen. Nun sind die Formeln 15 und 16 (pag. 79, 80) heranzuziehen, dieselben lauten:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{x_0 + \frac{1}{2} \xi}{R^2} \\ b &= \frac{y_0 + \frac{1}{2} \eta}{R^2} \\ c &= \frac{z_0 + \frac{1}{2} \zeta}{R^2} \\ q &= \frac{a S_{(x)} + b S_{(y)} + c S_{(z)}}{1 - \frac{1}{2} h f (a x + b y + c z)} \end{aligned} \right\} \text{VI)}$$

wobei jetzt noch die Grössen ξ , η , ζ der Null gleich gesetzt und die Grössen x , y , z mit x_0 , y_0 , z_0 identificirt sind. Als Argument für die Ermittlung des Werthes von f kann in dieser ersten Annäherung hinreichend genau:

$$q = a S_{(x)} + b S_{(y)} + c S_{(z)}$$

genommen werden. Nunmehr erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \Sigma(X) + h' (f q x - S_{(x)}) \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \Sigma(Y) + h' (f q y - S_{(y)}) \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \Sigma(Z) + h' (f q z - S_{(z)}) \end{aligned} \right\} \text{VII)}$$

wobei wieder x , y , z mit x_0 , y_0 , z_0 identificirt sind. Die Rechnung auf dem Nebenblatte, die ohne Nachtheil vierstellig geführt werden könnte, gestaltet sich demnach unter Zuziehung der auf den Blättern *A* und *B* erhaltenen Werthe folgendermassen:

	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27.
$\log x = \log (x_0 + \frac{1}{2} \xi) = \log x_0$	$0_n 400715$	$0_n 438994$	$0_n 470322$	$0_n 495641$
$\log y = \log (y_0 + \frac{1}{2} \eta) = \log y_0$	$0_n 424995$	$0_n 385696$	$0_n 337869$	$0_n 279391$
$\log z = \log (z_0 + \frac{1}{2} \zeta) = \log z_0$	$9. 141641$	$9_n 148099$	$9_n 150349$	$9. 147436$
$\log a$	$9_n 272327$	$9_n 309028$	$9_n 340218$	$9_n 366839$
$\log b$	$9_n 296607$	$9_n 255730$	$9_n 207765$	$9_n 150589$
$\log c$	$8. 013253$	$8. 018133$	$8. 020245$	$8. 019634$
$\log S_{(x)}$	$2_n 818450$	$1_n 878579$	$1_n 892985$	$1_n 861612$
$\log S_{(y)}$	$2. 422475$	$1. 483445$	$1. 497759$	$2. 465323$
$\log S_{(z)}$	$1_n 005609$	$0_n 064458$	$0_n 045547$	$1_n 036629$
$a \cdot S_{(x)} +$	123.25	$+ 15.40$	$+ 17.11$	$+ 169.22$
$b \cdot S_{(y)} -$	52.37	$- 5.48$	$- 5.08$	$- 41.30$
$c \cdot S_{(z)} -$	0.10	$- 0.01$	$- 0.01$	$- 0.11$
Zähler $+$	70.78	$+ 9.91$	$+ 12.02$	$+ 127.81$
$a \cdot x +$	0.471023	$+ 0.559786$	$+ 0.646457$	$+ 0.748585$
$b \cdot y +$	0.526747	$+ 0.437951$	$+ 0.351264$	$+ 0.269141$
$c \cdot z +$	0.001429	$+ 0.001466$	$+ 0.001481$	$+ 0.001473$
$H +$	0.999199	$+ 0.999203$	$+ 0.999202$	$+ 0.999199$

	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27
$\log W$	9.999652	9.999653	9.999653	9.999652
$\frac{1}{12} h$	6.904042	6.901672	6.901465	6.903465
f	0.477113	0.477120	0.477120	0.477107
$\log (1-N)$	7.380807	7.378445	7.378238	7.380181
$\log N$	9.998955	9.998961	9.998961	9.998957
$\log \text{Zähler}$	1.849911	0.996074	1.079904	2.106565
$\log q$	1.850956	0.997113	1.080943	2.107608
$\log fq$	2.308069	1.474233	1.558063	2.584715
fqx	2.728784	1.913227	2.128385	3.080356
$f q y$	2.753064	1.859929	1.895932	2.864106
$f q z$	1.469710	0.622332	0.708308	1.733151
Add. oder Subtr. log:	{ 9.360447 0.166460 0.128231	{ 8.919337 0.152368 0.106114	{ 0.563293 0.146062 0.090942	{ 9.816105 0.145887 0.079590
$f q x - S_{(x)}$	2.089231	0.797916	1.456278	2.677717
$f q y - S_{(y)}$	2.919524	2.012297	2.041994	3.009994
$f q z - S_{(z)}$	1.597941	0.728446	0.799250	1.812741
h'	7.982875	7.980507	7.980300	7.982254
$I \Sigma (X)$	+ 1.18	— 0.06	— 0.27	— 4.57
$I \Sigma (Y)$	— 7.99	— 0.98	— 1.05	— 9.82
$I \Sigma (Z)$	+ 0.38	+ 0.05	+ 0.06	— 0.06

Vereinigt man diese indirecten Glieder $I \Sigma (X)$, $I \Sigma (Y)$, $I \Sigma (Z)$ mit den directen, so erhält man neue Werthe für die Differentialquotienten, die sich so wenig von der Wahrheit entfernen, dass man dieselben der definitiven Störungsrechnung zu Grunde legen kann. Man erhält so, wenn man neuerdings die Anfangsconstanten bestimmt, für die letzte auf einem Nebenblatte auszuführende Operation:

	f'''	f''	f'	f	f	$''f$	$S_{(x)}$
1874 Oct. 27				— 715.56		— 668.16	— 727.36
» Dec. 6		— 7.78	+ 69.18	— 646.38	+ 643.83	— 24.33	— 78.14
1875 Jan. 15	+ 4.49	— 3.29	+ 61.40	— 584.98	— 2.55	— 26.88	— 75.62
» Febr. 24			+ 58.11	— 526.87	— 587.53	— 614.41	— 658.42

	f'''	f''	f'	f	f	$''f$	$S(y)$
1874 Oct. 27				+ 271.82		+ 267.45	+ 290.98
» Dec. 6		— 11.26	— 13.18	+ 258.64	— 257.64	[+ 9.84]	+ 31.53
	+ 3.45		— 24.44		+ 1.03]		
1875 Jan. 15		— 7.81		+ 234.20		+ 10.78	+ 30.40
			— 32.25		+ 235.23		
» Febr. 24				+ 201.95		+ 246.10	+ 263.59

						S_z
1874 Oct. 27				— 9.39		— 9.99 — 10.82
» Dec. 6		+ 0.93	— 0.25	— 9.64	+ 9.61	[— 0.38] — 1.19
	— 0.40		+ 0.68		[— 0.03]	
1875 Jan. 18		+ 0.53		— 8.96		— 0.41 — 1.16
			+ 1.21		— 8.99	
» Febr. 24				— 7.75		— 9.40 — 10.08

Nun beginnt die definitive Rechnung nach den Formeln VI, da die aus III resultirenden Werthe der directen Glieder für diese ersten vier Störungsintervalle keiner Verbesserung bedürfen, indem die Störungen rücksichtlich dieser Glieder nahezu unmerklich sind. Die für diese vier Orte in den Tafeln A, B, X, Y, Z, enthaltenen Grössen werden daher ohne weitere Erklärung verständlich sein und ich will demnach nur noch zeigen, wie die Rechnung für den nächsten Ort, Sept. 17 durchgeführt werden muss.

Vorerst geben die Tafeln X, Y, Z für Sept. 17 die doppelt summirten Werthe:

$$- 2027.57 \quad + 796.88 \quad - 28.99 :$$

nach dem Gange der Funktion wird man für die am 17. Septbr. zu erwartenden Funktionswerthe:

$$- 798, \quad + 271 \quad - 8$$

in Einheiten der siebenten Stelle annehmen können und nun mittelst der Formeln:

$$\xi = {}''f_{(x)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(x)}(a + iw)$$

$$\eta = {}''f_{(y)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(y)}(a + iw)$$

$$\zeta = {}''f_{(z)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(z)}(a + iw)$$

hinreichend genäherte Werthe für ξ , η , ζ erhalten, welche, auf die fünfte Decimale abgekürzt, an der entsprechenden Stelle in dem Bogen A eingetragen werden. Dieselben werden sein:

$$- 21, \quad + 8, \quad 0,$$

und man sieht sofort, dass selbst ganz rohe Annahmen über die Funktionswerthe $f_{(x)}(a + iw)$, $f_{(y)}(a + iw)$, $f_{(z)}(a + iw)$ mehr als genügend genaue Annäherungen für ξ , η , ζ ergeben werden.

Man gelangt jetzt nach Durchführung der Rechnung mittelst der Formeln III) (pag. 108) zu den definitiven Werthen für $\Sigma(X, \Sigma(Y), \Sigma(Z)$, und bildet nun nach V (pag. 109) die Werthe $S_{(x)}, S_{(y)}, S_{(z)}$, die bis auf die geringfügigen, anfänglich ganz unerheblichen, durch $-\frac{1}{240} f''(a+ir)$ veranlassten. Correctionen direct berechnet werden können; man kann diese Correctionen in der Nähe der Osculations-epoche ganz übergehen, später wird man dieselben, da durch die Berechnung mehrerer Werthe der Gang der Funktion nahezu bekannt ist, leicht mit hinreichender Genauigkeit berücksichtigen können; doch werden diese Correctionsglieder, die übrigens Encke ganz übergeht, selten sehr merkbar werden.

Die so resultirenden Werthe für $S_{(x)}, S_{(y)}, S_{(z)}$ sind in den Summationsbögen rechts angesetzt und ohne weitere Aenderung der definitiven Rechnung zu Grunde gelegt. Dabei mag bemerkt werden, dass diese Werthe $S_{(x)}, S_{(y)}, S_{(z)}$ gegen die sich aus den thatsächlichen Differenzwerthen ergebenden etwas verschieden sein können, da bei deren Bildung eben die zweiten Differenzen bloss näherungsweise berücksichtigt werden konnten.

Die Rechnung gestaltet sich nunmehr ganz direct, und nur für die Ermittlung von f wird man einen vorläufigen Werth von q annehmen müssen. Der Gang der äusserst regelmässig verlaufenden Funktion $\log N$ (Logarithmus des Nenners) wird in Verbindung mit dem völlig bekannten Werthe des Zählers für q stets ohne Mühe eine hinreichende Annäherung ergeben, um f gleichsam als directen Werth betrachten zu können. Zu bemerken ist, dass der Werth von q hierbei in Einheiten der siebenten Stelle gegeben erscheint nach den oben gemachten Voraussetzungen.

In dieser Weise wird die Rechnung fortgeführt, und ich habe in dem unten folgenden Rechnungsbeispiele alle Zahlen der Rechnung innerhalb des ganzen Verlaufes derselben aufgenommen, so dass für den Anfänger ein hinreichend ausführliches Normalbeispiel vorliegt, nach welchem er sich in die Methode einführen kann, bevor an eine selbstständige Rechnung geschritten wird. Bei der Bezeichnung der Horizontalcolumnne ist im Allgemeinen kein Unterschied gemacht, ob die Funktion selbst oder deren Logarithmus Aufnahme gefunden hat, da hieraus wohl kein Irrthum zu befürchten ist. Zu den angesetzten Additions- und Subtractionslogarithmen wäre zu bemerken, dass dieselben den zweckmässigen sechsstelligen Tafeln von Bremiker entlehnt sind.

Die Vermeidung zufälliger Rechnungsfehler erscheint durch den regelmässigen Gang der Differenzen bestätigt, und diese Prüfung muss stets sorgsam durchgeführt werden. Hierbei werden grosse Fehler im Allgemeinen sofort erkannt und corrigirt werden können, kleine Fehler werden sich meist erst bemerkbar machen, wenn die Rechnung um einige Intervalle weiter fortgeschritten ist. Tritt die Nothwendigkeit einer Verbesserung ein, so wird im Allgemeinen, so lange der Fehler nicht allzu erheblich ist, die Neurechnung der directen Glieder selten nöthig werden; die indirecten Glieder dagegen müssen von der Fehlerstelle an wohl stets neu gerechnet werden, wenn man das Resultat nicht allzusehr schädigen will. Dieser Umstand macht die

Störungsrechnung für den Anfänger, der noch nicht die hinreichende Sicherheit im numerischen Rechnen erlangt hat, sehr beschwerlich. ein Uebelstand, der bei der Störungsrechnung nach der Variation der Constanten fast ganz vermieden wird. Es ist deshalb, falls nicht andere Umstände massgebend sind, für eine erste Störungsrechnung die Methode der Variation der Constanten zu wählen und die Berechnung der Störungen der Coordinaten erst dann vorzunehmen, wenn man eine hinreichende Sicherheit in den logarithmischen Rechnungsoperationen erlangt hat.

Ich stelle hier zum Schlusse die zur Rechnung nöthigen Formeln übersichtlich ohne weitere Erklärung zusammen, da eine solche Zusammenstellung bei der Rechnung als Gedächtnisshilfe nicht ganz ohne Werth ist:

I.

$$\sin q = e$$

$$\frac{\sin q}{\sin i''} = e''$$

$$\begin{array}{lll} \sin a \sin A = \cos \Omega & \sin b \sin B = \sin \Omega & C = 0 \\ \sin a \cos A = -\sin \Omega \cos i & \sin b \cos B = \cos \Omega \cos i & \sin c = \sin i \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \omega = \pi - \Omega, & A' = A + \omega \\ & B' = B + \omega \\ & C' = C + \omega = \omega. \end{array}$$

II.

$$M = M_0 + \mu t$$

$$M = E - e'' \sin E$$

$$r_0 \sin v_0 = a \cos q \sin E$$

$$r_0 \cos v_0 = a (\cos E - e)$$

$$x_0 = r_0 \sin a \sin (A' + v_0)$$

$$y_0 = r_0 \sin b \sin (B' + v_0)$$

$$z_0 = r_0 \sin c \sin (C' + v_0)$$

$$h = \frac{(wk)^2}{r_0^3}, \log (wk)^2 = 9.675283 \text{ (Intervall 40 Tage)}$$

$$R^2 = r_0^2 (1 + \frac{1}{12} h)$$

$$h' = \frac{h}{1 + \frac{1}{12} h}$$

III.

$$\xi = {}^n f_{(x)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(x)}(a + iw) - \dots$$

$$\eta = {}^n f_{(y)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(y)}(a + iw) - \dots$$

$$\zeta = {}^n f_{(z)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(z)}(a + iw) - \dots$$

$$x = x_0 + \xi$$

$$y = y_0 + \eta$$

$$z = z_0 + \zeta$$

$$\varrho \cos \vartheta \cos \theta = x_1 - x$$

$$\varrho \cos \vartheta \sin \theta = y_1 - y$$

$$\varrho \sin \vartheta = z_1 - z$$

$$X_1 = (wk)^2 m_1 \frac{x_1 - x}{\varrho^3}$$

$$Y_1 = (wk)^2 m_1 \frac{y_1 - y}{\varrho^3}$$

$$Z_1 = (wk)^2 m_1 \frac{z_1 - z}{\varrho^3}$$

Ueber die Werthe von $(wk)^2 m_1$ siehe Tafel XII.

$$(X) = X_1 + X_2$$

$$(Y) = Y_1 + Y_2$$

$$(Z) = Z_1 + Z_2$$

X_2, Y_2, Z_2 aus den Ephemeriden oder den Publicationen der astronomischen Gesellschaft zu entnehmen, oder zu berechnen nach:

$$X_2 = (wk)^2 m_1 \frac{x_1}{r_1^3}$$

$$Y_2 = (wk)^2 m_1 \frac{y_1}{r_1^3}$$

$$Z_2 = (wk)^2 m_1 \frac{z_1}{r_1^3}$$

$$\Sigma (X) = (X)_{\mathfrak{A}} + (X)_{\mathfrak{B}} + \dots$$

$$\Sigma (Y) = (Y)_{\mathfrak{A}} + (Y)_{\mathfrak{B}} + \dots$$

$$\Sigma (Z) = (Z)_{\mathfrak{A}} + (Z)_{\mathfrak{B}} + \dots$$

IV.

$$S_{(x)} = {}^n f_{(x)}(a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma (X) - \frac{1}{240} f_{(x)}^{(n)}(a + iw)$$

$$S_{(y)} = {}^n f_{(y)}(a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma (Y) - \frac{1}{240} f_{(y)}^{(n)}(a + iw)$$

$$S_{(z)} = {}^n f_{(z)}(a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma (Z) - \frac{1}{240} f_{(z)}^{(n)}(a + iw)$$

$$a = \frac{x_0 + \frac{1}{2} \xi}{R^2}$$

$$b = \frac{y_0 + \frac{1}{2} \eta}{R^2}$$

$$c = \frac{z_0 + \frac{1}{2} \zeta}{R^2}$$

$$q = \frac{a S_{(x)} + b S_{(y)} + c S_{(z)}}{1 - \frac{h}{12} f(a x + b y + c z)}$$

f mit dem Argumente q aus Tafel XI.

V.

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = f_{(x)}(a + iw) = \Sigma(X) + h' \{fqx - S_{(x)}\}$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = f_{(y)}(a + iw) = \Sigma(Y) + h' \{fqy - S_{(y)}\}$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = f_{(z)}(a + iw) = \Sigma(Z) + h' \{fqz - S_{(z)}\} .$$

Für die Anfangsconstanten der Integration hat man:

$${}^I f(a - \frac{1}{2}w) = -\frac{1}{24} f^I(a - \frac{1}{2}w) + \frac{17}{5760} f^{III}(a - \frac{1}{2}w) - \dots$$

$${}^{II} f(a - w) = +\frac{1}{24} f^I(a) - \frac{17}{5760} \left\{ 2 f^{II}(a) + f^{II}(a - w) \right\} + .$$

Ausführliches Beispiel
zu
Encke's Methode
der
Störungsrechnung.

Datum	1875		1874						
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	June 29	Mai 20	April 10
M	191°21'42"7	184°14'26"8	177°7'11"0	169°59'55"1	162°52'39"3	155°45'23"4	148°38'7"6	141°30'51"7	134°23'35"9
E	189°41'21"8	183°36'51"7	177°32'43"1	171°28'19"9	165°23'5"7	159°16'23"9	153°7'37"5	146°56'8"7	140°41'19"3
$\sin E$	9.226102	8.799621	8.631742	9.171110	9.401959	9.548894	9.655151	9.736858	9.801770
$\cos E$	9.999376	9.999136	9.999601	9.995172	9.985715	9.970941	9.950370	9.923275	9.888581
Subtract.	0.070386	0.069586	0.069518	0.070175	0.071599	0.073877	0.077160	0.081688	0.087837
$\cos E - e$	0.064146	0.068722	0.069119	0.065347	0.057314	0.044818	0.027530	0.004963	9.976418
$r_0 \sin r_0$	9.9714949	9.9288468	9.120589	9.659957	9.890806	0.037741	0.143998	0.225705	0.290617
\sin	9.9995605	9.999391	9.999719	9.996599	9.989938	9.979535	9.965060	9.946025	9.921733
\cos	0.0559625	0.0564201	0.0564598	0.0560826	0.0552793	0.0540297	0.0523009	0.0500442	0.0471897
$r_0 \cos r_0$	188°8'16"5	183°2'1"6	177°56'23"0	172°50'19"8	167°42'50"8	162°32'54"0	157°19'25"9	152°1'21"0	146°37'30"4
r_0	—5°6'14"9	—5°3'38"6	—5°6'3"2	—5°7'29"0	—5°9'56"8	—5°13'28"1	—5°18'4"9	—5°23'50"6	—5°30'47"1
$\angle r_0$	0.564020	0.564810	0.564879	0.564227	0.562855	0.560762	0.557949	0.554417	0.550164
$A + r_0$	316°36'47"1	311°30'32"2	306°24'53"6	301°18'50"4	296°11'21"4	291°1'24"6	285°47'56"5	280°29'51"6	275°6'1"0
$B + r_0$	226°34'22"0	221°28'7"1	216°22'28"5	211°16'25"3	206°8'56"3	200°58'59"5	195°45'31"4	190°27'26"5	185°3'35"9
$C + r_0$	100°52'54"7	95°46'39"8	90°41'1"2	85°34'58"0	80°27'29"0	75°17'32"2	70°4'4"1	64°45'59"2	59°22'8"6
$r_0 \sin a$	0.563808	0.564598	0.564667	0.564015	0.562643	0.560550	0.557737	0.554205	0.549952
$\sin (A + r_0)$	9.836907	9.874396	9.905655	9.931626	9.952958	9.970083	9.983275	9.992669	9.998277
r_0	—2.51602	—2.74786	—2.95340	—3.13070	—3.27794	—3.39338	—3.47546	—3.52268	—3.53369
$\frac{1}{2} \xi$	0	0	0	0	10	21	36	57	83
ξ	—2.51602	—2.74786	—2.95340	—3.13070	—3.27815	—3.39381	—3.47619	—3.52328	—3.53536
x	—5.02505	—5.13125	—5.22245	—5.29843	—5.35895	—5.40385	—5.43298	—5.44621	—5.44350
$x_1 (\mathcal{A})$	+7.2581	+7.1169	+6.9723	+6.8243	+6.6730	+6.5185	+6.3608	+6.2000	+6.0363
$r_0 \sin b$	0.563910	0.564700	0.564769	0.564117	0.562745	0.560652	0.557839	0.554307	0.550054
$\sin (B + r_0)$	9.861085	9.882096	9.9773100	9.9715274	9.9644149	9.9533997	9.9433908	9.9328886	9.9245461
y_0	—2.66069	—2.43050	—2.17705	—1.90279	—1.61025	—1.30211	—0.98118	—0.65042	—0.31298
$\frac{1}{2} \eta$	0	0	0	0	+	+	+	+	+
η	—2.66069	—2.43050	—2.17705	—1.90279	—1.61017	—1.30195	—0.98091	—0.65002	—0.31244
$y_1 (\mathcal{A})$	—2.11212	—1.84491	—1.57230	—1.29512	—1.01418	—0.73026	—0.44421	—0.15686	+0.13095
$y_1 (\mathcal{B})$	—6.7091	—6.8709	—7.0294	—7.1844	—7.3359	—7.4839	—7.6282	—7.7688	—7.9056
$r_0 \sin c$	9.149521	9.150311	9.150380	9.149728	9.148356	9.146263	9.143450	9.139918	9.135665
$\sin (C + r_0)$	9.992120	9.997788	9.99969	9.998708	9.993950	9.985531	9.973172	9.956446	9.934734
z_0	+0.13856	+0.14064	+0.14137	+0.14075	+0.13877	+0.13545	+0.13080	+0.12484	+0.11760
$\frac{1}{2} \zeta$	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ζ	+0.13856	+0.14064	+0.14137	+0.14075	+0.13877	+0.13544	+0.13079	+0.12483	+0.11759
$z_1 (\mathcal{A})$	+0.12116	+0.12260	+0.12367	+0.12439	+0.12475	+0.12474	+0.12437	+0.12362	+0.12253
$z_1 (\mathcal{B})$	—0.1794	—0.1710	—0.1626	—0.1541	—0.1455	—0.1368	—0.1280	—0.1192	—0.1104
r_0^2	1.692060	1.694430	1.694637	1.692681	1.688565	1.682286	1.673847	1.663251	1.650492
$1 + \frac{1}{2} h$	7.983223	7.980853	7.980646	7.982602	7.986718	7.992997	8.001436	8.012032	8.024791
r_0^2	0.000348	0.000346	0.000346	0.000348	0.000351	0.000356	0.000363	0.000371	0.000383
R^2	1.128040	1.129620	1.129758	1.128454	1.125150	1.121524	1.115898	1.108834	1.100328
r_0^2	1.128388	1.129966	1.130104	1.128802	1.126061	1.121880	1.116261	1.109205	1.100711
$x_0 + \frac{1}{2} \xi$	0.400715	0.438994	0.470322	0.495641	0.515614	0.530660	0.541057	0.546943	0.548330
$y_0 + \frac{1}{2} \eta$	0.424995	0.385696	0.337869	0.279391	0.206883	0.114621	9.991691	9.813060	9.495142
$z_0 + \frac{1}{2} \zeta$	9.141641	9.148099	9.150349	9.148436	9.142296	9.131779	9.116608	9.096319	9.070370
x	0.400715	0.438994	0.470322	0.495641	0.515628	0.530687	0.541104	0.547014	0.548434
y	0.424995	0.385696	0.337869	0.279391	0.206872	0.114594	9.991629	9.812927	9.494767
z	9.141641	9.148099	9.150349	9.148436	9.142296	9.131747	9.116575	9.096319	9.070370
u	9.9272327	9.9309028	9.9340218	9.9366839	9.9389553	9.9408780	9.9424796	9.9437738	9.9447619
b	9.9296607	9.9255730	9.9207765	9.9150589	9.9089822	9.9027441	8.8975430	8.8903855	8.8834431
c	8.013253	8.018133	8.020245	8.019634	8.016235	8.009899	8.000347	7.987114	7.969659
$S_{(x)}$	2.8181503	1.878637	1.898273	2.861749	3.320639	3.628891	3.864148	4.056488	4.220722
$S_{(y)}$	2.420929	1.482874	1.498724	2.463863	2.914798	3.210457	3.428299	3.598452	3.736151
$S_{(z)}$	1.003461	0.064458	0.075547	1.034227	1.474362	1.975236	1.943148	2.072140	2.146283
$f q x$	2.730009	1.913665	2.027662	3.081001	3.610527	3.977436	4.260418	4.490133	4.681651
$f q y$	2.754289	1.860367	1.895209	2.864751	3.301771	3.561343	3.710943	3.756046	3.627984
$f q z$	1.470935	0.622770	0.707689	1.733796	2.237195	2.578496	2.835889	3.039438	3.203587
Subtract.	9.354128	8.924262	9.561007	9.817387	9.977422	0.090340	0.173305	9.800422	9.815580
	0.165580	0.152069	0.146544	0.145287	0.149290	0.160100	0.182307	0.229342	0.250306
	0.127371	0.106019	0.091058	0.079081	0.069168	0.060408	0.052314	0.044469	0.036485
$f q x - S_{(x)}$	2.084137	0.802899	1.453880	2.679136	3.298061	3.719231	4.037453	4.290555	4.497231
$f q y - S_{(y)}$	2.919869	2.012436	2.041753	3.010038	3.451061	3.721443	3.893250	3.985388	3.986457
$f q z - S_{(z)}$	1.598306	0.728789	0.798747	1.812877	2.306363	2.638904	2.888203	3.083907	3.240072
h'	7.982875	7.980507	7.980300	7.982254	7.986367	7.992641	8.001073	8.011661	8.024408

1874		1873						
März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25	April 15
127°16'20"0	120°9'4"2	113°1'48"4	105°54'32"5	98°47'16"7	91°40'0"8	84°32'45"0	77°25'29"1	70°18'13"3
134°22'29"8	127°59'0"1	121°30'9"1	114°55'14"7	108°13'34"9	101°24'27"1	94°27'10"1	87°21'3"9	80°5'32"8
9.854171	9.896631	9.930754	9.957555	9.977645	9.991334	9.998687	9.999535	9.993474
9.844696	9.789180	9.718116	9.624658	9.495227	9.296196	8.890074	8.664791	9.235677
0.096211	0.107822	0.124474	0.149711	0.191591	0.273434	0.160665	9.865413	7.902250
9.940907	9.897002	9.842590	9.774369	9.686818	9.569630	9.399796	9.104544	7.137927
0.343018	0.385478	0.419601	0.446402	0.466492	0.480181	0.487534	0.488382	0.482321
9.891189	9.852958	9.886447	9.920292	9.948072	9.970055	9.986247	9.996399	0.000000
0.436386	0.392481	0.338069	0.269848	0.182297	0.065109	9.895275	9.600023	7.633406
141°6'43"3	135°27'42"9	129°39'11"2	123°39'42"8	117°27'49"4	111°1'59"4	104°20'36"7	97°22'5"5	90°4'52"1
-5°39'0"4	-5°48'31"7	-5°59'28"4	-6°11'53"1	-6°25'50"0	-6°41'22"7	-6°58'31"2	-7°17'13"4	-7°37'22"8
0.545197	0.539523	0.533154	0.526110	0.518420	0.510126	0.501287	0.491983	0.482321
269°35'13"9	263°56'13"5	258°7'41"8	252°8'13"4	245°56'20"0	239°30'30"0	232°49'7"3	225°50'36"1	218°33'22"7
179°32'48"8	173°53'48"4	168°5'16"7	162°5'48"3	155°53'54"9	149°28'4"9	142°46'42"2	135°48'11"0	128°30'57"6
53°51'21"5	48°12'21"1	42°23'49"4	36°24'21"0	30°12'27"6	23°46'37"6	17°5'14"9	10°6'43"7	2°49'30"3
9.999989	9.997564	9.990610	9.978542	9.960524	9.935358	9.901310	9.855784	9.794685
-3.50731	-3.44251	-3.33851	-3.19477	-3.01115	-2.78787	-2.52572	-2.22615	-1.89145
— 116	— 157	— 206	— 265	— 334	— 415	— 509	— 615	— 733
— 232	— 313	— 411	— 529	— 668	— 831	— 1018	— 1231	— 1466
-3.50963	-3.44564	-3.34262	-3.20006	-3.01783	-2.79618	-2.53590	-2.23846	-1.90611
-5.42482	-5.39020	-5.33967	-5.27339	-5.19148	-5.09412	-4.98153	-4.85396	-4.71173
+5.8697	+5.7003	+5.5281	+5.3533	+5.1760	+4.9962	+4.8140	+4.6296	+4.4430
0.545087	0.539413	0.533044	0.526000	0.518310	0.510016	0.501177	0.491873	0.482211
7.898077	9.026615	9.314730	9.487719	9.611036	9.705880	9.781683	9.843312	9.893448
+0.02774	+0.36815	+0.70433	+1.03209	+1.34693	+1.64398	+1.91805	+2.16364	+2.37497
+ 35	+ 44	+ 55	+ 66	+ 81	+ 100	+ 127	+ 164	+ 218
+ 71	+ 89	+ 109	+ 132	+ 161	+ 200	+ 253	+ 328	+ 435
+0.02845	+0.36904	+0.70542	+1.03341	+1.34854	+1.64598	+1.92058	+2.16692	+2.37932
+0.41836	+0.70454	+0.98865	+1.26983	+1.54726	+1.82008	+2.08746	+2.34857	+2.60259
-8.0387	-8.1679	-8.2932	-8.4145	-8.5317	-8.6448	-8.7539	-8.8588	-8.9596
9.130698	9.125024	9.118655	9.111611	9.103921	9.095627	9.086788	9.077484	9.067822
9.907162	9.872473	9.828831	9.773421	9.701685	9.605498	9.468098	9.244464	8.992733
+0.10911	+0.09943	+0.08861	+0.07674	+0.06392	+0.05025	+0.03588	+0.02099	+0.00576
— 1	— 1	— 0	— 0	— 1	— 2	— 4	— 6	— 8
— 1	— 1	— 1	+ 1	+ 2	+ 5	+ 8	+ 12	+ 16
+0.10910	+0.09942	+0.08860	+0.07675	+0.06394	+0.05030	+0.03596	+0.02111	+0.00592
+0.12107	+0.11926	+0.11709	+0.11458	+0.11173	+0.10855	+0.10504	+0.10122	+0.09709
-0.1015	-0.0925	-0.0835	-0.0745	-0.0654	-0.0562	-0.0471	-0.0379	-0.0288
1.635591	1.618569	1.599462	1.578330	1.555260	1.530378	1.503861	1.475949	1.446963
0.039692	0.056714	0.075821	0.096953	0.120023	0.144490	0.171422	0.199334	0.228320
0.000396	0.000413	0.000431	0.000452	0.000477	0.000505	0.000537	0.000572	0.000612
1.090394	1.079046	1.066308	1.052220	1.036840	1.020252	1.002574	0.983966	0.964642
1.090790	1.079459	1.066739	1.052672	1.037317	1.020757	1.003111	0.984538	0.965254
0.545117	0.537073	0.523820	0.504800	0.479214	0.445918	0.403260	0.348753	0.278474
8.448552	9.566544	9.848115	0.013995	0.129606	0.216161	0.283147	0.335514	0.376056
9.037825	8.997474	8.947483	8.885022	8.805705	8.701309	8.555336	8.323252	7.766413
0.545262	0.537270	0.524087	0.505158	0.479694	0.446565	0.404132	0.349949	0.280148
8.454082	9.567073	9.848448	0.014272	0.129864	0.216425	0.283432	0.335843	0.376453
9.037825	8.997474	8.947434	8.885078	8.805773	8.701568	8.555820	8.324488	7.772322
9.454327	9.457614	9.457081	9.452128	9.441897	9.425161	9.400149	9.364215	9.313220
7.357762	8.487085	8.781376	8.961323	9.092289	9.195404	9.280036	9.350976	9.410802
7.947035	7.918015	7.880744	7.832350	7.768388	7.680552	7.552225	7.338714	6.801159
4.365191	4.494992	4.613409	4.722629	4.824110	4.918803	5.000725	5.089655	5.165912
3.850733	3.949089	4.037138	4.120871	4.206096	4.297992	4.400016	4.513015	4.635212
2.158543	2.075218	1.972235	1.816771	1.638184	1.426039	1.180294	0.905893	0.519353
4.843350	4.980209	5.095282	5.190395	5.266498	5.323777	5.361585	5.378176	5.370128
2.752170	4.010012	4.419643	4.699509	4.916668	5.093637	5.240885	5.364070	5.466433
3.335913	3.440413	3.518629	3.570315	3.592577	3.578780	3.513273	3.352715	2.862302
9.824426	9.827900	9.826265	9.819154	9.805441	9.782778	0.100775	9.974610	9.778408
9.963931	9.177815	0.100553	0.866965	9.905942	9.924235	9.932345	9.934038	9.930697
0.027949	0.018340	0.006887	9.992272	9.971923	9.939866	9.877782	9.971104	0.058850
4.667776	4.808109	4.921547	5.009549	5.071939	5.106555	5.108026	5.064265	4.944320
3.814664	3.126904	4.187191	4.566474	4.822610	5.017872	5.173230	5.298108	5.397130
3.363862	3.458753	3.525516	3.562587	3.564500	3.518646	3.391055	3.369997	2.921152
8.039296	8.056301	8.075390	8.096501	8.119546	8.144400	8.170885	8.198762	8.227708

Datum	1873		1872						
	Marz 6	Jan. 25	Dec. 16	Nov. 6	Sept. 27	Aug. 18	Juli 9	Mai 30	
M	63°10'57"5	56°3'41"7	48°56'25"8	41°49'10"0	34°41'54"1	27°34'38"3	20°27'22"5	13°20' 6"6	
N	72°40' 6"2	65°4'22"3	57°18'10"1	49°21'35"1	41°15' 1"0	32°59'15"2	24°35'29"3	16° 5'20"4	
$\sin E$	9.979820	9.957533	9.925073	9.880135	9.819115	9.735964	9.619245	9.442684	
$\cos E$	9.474073	9.624762	9.732554	9.813786	9.876123	9.923653	9.958707	9.982648	
Subtract.	9.855931	0.155378	9.831836	9.865528	9.886108	9.899402	9.908092	9.913548	
$\cos E - e$	9.095062	9.394509	9.564390	9.679314	9.762231	9.823055	9.866799	9.896196	
$r_0 \sin v_0$	0.468667	0.446380	0.413920	0.368982	0.307962	0.224811	0.108092	9.931531	
$\sin \lambda$	9.996227	9.983866	9.961164	9.925559	9.873160	9.801329	9.941333	9.975363	
$\cos f$									
$r_0 \sin v_0$	9.590541	9.889988	0.059869	0.174793	0.257710	0.318534	0.362278	0.391675	
v_0	82°27'29"3	74°28'44"1	66°7'43"9	57°24'10"2	48°18'26"9	38°51'54"2	29° 6'55"8	19°7'2"8	
$f r_0$	-7°58'45"2	-8°21' 0"2	-8°43'33"7	-9° 5'43"3	-9°26'32"7	-9°44'58"4	-9°59'53"0	-10°10'14"3	
r_0	0.472440	0.462514	0.452756	0.443423	0.434802	0.427205	0.420945	0.416312	
$A + v_0$	210°55'59"9	202°57'14"7	194°36'14"5	185°52'40"8	176°46'57"5	167°20'24"8	157°35'26"4	147°35'33"4	
$B + v_0$	120°53'34"8	112°54'49"6	104°33'49"4	95°50'15"7	86°44'32"4	77°17'59"7	67°33' 1"3	57°33' 8"3	
$C + v_0$	355°12' 7"5	347°13'22"3	338°52'22"1	330° 8'48"4	321° 3' 5"1	311°36'32"4	301°51'34"0	291°51'41"0	
$r_0 \sin a$	0.472228	0.462302	0.452544	0.443211	0.434590	0.426993	0.420733	0.416100	
$\sin(A + v_0)$	9.9710997	9.9591057	9.9401637	9.910345	8.749149	9.340764	9.581176	9.729113	
x_0	-1.52484	-1.13073	-0.71479	-0.28416	+0.15266	+0.58581	+1.00440	+1.39705	
$\frac{1}{2} \xi$	-861	-993	-1125	-1247	-1349	-1417	-1438	-1400	
ξ	-1721	-1986	-2250	-2495	-2698	-2833	-2875	-2801	
x	-1.54205	-1.15059	-0.73729	-0.30911	+0.12568	+0.55748	+0.97565	+1.36904	
$x_1 (A)$	-4.55521	-4.38478	-4.20088	-4.00398	-3.79460	-3.57336	-3.34086	-3.09774	
$x_1 (B)$	+4.2543	+4.0636	+3.8710	+3.6766	+3.4804	+3.2827	+3.0834	+2.8827	
$r_0 \sin b$	0.472330	0.462404	0.452646	0.443313	0.434692	0.427095	0.420835	0.416202	
$\sin(B + v_0)$	9.933552	9.964303	9.985816	9.997742	9.999297	9.989243	9.965773	9.926282	
y_0	+2.54614	+2.67121	+2.74449	+2.76093	+2.71637	+2.60818	+2.43561	+2.20031	
$\frac{1}{2} \zeta$	+292	+393	+526	+695	+903	+1147	+1421	+1713	
ζ	+584	+786	+1052	+1391	+1806	+2294	+2842	+3427	
y	+2.55198	+2.67907	+2.75501	+2.77484	+2.73443	+2.63112	+2.46403	+2.23458	
$y_1 (A)$	+2.84871	+3.08612	+3.31406	+3.53176	+3.73845	+3.93344	+4.11603	+4.28555	
$y_1 (B)$	-9.0561	-9.1483	-9.2362	-9.3197	-9.3988	-9.4735	-9.5438	-9.6096	
$r_0 \sin c$	9.057941	9.048015	9.038257	9.028924	9.020303	9.012706	9.006446	9.001813	
$\sin(C + v_0)$	8.922422	9.9344706	9.9556832	9.9697037	9.9798390	9.9873724	9.9929085	9.9967589	
z_0	-0.00956	-0.02470	-0.03936	-0.05321	-0.06587	-0.07699	-0.08620	-0.09320	
$\frac{1}{2} \zeta$	+10	+12	+13	+13	+12	+10	+5	-2	
ζ	+20	+23	+26	+26	+24	+19	+10	-3	
z	-0.00936	-0.02447	-0.03910	-0.05295	-0.06563	-0.07680	-0.08610	-0.09323	
$z_1 (A)$	+0.09266	+0.08796	+0.08299	+0.07775	+0.07227	+0.06657	+0.06066	+0.05455	
$z_1 (B)$	-0.0196	-0.0104	-0.0012	+0.0080	+0.0172	+0.0264	+0.0356	+0.0447	
r_0^3	1.417320	1.387542	1.358268	1.330269	1.304406	1.281615	1.262835	1.248936	
h	8.257963	8.287741	8.317015	8.345014	8.370877	8.393668	8.412448	8.426347	
$1 + \frac{1}{2} h$	0.000655	0.000702	0.000751	0.000801	0.000849	0.000895	0.000935	0.000964	
R^2	0.944880	0.925028	0.905512	0.886646	0.869604	0.854410	0.841890	0.832624	
R^2	0.945535	0.925730	0.906263	0.887647	0.870453	0.855305	0.842825	0.833588	
$x_0 + \frac{1}{2} \xi$	0.185669	0.057156	9.860961	9.9472215	9.143546	9.757123	9.995644	0.140838	
$y_0 + \frac{1}{2} \zeta$	0.406380	0.427346	0.439293	0.442147	0.435430	0.418243	0.389134	0.345852	
$z_0 + \frac{1}{2} \zeta$	7.995891	8.9390582	8.9593618	8.9724931	8.9817896	8.9885870	8.9935255	8.9969509	
x	0.188098	0.060920	9.867638	9.9490113	9.099266	9.746229	9.989294	0.136416	
y	0.406878	0.427984	0.440124	0.443238	0.436867	0.420140	0.391646	0.349196	
z	7.991276	8.9388634	8.9592177	8.9723866	8.9817102	8.9885361	8.9935003	8.9969556	
u	9.240134	9.131426	8.954698	8.784568	8.273093	8.901818	9.152819	9.307250	
h	9.460845	9.501616	9.533030	9.554500	9.564977	9.562938	9.546309	9.512264	
e	7.903056	7.9464852	7.9687355	7.9837284	7.9947443	8.0030565	8.0092430	8.0135921	
$S_{(x)}$	5.235361	5.298155	5.352555	5.397634	5.431897	5.453508	5.460182	5.448977	
$S_{(y)}$	4.763068	4.802466	4.819589	4.814137	4.785262	4.735964	4.653148	4.531834	
$S_{(z)}$	3.292750	3.364937	3.409299	3.421233	3.389846	3.287945	3.017680	2.428572	
$f q x$	5.9330972	5.9247700	5.9088901	5.8735661	5.8177735	5.7004650	5.5232503	5.346206	
$f q y$	5.549750	5.614764	5.661387	5.688786	5.695336	5.678561	5.634855	5.558986	
$f q z$	3.914150	3.957544	3.9813440	3.9969414	4.0075551	4.0143782	4.0179345	4.0179345	
Subtract.	9.390037	9.090591	9.921726	9.893326	0.035150	0.132179	0.201943	0.252678	
	9.922505	9.908732	9.887538	9.855225	9.804128	0.035068	9.715603	8.757300	
	0.220847	0.208420	0.144366	0.102234	0.081417	0.056664	0.029018	9.992222	
$f q x - S_{(x)}$	4.625668	4.338291	5.010627	5.290960	5.467047	5.585687	5.662125	5.701655	
$f q y - S_{(y)}$	5.472257	5.523496	5.548925	5.544011	5.499464	5.394711	5.168751	4.292134	
$f q z - S_{(z)}$	3.9513597	3.9783834	3.9957806	4.0077648	4.0156988	4.0200446	4.0207230	4.0171568	
h'	8.257308	8.287039	8.316264	8.344213	8.370028	8.392773	8.411513	8.425383	

1872			1871					
April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24	Juli 15	Juni 5
6°12'50"8	359° 5'34"9	351°58'19"1	344°51' 3"2	337°43'47"4	330°36'31"6	323°29'15"7	316°21'59"9	309°14'44"0
7°30'48"4	358°54' 9"8	350°17'50"0	341°44'12"5	333°15'30"8	324°53'38"9	316°40' 7"7	308°36' 2"9	300°42' 4"9
9.116471	8 _n 282167	9 _n 226696	9 _n 496075	9 _n 653179	9 _n 759735	9 _n 836460	9 _n 892935	9 _n 934418
9.996255	9.999920	9.993743	9.977553	9.950874	9.912801	9.861773	9.795109	9.708050
9.916488	9.917262	9.915954	9.912417	9.906225	9.896528	9.881711	9.858546	9.819749
9.912743	9.917182	9.909697	9.889970	9.857099	9.809329	9.743484	9.653655	9.527799
9.605318	8 _n 771014	9 _n 715543	9 _n 984922	0 _n 142026	0 _n 248582	0 _n 325307	0 _n 381782	0 _n 423265
9.994683	9.999887	9.991116	9.968126	9.930183	9.875783	9 _n 888394	9 _n 936037	9 _n 968053
0.408222	0.412661	0.405176	0.385449	0.352578	0.304808	0.238963	0.149134	0.023278
8°56'48"5	358°31'33"4	348°27' 3"0	338°18'57"7	328°22'29"1	318°41'54"9	309°20'29"5	300°20'20"0	291°42'30"3
-10°15'15"1	-10°14'30"4	-10°8' 5"3	-9°56'28"6	-9°40'34"2	-9°21'25"4	-9°0' 9"5	-8°37'49"7	-7°42'30"3
0.413539	0.412774	0.414060	0.417323	0.422395	0.429025	0.436913	0.445745	0.455212
137°25'19"1	127°10' 4"0	116°55'33"6	106°47'28"3	96°50'59"7	87°10'25"5	77°49' 0"1	68°48'50"6	60°11' 0"9
47°22'54"0	37° 7'38"9	26°53' 8"5	16°45' 3"2	6°48'34"6	357° 8' 0"4	347°46'35"0	338°46'25"5	330° 8'53"8
281°41'26"7	271°26'11"6	261°11'41"2	251° 3'35"9	241° 7' 7"3	231°26'33"1	222° 5' -7"7	213° 4'58"2	204°27' 8"5
0.413327	0.412562	0.413848	0.417111	0.422183	0.428813	0.436701	0.445533	0.455000
9.830328	9.901388	9.950166	9.981077	9.996889	9.999472	9.990107	9.969608	9.938331
+ 1.75249	+ 2.06039	+ 2.31214	+ 2.50143	+ 2.62465	+ 2.68092	+ 2.67182	+ 2.60101	+ 2.47361
- 1297	- 1126	- 892	- 608	- 290	- 41	- 365	- 667	- 933
- 2594	- 2251	- 1783	- 1215	- 580	- 81	- 731	- 1334	- 1866
+ 1.72655	+ 2.03788	+ 2.29431	+ 2.48928	+ 2.61885	+ 2.68173	+ 2.67913	+ 2.61435	+ 2.49227
- 2.84470	- 2.58247	- 2.31183	- 2.03360	- 1.74866	- 1.45788	- 1.16219	- 0.86255	- 0.55997
+ 2.6806	+ 2.4773	+ 2.2729	+ 2.0674	+ 1.8609	+ 1.6535	+ 1.4454	+ 1.2367	+ 1.0274
0.413429	0.412664	0.413950	0.417213	0.422285	0.428915	0.436803	0.445635	0.455102
9.866808	9.780742	9.655342	9.459710	9.073977	8 _n 699056	9 _n 325778	9 _n 558770	9 _n 697084
+ 1.90650	+ 1.56101	+ 1.17298	+ 0.75322	+ 0.31352	- 0.13427	- 0.57887	- 1.01020	- 1.41966
+ 2008	+ 2285	+ 2525	+ 2712	+ 2832	+ 2881	+ 2860	+ 2775	+ 2637
+ 4016	+ 4570	+ 5051	+ 5424	+ 5664	+ 5762	+ 5719	+ 5550	+ 5275
+ 1.94666	+ 1.60671	+ 1.22349	+ 0.80746	+ 0.37016	- 0.07665	- 0.52168	- 0.95470	- 1.36691
+ 4.44134	+ 4.58280	+ 4.70931	+ 4.82038	+ 4.91550	+ 4.99427	+ 5.05621	+ 5.10100	+ 5.12834
- 9.6709	- 9.7277	- 9.7799	- 9.8276	- 9.8707	- 9.9092	- 9.9428	- 9.9724	- 9.9970
8.999040	8.998275	8.999561	9.002824	9.007896	9.014526	9.022414	9.031246	9.040713
9 _n 990896	9 _n 999864	9 _n 994851	9 _n 975826	9 _n 942317	9 _n 893197	9 _n 826229	9 _n 737074	9 _n 616934
- 0.09771	- 0.09957	- 0.09872	- 0.09520	- 0.08917	- 0.08086	- 0.07057	- 0.05866	- 0.04546
- 10	- 20	- 31	- 43	- 53	- 63	- 71	- 77	- 81
- 20	- 40	- 62	- 85	- 107	- 126	- 143	- 155	- 163
+ 0.09791	+ 0.09997	+ 0.09934	+ 0.09605	+ 0.09024	+ 0.08212	+ 0.07200	+ 0.06021	+ 0.04709
+ 0.04827	+ 0.04184	+ 0.03527	+ 0.02858	+ 0.02180	+ 0.01494	+ 0.00804	+ 0.00111	+ 0.00583
+ 0.0593	+ 0.0630	+ 0.0621	+ 0.0811	+ 0.0901	+ 0.0991	+ 0.1080	+ 0.1169	+ 0.1257
1.240617	1.238322	1.242180	1.251969	1.267185	1.287075	1.310739	1.337235	1.365636
8.434666	8.436961	8.433103	8.423314	8.408098	8.388208	8.364544	8.338048	8.309647
0.000983	0.000989	0.000980	0.000958	0.000925	0.000884	0.000837	0.000788	0.000738
0.827078	0.825548	0.828120	0.834646	0.844790	0.858050	0.873826	0.891490	0.910424
0.828061	0.826537	0.829100	0.835604	0.845715	0.858934	0.874663	0.892278	0.911162
0.240429	0.311569	0.362336	0.397131	0.418591	0.428350	0.427400	0.416255	0.394966
0.284787	0.199717	0.078540	9.892284	9.533823	9 _n 023088	9 _n 740576	9 _n 992310	0 _n 144042
8 _n 990383	8 _n 999000	8 _n 995767	8 _n 980594	8 _n 952792	8 _n 911104	8 _n 852968	8 _n 774006	8 _n 665299
0.237179	0.309179	0.360652	0.396074	0.418110	0.428415	0.427994	0.417363	0.396595
0.289290	0.205938	0.087600	9.907121	9.568389	8 _n 884512	9 _n 717404	9 _n 979867	0 _n 135740
8 _n 990827	8 _n 999870	8 _n 997124	8 _n 982497	8 _n 955399	8 _n 914449	8 _n 857332	8 _n 779669	8 _n 672929
9.412368	9.485032	9.533236	9.561527	9.572876	9.569416	9.552737	9.523977	9.483804
9.456726	9.373180	9.249440	9.056680	8.688108	8 _n 164154	8 _n 865913	9 _n 100032	9 _n 232880
8 _n 162322	8 _n 172463	8 _n 166667	8 _n 144990	8 _n 107077	8 _n 052170	8 _n 088178	8 _n 081728	8 _n 0754137
5 _n 115822	5 _n 354409	5 _n 253315	5 _n 086573	4 _n 765344	3.915083	4.865958	5.127108	5.272525
5.604071	5.660524	5.704149	5.735169	5.754053	5.761453	5.758145	5.744966	5.722749
3 _n 294312	3 _n 601212	3 _n 793923	3 _n 930098	4 _n 029867	4 _n 103030	4 _n 155357	4 _n 190704	4 _n 211876
5.390824	5.376466	5.296728	5.118878	4.677577	4 _n 627376	5 _n 105765	5 _n 299027	5 _n 399865
5.442935	5.273225	5.023676	4.629925	3.827856	3.083473	4.395175	4.861531	5.139010
4 _n 144472	4 _n 067157	3 _n 933200	3 _n 705301	3 _n 214866	3.113410	3.535103	3.661333	3.676199
0.288711	0.290142	0.279866	0.285178	0.259360	0.076989	0.197472	0.223522	0.242011
9.652465	0.158208	9.898340	9.964505	9.994821	9.999087	9.980752	9.939126	9.868779
9.933891	9.818210	9.577593	9.831242	9.927828	0.042346	0.093332	0.112454	0.111023
5.704533	5.666608	5.576594	5.404056	5.024704	4 _n 704365	5 _n 303237	5 _n 522549	5 _n 641876
5 _n 095400	5 _n 431433	5 _n 602489	5 _n 699674	5 _n 748874	5 _n 760540	5 _n 738897	5 _n 684092	5 _n 591528
4 _n 078363	3 _n 885367	3 _n 715116	3.536543	3.957695	4.145376	4.248689	4.303158	4.322899
8.433683	8.435972	8.432123	8.422356	8.407173	8.387324	8.363707	8.337260	8.308909

B₁

Datum	1875		1874						
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Juni 29	Mai 20	April 10
$x_1 - x$	0 _n 399506	0 _n 377195	0 _n 355844	0 _n 336005	0 _n 318230	0 _n 303205	0 _n 291544	0 _n 283842	0 _n 280610
$y_1 - y$	0 _n 739232	0 _n 767594	0 _n 781576	0 _n 783668	0 _n 775239	0 _n 757161	0 _n 729732	0 _n 692988	0 _n 646786
$z_1 - z$	8 _n 240549	8 _n 256237	8 _n 247973	8 _n 213783	8 _n 146748	8 _n 029384	7 _n 807535	7 _n 082785	7 _n 693727
$(rk)^2 m_1 : q^3$	2.426007	2.485167	2.542698	2.597643	2.648892	2.694663	2.733084	2.761926	2.778882
$\cos \theta$	0 _n 989861	0 _n 987272	0 _n 985098	0 _n 983573	0 _n 982879	0 _n 983108	0 _n 984250	0 _n 986160	0 _n 988581
$\sin \theta$	0.409645	0.389923	0.370746	0.352432	0.335351	0.320097	0.307294	0.297682	0.292029
$q \cos \theta$	0.999990	0.999988	0.999988	0.999989	0.999991	0.999994	0.999998	0.000000	0.999999
q	0.409655	0.389935	0.370758	0.352443	0.335360	0.320103	0.307296	0.297682	0.292030
q^3	1.228965	1.169805	1.112274	1.057329	1.006080	0.960309	0.921888	0.893046	0.876090
X_1	+ 669.13	+ 728.39	+ 791.67	+ 858.32	+ 927.09	+ 995.10	+ 1058.35	+ 1111.14	+ 1146.81
X_2	+ 140.09	+ 142.89	+ 145.33	+ 147.41	+ 149.12	+ 150.46	+ 151.43	+ 152.02	+ 152.23
(X)	+ 529.04	+ 585.50	+ 646.34	+ 710.91	+ 777.97	+ 844.64	+ 906.92	+ 959.12	+ 994.58
Y_1	+ 146.30	+ 178.96	+ 211.00	+ 240.61	+ 265.54	+ 283.02	+ 290.28	+ 285.05	+ 266.48
Y_2	+ 58.87	+ 51.37	+ 43.76	+ 36.04	+ 28.23	+ 20.33	+ 12.38	+ 4.38	+ 3.66
(Y)	+ 205.17	+ 230.33	+ 254.76	+ 276.65	+ 293.77	+ 303.35	+ 302.66	+ 289.43	+ 262.82
Z_1	+ 4.64	+ 5.51	+ 6.18	+ 6.48	+ 6.25	+ 5.30	+ 3.47	+ 0.70	+ 2.97
Z_2	+ 3.38	+ 3.41	+ 3.44	+ 3.46	+ 3.47	+ 3.47	+ 3.47	+ 3.45	+ 3.42
(Z)	+ 8.02	+ 8.92	+ 9.62	+ 9.94	+ 9.72	+ 8.77	+ 6.94	+ 4.15	+ 0.45
$x_1 - x$	0.99008	0.99409	0.99676	0.99804	0.99787	0.99618	0.99286	0.98783	0.98099
$y_1 - y$	0 _n 60728	0 _n 64742	0 _n 68596	0 _n 72277	0 _n 75783	0 _n 79113	0 _n 82265	0 _n 85241	0 _n 88042
$z_1 - z$	9 _n 50243	9 _n 49360	9 _n 48287	9 _n 46953	9 _n 45378	9 _n 43489	9 _n 41296	9 _n 38739	9 _n 35793
$(rk)^2 m_1 : q^3$	0.05704	0.02803	0.00064	0.97490	0.95072	0.92810	0.90710	0.88769	0.86981
$\cos \theta$	0.99562	0.99594	0.995346	0.994615	0.993790	0.992866	0.991832	0.990681	0.989400
$\sin \theta$	1.02446	1.03415	1.04330	1.05189	1.05997	1.06752	1.07454	1.08102	1.08699
$q \cos \theta$	0.99980	0.99982	0.99984	0.99985	0.99987	0.99988	0.99990	0.99991	0.99992
q	1.02466	1.03433	1.04346	1.05204	1.06010	1.06764	1.07464	1.08111	1.08707
q^3	3.07398	3.10299	3.13038	3.15612	3.18030	3.20292	3.22392	3.24333	3.26121
X_1	+ 11.15	+ 10.52	+ 9.94	+ 9.40	+ 8.88	+ 8.40	+ 7.94	+ 7.51	+ 7.09
X_2	+ 10.16	+ 9.94	+ 9.71	+ 9.48	+ 9.25	+ 9.01	+ 8.77	+ 8.53	+ 8.29
(X)	+ 0.99	+ 0.58	+ 0.23	+ 0.08	+ 0.37	+ 0.61	+ 0.83	+ 1.02	+ 1.20
Y_1	+ 4.62	+ 4.74	+ 4.86	+ 4.99	+ 5.11	+ 5.24	+ 5.37	+ 5.50	+ 5.63
Y_2	+ 9.39	+ 9.59	+ 9.79	+ 9.98	+ 10.17	+ 10.35	+ 10.53	+ 10.70	+ 10.86
(Y)	+ 4.77	+ 4.85	+ 4.93	+ 4.99	+ 5.06	+ 5.11	+ 5.16	+ 5.20	+ 5.23
Z_1	+ 0.36	+ 0.33	+ 0.30	+ 0.28	+ 0.25	+ 0.23	+ 0.21	+ 0.19	+ 0.17
Z_2	+ 0.25	+ 0.24	+ 0.22	+ 0.21	+ 0.20	+ 0.19	+ 0.17	+ 0.16	+ 0.15
(Z)	+ 0.11	+ 0.09	+ 0.08	+ 0.07	+ 0.05	+ 0.04	+ 0.04	+ 0.03	+ 0.02
$a S_{(x)}$	+ 123.26	+ 15.41	+ 17.10	+ 169.27	+ 513.09	+ 1090.62	+ 1945.11	+ 3120.51	+ 4659.52
$b S_{(y)}$	+ 52.18	+ 5.48	+ 5.09	+ 41.16	+ 99.00	+ 159.66	+ 201.25	+ 200.59	+ 135.08
$c S_{(z)}$	+ 0.10	+ 0.01	+ 0.01	+ 0.11	+ 0.31	+ 0.58	+ 0.88	+ 1.15	+ 1.31
Zähler	+ 70.98	+ 9.92	+ 12.00	+ 128.00	+ 413.78	+ 930.38	+ 1742.98	+ 2918.77	+ 4523.13
ax	+0.471023	+0.559786	+0.646457	+0.728585	+0.803861	+0.869896	+0.924485	+0.965500	+0.990952
by	+0.526747	+0.437951	+0.351264	+0.269141	+0.193952	+0.128037	+0.073631	+0.032869	+0.007748
cz	+0.001429	+0.001466	+0.001481	+0.001473	+0.001441	+0.001386	+0.001309	+0.001212	+0.001097
W	+0.999199	+0.999203	+0.999202	+0.999199	+0.999254	+0.999319	+0.999425	+0.999581	+0.999797
$\log W$	9.999652	9.999653	9.999653	9.999652	9.999676	9.999704	9.999750	9.999818	9.999912
$\frac{1}{2} h$	6.904042	6.901672	6.901465	6.903421	6.907537	6.913816	6.922255	6.932851	6.945610
f	0.477113	0.477120	0.477120	0.477107	0.477076	0.477020	0.476932	0.476804	0.476629
$1 - N$	7.380807	7.384455	7.388238	7.380181	7.384289	7.390540	7.398937	7.409473	7.422151
N	9.998955	9.998961	9.998961	9.998957	9.998946	9.998931	9.998910	9.998884	9.998851
$\log \text{Zähler}$	1.851136	0.996512	1.079181	2.107210	2.616769	2.968660	3.241292	3.465199	3.655439
q	1.852181	0.997551	1.080220	2.108253	2.617823	2.969729	3.242382	3.466315	3.656588
$f q$	2.329294	1.474671	1.557340	2.585360	3.094899	3.446749	3.719314	3.943119	4.133217
ΔX	+ 528.05	+ 584.92	+ 646.11	+ 710.99	+ 778.34	+ 845.25	+ 907.75	+ 960.14	+ 995.78
ΔX	+ 1.17	+ 0.06	+ 0.27	+ 4.59	+ 19.25	+ 51.51	+ 109.28	+ 200.55	+ 332.38
ΔX	+ 209.94	+ 235.18	+ 259.69	+ 281.64	+ 298.83	+ 308.46	+ 307.82	+ 294.63	+ 268.05
ΔX	+ 7.99	+ 0.98	+ 1.05	+ 0.92	+ 0.78	+ 51.77	+ 78.40	+ 99.32	+ 102.53
ΔZ	+ 8.13	+ 9.01	+ 9.70	+ 10.01	+ 9.77	+ 8.81	+ 6.98	+ 4.18	+ 0.47
ΔZ	+ 0.38	+ 0.05	+ 0.06	+ 0.62	+ 1.96	+ 4.28	+ 7.75	+ 12.46	+ 18.39

B₂

1874		1873						
März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25	April 15
0 _n 282212	0 _n 288821	0 _n 300389	0 _n 316668	0 _n 337190	0 _n 361339	0 _n 388390	0 _n 417555	0 _n 448029
9.590964	9.525693	9.452139	9.373684	9.298242	9.240799	9.222404	9.259235	9.348830
8.078094	8.297542	8.454692	8.577836	8.679337	8.765296	8.839352	8.903687	8.959852
2.781855	2.769336	2.740701	2.696337	2.637669	2.566809	2.486259	2.398563	2.306088
9 _n 991181	9 _n 993631	9 _n 995675	9 _n 997194	9 _n 998193	9 _n 998757	9 _n 998991	9 _n 998955	9 _n 998629
0.291031	0.295190	0.304714	0.319474	0.338997	0.362582	0.389399	0.418600	0.449400
9.999992	9.999978	9.999957	9.999929	9.999896	9.999861	9.999828	9.999797	9.999772
0.291039	0.295212	0.304757	0.319545	0.339101	0.362721	0.389571	0.418803	0.449628
0.873117	0.885636	0.914271	0.958635	1.017303	1.088163	1.168713	1.256409	1.348884
-1158.96	-1143.29	-1099.23	-1030.40	-943.75	-847.52	-749.29	-654.81	-567.70
+152.06	+151.50	+150.55	+149.20	+147.45	+145.31	+142.76	+139.80	+136.44
-1006.90	-991.79	-948.68	-881.20	-796.30	-702.21	-606.53	-515.01	-431.26
+235.95	+197.26	+155.90	+117.50	+86.28	+64.21	+51.13	+45.48	+45.18
-11.72	-19.80	-27.87	-35.92	-43.95	-51.92	-59.82	-67.64	-75.37
+224.23	+177.46	+128.03	+81.58	+42.33	+12.29	-8.69	-22.16	-30.19
+7.24	+11.66	+15.68	+18.80	+20.75	+21.48	+21.16	+20.06	+18.45
-3.39	-3.35	-3.30	-3.24	-3.18	-3.10	-3.01	-2.91	-2.81
+3.85	+8.31	+12.38	+15.56	+17.57	+18.38	+18.15	+17.15	+15.64
0.97217	0.96123	0.94796	0.93213	0.91349	0.89167	0.86628	0.83684	0.80271
9 _n 90672	9 _n 93130	9 _n 95417	9 _n 97534	9 _n 99477	1 _n 01245	1 _n 02834	1 _n 04241	1 _n 05457
9 _n 32346	9 _n 28307	9 _n 23578	9 _n 17955	9 _n 11160	9 _n 02735	8 _n 91960	8 _n 77085	8 _n 54033
9.85358	9.83897	9.82610	9.81497	9.80567	9.79841	9.79316	9.79019	9.78965
9.87975	9.86393	9 _n 85257	9 _n 87002	9 _n 88634	9 _n 90159	9 _n 91573	9 _n 92880	9 _n 94078
1.09242	1.09730	1.10160	1.10532	1.10843	1.11086	1.11261	1.11361	1.11379
9.99994	9.99995	9.99996	9.99997	9.99998	9.99999	9.99999	0.00000	0.00000
1.09248	1.09735	1.10164	1.10535	1.10845	1.11087	1.11262	1.11361	1.11379
3.27744	3.29205	3.30492	3.31605	3.32535	3.33261	3.33786	3.34083	3.34137
+6.69	+6.31	+5.94	+5.59	+5.24	+4.90	+4.56	+4.24	+3.91
-8.05	-7.80	-7.55	-7.30	-7.04	-6.79	-6.53	-6.27	-6.01
-1.36	-1.49	-1.61	-1.71	-1.80	-1.89	-1.97	-2.03	-2.10
-5.76	-5.89	-6.03	-6.17	-6.32	-6.47	-6.63	-6.80	-6.99
+11.02	+11.17	+11.32	+11.47	+11.61	+11.74	+11.87	+11.99	+12.11
+5.26	+5.28	+5.29	+5.30	+5.29	+5.27	+5.24	+5.19	+5.12
-0.15	-0.13	-0.12	-0.10	-0.08	-0.07	-0.05	-0.04	-0.02
+0.14	+0.12	+0.11	+0.10	+0.09	+0.07	+0.06	+0.05	+0.04
-0.01	-0.01	-0.01	0.00	+0.01	0.00	+0.01	+0.01	+0.02
+6599.60	+8966.15	+11762.24	+14954.00	+18450.46	+22078.21	+25550.53	+28436.07	+30139.21
+16.16	+273.01	+658.44	+1208.35	+1987.85	+3114.56	+4786.88	+7311.23	+11117.67
-1.28	-0.98	-0.40	+0.45	+1.44	+2.35	+2.85	+2.54	+0.99
+6614.48	+9238.18	+12420.28	+16162.80	+20439.75	+25195.12	+30340.26	+35749.84	+41257.87
+0.999054	+0.988290	+0.957564	+0.906330	+0.834816	+0.744262	+0.637207	+0.517802	+0.392074
+0.000065	+0.011328	+0.042641	+0.094535	+0.166783	+0.258124	+0.365989	+0.486204	+0.612710
+0.000966	+0.000823	+0.000673	+0.000522	+0.000375	+0.000241	+0.000128	+0.000046	+0.000004
+1.000085	+1.000441	+1.000878	+1.001387	+1.001974	+1.002627	+1.003324	+1.004052	+1.004788
0.000037	0.000192	0.000381	0.000602	0.000857	0.001140	0.001441	0.001756	0.002075
6.960511	6.977533	6.996640	7.017772	7.040842	7.065724	7.092241	7.120153	7.149139
0.476402	0.476116	0.475771	0.475364	0.474899	0.474383	0.473826	0.473240	0.472643
7.436950	7.453841	7.472792	7.493738	7.516598	7.541247	7.567508	7.595149	7.623857
9.998810	9.998763	9.998708	9.998644	9.998571	9.998487	9.998393	9.998287	9.998170
3.820496	3.965586	4.094132	4.208517	4.310476	4.401316	4.482020	4.553274	4.615507
3.821686	3.966823	4.095424	4.209873	4.311905	4.402829	4.483627	4.554987	4.617337
4.298088	4.442939	4.571195	4.685237	4.786804	4.877212	4.957453	5.028227	5.089980
-1008.26	-993.28	-950.29	-882.91	-798.10	-704.10	-608.50	-517.04	-433.36
-509.42	-731.83	-992.97	-1276.59	-1554.12	-1782.20	-1900.69	-1832.43	-1486.03
+229.49	+182.74	+133.32	+86.88	+47.62	+17.56	-3.45	-16.97	-25.07
-71.44	+15.25	+183.05	+460.23	+875.30	+1453.02	+2208.59	+3139.57	+4215.39
+3.84	+8.30	+12.37	+15.56	+17.58	+18.38	+18.16	+17.16	+15.66
+25.30	+32.74	+39.89	+45.61	+48.31	+46.03	+36.47	+17.21	-14.09

B_3

Datum	1873		1872						
	März 6	Jan. 25	Dec. 16	Nov. 6	Sept. 27	Aug. 18	Juli 9	Mai 30	
$x_1 - x$	0.479022	0.509766	0.539527	0.567599	0.593317	0.616038	0.635133	0.649995	
$y_1 - y$	9.472361	9.609648	9.747451	9.879050	0.001743	0.114718	0.218010	0.311959	
$z_1 - z$	9.008685	9.050882	9.086680	9.116276	9.139564	9.156458	9.166608	9.169616	
$(rk)^2 m_1 : q^3$	2.210880	2.114661	2.018853	1.924614	1.832880	1.744413	1.659870	1.579776	
$\cos \theta$	9.997905	9.996587	9.994416	9.991073	9.986205	9.979423	9.970318	9.958459	
$q \cos \theta$	0.481117	0.513179	0.545111	0.576526	0.607112	0.636615	0.664815	0.691536	
$\cos \theta$	9.999753	9.999742	9.999738	9.999740	9.999748	9.999762	9.999781	9.999804	
q	0.481364	0.513437	0.545373	0.576786	0.607364	0.636853	0.665034	0.691732	
q^3	1.444092	1.540311	1.636119	1.730358	1.822092	1.910559	1.995102	2.075196	
X_1	-489.67	-421.14	-361.73	-310.61	-266.81	-229.32	-197.24	-169.73	
X_2	+132.65	+128.46	+123.85	+118.83	+113.40	+107.55	+101.30	+94.65	
(X)	-357.02	-292.68	-237.88	-191.78	-153.41	-121.77	-95.94	-75.08	
Y_1	+48.22	+53.00	+58.39	+63.63	+68.33	+72.30	+75.49	+77.94	
Y_2	-82.96	-90.41	-97.71	-104.82	-111.72	-118.39	-124.81	-130.93	
(Y)	-34.74	-37.41	-39.32	-41.19	-43.39	-46.09	-49.32	-52.99	
Z_1	+16.58	+14.64	+12.75	+10.99	+9.39	+7.96	+6.71	+5.62	
Z_2	-2.70	-2.58	-2.45	-2.31	-2.16	-2.00	-1.84	-1.67	
(Z)	+13.88	+12.06	+10.30	+8.68	+7.23	+5.96	+4.87	+3.95	
$x_1 - x$	0.76315	0.71719	0.66354	0.60051	0.52565	0.43540	0.32383	0.18004	
$y_1 - y$	1.06476	1.07289	1.07887	1.08259	1.08398	1.08295	1.07946	1.07351	
$z_1 - z$	8.00860	8.14922	8.57864	8.78497	8.91803	9.01368	9.08529	9.13956	
$(rk)^2 m_1 : q^3$	9.79172	9.79664	9.80468	9.81605	9.83105	9.84992	9.87281	9.89984	
$\cos \theta$	9.995166	9.996143	9.997009	9.997761	9.998400	9.998926	9.999341	9.999648	
$q \cos \theta$	1.11310	1.11146	1.10878	1.10498	1.09998	1.09369	1.08605	1.07703	
$\cos \theta$	0.00000	0.00000	0.00000	9.99999	9.99999	9.99999	9.99998	9.99997	
q	1.11310	1.11146	1.10878	1.10499	1.09999	1.09370	1.08607	1.07706	
q^3	3.33930	3.33438	3.32634	3.31497	3.29997	3.28110	3.25821	3.23118	
X_1	+3.59	+3.26	+2.94	+2.61	+2.27	+1.93	+1.57	+1.20	
X_2	-5.75	-5.48	-5.21	-4.94	-4.67	-4.40	-4.13	-3.86	
(X)	-2.16	-2.22	-2.27	-2.33	-2.40	-2.47	-2.56	-2.66	
Y_1	-7.19	-7.40	-7.65	-7.92	-8.22	-8.57	-8.96	-9.40	
Y_2	+12.22	+12.33	+12.43	+12.53	+12.62	+12.71	+12.79	+12.86	
(Y)	+5.03	+4.93	+4.78	+4.61	+4.40	+4.14	+3.83	+3.46	
Z_1	-0.01	+0.01	+0.02	+0.04	+0.06	+0.07	+0.09	+0.11	
Z_2	+0.02	+0.01	0.00	-0.01	-0.02	-0.04	-0.05	-0.06	
(Z)	+0.01	+0.02	+0.02	+0.03	+0.04	+0.03	+0.04	+0.05	
$a S_{(x)}$	+29906.47	+26889.37	+20288.64	+9598.47	-5069.79	-22663.45	-41020.50	-57046.25	
$b S_{(y)}$	+16746.08	+24778.89	+35695.92	+49638.33	+66105.71	+83672.20	+99875.00	+111454.62	
$c S_{(z)}$	-2.10	-6.76	-12.49	-18.13	-21.74	-20.82	-12.89	-3.67	
Zähler	+46650.45	+51661.50	+55972.07	+59218.67	+61014.18	+60987.93	+58841.61	+54412.04	
ax	+0.268060	+0.155721	+0.066426	+0.011876	+0.002357	+0.044468	+0.138712	+0.277757	
by	+0.737433	+0.850354	+0.940056	+0.994805	+1.004256	+0.961785	+0.866872	+0.726875	
cz	+0.000010	+0.000071	+0.000190	+0.000364	+0.000581	+0.000824	+0.001065	+0.001275	
H	+1.00503	+1.006146	+1.006672	+1.007045	+1.007194	+1.007077	+1.006649	+1.005907	
$\log H$	0.002383	0.002661	0.002888	0.003049	0.003113	0.003063	0.002878	0.002558	
$r_{\frac{1}{2}} h$	7.178782	7.208560	7.237834	7.265833	7.291696	7.314487	7.333267	7.347166	
f	0.472059	0.471516	0.471050	0.470698	0.470502	0.470503	0.470732	0.471209	
$1-N$	7.653224	7.682737	7.711772	7.739580	7.765311	7.788053	7.806877	7.820933	
N	9.998041	9.997903	9.997758	9.997609	9.997463	9.997326	9.997207	9.997114	
$\log \text{Zähler}$	4.668856	4.713167	4.747971	4.772459	4.785430	4.785244	4.769684	4.735695	
q	4.670815	4.715264	4.750213	4.774850	4.787967	4.787918	4.772477	4.738581	
$f q$	5.142874	5.186780	5.221263	5.24548	5.258469	5.258421	5.243209	5.209790	
$\Sigma(X)$	-359.18	-294.90	-240.15	-194.11	-155.81	-124.24	-98.50	-77.74	
$\Delta \Sigma(X)$	-763.79	+422.02	+2122.71	+4316.91	+6871.87	+9516.12	+11847.81	+13397.94	
$\Sigma(Y)$	-29.71	-32.48	-34.54	-36.58	-38.99	-41.95	-45.49	-49.53	
$\Delta \Sigma(Y)$	+5364.94	+6464.50	+7331.43	+7730.80	+7404.43	+6130.33	+3804.21	+521.82	
$\Sigma(Z)$	+13.89	+12.08	+10.32	+8.68	+7.23	+5.99	+4.91	+4.00	
$\Delta \Sigma(Z)$	-59.01	-117.73	-187.96	-264.16	-336.52	-391.94	-415.66	-395.32	

1872			1871					
April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24	Juli 15	Juni 5
0.660035	0.664675	0.663337	0.655415	0.640234	0.616959	0.584480	0.541192	0.484619
0.397015	0.473646	0.542305	0.603460	0.657567	0.705087	0.746470	0.782164	0.812596
9.164888	9.151707	9.129077	9.095623	9.049373	8.987040	8.903307	8.787602	8.615529
1.504530	1.434426	1.369635	1.310187	1.255998	1.206894	1.162608	1.122822	1.087182
9.943392	9.924637	9.901676	9.873912	9.857978	9.889109	9.915712	9.938131	9.956673
0.716643	0.740038	0.761661	0.781503	0.799589	0.815978	0.830758	0.844033	0.855923
9.999829	9.999856	9.999882	9.999908	9.999931	9.999952	9.999970	9.999983	9.999993
0.716814	0.740182	0.761779	0.781595	0.799658	0.816026	0.830788	0.844050	0.855930
2.150442	2.220546	2.285337	2.344785	2.398974	2.448078	2.492364	2.532150	2.567790
—146.07	—125.63	—107.89	—92.39	—78.75	—66.66	—55.86	—46.13	—37.31
+87.59	+80.15	+72.34	+64.16	+55.63	+46.77	+37.60	+28.15	+18.43
—58.48	—45.48	—35.55	—28.23	—23.12	—19.89	—18.26	—17.98	—18.88
+79.72	+80.92	+81.65	+81.97	+81.95	+81.65	+81.11	+80.35	+79.39
—136.75	—142.24	—147.36	—152.08	—156.39	—160.23	—163.60	—166.45	—168.77
—57.03	—61.32	—65.71	—70.11	—74.44	—78.58	—82.49	—86.10	—89.38
+4.67	+3.86	+3.15	+2.55	+2.02	+1.56	+1.16	+0.81	+0.50
—1.49	—1.30	—1.10	—0.90	—0.69	—0.48	—0.26	—0.04	+0.19
+3.18	+2.56	+2.05	+1.65	+1.33	+1.08	+0.90	+0.77	+0.69
9.97959	9.64286	8.933041	9.62521	9.87961	0.01208	0.09121	0.13912	0.16581
1.06512	1.05440	1.04153	1.02674	1.01034	0.99267	0.97410	0.95509	0.93601
9.19645	9.21219	9.23401	9.24822	9.25600	9.25816	9.25527	9.24822	9.23754
9.93116	9.96671	0.00628	0.04960	0.09622	0.14572	0.19741	0.25048	0.30424
9.99854	9.99967	0.00000	9.99966	9.99881	9.99764	9.99631	9.99499	9.99383
1.06658	1.05473	1.04153	1.02708	1.01153	0.99503	0.97779	0.96010	0.94218
9.99996	9.99996	9.99995	9.99994	9.99993	9.99993	9.99992	9.99992	9.99992
1.06662	1.05477	1.04158	1.02714	1.01160	0.99510	0.97787	0.96018	0.94226
3.19986	3.16431	3.12474	3.08142	3.03480	2.98530	2.93361	2.88054	2.82678
+0.81	+0.41	—0.02	—0.47	—0.95	—1.44	—1.94	—2.45	—2.95
—3.59	—3.31	—3.04	—2.76	—2.48	—2.20	—1.93	—1.65	—1.37
—2.78	—2.90	—3.06	—3.23	—3.43	—3.64	—3.87	—4.10	—4.32
—9.91	—10.50	—11.16	—11.92	—12.78	—13.75	—14.84	—16.05	—17.39
+12.33	+13.00	+13.06	+13.12	+13.17	+13.21	+13.25	+13.29	+13.32
+3.02	+2.50	+1.90	+1.20	+0.39	—0.54	—1.59	—2.76	—4.07
+0.13	+0.15	+0.17	+0.20	+0.23	+0.25	+0.28	+0.32	+0.35
—0.07	—0.08	—0.10	—0.11	—0.12	—0.13	—0.14	—0.16	—0.17
+0.06	+0.07	+0.07	+0.09	+0.11	+0.12	+0.14	+0.16	+0.18
—67327.1	—69094.1	—61171.7	—44473.4	—21788.1	+3051.4	+26223.8	+44780.1	+57059.6
+115026.3	+108069.7	+89864.6	+61922.6	+27679.7	—8425.7	—44078.3	—69983.8	—90287.8
+28.6	+59.4	+91.3	+118.9	+137.1	+143.0	+136.0	+118.1	+92.5
+47727.8	+39035.0	+28784.2	+17568.1	+6028.7	—5231.3	—15718.5	—25085.6	—33135.7
+0.446218	+0.622603	+0.783228	+0.906987	+0.979458	+0.995018	+0.956601	+0.873656	+0.759275
+0.557206	+0.379418	+0.217290	+0.092003	+0.018051	+0.001119	+0.038310	+0.120199	+0.233679
+0.001423	+0.001487	+0.001458	+0.001341	+0.001155	+0.000926	+0.000685	+0.000459	+0.000267
+1.004847	+1.003508	+1.001976	+1.000331	+0.998664	+0.997063	+0.995596	+0.994314	+0.993221
0.002100	0.001521	0.000857	0.000144	9.999420	9.998722	9.998083	9.997524	9.997045
7.355485	7.357780	7.353922	7.344133	7.328917	7.309027	7.285363	7.258867	7.230466
0.471931	0.472872	0.473984	0.475205	0.476463	0.477693	0.478840	0.479867	0.480750
7.829516	7.832173	7.828763	7.819482	7.804800	7.785442	7.762286	7.736258	7.708261
9.997057	9.997039	9.997062	9.997125	9.997220	9.997342	9.997480	9.997627	9.997776
4.678771	4.591454	4.459154	4.244724	3.780224	3.718610	4.196411	4.399424	4.520296
4.681714	4.594415	4.462092	4.247599	3.783004	3.721268	4.198931	4.401797	4.522520
5.153645	5.067287	4.936076	4.722804	4.259467	4.198961	4.167771	4.1881664	5.003370
—61.26	—48.38	—38.61	—31.46	—26.55	—23.53	—22.13	—22.08	—23.20
+13747.25	+12664.26	+10202.74	+6705.20	+2703.19	—1235.06	—4644.56	—7241.17	—8928.64
—54.01	—58.82	—63.81	—68.91	—74.05	—79.12	—84.08	—88.86	—93.45
—3381.29	—7368.93	—10829.60	—13244.33	—14323.43	—14056.06	—12664.97	—10503.93	—951.28
+3.24	+2.63	+2.12	+1.74	+1.44	+1.20	+1.04	+0.93	+0.87
—325.12	—209.57	—63.63	+90.97	+231.67	+340.96	+409.63	+436.94	+428.36

X

Datum	f^v	f^{iv}	f^{iii}	f^{ii}	f^i	$f = \frac{d^2\xi}{dt^2}$	f	${}''f$	$S_{(x)}$
1871 Juni 5					+1688.59	— 8951.84	—53293.05	+187299.36	+187294.3
Juli 15			— 96.43	+ 907.97	+2596.56	— 7263.25	—60556.30	+134006.31	+134001.0
Aug. 24		— 187.98	+ 284.41	+ 811.54	+3408.10	— 4666.69	—65222.99	+ 73450.01	+ 73444.3
Oct. 3	+ 7.13	— 180.85	— 465.26	+ 527.13	+3935.23	— 1258.59	—66481.58	+ 8227.02	+ 8224.0
Nov. 12	+ 77.53	— 103.32	+ 61.87	+ 61.87	+3997.10	+ 2676.64	—63804.94	— 58254.56	— 58256.5
Dec. 22	+ 139.97	+ 36.65	— 568.58	— 506.71	+3490.39	+ 6673.74	—57131.20	—122059.50	—122060.0
	+ 152.28	+ 188.93	— 531.93	—1038.64	+2451.75	+10164.13	—46967.07	—179190.70	—179190.6
1872 Jan. 31	+ 99.81	+ 288.74	— 343.00	—1381.64	+1070.11	+12615.88	—34351.19	—226157.77	—226156.2
März 11	— 3.68	+ 285.06	— 54.26	—1435.90	— 365.79	+13685.99	—260508.96	—260508.96	—260508.60
April 20	— 97.30	+ 187.76	+ 230.80	—1205.10	+13320.20	—20665.20	—281174.16	—281175.22	—281175.22
Mai 30	— 138.17	+ 49.59	+ 418.56	— 786.54	—1570.89	— 7345.00	—288519.16	—288523.75	—288523.75
Juli 9	— 116.79	— 67.20	+ 468.15	— 318.39	—2357.43	+ 9391.88	—284114.85	—284123.89	—284123.89
Aug. 18	— 63.29	— 130.49	+ 400.95	+ 82.56	—2675.82	+ 6716.06	+13796.19	—270318.66	—270331.87
Sept. 27	— 8.19	— 138.68	+ 270.46	+ 353.02	—2593.26	+ 20512.25	—249806.41	—249824.02	—249824.02
Nov. 6	— 27.45	— 111.23	+ 131.78	+ 484.80	—2240.24	+ 4122.80	+24635.05	—225171.36	—225193.33
Dec. 16	+ 39.00	— 72.23	+ 20.55	+ 505.35	+ 1882.56	+ 26517.61	—225193.33	—225193.33	—225193.33
1873 Jan. 25	+ 36.58	— 35.65	— 51.68	+ 453.67	—1755.44	+ 127.12	+26644.73	—198653.75	—198680.45
März 6	+ 27.00	+ 8.65	— 87.33	+ 366.34	—1250.09	— 1122.97	—172009.02	—172040.87	—172040.87
April 15	+ 16.88	— 87.75	— 95.98	— 796.42	— 430.08	— 1919.39	+25521.76	—146487.26	—146524.97
Mai 25	+ 8.10	— 87.75	+ 270.36	— 159.72	— 2349.47	+21252.90	—122884.89	—122929.13	—122929.13
Juli 4	+ 2.54	— 71.42	+ 182.61	+ 22.89	— 2509.19	+18743.71	—101631.99	—101683.50	—101683.50
Aug. 13	— 1.44	— 52.55	+ 111.19	+ 134.08	— 2486.30	+16257.41	— 82888.28	— 82947.42	— 82947.42
Sept. 22	— 3.92	— 35.12	+ 58.64	— 2352.22	— 2352.22	+13905.19	— 66630.87	— 66697.61	— 66697.61
Nov. 1	— 4.53	— 21.61	+ 23.52	+ 216.24	— 2159.50	+11745.69	— 52725.68	— 52799.37	— 52799.37
Dec. 11	— 3.54	— 12.63	+ 1.91	+ 218.15	— 1943.26	+ 9802.43	— 40979.99	— 41059.13	— 41059.13
1874 Jan. 20	— 2.39	— 7.19	— 10.72	+ 207.43	— 1725.11	+ 8077.32	— 31177.56	— 31260.25	— 31260.25
März 1		— 4.14	— 17.91	+ 189.52	— 1517.68	+ 6559.64	— 23100.24	— 23184.17	— 23184.17
April 10		— 1.76	— 22.05	+ 167.47	— 1328.16	+ 5231.48	— 16540.60	— 16623.49	— 16623.49
Mai 20		+ 0.42	— 23.81	+ 143.66	— 1160.69	+ 4070.79	— 11309.12	— 11389.04	— 11389.04
Juni 29		+ 2.29	— 23.39	+ 120.27	— 1017.03	+ 3053.76	— 7238.33	— 7313.89	— 7313.89
Aug. 8		+ 3.94	— 21.10	+ 99.17	— 896.76	+ 2157.00	— 4184.57	— 4254.92	— 4254.92
Sept. 17		+ 4.35	— 17.16	+ 82.01	— 797.59	+ 1359.41	— 2027.57	— 2092.87	— 2092.87
Oct. 27		+ 5.01	— 12.81	+ 69.20	— 715.58	+ 643.83	— 668.16	— 727.36	— 727.36
Dec. 6		+ 4.50	— 7.80	+ 61.40	— 646.38	— 2.55	— 24.33	— 78.14	— 78.14
1875 Jan. 15			+ 4.50	— 3.30	+ 58.10	— 584.98	— 614.41	— 658.42	— 658.42
Febr. 24						— 526.88	— 1114.41	— 1728.82	— 1728.82

Y

Datum	f^v	f^{iv}	f^{iii}	f^{ii}	f^i	$f = \frac{d^2 r}{dt^2}$	\dot{f}	${}^{ii}f$	$S_{(y)}$
1871 Juni 5					-2548.06	-8044.73	+27722.11	+528147.61	+528139.7
Juli 15				+391.80	-2156.26	-10592.79	+17129.32	+555869.72	+555860.8
Aug. 24		+24.63	+378.33	+770.13	-1386.13	-12749.05	+4380.27	+572999.04	+572987.3
Oct. 3	-106.36	-130.99	+353.70	+1123.83	-262.30	-14135.18	+9754.91	+577379.31	+577368.3
Nov. 12	-102.67	+222.71	+233.66	+1346.54	-14397.48	-24152.39	+567624.40	+567613.4	
Dec. 22	-45.15	-278.81	-10.95	+1335.59	+2419.83	-13313.24	+543472.01	+543461.7	
1872 Jan. 31	+49.53	-229.28	-289.76	+1045.83	+3465.66	-37465.63	+506006.38	+505997.3	
März 11	+136.67	-92.61	-519.04	+526.79	+3992.45	-48359.04	+457647.34	+457640.0	
April 20	+167.96	+75.35	-611.65	-84.86	+3907.59	-55786.79	+401860.55	+401856.10	
Mai 30	+125.34	+200.69	-536.30	-621.16	+3286.43	-59222.09	+342638.46	+342636.54	
Juli 9	+39.09	+239.78	-335.61	-956.77	+3286.43	-58749.80	+283888.66	+283888.35	
Aug. 18	-39.63	+200.15	-95.83	-1052.60	+2329.66	-54991.08	+228897.58	+228898.24	
Sept. 27	-82.30	+104.32	+104.32	-1277.06	+7365.44	-48902.70	+179994.88	+179995.77	
Nov. 6	-81.45	+222.17	-948.28	+328.78	+7694.22	-41537.26	+138457.62	+138457.73	
Dec. 16	-59.35	+258.57	-467.54	-397.33	+7296.89	-33843.04	+104614.58	+104613.73	
1873 Jan. 25	-28.87	+235.62	-231.92	-864.87	+6432.02	-26546.15	+78068.43	+78066.72	
März 6	-6.67	+183.80	-48.12	-1096.79	+5335.23	-20114.13	+57954.30	+57952.03	
April 15	+6.25	+125.31	+77.19	-1144.91	+4190.32	-14778.90	+43175.40	+43172.98	
Mai 25	+11.81	+73.07	+150.26	-1067.72	+3122.60	-10588.58	+32586.82	+32584.77	
Juli 4	+11.79	+32.64	+182.90	-917.46	+2205.14	-7465.98	+25120.84	+25119.77	
Aug. 13	+9.59	+4.00	+186.90	-734.56	+1470.58	-5260.84	+19860.00	+19860.59	
Sept. 22	+7.32	-15.05	+171.85	-547.66	+922.92	-3790.26	+16069.74	+16072.97	
Nov. 1	+5.80	-26.78	+145.07	-375.81	+547.11	-2867.34	+13202.40	+13209.03	
Dec. 11	+4.72	-32.71	+112.36	-230.74	+316.37	-2320.23	+10882.17	+10892.75	
1874 Jan. 20	+4.10	-33.92	+78.44	-118.38	+197.99	-2003.86	+8878.31	+8893.84	
März 1	+3.05	-31.03	+47.41	-39.94	+158.05	-1805.87	+7072.44	+7091.41	
April 10	+1.15	-25.09	+22.32	+7.47	+165.52	-1647.82	+5424.62	+5446.92	
Mai 20		-18.00	+4.32	+29.79	+195.31	-1482.30	+3942.32	+3966.91	
Juni 29		-11.16	-6.84	+34.11	+229.42	-1286.99	+2655.33	+2681.01	
Aug. '8		-5.67	+27.27	+14.76	+256.69	-1057.57	+1597.76	+1623.52	
Sept. 17		-1.88	-14.39	+0.37	+271.45	-800.88	+796.88	+821.86	
Oct. 27		+0.84	-13.55	-13.18	+271.82	-529.43	+267.45	+290.98	
Dec. 6		+2.29	-11.26	-24.44	+258.64	-257.61	+9.84	+31.53	
1875 Jan. 15		+1.16	-7.81	-32.25	+234.20	+1.03	+10.87	+30.40	
Feb. 24					+201.95	+235.23	+246.10	+263.59	
						+437.18	+683.28		

Das Beispiel zu den oben für den Uebergang auf osculirende Elemente entwickelten Formeln soll der vorstehenden Störungsrechnung für Erato entlehnt werden; die neue Osculationsepoche lege ich auf 1871 Sept. 13 (in die Mitte des Intervalles), um die Anwendung der mechanischen Quadraturen möglichst einfach zu gestalten; die Elemente, die der Störungsrechnung zu Grunde gelegt waren, sind wie oben:

(62) Erato

Epoche, Osculation 1874 Dec. 26.0 mittl. Berl. Zeit

mittl. Aeq. 1870.0

$$L_0 = 219^0 \quad 8' \quad 6''8$$

$$M_0 = 180 \quad 40 \quad 48.9$$

$$x_0 = 38 \quad 27 \quad 17.9$$

$$\varpi_0 = 125 \quad 42 \quad 39.7$$

$$i_0 = 2 \quad 12 \quad 23.9$$

$$\varphi_0 = 9 \quad 59 \quad 14.9$$

$$\mu_0 = 640''89605$$

$$\log a_0 = 0.495 \quad 4793.$$

Wählt man als Zeiteinheit das Intervall von 40 Tagen, so berechnen sich die doppelten und einfachen Integrale, weil die neue Osculationsepoche in die Mitte eines Störungsintervalles fällt, nach der Formel (vergl. pag. 35, 53):

$$\begin{aligned} \iint f(x) dx^2 &= {}^{11}f(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) - \frac{1}{24} f(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \frac{17}{1920} f''(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) - \\ &- \frac{367}{193536} f^{iv}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \frac{27859}{66355200} f^{vi}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= {}^9f(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \frac{1}{24} f'(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) - \frac{17}{5760} f'''(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + \\ &+ \frac{367}{967680} f^{v}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) - \dots \end{aligned}$$

und man findet so unter Zugrundelegung der obigen Integraltafeln für:

1871 Sept. 13.

ξ	η	ζ
${}^{11}f(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + 40838.51 + 575189.17 - 13489.32$		
$- \frac{1}{24} f(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + 123.44 + 560.09 - 15.68$		
$+ \frac{17}{1920} f''(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + 5.93 + 8.38 - 0.36$		
$- \frac{367}{193536} f^{iv}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + 0.35 + 0.15 - 0.01$		
$+ \frac{27859}{66355200} f^{vi}(a + [i + \tfrac{1}{2}]w) + 0.02 - 0.01 0.00$		

$$\begin{aligned}
 & d\xi : dt \quad d\eta : dt \quad d\zeta : dt \\
 & f(a + [i + \frac{1}{2}]w) = 65222.99 + 4380.27 - 1623.37 \\
 & + \frac{1}{24} f''(a + [i + \frac{1}{2}]w) + 142.00 - 57.76 + 2.85 \\
 & - \frac{17}{5760} f'''(a + [i + \frac{1}{2}]w) + 0.84 - 1.04 \quad 0 \\
 & + \frac{367}{967680} f^{(4)}(a + [i + \frac{1}{2}]w) \quad 0 - 0.04 \quad 0
 \end{aligned}$$

man erhält also, indem man beachtet, dass für t als Zeiteinheit das Störungsintervall (40 Tage) angenommen ist:

$$\begin{aligned}
 \xi &= + 0.0040 \, 9682 \quad , \quad \eta = + 0.0575 \, 7578 \quad , \quad \zeta = - 0.0013 \, 5054 \\
 d\xi : dt &= - 0.0065 \, 0801,5 \quad , \quad d\eta : dt = + 0.0004 \, 3214,3 \quad , \quad d\zeta : dt = + 0.0001 \, 6205,2
 \end{aligned}$$

Das erste Geschäft ist nun die Durchrechnung der Formeln I—IV (pag. 100); ich führe diese Rechnung 7stellig durch, um in den später anzuführenden Controlrechnungen die Berechnung dieser Formeln nicht wiederholen zu müssen; im Allgemeinen genügt eine 6stellige Rechnung völlig und ich werde mich für die späteren Formeln demnach auf eine solche 6stellige Rechnung beschränken.

Die Zwischenzeit zwischen der Ausgangsepoche und dem Zeitpunkte der neuen Oseulation beträgt — 1200 Tage, man erhält daher zur Bestimmung der Werthe r_0 und u_0 die folgenden Zahlen:

M_0	$327^{\circ} 2' 53'' 64$	$r_0 \sin v_0$	$0,289 \, 9304$
$\sin q_0$	$9,239 \, 1314$		$9,857 \, 0986$
$\cos q_0$	$9,993 \, 3682$	$r_0 \cos v_0$	$0,274 \, 4266$
$a_0 \cos q_0$	$0,488 \, 8475$	e_0	$313^{\circ} 58' 39'' 07$
$\sin q_0 : \sin 1''$	$4,553 \, 5565$	ω_0	$272 \, 44 \, 38,20$
E_0	$320^{\circ} 45' 45'' 99$	u_0	$226 \, 43 \, 17,27$
$\sin E_0$	$9,801 \, 0829$	$\log r_0$	$0,432 \, 8318$
$\cos E_0$	$9,889 \, 0403$		
Subtr.	$0,110 \, 0930$	(wk)	$9,837 \, 6414$
$\cos E_0 - e_0$	$9,778 \, 9473$	$\log p_0$	$0,482 \, 2157$
		$(wk) : \sqrt{p_0}$	$9,596 \, 5336$
		$(wk) : \sqrt{p_0}$	$0,078 \, 7493$

Für 1) findet sich nun:

$\cos i_0$	$9,999 \, 6778$	$\sin \varpi_0 = \sin b \sin B$	$9,909 \, 5407$
$\sin i_0$	$8,585 \, 5012$		$9,909 \, 6504$
$\cos \varpi_0 = \sin a \sin A$	$9,9766 \, 1878$	$\sin b \cos B$	$9,9765 \, 8656$
	$9,909 \, 4308$		$B \, 125^{\circ} 41' 27'' 16$
$\sin a \cos A$	$9,9909 \, 2185$	$\sin b$	$9,999 \, 8903$
A	$215^{\circ} 43' 52'' 21$		
$\sin a$	$9,999 \, 7877$		

und es findet sich nach II :

$A + u_0$,	$B + u_0$,	u_0	82° 27' 9" 48	352° 24' 44" 43	226° 43' 17" 27
$\sin(A + u_0)$,	$\sin(B + u_0)$,	$\sin u_0$	9.996 2212	9 _n 120 7150	9 _n 862 1491
$r_0 \sin a$,	$r_0 \sin b$,	$r_0 \sin i_0$	0.432 6195	0.432 7221	9.018 3330
$\log x_0$,	$\log y_0$,	$\log z_0$	0.428 8407	9 _n 553 1371	8 _n 880 4821
x_0 ,	y_0 ,	z_0	+ 2.684 3596	— 0.357 6326	— 0.075 9420

Aus der Anwendung von III und IV) folgt :

$\cos v_0$	9.841 5948		
Add.	0.096 8294		
$\gamma \sin F$	9 _n 857 0986		
	9.886 3626		
$\gamma \cos F$	9.938 4242		
F	320°20' 0"59		
$U = F + \omega$	233 4 38.70		
γ	0.052 0616		
$c = (wk) \gamma : \sqrt{p_0}$	9.648 5952		
$(A + U)$,	$(B + U)$,	U	88°48'31"00 358°46' 5"95 233° 4' 38"79
$\cos(A + U)$,	$\cos(B + U)$,	$\cos U$	8.317 8996 9.999 8996 9 _n 778 6830
$c \sin a$,	$c \sin b$,	$c \sin i_0$	9.648 3820 9.648 4855 8.234 0964
$\log(dx_0:dt)$,	$\log(dy_0:dt)$,	$\log(dz_0:dt)$	7.966 2825 9.648 3851 8 _n 012 7794
$dx_0:dt$,	$dy_0:dt$,	$dz_0:dt$	+ 0.009 2530 + 0.445 0257 — 0.010 2986

Es ist also:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi & + 2.688 4564 & \quad dx:dt = dx_0:dt + d\xi:dt & + 0.002 7450 \\ y &= y_0 + \eta & - 0.300 0568 & \quad dy:dt = dy_0:dt + d\eta:dt & + 0.445 4578 \\ z &= z_0 + \zeta & - 0.077 2925 & \quad dz:dt = dz_0:dt + d\zeta:dt & - 0.010 1365 \end{aligned}$$

Wählt man nun zum Uebergange auf die osculirenden Elemente die erste Methode (Incremente der Elemente durch Störungen, so genügt für die Folge eine 6stellige Rechnung ; man erhält darnach nach dem Systeme V) (pag. 101) :

x ,	y ,	z	0.429 503	9 _n 477 204	0.429 503
dh_i ,	$d\zeta$,	$d\zeta$	6.635 627	6.209 654	6.209 654
ξ ,	η ,	ζ	7.612 447	8.760 239	7.612 447
dy_0 ,	dz_0 ,	dz_0	9.648 385	8 _n 012 779	8 _n 012 779
X_1 ,	Y_1 ,	Z_1	7.065 130	5 _n 686 858	6.639 157
X_2 ,	Y_2 ,	Z_2	7.260 832	6 _n 773 018	5 _n 625 226
Additionslog :			0.214 110	0.034 229	9.955 763
$(X_1 + X_2)$,	$(Y_1 + Y_2)$,	$(Z_1 + Z_2)$	7.474 942	6 _n 807 247	6.594 920
y ,	z ,	z	9 _n 477 204	8 _n 888 137	8 _n 888 137
$d\xi$,	$d\eta$,	$d\xi$	7 _n 813 449	6.635 627	7 _n 813 449
η ,	ζ ,	ζ	8.760 239	7 _n 130 508	7 _n 130 508
dx_0 ,	dy_0 ,	dx_0	7.966 282	9.648 385	7.966 282

$-X_3,$	$-Y_3,$	$-Z_3$	7.290 653	5 _n 523 764	6.701 586
$-X_1,$	$-Y_1,$	$-Z_1$	6.726 521	6 _n 778 893	5 _n 096 790
Additionslog:			0.104 765	0.023 489	9.989 075
$-(X_3+X_1),$	$-(Y_3+Y_1),$	$-(Z_3+Z_1)$	7.395 418	6 _n 802 382	6.690 661
Subtractionslog:			9.303 082	8.051 727	9.392 065
$X,$	$Y,$	Z	6.698 500	4 _n 854 109	5 _n 986 985
$\log \left\{ \begin{array}{l} x d\xi, \quad y d\eta, \quad z d\zeta \\ \xi dx_0, \quad \eta dy_0, \quad \zeta dz_0 \\ x d\xi, \quad y d\eta, \quad z d\zeta \\ \xi dx_0, \quad \eta dy_0, \quad \zeta dz_0 \end{array} \right.$			8 _n 242 952	6 _n 112 831	5 _n 097 791
			5.578 729	8.408 624	5.143 287
			— 0.017 496 52	— 0.000 129 67	— 0.000 012 53
			+ 0.000 037 91	+ 0.025 622 65	+ 0.000 013 91
			D	+ 0.008 035 75	
$2 dx_0,$	$2 dy_0,$	$2 dz_0$	8.267 312	9.949 415	8 _n 313 809
$d\xi,$	$d\eta,$	$d\zeta$	7 _n 813 449	6.635 627	6.209 654
Additionslog:			9.811 795	0.000 211	9.996 569
			8.079 107	9.949 626	8 _n 310 378
$(wk)^2 A_1,$	$(wk)^2 A_2,$	$(wk)^2 A_3$	— 0.000 078 083	+ 0.000 384 816	— 0.000 003 312
			$(wk)^2 A$	+ 0.000 303 421	
			$\log (wk)^2 A$	6.482 045	
			$(wk)^2$	9.675 283	
			A	6.806 762	
$(x_0+x),$	$(y_0+y),$	(z_0+z)	+ 5.372 816	— 0.657 689	— 0.153 234
$\log (x_0+x),$	$(y_0+y),$	(z_0+z)	0.730 202	9 _n 818 020	9 _n 185 355
ξ	η	ζ	7.612 447	8.760 239	7 _n 130 508
B_1	B_2	B_3	+ 0.022 0114	— 0.037 8668	+ 0.000 2069
			B	— 0.015 6485	
			$\log B$	8 _n 194 473	
Aus VI) (pag. 101, findet sich nun:					
$m \sin M$	4 _n 854 109	$(wk) \sqrt{p_0} \sin i_0$	8.664 250	$n \cos (N - \frac{1}{2} [i+i_0])$	6.699 881
	9 _n 998 826	$m \cos (M - \Omega_0)$	5.706 235	$(wk) \cos \frac{1}{2} (i-i_0)$	9.837 641
$m \cos M$	5 _n 986 985	Add.	0.000 478	$\log J (\sqrt{p})$	6.862 240
M	184° 12' 42" 3	Nenner	8.664 728	$J (\sqrt{p})$	+ 0.000 728 182
$(M - \Omega_0)$	58° 30' 2" 6	$m \sin (M - \Omega_0)$	5.918 928		
$\sin (M - \Omega_0)$	9.930 769	$\tan (\Omega - \Omega_0)$	7.254 200	$2 \sqrt{p_0}$	0.542 138
m	5.988 159	T	4.685 575	Add.	0.000 091
$\cos (M - \Omega_0)$	9.718 076	$\Omega - \Omega_0$	+ 6' 10" 361	$\log J (p)$	7.404 469
$\frac{1}{2} (\Omega - \Omega_0)$	+ 3' 5" 1805	$(wk) \sqrt{p_0}$	0.078 749	p_0	0.482 216
$\frac{1}{2} (\Omega + \Omega_0)$	125° 45' 44" 9	$n \cos (N - i_0)$	6.699 881	Add.	0.000 363
$M - \frac{1}{2} [\Omega + \Omega_0]$	58° 26' 57" 4	Add.	0.000 181	p	0.482 579
$\cos M - \frac{1}{2} [\Omega + \Omega_0]$	9.718 712	Nenner	0.078 930	\sqrt{p}	0.241 289

$\sec \frac{1}{2} (\varrho - \varrho_0)$	0.000 000	$n \sin (N - i_0)$	5.500 362		
$n \sin N$	5.706 871	$\text{tang } (i - i_0)$	5.421 432	ϱ	125°48'50''06
	9.997755	T	4.685 575	i	2°12'29''34
$n \cos N$	6.698 500	$i - i_0$	+ 5''443		
N	5°49'15''5				
$N - i_0$	3°36'51''6	$\frac{1}{2} (i - i_0)$	+ 2''7		
$\sin (N - i_0)$	8.799 617	$\frac{1}{2} (i + i_0)$	2°12'26''6		
n	6.700 745	$N - \frac{1}{2} [i + i_0]$	3°36'48''9		
$\cos (N - i_0)$	9.999 136	$\cos (N - \frac{1}{2} [i + i_0])$	9.999 136		

Aus VII) (pag. 101) ergibt sich:

$s \sin S$	9n553 437	$\sigma \sin \Sigma$	8.760 239
	9.996 179		9.998 904
$s \cos S$	0.428 841	$\sigma \cos \Sigma$	7.612 447
S	352°24'40''6	Σ	85°55'47''8
$s - \frac{1}{2} [\varrho + \varrho_0]$	226°38'55''7	$\Sigma - \varrho$	320° 6'57''7
$\sin [S - \frac{1}{2} [\varrho + \varrho_0]]$	9n861 629	$\sin (\Sigma - \varrho)$	9n807 017
$2 s \sin \frac{1}{2} (\varrho - \varrho_0)$	7.686 862	σ	8.761 335
$\cos (S - \frac{1}{2} [\varrho + \varrho_0])$	9n836 620	$\cos (\Sigma - \varrho)$	9.884 990
		X_1'	8.646 325
s	0.432 662	X_2'	7n548 491
2	0.301 030	Add.	9.963 868
$\sin \frac{1}{2} (\varrho - \varrho_0)$	6.953 170	Y_1'	8n568 352
		Y_2'	7n523 482
$m' \sin M'$	7n130 508	Subtr.	9.958 953
	9n999 651		
$m' \cos M'$	8n527 305	r_0	0.432 832
M'	182°17'47''9	$n' \cos (N' - u_0)$	7n532 027
$M' - \frac{1}{2} [i + i_0]$	180° 5'21''3	Add.	9.999 454
$\cos (M' - \frac{1}{2} [i + i_0])$	9n999 999	Nenner	0.432 286
m'	8.527 654	$n' \sin (N' - u_0)$	8.722 434
$\sec \frac{1}{2} (i - i_0)$	0.000 000	$\text{tang } (u - u_0)$	8.290 148
$n' \sin N'$	8n527 653	T	4.685 630
	9.886 857	$u - u_0$	1° 7' 2''70
$n' \cos N'$	8.610 193		
N'	320°24'44''0	$\frac{1}{2} (u - u_0)$	0°33'31''3
$N' - u_0$	93°41'26''7	$\frac{1}{2} (u + u_0)$	227°16'48''6
$\sin (N' - u_0)$	9.999 098	$N' - \frac{1}{2} [u + u_0]$	93° 7'55''4
n'	8.723 336	$\cos (N' - \frac{1}{2} [u + u_0])$	8n737 491
$\cos (N' - u_0)$	8n808 691	$\sec \frac{1}{2} (u - u_0)$	0.000 021
		$\log M(r)$	7n460 848
		Add.	9.999 536
		$\log r$	0.432 368

Die Formeln VIII) (pag. 102) lassen finden:

	$\mathcal{A}(r) \frac{dr_0}{dt}$	6.153 612
$\sin v_0$	9 _n 857 099	D 7.905 026
$e_0 \sin v_0$	9 _n 096 230	Subtr. 9.992 233
$dr_0 : dt$	8 _n 692 764	Zähler 7.897 259
	$\log \mathcal{A} \left(\frac{dr}{dt} \right)$	7.464 891

Aus IX) und X) (pag. 102) rechnet sich nun:

$\left(\frac{dr_0}{dt} \right) \mathcal{A}(V\bar{p})$	5 _n 555 004	e_0	9.239 131
$V\bar{p} \mathcal{A} \left(\frac{dr}{d} \right)$	7.706 180	$g \cos (G - v_0)$	7 _n 579 464
Add.	9 996 923	Add.	9.990 386
$(wk) g \sin G$	7.703 103	Nenner	9.229 517
$p_0 : r_0$	0.049 384	$g \sin (G - v_0)$	7.821 496
$\frac{p_0}{r_0} \mathcal{A}(r)$	7 _n 510 232	$\tan (v - v_0)$	8.591 979
$\mathcal{A}(p)$	7.404 469	T	4.685 796
Subtr.	0.251 360	$v - v_0$	+ 2°14'17"18
$r g \cos G$	7.761 592	$\frac{1}{2} (v - v_0)$	1° 7' 8"59
$g \sin G$	7.865 462	$\frac{1}{2} (v + v_0)$	315° 5'47"7
	9.982 359	$G - \frac{1}{2} [v + v_0]$	118°40'59"0
$g \cos G$	7.329 224	$\cos (G - \frac{1}{2} [v + v_0])$	9 _n 681 209
G	73°46'46"7	$\sec \frac{1}{2} (v - v_0)$	0.000 083
$G - v_0$	119°48' 7"6	$\log \mathcal{A}(e)$	7 _n 564 395
$\sin (G - v_0)$	9.938 393		
g	7.883 103		
$\cos (G - v_0)$	9 _n 696 361	$2 e_0$	9.540 161
Add.	9.990 717	Add.	9.995 383
$\sin \varphi$	9.229 848	$\mathcal{A}(e^2)$	7 _n 099 939
φ	9°46'27"0		
$\frac{1}{2} (\varphi + \varphi_0)$	9 52 50.9	$\omega - \omega_0$	— 1° 7'14"48
$\cos \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_0)$	9.993 510	$\pi - \pi_0$	— 1° 1' 4"12
$\frac{1}{2} \mathcal{A}(e)$	7 _n 263 365		
$\sin \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_0)$	7 _n 269 855		
$S - \log 2$	4.384 545		
$\varphi - \varphi_0$	— 12'47"910		

Aus XI) (pag. 102) findet sich nun:

2	0.301 030	$2 \sin \frac{1}{2} (v - v_0)$	8.591 731
$\sin \frac{1}{2} (v - v_0)$	8.290 701	$\sin \frac{1}{2} (v + v_0)$	9 _n 848 752
$\cos \frac{1}{2} (v + v_0)$	9.850 216	$(\gamma)_2$	8 _n 440 483
$\cos \varphi$	9.993 650	Subtr.	9.938 010
$(\sigma)_1$	8.435 597	(γ)	8.378 493

$2 \sin \frac{1}{2} (q - q_0)$	7 _n 570 885		
$\sin \frac{1}{2} (q + q_0)$	9.234 515	$-r : p$	9 _n 949 789
$\sin v_0$	9 _n 857 099	$g \cos G$	7.329 224
$(\sigma)_2$	6.662 499	(λ)	7 _n 279 013
Subtr.	9.992 615	$\sin E_0$	9 _n 801 083
(σ)	8.428 212	$\cos E_0$	9.889 040
$(\sigma) \frac{r}{p}$	8378 001		
$(\lambda) \sin E_0$	7.080 096	$g' \cos (G' - E_0)$	6 _n 708 437
Add.	0.021 339	Nenner	9.999 778
$(\gamma) \frac{r}{p}$	8.328 282	$g' \sin (G' - E_0)$	8.504 666
$(\lambda) \cos E_0$	7 _n 168 053	$\text{taug } (E - E_0)$	8.504 888
Add.	9.968 881	T	4.685 723
$g' \sin G'$	8.399 340	$E - E_0$	+1 ⁰ 49'54"24
	9.894 618		
$g' \cos G'$	8.297 163	$\frac{1}{2} (E - E_0)$	0 ⁰ 54'57"12
G'	51 ⁰ 40'43"3	$\frac{1}{2} (E + E_0)$	321 ⁰ 40'43"1
$G' - E_0$	90 ⁰ 54'57"3	$\cos \frac{1}{2} (E + E_0)$	9.894 618
$\sin (G' - E_0)$	9.999 944	$\sin \frac{1}{2} (E - E_0)$	8.203 691
g'	8.504 722	$-2 \sin q_0 : \sin 1''$	4 _n 854 586
$\cos (G' - E_0)$	8 _n 203 715	$\log (\mathcal{A} M_2)$	2 _n 952 895
		$\mathcal{A} M_2$	-14'57"212
E	322 ⁰ 35'40"2	$\mathcal{A} M_3$	-7'39"549
$-\sin E$	9.783 512	$M - M_0$	+1 ⁰ 27'17"48
$\mathcal{A} (e) : \sin 1''$	2 _n 878 820		
$\log (\mathcal{A} M_3)$	2 _n 662 332	$L - L_0$	+0 ⁰ 26'13"36

Für q erhält man nach XII (pag. 102) in zweifacher Weise den entsprechenden Werth wie folgt:

$\mathcal{A}(p)$	7.404 469	Add.	0.300 798	$a_0 P$	6 _n 663 999
$a_0 \mathcal{A}(e^2)$	7 _n 595 418	$(r+r_0)$	0.733 630	$1-a_0 P$	0.000 200
p_0	0.482 216	rr_0	0.865 200	$\frac{1}{2} a_0 P$	6 _n 362 969
Subtr.	0.000 563	Nenner	1.598 830	$\log q$	6 _n 362 769
Add.	9.742 100	$2B$	8 _n 495 503	Beide Werthe stimmen innerhalb der Unsicherheit der Rechnung; es wird angenommen:	
$p_0 - a_0 \mathcal{A}(e^2)$	0.482 779	P_2	6 _n 896 673		
Nenner	0.783 809	\mathcal{A}	6.806 762	$\log q$	6 _n 362 765
$\mathcal{A}(p) + a_0 \mathcal{A}(e^2)$	7 _n 146 569	Add.	9.361 758	$\log f$	0.477 371
$\log q$	6 _n 362 760	$\log P$	6 _n 168 520	$\log (-\mu_0)$	2 _n 806 787
q	-0.000 2305			$\log (\mu - \mu_0)$	9.646 923
				$\mu - \mu_0$	+0 ⁰ 44353

Die neuen Elemente sind also, wenn man die Epoche auf den neuen Osculationspunkt legt:

(62) Erato

Epoche und Osculation 1871 Sept. 13.0 mittl. Berl. Zeit
mittl. Aeq. 1870,0.

$$\begin{aligned} L &= 5^{\circ}56'24''90 \\ M &= 328\ 30\ 11.12 \\ r &= 37\ 26\ 13.78 \\ \Omega &= 125\ 48\ 50.06 \\ i &= 2\ 12\ 29.34 \\ q &= 9\ 46\ 26.99 \\ \mu &= 641''33958 \end{aligned}$$

Um eine sichere Controle für die Richtigkeit der Rechnung zu erhalten, werden aus diesen Elementen die gestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten abgeleitet; die 7stellige Rechnung stellt sich unter Benützung der Formeln I) bis IV) (pag. 100) wie folgt:

μ	2.807 0880	$r \sin r$	0 _n 272 4409
k''	3.550 0066		9.858 5065
$a^{\frac{3}{2}}$	0.742 9186	$r \cos r$	0.290 8750
$a^{\frac{1}{2}}$	0.247 6395	r	316 ⁰ 12'56''26
a	0.495 2791	ω	271 37 23.72
$\cos q$	9.993 6498	u	227 50 19.98
$a \cos q$	0.488 9289	r	0.432 3685
$\sin q$	9.229 8485		
$\sin q : \sin 1''$	4.544 2736	p	0.482 5787
M	328 ⁰ 30'11''12	\sqrt{p}	0.241 2893
E	322 35 40.23	(wk)	9.837 6414
$\sin E$	9 _n 783 4120	$(wk) : \sqrt{p}$	9.596 3521
$\cos E$	9.900 0154		
Subtr.	0.104 4195		
$\cos E - e$	9.795 5959		

Ans 1) erhält man:

$\cos i$	9.999 6774		
$\sin i$	8.585 7985		
$\cos \Omega = \sin a \sin A$	9 _n 767 2706	$\sin \Omega = \sin b \sin B$	9.908 9790
	9 _n 908 8685		9.909 0894
$\sin a \cos A$	9 _n 908 6564	$\sin b \cos B$	9 _n 766 9480
A	215 ⁰ 50'2''78	B	125 ⁰ 47'37''36
$\sin a$	9.999 7879	$\sin b$	9.999 8896

Und aus II) pag. 100) folgt:

$A+u$, $B+u$, u	$83^{\circ}40'22''76$	$353^{\circ}37'57''34$	$227^{\circ}50'19''98$
$\sin(A+u)$, $\sin(B+u)$, $\sin u$	9.997 3467	9 _n 044 9456	9 _n 869 9708
$r \sin a$, $r \sin b$, $r \sin i$	0.132 1564	0.432 2581	9.018 1670
x , y , z	+ 2.688 4571	— 0.300 0570	— 0.077 2926

Die Unterschiede gegen $x_0 + \xi$, $y_0 + \eta$, $z_0 + \zeta$ sind in Einheiten der siebenten Decimale beziehungsweise:

$$+ 7 \quad - 2 \quad - 1$$

was eine gute Uebereinstimmung ist.

Weiter findet sich nach III) (pag. 100):

$\cos r$	9.858 5065	Γ	$322^{\circ}11'22''16$
Add.	0.091 7191	U	233 48 45.88
$\gamma \sin \Gamma$	9 _n 840 0724	γ'	9.052 5751
	9.897 6505	c	9.648 9272
$\gamma \cos \Gamma$	9.950 2256		

$A+U$, $B+U$, U	$89^{\circ}38'48''66$	$359^{\circ}36'23''24$	$233^{\circ}48'45''88$
$\cos(A+U)$, $\cos(B+U)$, $\cos U$	7.789 8338	9.999 9898	9 _n 771 1656
$c \sin a$, $c \sin b$, $c \sin i$	9.648 7151	9.648 8168	8.234 7257
$dx:dt$, $dy:dt$, $dz:dt$	+ 0.002 7450	+ 0.445 4578	— 0.010 1366

so dass die Unterschiede wieder nur sind in Einheiten der siebenten Decimale:

$$0 \quad 0 \quad - 1$$

Es erscheinen demnach die obigen Elemente einer strengen Controle unterworfen.

Ich werde nun das zweite Formelsystem anwenden und direct aus den gestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten die Elemente ableiten; hierbei wird wohl die Anwendung siebenstelliger Tafeln nöthig sein, um die wünschenswerthe Genauigkeit zu erhalten. Vorerst sind wieder die ungestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten abzuleiten und nach XIII (pag. 103) die der gestörten Bewegung entsprechenden Werthe derselben zu bestimmen. Der erste Theil der Rechnung fällt demnach mit der oben (pag. 130, 131) durchgeführten zusammen. Ich entlehne deshalb derselben die folgenden Werthe:

$\log x$	0.429 5030	$\log(dx:dt)$	7.438 5423
$\log y$	9 _n 477 2035	$\log(dy:dt)$	9.648 8066
$\log z$	8 _n 888 1373	$\log(dz:dt)$	8 _n 005 8880

Nach V) (pag. 103) findet sich:

xdy	0.078 3096	ydz	7.483 0915	$x dz$	8 _n 435 3910
ydx	6 _n 915 7458	zdy	8 _n 536 9439	$z dx$	6 _n 326 6796

Subtr.	0.000 2986	Subtr.	0.036 7638	Subtr.	0.003 3941
	0.078 6082		8.573 7077		8 _n 431 9966
		<i>wk</i>)	9.8376414		
$\sqrt{p} \sin i \sin \Omega$	8.736 0663	$\sqrt{p} \sin i$	8.827 0864	\sqrt{p}	0.241 2894
	9.9089799		9.999 6774	p	0.482 5788
$\sqrt{p} \sin i \cos \Omega$	8 _n 594 3552	$\sqrt{p} \cos i$	0.240 9668	$\sin i$	8.585 7970
	125°48'49"16		2°12'29"31	$\cos i$	9.9996774
				$\sin \Omega$	9.908 9799
				$\cos \Omega$	9 _n 767 2688

Ans VI (pag. 103) findet sich:

$x \cos \Omega$	0 _n 196 7718	$r \cos u$	0 _n 259 2305	x^2	0.859 0060
$y \sin \Omega$	9 _n 386 1834		9 _n 869 9719	y^2	8.954 4070
Add.	0.062 4587	$r \sin u$	0 _n 302 3403	Add.	0.005 3764
$y \cos \Omega \cos i$	9.244 1497	u	227°50'20"57	$x^2 + y^2$	0.864 3824
$-x \sin \Omega \cos i$	0 _n 338 1603	r	0.432 3684	z^2	7.776 2746
Add.	0.036 4652			Add.	0.000 3544
$y \cos \Omega \cos i - x \sin \Omega \cos i$	0 _n 301 6951			r^2	0.864 7368
$z \sin i$	7 _n 473 9343			Probe: r	0.432 3684
Add.	0.000 6452				

Die Benützung der Formeln VII pag. 103 führt zu folgenden Zahlen:

$x dx$	7.868 0453	$p : r$	0.050 2104
$y dy$	9 _n 126 0101	$\sin q \sin r$	9 _n 069 9212
Add.	0.024 6657		9.858 5071
$x dx + y dy$	9 _n 101 3444	$\sin q \cos r$	9.088 3564
$z dz$	6.894 0253	r	316°12'56"52
Add.	0.002 7028	$\frac{1}{2} r$	158° 6'28"26
$r dr$	9 _n 098 6416	$\sin q$	9.229 8493
$\sqrt{p} : rk$	0.403 6480	q	9°46'27"05
$i : r$	9.567 6316	$\cos q$	9.993 6498

Nach VIII (pag. 103) wird:

$45 + \frac{1}{2} q$	49°53'13"52	E	322°35'40"50
$\cot g 45 + \frac{1}{2} q$	9.925 5510	$\sin E$	9 _n 783 5112
$\tan g \frac{1}{2} r$	0.604 0513	$\sin q \sin E$	—5°54'30"89
$\frac{1}{2} E$	161°17'50"25	M	328°30'11"39

Durch die Anwendung von IX (pag. 103) findet sich:

$$\omega = 271°37'24"05$$

$$\pi = 37°26'13"51$$

Schliesslich folgt aus X) (pag. 104):

$$\begin{aligned}\log a & 0.495\ 2792 \\ \frac{1}{2} \log a & 0.247\ 6396 \\ \frac{3}{2} \log a & 0.742\ 9188 \\ \log k'' & 3.550\ 0066 \\ \mu & 641''3393\end{aligned}$$

Aus der Formel XI) (pag. 104) findet sich aber $\mu = 641''33958$, welcher Werth der genauere ist; die Berechnung dieser Formel habe ich nicht angesetzt, da sich die diesbezüglichen Zahlen in dem obigen Beispiele wieder finden, und zwar in den letzten zwei Formeln von V) (pag. 101) und in XIIa) und XIIb) (pag. 102, 103). Als Controle hätte man wieder die Rückrechnung der Coordinaten und Geschwindigkeiten vorzunehmen, welche Controlrechnung ich aber hier übergehe, weil schon ein diesbezügliches Beispiel bei der ersten Methode ausführlich mitgetheilt erscheint. Durch Vergleichung der Zahlen erkennt man leicht die überwiegende Genauigkeit der ersten Methode und ich möchte dieselbe stets empfehlen; sie verursacht zwar einen grösseren Zeitaufwand, in Anbetracht aber, dass der Uebergang auf osculirende Elemente selten vorgenommen wird, und dass die Genauigkeitszunahme eine beträchtliche ist, kann dieser kaum allzusehr ins Gewicht fallen.

B. Specielle Störungen in den polaren Coordinaten.

§ 1. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Die Bestimmung der Störungen nach polaren Coordinaten gewährt in vielen Fällen ganz wesentliche Vortheile gegen die eben vorgetragene Methode, nach welcher die Störungen der rechtwinkligen Coordinaten ermittelt werden, so dass es wünschenswerth erscheint, auf dieselbe hier näher einzugehen. Die Wahl der polaren Coordinaten kann in sehr verschiedener Weise vorgenommen werden, deren jede ihre gewissen Vortheile bei der Rechnung bietet; die zweckmässigste Form scheint mir aber jene von Hansen vorgeschlagene zu sein, mit den Modificationen, die Tietjen im Berliner Jahrbuche für 1877 veröffentlicht hat (dritte Methode), welche hier mit ganz geringen Abänderungen, auf welche übrigens Tietjen selbst schon hinweist, zum Vortrage gebracht wird.

Es dürfte zwar die von Hansen gewählte Form die Störungen im Allgemeinen etwas kleiner erscheinen lassen, als diese Methode, und deshalb der Uebergang auf osculirende Elemente für längere Zeit hinaus vermieden werden; doch ist der

Rechnungsmechanismus nach der letzteren Methode so bequem, dass er diesen Nachtheil wohl überwiegt.

Es sollen vorerst die Grundgleichungen der Störungstheorie hier wieder angesetzt werden, indem die Buchstaben in ihrer Bedeutung wie auf pag. 71 unverändert beibehalten sind; die Gleichungen sind nach einer einfachen Umsetzung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2 x}{r^3} &= \Sigma k^2 m_1 \left\{ x_1 \left(\frac{1}{q^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) - \frac{x}{q^3} \right\} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2 y}{r^3} &= \Sigma k^2 m_1 \left\{ y_1 \left(\frac{1}{q^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) - \frac{y}{q^3} \right\} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2 z}{r^3} &= \Sigma k^2 m_1 \left\{ z_1 \left(\frac{1}{q^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) - \frac{z}{q^3} \right\} \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

Führt man die polaren Coordinaten ein durch die Relationen:

$$\begin{aligned} x &= r \cos b \cos l = (r) \cos l & x_1 &= r_1 \cos B_1 \cos L_1 \\ y &= r \cos b \sin l = (r) \sin l & y_1 &= r_1 \cos B_1 \sin L_1 \\ z &= r \sin b & z_1 &= r_1 \sin B_1 \end{aligned}$$

und betrachtet die Ebene der ungestörten Bahn als Fundamentalebene, so wird r die Projection des Abstandes des gestörten Körpers von der Sonne auf die ungestörte Bahnebene darstellen. Ueber die Lage der X-Achse in dieser Ebene, die vorläufig willkürlich erscheint, wird später (pag. 144) verfügt werden; überdies aber wird man sich über den Sinn, in welchem die positive Z-Achse zu zählen ist, zu einigen haben; es soll darüber die Annahme gemacht sein, dass vom Pole der positiven Z-Achse aus gesehen, der Himmelskörper sich umgekehrt wie der Zeiger einer Uhr bewegt.

Setzt man zur Abkürzung:

$$K = \frac{1}{q^3} - \frac{1}{r_1^3},$$

so wird man aus den beiden ersten Gleichungen 1) erhalten, wenn man die erste derselben mit $-y$, die zweite mit x multiplicirt und dann addirt:

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)}{dt} = \Sigma k^2 m_1 \{ x y_1 - y x_1 \} K;$$

Nun ist aber das angezeigte Differential nichts anderes, als das Differential des doppelten Sectordifferentials, für welches letztere man mit Benützung der polaren Coordinaten setzen darf:

$$2 d Fl = (r)^2 \frac{dl}{dt};$$

ersetzt man überdies in dem Factor von K die rechtwinkligen Coordinaten durch die polaren, so erhält man, wenn man zur Abkürzung die Grösse U einführt durch:

$$\Sigma k^2 m_1 \{ x y_1 - y x_1 \} K = \Sigma k^2 m_1 K (r) r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l) = \Sigma U.$$

als Resultat der Transformation:

$$\frac{d \left\{ (r)^2 \frac{dl}{dt} \right\}}{dt} = \Sigma U;$$

die Integration dieser Gleichung gibt:

$$(r)^2 \frac{dl}{dt} = \text{Const} + \int \Sigma U dt ,$$

wobei man zu beachten haben wird, dass die Bestimmung des Werthes des angezeigten Integrales mit Hilfe der mechanischen Quadratur erlangt werden kann. Die Bestimmung der Integrations-Constante unterliegt keiner Schwierigkeit, wenn man beachtet, dass in der ungestörten Bewegung (vergl. I pag. 43) die Relation besteht:

$$r_0^2 \frac{dv_0}{dt} = k \sqrt{p_0} ,$$

wo p_0 den Parameter der ungestörten Bahn vorstellt; nun kann, sobald man von den Störungen absieht, dl mit dv_0 und weiter (r) mit r_0 identificirt werden; in diesem Falle wird aber auch

$$\Sigma U = 0$$

und es verschwindet demnach das Integral dieses Ausdruckes; man hat daher die Constante richtig bestimmt durch:

$$\text{Const} = k \sqrt{p_0}$$

und die erste Fundamentalgleichung für die Ermittlung der Störungen in den polaren Coordinaten wird sein:

$$(r)^2 \frac{dl}{dt} = k \sqrt{p_0} + \int \Sigma U dt . \quad 1,$$

Da diese Gleichung nur eine Relation zwischen (r) und l aufstellt, muss man bestrebt sein, eine weitere, neue Bedingungen enthaltende, Gleichung aufzusuchen; dieselbe wird leicht aus den beiden ersten Gleichungen in 1 erhalten werden können, wenn man die erste derselben mit x , die zweite mit y multiplicirt und addirt; man erhält so:

$$\begin{aligned} x \frac{d^2 x}{dt^2} + y \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2 (r)^2}{r^3} &= \frac{d \left\{ x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right\}}{dt} - \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right\} + \frac{k^2 (r)^2}{r^3} \\ &= \Sigma k^2 m_1 \left\{ (x x_1 + y y_1) K - \frac{(r)^2}{q^3} \right\} ; \end{aligned}$$

setzt man also, indem man unter dem Summenzeichen die rechtwinkligen Coordinaten durch die polaren ersetzt, zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \Sigma R &= \Sigma k^2 m_1 \frac{K r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l)}{(r)} \\ \Sigma w_1 &= \Sigma k^2 m_1 \frac{1}{q^3} , \end{aligned}$$

so wird erhalten, wenn man linker Hand für die Differentialien der rechtwinkligen Coordinaten die polaren einführt:

$$\frac{d \left\{ (r) \frac{d(r)}{dt} \right\}}{dt} - \left\{ \left(\frac{d(r)}{dt} \right)^2 + (r)^2 \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 \right\} + \frac{k^2 (r)^2}{r^3} = (r)^2 \Sigma R - (r)^2 \Sigma w_1 ,$$

oder, indem man die angezeigte Differentiation ausführt und mit (r) beiderseits dividirt:

$$\frac{d^2 \langle r \rangle}{dt^2} = \langle r \rangle \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + \frac{k^2 \langle r \rangle}{r^3} = \langle r \rangle \Sigma R - \langle r \rangle \Sigma w_1 .$$

Diese Gleichung enthält aber noch die Grösse r , die durch $\langle r \rangle$ zu ersetzen ist; der Unterschied beider ist aber offenbar zweiter Ordnung in Bezug auf die Breitenstörungen und wird im Allgemeinen fast unmerklich sein; doch kann auch hier die völlige Strenge in einfacher Weise erreicht werden. Man hat vorerst:

$$r^2 = \langle r \rangle^2 + z^2 ,$$

also ist

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{\langle r \rangle^3} \left\{ 1 + \frac{z^2}{\langle r \rangle^2} \right\}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\langle r \rangle^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{z^2}{\langle r \rangle^2} \left(1 - \frac{5}{2} \frac{z^2}{\langle r \rangle^2} + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} \frac{z^4}{\langle r \rangle^4} - \dots \right) \right\} ;$$

die in den runden Klammern angesetzte Reihe ist aber, wenn man setzt:

$$q = \frac{z^2}{2 \langle r \rangle^2} ,$$

völlig identisch mit dem dritten Theile der von Encke bei seiner Methode benützten Grösse f , (vergl. pag. 75 und Tafel XI) man kann also setzen:

$$\frac{\langle r \rangle}{r^3} = \frac{1}{\langle r \rangle^2} - \frac{3}{2} \frac{z^2}{\langle r \rangle^4} \left(\frac{f}{3} \right) ;$$

wobei man aber bei der Anwendung wohl stets wird annehmen dürfen:

$$\frac{1}{3} f = 1 ,$$

indem man hierbei nur Glieder vierter Ordnung in Bezug auf die Breitenstörungen übergeht; schreibt man also:

$$\mathcal{A} \Sigma R = \frac{3}{2} k^2 \frac{z^2}{\langle r \rangle^5} \left(\frac{f}{3} \right) ,$$

so wird man, wenn überdies, um abzukürzen, geschrieben wird:

$$\Sigma R - \Sigma w_1 + \mathcal{A} \Sigma R = H_2$$

für die obige Differentialgleichung haben:

$$\frac{d^2 \langle r \rangle}{dt^2} = \langle r \rangle \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + \frac{k^2}{\langle r \rangle^2} = \langle r \rangle H_2 . \quad \text{II}_1$$

welches die zweite Fundamentalgleichung ist, die in Verbindung mit I₁ (pag. 141) zur Kenntniss der Werthe $\langle r \rangle$ und l führen wird.

Um nun die dritte Gleichung in 1) (pag. 140) in eine für die Bestimmung der auf der Fundamentelebene senkrechten Coordinate z passende Form überzuführen, setze man:

$$\Sigma W_1 = \Sigma k^2 m_1 K r_1 \sin B_1 ,$$

und wie dieses schon oben geschehen ist:

$$\Sigma w_1 = \Sigma k^2 m_1 \frac{1}{q^3} ,$$

so wird man schreiben dürfen:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z \left\{ \frac{k^2}{r^3} + \Sigma w_1 \right\} = \Sigma W_1 ;$$

ersetzt man nun, wie dieses früher gezeigt wurde, r durch $r)$, so wird man haben:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(r)^3} \left\{ 1 + \frac{z^2}{(r)^2} \right\}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(r)^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{z^2}{(r)^2} \left(\frac{f}{3} \right) \right\}$$

wobei f mit dem Argumente $q = \frac{z^2}{2(r)^2}$ aus Encke's f -Tafel (Tafel XI) zu nehmen ist, und übrigens $\frac{1}{3}f$ wohl stets der Einheit gleich gesetzt werden darf, da dadurch nur Fehler 5^{ter} Ordnung in Bezug auf die Breitenstörungen entstehen. Führt man nun die Abkürzungen:

$$[w] = -\frac{k^2}{(r)^3} + \Sigma w_1$$

$$W_0 = \Sigma W_1 + \Delta \Sigma W$$

ein, wobei

$$\Delta \Sigma W = \frac{3}{2} k^2 \frac{z^3}{(r)^5} \left(\frac{f}{3} \right)$$

angenommen ist, so erhält man als dritte Fundamentalgleichung:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + [w]z = W_0 \quad \text{III)}$$

Diese Gleichung III) unterscheidet sich vortheilhaft von den Gleichungen I und II) dadurch, dass dieselbe unmittelbar eine Differentialgleichung für die Störung selbst ist, während die beiden anderen Gleichungen die Gesamtbewegung des gestörten Körpers, die derselbe durch seine gestörte Bewegung um die Sonne ausführt, beschreiben. Es wird daher für die Genauigkeit und Bequemlichkeit der Rechnung wünschenswerth erscheinen, die Gleichungen I) und II) so zu transformiren, dass dieselben sich in Differentialgleichungen für die Störungen in (r) und l verwandeln.

Dieses kann in mehrfacher Weise geschehen, je nachdem man die Störungen zerlegt und auf die Coordinaten (r) und l vertheilt; die von Hansen und Tietjen gewählte Zerlegung scheint die grössten Vortheile zu bieten, weshalb ich dieselbe den weiteren Entwicklungen zu Grunde lege.

Zerlegt man den Bogen l in die zwei Theile V und N , so ist diese Zerlegung willkürlich und man kann für eine dieser Grössen eine beliebige Annahme machen, wenn man nur dafür Sorge trägt, dass durch entsprechende Bestimmung des anderen Bogens der Relation

$$l = V + N$$

stets genügt wird.

Es soll nun N so bestimmt werden, dass der Gleichung:

$$(r)^2 \frac{dN}{dt} = \int \Sigma U dt \quad 2)$$

genügt wird. Da hier N nur an eine Differentialgleichung gebunden erscheint, so bleibt noch eine willkürliche Constante übrig, deren zweckmässige Bestimmung später offenkundig wird.

Differentiirt man die Relation zwischen l , V und N , so wird:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dN}{dt} \quad 3)$$

und wenn nun beiderseits mit $(r)^2$ multiplicirt und die durch die Gleichung 2) ausgedrückte Bedingung einführt, so findet sich:

$$(r)^2 \frac{dl}{dt} = (r)^2 \frac{dV}{dt} + \int \Sigma U dt; \quad 4)$$

vergleicht man diesen Ausdruck mit I) (pag. 141) so resultirt sofort eine Bestimmung für V , indem beide Gleichungen gleichzeitig nur bestehen können, wenn man:

$$(r)^2 \frac{dV}{dt} = k \sqrt{p_0} \quad 5)$$

setzt, so dass V ebenfalls durch eine Differentialgleichung bestimmt erscheint, sobald über N eine der eben gewählten Bedingung entsprechende Annahme gemacht ist. Setzt man nun die erlangten Bedingungen in 3) ein, so wird:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{k \sqrt{p_0}}{(r)^2} + \frac{1}{(r)^2} \int \Sigma U dt \quad 5a)$$

und hieraus folgt durch Integration:

$$l = \int \frac{k \sqrt{p_0}}{(r)^2} dt + \int \frac{1}{(r)^2} dt \int \Sigma U dt + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Integrationseconstante wird man durch die folgenden Betrachtungen gelangen. Wären keine Störungen vorhanden, so würde das zweite Integral verschwinden, das erstere kann aber, da:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k \sqrt{p}}{r^2}$$

ist, wo r die wahre Anomalie vorstellt, als die wahre Anomalie aufgefasst werden und wir haben daher in dem Falle der ungestörten Bewegung:

$$l_0 = r_0 + \text{Const.}$$

Bei der Einführung der polaren Coordinaten statt der rechtwinkligen wurde zwar die XY -Ebene als Fundamentalebene bezeichnet, jedoch über die Lage der X -Achse oder über den Ausgangspunkt der Zählung von l wurde nichts festgesetzt; trifft man jetzt, um Alles unzweideutig bestimmt zu haben, die Verfügung, dass l vom aufsteigenden Knoten der ungestörten Bahn in der Ekliptik gezählt wird, so ist l das Argument der Breite und die Integrations-Constante ist demnach nichts anderes, als der Abstand des Perihels vom Knoten, eine Grösse, die durch ω_0 bezeichnet werden soll, indem der Index »0« darauf hinweist, dass dieser Werth den ungestörten Elementen zu entnehmen ist.

Mit Rücksicht auf diese gewählte Bezeichnung möge weiter eingeführt werden:

$$\frac{d\mathcal{A}\omega}{dt} = \frac{1}{(r)^2} \int \Sigma U dt \quad \text{IVa)}$$

wobei man leicht erkennen wird, dass man durch eine mechanische Integration den Werth von $\mathcal{A}\omega$ wird ermitteln können. Man hat dann statt des obigen Ausdruckes für l zu setzen:

$$l = V + \omega_0 + \mathcal{A}\omega. \quad \text{IVb)}$$

Der gewählten Bestimmung gemäss wird sich demnach V nur um eine Grösse von der Ordnung der Störungen von der wahren Anomalie v unterscheiden und es wird daher möglich sein, an die ungestörte mittlere Anomalie M eine Correction ΔM von derselben Ordnung anzubringen, die bewirkt, dass durch Anwendung der bekannten Formeln zur Bestimmung der wahren Anomalie unter Benützung der ungestörten Elemente für dieselbe V resultirt. Indem vorerst diese Correction ΔM als bekannt vorausgesetzt wird und die Bestimmung derselben für später vorbehalten bleibt, ergibt sich das folgende Formelsystem:

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 + \mu_0 t + \Delta M \\ M &= E - e_0'' \sin E \\ (r) \sin V &= a_0 \cos q_0 \sin E \\ (r) \cos V &= a_0 (\cos E - e_0) \end{aligned} \right\} \quad \text{V)}$$

In diesen Ausdrücken stellt, wie man leicht sieht, M_0 die ungestörte mittlere Anomalie zur Zeit der Epoche, t die seit der Epoche verflossene Zeit in mittleren Sonnentagen, μ_0 , a_0 , $\sin q_0 = e_0$, beziehungsweise die mittlere siderische Bewegung, die grosse Achse und die Excentricität der ungestörten Elemente vor. Es ist klar, dass der durch diese Formeln gefundene Radiusvector, der gleichsam den Radiusvector in der ungestörten Bahn zur gestörten mittleren Anomalie vorstellt, nicht mit (r) übereinstimmen, sondern sich ebenfalls um eine Grösse von der Ordnung der Störungen von demselben unterscheiden wird. Setzt man also:

$$(r) = (r') (1 + \nu) \quad \text{VI)}$$

so wird die Bestimmung des gestörten Ortes keine Schwierigkeit haben, sobald ΔM und ν gegeben sind. Es wird daher als die nächste Aufgabe bezeichnet werden müssen, aus den Differentialgleichungen I und II (pag. 141, 142) solche abzuleiten, welche die Bestimmung von ΔM und ν ermöglichen, womit, falls diese Bestimmung gelungen ist, noch der Vortheil erreicht wird, dass die Rechnung statt der Gesamtbewegung nur die verhältnissmässig geringen Störungen zu bestimmen hat.

Ehe aber an die Lösung dieser Aufgabe geschritten werden soll, mag noch die Bemerkung Platz greifen, dass diese Wahl der Coordinaten ohne Schwierigkeit auf Bahnen von beliebiger Excentricität angewendet werden kann, und nicht auf solche von mässiger Excentricität beschränkt ist, wie dies auf den ersten Blick erscheinen könnte, da die Störung in der mittleren Anomalie hier auftritt. Es erweist sich sogar gerade in solchen Fällen die von Hansen getroffene Wahl der Coordinaten besonders vortheilhaft; doch kann auf die nothwendigen Aenderungen erst eingegangen werden, wenn die diesbezüglichen Formeln entwickelt sind.

Um nun die oben angesetzte Aufgabe zu lösen, muss die differentielle Relation zwischen (r) und ν ermittelt werden. Aus der Gleichung VI) resultirt sofort:

$$(\nu) = \frac{p_0(1 + \nu)}{1 + e_0 \cos V} ; \quad 6)$$

die Differentiation nach den mit der Zeit veränderlichen Grössen ergibt:

$$\frac{d r}{d t} = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos V} \cdot \frac{d v}{d t} + \frac{p_0 (1 + v)}{(1 + e_0 \cos V)^2} e_0 \sin V \frac{d V}{d t}$$

welcher Ausdruck mit Rücksicht auf die Gleichungen 5) und 6) (pag. 144, 145) sich in:

$$\frac{d(r)}{d t} = \frac{(r)}{1 + v} \cdot \frac{d v}{d t} + \frac{k e_0 \sin V}{(1 + v) \sqrt{p_0}} \quad 7)$$

verwandelt; diese Gleichung ergibt durch weitere Differentiation:

$$\frac{d^2(r)}{d t^2} = \frac{(r)}{1 + v} \frac{d^2 v}{d t^2} - \frac{(r)}{(1 + v)^2} \left(\frac{d v}{d t} \right)^2 + \frac{1}{1 + v} \frac{d(r)}{d t} \cdot \frac{d v}{d t} + \frac{k e_0 \cos V}{(1 + v) \sqrt{p_0}} \frac{d V}{d t} - \frac{k e_0 \sin V}{(1 + v)^2 \sqrt{p_0}} \frac{d v}{d t};$$

führt man nun in dem mittleren Gliede dieses Ausdruckes für $\frac{d(r)}{d t}$ den Werth aus 7) ein, so erhält man:

$$\frac{d^2(r)}{d t^2} = \frac{(r)}{1 + v} \cdot \frac{d^2 v}{d t^2} + \frac{k e_0 \cos V}{(1 + v) \sqrt{p_0}} \cdot \frac{d V}{d t},$$

und wenn jetzt noch $\frac{d V}{d t}$ durch die Relation aus 5) (pag. 144) ersetzt und dabei beachtet wird, dass zu Folge der Gleichung 6) (pag. 145):

$$e_0 \cos V = \frac{p_0 (1 + v)}{(r)} - 1$$

und zudem:

$$\frac{1}{1 + v} = 1 - \frac{v}{1 + v}$$

ist, so folgt:

$$\frac{d^2(r)}{d t^2} = \frac{k^2 p_0}{(r)^3} + \frac{k^2}{(r)^2} = \frac{(r)}{1 + v} \cdot \frac{d^2 v}{d t^2} + \frac{k^2}{(r)^2} \cdot \frac{v}{1 + v}; \quad 8)$$

vergleicht man diesen Ausdruck mit II) (pag. 142), so findet man linker Hand vom Gleichheitszeichen bis auf das mittlere Glied eine völlige Uebereinstimmung; dasselbe lässt sich jedoch ohne Schwierigkeit so zerlegen, dass auch dieses Glied identisch gemacht wird. Die Quadrirung der Gleichung I) (pag. 141) gibt nämlich:

$$(r)^4 \left(\frac{d l}{d t} \right)^2 = k^2 p_0 + 2 k \sqrt{p_0} \left\{ 1 + \frac{\int^{\Sigma} U dt}{2 k \sqrt{p_0}} \right\} \int^{\Sigma} U dt;$$

schreibt man, um abzukürzen:

$$\int U' dt = \left(1 + \frac{\int^{\Sigma} U dt}{2 k \sqrt{p_0}} \right) \int^{\Sigma} U dt$$

so bestimmt sich aus dieser Gleichung der Werth von $\frac{k^2 p_0}{(r)^3}$, wie folgt:

$$\frac{k^2 p_0}{(r)^3} = (r) \left(\frac{d l}{d t} \right)^2 - \frac{2 k \sqrt{p_0}}{(r)^3} \int U' dt$$

und hiermit kann die Gleichung 8) geschrieben werden:

$$\frac{d^2(r)}{d t^2} = (r) \left(\frac{d l}{d t} \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} = \frac{(r)}{1 + v} \frac{d^2 v}{d t^2} + \frac{k^2}{(r)^2} \cdot \frac{v}{1 + v} - \frac{2 k \sqrt{p_0}}{(r)^3} \int U' dt$$

welche nun in Verbindung mit II) (pag. 142) die sofortige Elimination von $d^2(r)$ und $d l$ gestattet. Führt man die Elimination aus und schreibt:

$$H_1 = \frac{2k}{r_j^4} \sqrt{p_0} \int V' dt$$

$$H_1 + H_2 = H_0$$

$$h = \frac{k^2}{r_j^3} - H_0$$

so wird die verlangte Differentialgleichung:

$$-\frac{d^2 \nu}{dt^2} + h \nu = H_0, \quad \text{VII)}$$

welche rücksichtlich der Form mit der Gleichung III (pag. 143) identisch ist und eine Differentialgleichung zur Bestimmung von ν abgibt, während III) zur Bestimmung von z gedient hat. Da überdies ω bereits durch die Differentialgleichung IV (pag. 144) bestimmt erscheint, so erübrigt zur Bestimmung von l nichts weiter, als die Ermittlung des Differentialausdruckes für \mathcal{M} . Um diesen zu erhalten, nehme man die zwei Gleichungen:

$$\sin V = \frac{a_0 \cos q_0}{l(r_j)} \sin E$$

$$l(r_j) = a_0 (1 - e_0 \cos E)$$

vor, aus denen man sofort:

$$\sin V = \frac{\cos q_0 \sin E}{1 - e_0 \cos E}$$

findet. Differentiirt man diesen Ausdruck vorerst logarithmisch, so wird:

$$\frac{\cos V}{\sin V} dV = \frac{\cos E}{\sin E} dE - \frac{e_0 \sin E}{1 - e_0 \cos E} dE = \frac{l(r_j)}{l(r_j)} \frac{\cos V}{\sin E} dE$$

und man hat somit:

$$dV = \frac{\sin V}{\sin E} dE = \frac{a_0 \cos q_0}{l(r_j)} dE.$$

Ferner liefert die Gleichung:

$$M = E - e_0 \sin E$$

durch Differentiation und eine leichte Substitution:

$$dM = \frac{l(r_j)}{a_0} dE;$$

es ist also:

$$\frac{dV}{dM} = \frac{dV}{dE} \cdot \frac{dE}{dM} = \frac{a_0^2 \cos q_0}{l(r_j)^2} = \frac{k \sqrt{p_0}}{\mu_0 l(r_j)^2}$$

wobei von der bekannten Relation:

$$\mu_0 = \frac{k}{a_0^{\frac{3}{2}}}$$

Gebrauch gemacht wurde. Aus der ersten Gleichung in V* findet sich aber durch Differentiation:

$$\frac{dM}{dt} = \mu_0 + \frac{d\mathcal{M}}{dt}$$

also ist:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dM} \cdot \frac{dM}{dt} = \frac{k \sqrt{p_0}}{\mu_0 l(r_j)^2} \left\{ \mu_0 + \frac{d\mathcal{M}}{dt} \right\};$$

multiplieirt man nun beiderseits mit r^2 und beachtet die Relationen 5 (pag. 144) und VI) (pag. 145), so findet sich leicht:

$$k \frac{1}{p_0} = k \frac{1}{p_0} (1 + v)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{\mu_0} \frac{dJ M}{dt} \right\}$$

woraus:

$$\frac{dJ M}{dt} = \mu_0 \frac{1 - 1 + v^2}{1 + v^2}$$

folgt; setzt man also:

$$\sigma = 2 \frac{1 + \frac{1}{2} v}{1 + v^2}$$

so wird die letzte noch nöthige Differentialgleichung zur vollständigen Ermittlung der Störungen:

$$\frac{dJ M}{dt} = - \mu_0 v \sigma, \quad \text{VIII}$$

wobei σ mit dem Argument v leicht in eine Tafel gebracht werden kann. Eine solche Tafel, auf 6 Stellen berechnet^{*)}, ist diesem Werke als Tafel XIII) angehängt; dieselbe gibt den Werth von $\log \sigma$ für $10^7 \frac{80 + 40 v}{(1 + v)^2}$; weshalb gerade diese Form gewählt wurde, wird sofort bei der Zusammenstellung der Formeln für die praktische Rechnung klar werden. Will man übrigens von dieser Tafel, die kaum eine wesentliche Abkürzung der Rechnung bedingt, absehen, so hat man:

$$\sigma = \frac{1}{1 + v} \left(1 + \frac{1}{1 + v} \right)$$

zu setzen, welcher Ausdruck sich leicht mit Hilfe der Additionslogarithmen berechnet; es ist dann:

$$\frac{dJ M}{dt} = - (w \mu_0) \sigma v$$

wo w die für t geltende Zeiteinheit vorstellt.

Die Lösung des vorliegenden Problems ist demnach in den folgenden 4 Differentialgleichungen enthalten, die ich übersichtlich zusammengestellt aus der vorstehenden Entwicklung hier hervorhebe:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v}{dt^2} + h v &= H_0 \\ \frac{dJ M}{dt} &= - \mu_0 v \sigma \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + [w] z &= W_0 \\ \frac{dJ w}{dt} &= \frac{1}{(r)^2} \int \Sigma U dt \end{aligned} \right\} \quad \text{IX}$$

Ehe ich daran gehe, den Nachweis zu liefern, dass diese Differentialgleichungen ohne allzugrosse Schwierigkeiten die angesetzte Lösung in aller Strenge erreichen lassen, will ich auf jene Modificationen aufmerksam machen, die bei Bahnen mit starker Excentricität, also bei Kometenbahnen mit mehr parabolischem

*) Die Rechnung der Tafel selbst ist von R. Schram tustellig durchgeführt worden.

Charakter, mit den obigen Gleichungen vorzunehmen wären. Man wird sofort gewahren, dass man nur die zweite Gleichung in IX) zu modifiziren hat, indem die übrigen durch diesen Umstand nicht berührt erscheinen.

Um nun diese Gleichung in eine für alle Fälle brauchbare Form umzuändern, soll anstatt der Störung in der mittleren Anomalie die Störung der Zeit ermittelt werden, also jenes Zeitintervall, welches der Himmelskörper bedarf, um den Bogen $I - v_0$ für die gegebene Epoche in der ungestörten Bewegung zu durchlaufen. Nun ist aber:

$$\mu_0 \Delta t = \Delta M$$

sonit wird:

$$\frac{d \Delta t}{dt} = - \sigma v \quad \text{X}$$

die Gleichung für die Störung in der Zeit, wodurch die verlangte Transformation erreicht ist.

Da bei Kometenbahnen die Hauptstörungen gewöhnlich die Zeit des Perihels treffen, so möchte ich gerade in der von Hansen getroffenen Wahl der polaren Coordinaten, wo die Störung des zur gestörten Anomalie gehörigen ungestörten Radiusvector ermittelt wird, einen ganz besonderen Vortheil erblicken und glaube, dass die Anwendung dieser Methode für periodische Kometen, falls man Störungen in den Coordinaten bestimmen will, besonders zu empfehlen ist. Will man jedoch die Störungen für eine Kometenbahn nur so weit entwickeln, dass man die Beobachtungen einer Erscheinung von den Störungen befreien will, ein Fall, der bei den meisten Kometen, die keine verhältnissmässig kurze Periode haben, statt hat, so wird in diesen Fällen wohl die Anwendung der Encke'schen Methode als besonders bequem empfohlen werden dürfen.

§ 2. Integration der Differentialgleichungen.

Die Integration der Differentialgleichungen wird bei dieser Methode, ähnlich so, wie es bei Encke's Methode geschehen ist, vorgenommen werden können, wobei jedoch der erleichternde Umstand hinzutritt, dass die die Rechnung erschwerenden mit q verbundenen Glieder hier nicht vorkommen. Eigentlich bedürfen nur die erste und dritte Gleichung in IX) des vorangehenden Paragraphen einer näheren Betrachtung, da die anderen, als auf einer einfachen Integration beruhend, kein näheres Eingehen erfordern.

Die beiden angezogenen Gleichungen haben die gemeinsame Form:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p x = P.$$

Diese Gleichungen kommen in doppelter Weise in Betracht, indem einerseits beim Beginn der Rechnung, wo nichts Anderes über x bekannt ist, als dass dasselbe in Anbetracht der Nähe des Osculationspunktes klein sein muss, ein zweck-

mässiges Verfahren anzugeben ist, um eine indirecte Rechnung zu vermeiden; andererseits werden sich im Verlaufe der Rechnung durch die mechanische Quadratur und durch die Kenntniss der vorangehenden Werthe, für x genügende Annäherungen finden lassen, um auch in diesen Fällen die lästige indirecte Rechnung zu umgehen, besonders wenn man die Methode zu Hilfe nimmt, die Tietjen im Berliner Jahrbuche für 1877 für diesen letzteren Fall publicirt hat. Es soll zunächst der Beginn der Rechnung in's Auge gefasst werden.

Am zweckmässigsten ist es unter allen Umständen, die Rechnung so anzulegen, dass dieselbe der Zeit nach in regelmässigen Intervallen fortschreitet und dass die Osculationsepoche in die Mitte zwischen zwei Werthe fällt; bezeichnet man daher irgend einen zweiten Differentialquotienten des Störungswerthes mit $f'(a + iw)$, so wird für den ersten Werth, der um ein halbes Intervall der Osculationsepoche nachfolgt $f(a)$ zu setzen sein, für den vorangehenden Werth $f(a - w)$ etc. Berücksichtigt man daher das Differenz- und Integrationschema (pag. 4), welches bei der mechanischen Quadratur ausführlich auseinandergesetzt wurde, so kommt die Epoche der Osculation auf die Zeile $(a - \frac{1}{2}w)$.

Man wird für den Anfang der Rechnung 4 Werthe für die Differentialquotienten berechnen und zwar so, dass 2 Werthe der Osculationsepoche vorangehen und 2 Werthe nachfolgen, und hierbei die Störungen bei der Berechnung der Coefficienten der Differentialgleichungen ganz weglassen; aus dieser Vernachlässigung der zweiten Potenzen der störenden Massen kann bei der Nähe der Osculationsepoche wohl niemals ein merkbarer Fehler entstehen.

Hat man sich in dieser Weise 4 Werthe für die Coefficienten der Differentialgleichungen verschafft, so wird die Bestimmung der zweiten Differentialquotienten und die Bestimmung der Anfangsconstanten der mechanischen Quadraturen in der folgenden Weise vorgenommen werden können. Die 4 erlangten Werthe seien der Reihe nach:

$$\begin{array}{ll} p_{-2} & P_{-2} \\ p_{-1} & P_{-1} \\ p_0 & P_0 \\ p_{+1} & P_{+1} \end{array}$$

wobei der Index auf die gewählte Zeitepoche unzweideutig hinweist. Für x wird man, wenn mit t die Zeit in Einheiten des Intervalles bezeichnet wird, die Form aufstellen können:

$$x = r + r' t + \alpha t^2 + \beta t^3 + \gamma t^4 + \delta t^5 + \dots$$

wobei die Coefficienten $r, r', \alpha, \beta, \gamma, \delta$ einer näheren Bestimmung bedürfen. Differentiirt man, so wird:

$$\frac{dx}{dt} = r' + 2\alpha t + 3\beta t^2 + 4\gamma t^3 + 5\delta t^4 + \dots$$

und weiter:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\alpha + 2\cdot 3\beta t + 3\cdot 4\gamma t^2 + 4\cdot 5\delta t^3 + \dots$$

Zählt man die Zeit von der Osculationsepoche aus, so müssen für die Zeit $t = 0$, d. i. für die Zeit der Osculation sowohl die Coordinaten als auch die Geschwindigkeiten in der ungestörten und gestörten Bewegung nach der Idee der osculirenden Elemente identisch sein; man hat daher für x und x' sofort die Bestimmung erlangt, dass beide der Null gleich sein müssen. Man darf daher für x die Form aufstellen:

$$x = \alpha t^2 + \beta t^3 + \gamma t^4 + \delta t^5 + \dots$$

Die Werthe für p und P werden ebenfalls eine Entwicklung nach steigenden Potenzen der Zeit zulassen und man wird setzen dürfen:

$$P = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + \dots$$

$$p = a + bt + ct^2 + dt^3 + \dots$$

Da die numerischen Werthe für P und p gegeben sind, so wird man leicht aus dem Differenzschema die Coëfficienten dieser Gleichungen ableiten können. Es soll dies an den Werthen von P ausführlich erläutert werden; bildet man demnach das folgende Differenzschema, welches sofort verständlich ist, wenn man hiermit die Auseinandersetzungen auf pag. 4 vergleicht, so erhält man:

$$\begin{array}{r} P_{-2} \\ f^1(a - \frac{3}{2}\omega) \\ P_{-1} \\ f^1(a - \frac{1}{2}\omega) \quad f^2(a - \omega) \\ P_0 \\ f^1(a + \frac{1}{2}\omega) \quad f^2(a) \quad f^3(a - \frac{1}{2}\omega) \\ P_{+1} \end{array}$$

dann ist, wie dies eine leichte und offenkundige Entwicklung zeigt, die mit der auf pag. 26 ff. identisch ist:

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} (P_{-1} + P_0) - \frac{1}{16} \{ f^2(a - \omega) + f^2(a) \} \\ B = f^1(a - \frac{1}{2}\omega) - \frac{1}{24} f^3(a - \frac{1}{2}\omega) \\ C = \frac{1}{4} \{ f^2(a - \omega) + f^2(a) \} \\ D = \frac{1}{6} f^3(a) \end{array} \right\} \quad 1$$

Eine analoge Entwicklung kann für die Coëfficienten a , b , c und d vorgenommen werden, doch wird die Berechnung auf die beiden ersten, nämlich auf a und b beschränkt werden können, wie dies die sofort folgenden Ausführungen zeigen.

Substituirt man die für x , P und p aufgestellten Ausdrücke in die obige (pag. 149) Differentialgleichung, so findet sich:

$$2\alpha + 6\beta t + (12\gamma - \alpha\alpha) t^2 + (20\delta + \beta\alpha + b\alpha) t^3 = A + Bt + Ct^2 + Dt^3,$$

woraus sich sofort durch die Vergleichung ergibt:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{A}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{12} \left(C - \frac{\alpha A}{2} \right) \\ \beta = \frac{B}{6}, \quad \delta = \frac{1}{20} \left(D - \frac{\alpha B}{6} - \frac{b A}{2} \right) \end{array} \right\} \quad 2)$$

Der letzte Coëfficient δ wird in der Regel so klein, dass man denselben wird übergehen können. Setzt man nun der Reihe nach in dem Ausdrucke für x :

$$x = \alpha t^2 + \beta t^3 + \gamma t^4 + \delta t^5 + \dots \quad 3)$$

$t = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ und $+\frac{3}{2}$. so erhält man die vier zu den gegebenen Zeitmomenten gehörigen Werthe der Störung und kann dann berechnen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = P - p x . \quad 4)$$

Scheinbar einfacher gestaltet sich die Sache, wenn man dieselbe Substitution in dem Ausdrücke für $\frac{d^2 x}{dt^2}$ ausführt; es ist dann:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = A + B t + \left(C - \frac{aA}{2} \right) t^2 + \left(D - \frac{aB}{6} - \frac{bA}{2} \right) t^3 ;$$

hierbei wird es jedoch nöthig, das letzte Glied mitzunehmen und die Coëfficienten genau zu berechnen, was im ersteren Falle wegen der Kleinheit des Factors p nicht nöthig ist.

Es sollen nun diese Formeln durch ein ausführliches Beispiel erläutert werden, und zwar nach der ersteren Form, der ich unter allen Umständen den Vorzug gebe.

Das für Erato unten ausführlich mitgetheilte Beispiel hat bei Beginn der Rechnung für die Berechnung der zweiten Differentialquotienten von ν ergeben:

$p = h$				$P = H_0$			
1874 Oct. 27	+ 0.009590			+ 169.24			
		— 37			— 55.55		
Dec. 6	9553		— 46	+ 113.69		+ 4.75	
		+ 9	— 2		— 50.80		— 0.16
1875 Jan. 15	9562		— 48	+ 62.89		+ 4.59	
		+ 57			— 46.21		
Febr. 24	9619			+ 16.68			

Daraus erhält man, indem für diese Form der Rechnung die Mitnahme des Coëfficienten δ unnöthig ist, die Werthe der Coëfficienten durch 1) pag. 151 :

$$\begin{aligned} A &= + 88.29 - 0.58 = + 87.71 \\ B &= - 50.80 + 0.01 = - 50.79 \\ C &= + 2.33 \\ \log a &= 7.980; \end{aligned}$$

es ist also nach 2) und 3) pag. 151):

$$\nu = + 43.85 t^2 - 8.465 t^3 + 0.161 t^4 ,$$

und demgemäss durch successive Substitution der Werthe $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}$ für t :

$$\begin{aligned} \nu_{-2} &= + 128.04 \\ \nu_{-1} &= + 12.03 \\ \nu_0 &= + 9.91 \\ \nu_{+1} &= + 70.92 . \end{aligned}$$

und nach der Formel 4) finden sich demnach die gesuchten zweiten Differentialquotienten:

$$\frac{d^2 \nu_{-2}}{dt^2} = + 168.01$$

$$\frac{d^2 \nu_{-1}}{dt^2} = + 113.58$$

$$\frac{d^2 \nu_0}{dt^2} = + 62.80$$

$$\frac{d^2 \nu_{+1}}{dt^2} = + 16.00$$

Die eben entwickelte Methode der Bestimmung der zweiten Differentialquotienten wird bei der Hansen-Tietjen'schen Methode ebenfalls bei der Bestimmung der Störung der auf der Bahnebene senkrechten Coordinate z in Anwendung gezogen werden müssen, doch wird der Umstand, dass diese letztere Störung sehr klein ist, diese Rechnungsoperation ungemein rasch erledigen lassen.

Es wird also sein:

	$p = [w]$	$P = W_0$
1874 Oct. 27	0.009647	— 25.89
	— 48	+ 1.84
Dec. 6	9599	— 24.05
	0	+ 2.03
1875 Jan. 15	9599	— 22.02
	+ 49	+ 2.11
Febr. 24	9648	— 19.91
$z = - 11.526 t^2 + 0.339 t^3 + 0.015 t^4.$		

also

$$z_{-2} = - 27.00$$

$$z_{-1} = - 2.92$$

$$z_0 = - 2.84$$

$$z_{+1} = - 24.71$$

und

$$\frac{d^2 z_{-2}}{dt^2} = - 25.63$$

$$\frac{d^2 z_{-1}}{dt^2} = - 24.02$$

$$\frac{d^2 z_0}{dt^2} = - 21.99$$

$$\frac{d^2 z_{+1}}{dt^2} = - 19.67$$

Die übrigen in der Hansen-Tietjen'schen Methode auftretenden Integrale sind einfache Quadraturen und bedürfen daher keiner weiteren Entwicklungen.

Den Umstand, dass p stets klein ist, hat Hansen benützt, um für den Beginn der Rechnung ebenfalls ein directes Integrationsverfahren anzuwenden; denn es ist offenbar:

$$x = \iint P dt^2 - \iint p dt^2 \iint P dt^2 + \iint p dt^2 \iint p dt^2 \iint P dt^2 - \dots$$

Ich begnüge mich jedoch mit dieser Andeutung, da dieses Verfahren, obwohl es den Vortheil einer viel ausgedehnteren Anwendung besitzt, bei weitem

unbehüllicher und mühsamer sich gestaltet, als die oben angegebene Methode. Der Vorwurf der Beschränkung auf die ersten Intervalle ist kein massgebender, da man, sobald die Rechnung im Gange ist, sofort einen anderen Weg einzuschlagen in der Lage ist, der sich sehr bequem erweist und den ich nunmehr auseinandersetzen will. Uebrigens lässt sich ein viel bequemer analytisches Verfahren angeben, von welchem im letzten Abschnitte der Störungsrechnung die Rede sein wird, doch sind die oben in Vorschlag gebrachten Methoden für die vorliegenden Zwecke bequemer, weshalb ich mich auf diesen Hinweis beschränke.

Sobald man also die vier zweiten Differentialquotienten ermittelt hat, wird man sofort in der bekannten Weise (vergl. pag. 53) die doppelte mechanische Quadratur auf dieselben anwenden, also zunächst die Anfangsconstanten für die erste und zweite summirte Reihe berechnen nach:

$$\begin{aligned} {}^1f(a - \tfrac{1}{2}w) &= -\tfrac{1}{24}f''(a - \tfrac{1}{2}w) + \tfrac{17}{5760}f''''(a - \tfrac{1}{2}w) - \dots \\ {}^2f(a - w) &= +\tfrac{1}{24}f''(a) - \tfrac{17}{5760}\{2f''''(a) + f''''(a - w)\} + \dots \end{aligned}$$

dann wird man die einfache und doppelte Summation ausführen und auf diese Art, wenn die Rechnung bis zum Werthe $f(a + [i-1]w)$ durchgeführt ist, den genauen Werth von ${}^2f(a + iw)$ ermittelt haben.

Weiter wird man sich zu erinnern haben, dass nach der Theorie der mechanischen Quadraturen:

$$x_i = {}^2f(a + iw) + \tfrac{1}{12}f''(a + iw) - \tfrac{1}{240}f''''(a + iw) + \dots$$

ist; dieser Ausdruck wird, unter der Voraussetzung, dass die Berechnung der vorhergehenden Intervalle einschliesslich des Intervalles $a + (i-1)w$ durchgeführt ist, eine genügende Näherung für den Werth von x_i ergeben, um hiermit den zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2 x_i}{dt^2}$ mittelst der Relation:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = P - p x_i$$

näherungsweise berechnen zu können; in dem letzteren Ausdrucke bedarf es wegen des kleinen Factors p nur einer genäherten Kenntniss von x_i , so dass es vollkommen genügen wird, zu dem bereits genau bekannten Werthe von ${}^2f(a + iw)$ die Werthe von $\tfrac{1}{12}f''(a + iw)$ und $-\tfrac{1}{240}f''''(a + iw)$ nach dem Gange der Funktion in dem vorangehenden Differenzschema hypothetisch hinzuzufügen; ein Fehler in diesen Annahmen geht nach den eben gemachten Betrachtungen ganz wesentlich verringert ins Resultat über. Jedenfalls also wird dieses Verfahren für

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f(a + iw)$$

einen hinreichend genauen Werth finden lassen, welcher, einer weiteren Rechnung zu Grunde gelegt, bei der nur noch $f''(a + iw)$ hypothetisch anzunehmen wäre, den völlig strengen Werth wird finden lassen. Eine etwas fehlerhafte hypothetische An-

nahme für $f''(a+iw)$ wird aber niemals, weder in der ersten, noch in der zweiten Annäherung, einen merkbaren Fehler verursachen können, da das Resultat nur um das Product aus der fehlerhaften Annahme in $\frac{p}{240}$ verfälscht wird.

Dieses indirecte Verfahren hat indess manche Unannehmlichkeiten und vergrößert die Arbeit; dabei mag bemerkt werden, dass es, wie die Erfahrung lehrt, nicht immer möglich ist, für $f''(a+iw)$ nach dem Gange der Differenzen genügende Annäherungen einzuführen, um stets einer Wiederholung der Rechnung überhoben zu sein. Es lässt sich aber ein Verfahren angeben, welches die indirecte Rechnung völlig beseitigt; dasselbe ist von Tietjen im Berliner Jahrbuch für 1877 zuerst angegeben worden.

Den gemachten Auseinandersetzungen gemäss wird man stets in der Lage sein, den Ausdruck:

$$S_p = {}''f(a+iw) - \frac{1}{240} f''(a+iw) + \frac{1}{12} P \quad 5)$$

mit völliger Schärfe zu berechnen, da die einzige unbekannte Grösse $f''(a+iw)$ stets mit genügender Annäherung aus dem Gange der Funktion ermittelt werden kann, wenn man dieselbe, was in den meisten Fällen ohne Nachtheil geschehen kann, nicht ganz übergehen will. Es wird deshalb vorausgesetzt werden können, dass S_p ein völlig bekannter Werth ist.

Vergleicht man diesen Werth mit:

$$x_i = {}''f(a+iw) + \frac{1}{12} f'(a+iw) - \frac{1}{240} f''(a+iw) + \dots$$

so sieht man, dass man wegen

$$f(a+iw) = \frac{d^2 x_i}{d\varepsilon^2} = P - p x_i$$

setzen darf:

$$p x_i = p S_p - \frac{1}{12} p^2 x_i;$$

schreibt man also:

$$p' = \frac{p}{1 + \frac{1}{12} p} \quad 6)$$

so wird

$$p x_i = p' S_p$$

und hiermit:

$$f(a+iw) = \frac{d^2 x_i}{d\varepsilon^2} = P - p' S_p \quad 7)$$

womit jede indirecte Rechnung vermieden ist, da die drei Grössen P , p' und S_p direct berechnet werden können.

Der hier erläuterten Methode entsprechend wird man daher die Integration der ersten und dritten Gleichung in IX (pag. 148) ausführen können. Die übrigen Gleichungen sind direct berechenbar und führen auf einfache Integrationen. Für die einfachen Integrationen wird man den gemachten Voraussetzungen über die Lage der Osculationsepoche nach zur Bestimmung der Anfangsconstante die Formeln:

$$f\left(a - \frac{1}{2}w\right) = -\frac{1}{24}f''\left(a - \frac{1}{2}w\right) + \frac{17}{5760}f'''\left(a - \frac{1}{2}w\right) - \dots$$

$$\int_{a-\frac{1}{2}w}^{a+iw} f(x) dx = f\left(a + iw\right) - \frac{1}{12}f''\left(a + iw\right) + \frac{11}{720}f'''\left(a + iw\right) - \dots$$

zu benützen haben, wobei zu beachten ist, dass in der letzteren Formel rechts vom Gleichheitszeichen die Funktionswerthe arithmetische Mittel sind.

§ 3. Berechnung der Coordinaten.

Die oben auseinandergesetzte Methode der Berechnung der Störungswerthe in den polaren Coordinaten setzt die Kenntniss der störenden Kräfte voraus, die in der Bahnebene in der Richtung des Radiusvector, senkrecht auf denselben, und senkrecht auf die Bahnebene wirken; diese Kräfte erscheinen in den obigen Formeln nicht unmittelbar, sondern es treten die Grössen:

$$U = k^2 m_1 K(r) r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l)$$

$$R = k^2 m_1 K \frac{r_1}{(r)} \cos B_1 \cos (L_1 - l)$$

$$w_1 = k^2 m_1 \frac{1}{\varrho^3}$$

$$W = k^2 m_1 K r_1 \sin B_1$$

auf, wobei gesetzt ist:

$$K = \frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}$$

Die Grössen r und l berechnen sich in bekannter Weise aus den Elementen, r_1 kann aus den Ephemeriden direct entlehnt werden, B_1 und L_1 dagegen müssen aus den Ephemeridenangaben abgeleitet werden. Die Ephemeriden geben nämlich die heliocentrischen Längen λ' und Breiten β' . Vor Allem müssen diese Angaben auf das fixe Aequinoctium reducirt werden, auf welches sich die zu Grunde gelegten Elemente beziehen. Als fixes Aequinoctium wird man wohl am besten das mittlere Aequinoctium des nächsten Jahrzehentanfanges benützen, um für die Angaben des Berliner Jahrbuches die bequemste Anwendung zu erhalten.

L_1 und B_1 sind den Längen und Breiten analoge Grössen, jedoch anstatt auf die Ebene der Ekliptik auf die ungestörte Bahnebene bezogen, ferner liegt der Anfangspunkt der Zählung nicht im Frühlährungspunkte, sondern im aufsteigenden Knoten der ungestörten Bahn in der Ekliptik.

Betrachtet man daher das sphärische Dreieck zwischen dem Pole der Bahn, dem Pole der Ekliptik und dem heliocentrischen Orte des störenden Planeten auf der Himmelskugel, so erhält man leicht die folgenden Relationen, wenn man mit ϱ_0 und i_0 den aufsteigenden Knoten und die Neigung bezeichnet:

$$\left. \begin{aligned} \sin B_1 &= \sin \beta_0' \cos i_0 - \cos \beta_0' \sin i_0 \sin (\lambda_0' - \varpi_0) \\ \cos B_1 \cos L_1 &= \cos \beta_0' \cos (\lambda_0' - \varpi_0) \\ \cos B_1 \sin L_1 &= \sin \beta_0' \sin i_0 + \cos \beta_0' \cos i_0 \sin (\lambda_0' - \varpi_0) ; \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

setzt man also, um die Formeln in eine bequeme Form zu bringen:

$$\left. \begin{aligned} q \sin Q &= \sin \beta_0' \\ q \cos Q &= \cos \beta_0' \sin (\lambda_0' - \varpi_0) \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} \cos B_1 \cos L_1 &= \cos \beta_0' \cos (\lambda_0' - \varpi_0) \\ \cos B_1 \sin L_1 &= q \cos (Q - i_0) \\ \sin B_1 &= q \sin (Q - i_0) ; \end{aligned} \right\} \quad 3)$$

der Abstand des gestörten Körpers vom ungestörten q findet sich aus:

$$\left. \begin{aligned} q \cos \vartheta \cos \Theta &= r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l) - (r) \\ q \cos \vartheta \sin \Theta &= r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l) \\ q \sin \vartheta &= r_1 \sin B_1 - z \end{aligned} \right\} \quad 4)$$

wobei:

$$l = l' + \omega_0 + \Delta \omega \quad (\text{vergl. IVb pag. 144})$$

ist.

Von diesen Formeln kann man Gebrauch machen, wenn man streng die Rechnung durchführen will auf Grundlage der heliocentrischen Coordinaten der störenden Planeten, die sich in den Ephemeriden finden. Beziehen sich die Coordinaten, wie dies im Berliner Jahrbuch bis 1867 inclusive und den übrigen astronomischen Ephemeriden der Fall ist, auf das jedesmalige wahre Aequinoctium, so wird man die auf pag. 82 angeführten Formeln zur Reduction auf das gewählte fixe Aequinoctium benützen.

Im Berliner Jahrbuch für 1868, 1869 und 1870 finden sich die heliocentrischen Coordinaten nicht unmittelbar, indem die daselbst allein angeführten Längen in der Bahn mit den im Anhang angeführten Bahnlagen zur strengen Berücksichtigung der Breiten der störenden Planeten über dieser Bahnebene nicht ausreichend sind; dagegen werden die mitgetheilten rechtwinkligen Coordinaten die verlangten Grössen leicht geben, denn es ist:

$$\begin{aligned} r_1 \cos \lambda_0' \cos \beta_0' &= x_1 \\ r_1 \sin \lambda_0' \cos \beta_0' &= y_1 \\ r_1 \sin \beta_0' &= z_1 , \end{aligned}$$

wobei man ausser der Prüfung, die sich aus dem regelmässigen Gange der Differenzwerthe ergibt, als theilweise Controle für die Richtigkeit der Rechnung den Umstand benützen kann, dass der so gefundene Werth von r_1 mit dem im Jahrbuche angegebenen übereinstimmen muss.

Vom Jahre 1871 ab geben die mit Rücksicht auf die pag. 83 gemachten Bemerkungen im Berliner Jahrbuche angeführten Angaben die Mittel an die Hand, unmittelbar die verlangten Grössen λ_0' , β_0' und r_1 demselben zu entnehmen.

Vom Jahre 1880 ab finden sich aber auf meinen Vorschlag Angaben im Berliner Jahrbuche, welche die Rechnung nach den Formeln 1), 2) und 3) des vorliegenden Paragraphen wesentlich erleichtern.

Es finden sich nämlich in der Columnne B_0 die Breiten des Planeten über der am Fusse der Tabelle angegebenen Bahnlage, welche letztere durch eine längere Reihe von Jahren constant angenommen wird. Es soll nun gezeigt werden, wie man diese Angaben für die Rechnung verwerthen kann.

Betrachtet man zwei Ebenen im Raume, von denen man eine als die Fundamentalebene wählt und legt in die Richtung des aufsteigenden Knotens die gemeinsame positive X -Achse, während die Achsen der Y und Z den sonst üblichen Annahmen analog gewählt werden sollen, so erhält man, wenn J die Neigung der beiden Ebenen gegen einander bedeutet, in der bekannten Weise für den Uebergang von den rechtwinkligen auf die Fundamentalebene bezogenen Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes auf die analogen auf die andere Ebene bezogenen Coordinaten ξ', η', ζ' desselben Punktes (vergl. I pag. 12) die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi' \\ \eta &= \eta' \cos J - \zeta' \sin J \\ \zeta &= \eta' \sin J + \zeta' \cos J.\end{aligned}$$

Bezeichnet man den sphärischen Abstand (Breite) des Himmelskörpers von dem durch die Fundamentalebene mit der Himmelskugel gebildeten grössten Kreise mit b , in Bezug auf die andere Ebene mit b' , und den Winkelabstand des Fusspunktes dieses sphärischen Perpendikels mit der X -Achse, gezählt in der Bewegungsrichtung des Himmelskörpers, beziehungsweise mit u und u' , so wird man auch schreiben dürfen, wenn man mit r den im Allgemeinen willkürlich zu wählenden Abstand des Himmelskörpers vom Anfangspunkte der Coordinaten bezeichnet:

$$\left. \begin{aligned}r \cos b \cos u &= r \cos b' \cos u' \\ r \cos b \sin u &= r \cos b' \sin u' \cos J - r \sin b' \sin J \\ r \sin b &= r \cos b' \sin u' \sin J + r \sin b' \cos J\end{aligned} \right\} \quad 5)$$

Wählt man nun als Fundamentalebene die Ebene des gestörten Himmelskörpers zur Zeit der Osculationsepoche und beachtet, dass die polare Coordinate L_1 [vergl. II pag. 144] vom aufsteigenden Knoten (Ω) aus gezählt wird, so wird man, wenn man mit φ den Abstand des aufsteigenden Knotens der Bahnebene des störenden Planeten, in der Bahnebene des gestörten Himmelskörpers, gezählt in der Bewegungsrichtung, bezeichnet, die Relation:

$$L_1 = u + \varphi$$

haben, und weiter wird die in 5) durch b ausgedrückte Coordinate dann identisch mit der am oben angeführten Orte mit B_1 bezeichneten Grösse.

Bezeichnet man mit L die in den Ephemeriden mitgetheilte, auf das gewählte fixe Aequinoctium bezogene Länge in der Bahn, so wird, da L aus der Addition der Länge des aufsteigenden Knotens und des Argumentes der Breite entsteht, sein.

wenn man analog wie oben durch φ' den Abstand des aufsteigenden Knotens der Bahnebene des störenden in der Bahnebene des gestörten Planeten vom aufsteigenden Knoten der Bahn des störenden Körpers (Ω') in der Ekliptik darstellt:

$$u' = L - (\Omega' + \varphi') ;$$

ausserdem wird die in 5) durch b' ausgedrückte Grösse offenbar mit B_0 identisch und man wird den Sinus dieses Bogens mit dem Bogen selbst vertauschen, dessen Cosinus aber der Einheit gleich setzen dürfen. Demgemäss hat man zur Berechnung von B_1 und L_1 das Formelsystem:

$$\left. \begin{aligned} u' &= L - (\Omega' + \varphi') \\ \cos B_1 \cos u &= \cos u' \\ \cos B_1 \sin u &= \sin u' \cos J - B_0 \sin 1'' \sin J \\ \sin B_1 &= \sin u' \sin J + B_0 \sin 1'' \cos J \\ L_1 &= u + \varphi . \end{aligned} \right\} \quad 6$$

Hiermit sind die Grössen B_1 und L_1 bekannt und die weitere Rechnung nach den Formeln 4) (pag. 157) hat keine Schwierigkeit, da wie oben:

$$l = V + \omega_0 + \mathcal{A}\omega$$

anzunehmen ist.

Die aus B_0 in den Formeln 6) resultirenden Correctionen können sehr leicht mit Hilfe der Additions- und Subtractionslogarithmen in Rechnung gebracht werden, doch kann es unter Umständen bequem sein, vorerst u und B_1 ohne Rücksicht auf B_0 zu rechnen. Werthe, die ich beziehungsweise mit u_0 und B_1^0 bezeichnen will, und nachträglich den Unterschied $u - u_0$ auf differentiellem Wege zu bestimmen; aus der Differentiation der Gleichungen 6) erhält man leicht nach einigen offenkundigen Reductionen:

$$\left. \begin{aligned} u - u_0 &= - \frac{\cos u'}{\cos B_1} \sin J \cdot B_0 \\ B_1 - B_1^0 &= - \frac{\cos J}{\cos B_1} B_0 . \end{aligned} \right\} \quad 7)$$

Wiewohl demnach die Berechnung der Grössen L_1 und B_1 nunmehr wenig an Bequemlichkeit zu wünschen übrig lässt, so lässt sich doch noch eine für viele Fälle wesentlich bequemere Form angeben. Ist nämlich die gegenseitige Neigung der in Betracht kommenden Ebenen (J) eine mässige Grösse, wie dies in der That für die meisten Planeten der Fall ist, so kann man zuerst B_0 ganz ausser Acht lassen, indem man die daraus entstehenden Correctionen einer nachträglichen Berücksichtigung mittelst der Formeln 7) vorbehält und man erhält dann durch Division der beiden ersten Gleichungen 6):

$$\tan u_0 = \tan u' \cos J ;$$

wendet man auf diesen Ausdruck, in welchem der Voraussetzung gemäss $\cos J$ wenig von der Einheit verschieden ist, die im ersten Bande (pag. 28) angeführte Reihenentwicklung an, und beachtet, dass:

$$- \frac{\cos J - 1}{\cos J + 1} = - \tan^2 \frac{1}{2} J \quad 8)$$

ist, so wird sein, wenn man die erste Gleichung in 7 (pag. 159) sofort heranzieht:

$$u = u' - \frac{\cos u'}{\cos B_1} \sin J \cdot B_0 - \frac{\tan^2 \frac{1}{2} J}{\sin 1''} \sin 2 u' + \frac{\tan^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin 1''} \sin 4 u' - \dots \quad 9)$$

Die Benützung dieser Reihe kann von Fall zu Fall durch Anwendung einer kleinen Hilfstafel wesentlich erleichtert werden.

Für die Durchrechnung der Formeln ist nicht die Kenntniss des Bogens B_1 nöthig, sondern nur die Kenntniss der Werthe von $\sin B_1$ und $\cos B_1$; für die Berechnung des Sinus wird aus 6) (pag. 159) folgen:

$$\sin B_1 = \sin u' \sin J + B_0 \sin 1'' \cos J; \quad 10)$$

da $\sin B_1$ der Voraussetzung nach nicht gross ist, so wird man auch stets sicher den Uebergang auf den Cosinus machen können, dessen Kenntniss man für die Formel 9) und für die spätere Rechnung bedarf.

Die Anwendung der eben entwickelten Ausdrücke setzt noch die Kenntniss der Grössen Ψ , Ψ' und J voraus. Aus der Betrachtung des sphärischen Dreiecks, welches die Ekliptik mit den Bahnebenen des gestörten und des störenden Planeten bildet, ergibt sich sofort, wenn man die diesbezüglichen aufsteigenden Knoten und Neigungen beziehungsweise mit Ω , Ω' und i , i' bezeichnet, durch Anwendung der Gauss'schen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Psi + \Psi') &= \sin \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \sin \frac{1}{2} (i' + i) \\ \sin \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Psi + \Psi') &= \cos \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \sin \frac{1}{2} (i' - i) \\ \cos \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Psi - \Psi') &= \sin \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \cos \frac{1}{2} (i' + i) \\ \cos \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Psi - \Psi') &= \cos \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \cos \frac{1}{2} (i' - i) \end{aligned} \right\} \quad 11)$$

welche Formeln die erforderlichen drei Grössen J , Ψ und Ψ' unzweideutig bestimmen; dabei wird man zweckmässig die an sich willkürliche Voraussetzung machen dürfen, dass J kleiner als 180° angenommen wird, also $\sin \frac{1}{2} J$ und $\cos \frac{1}{2} J$ stets positiv sind, wodurch sich die Quadranten für die Winkel $\frac{1}{2} (\Psi + \Psi')$ und $\frac{1}{2} (\Psi - \Psi')$ ergeben. Die so ermittelten 3 Grössen wird man so lange unverändert beibehalten können, als die Elemente Ω , Ω' , i und i' keine Aenderung erfahren; da dies nach der vorliegenden Methode mindestens für ein Jahrzehent ohne Unbequemlichkeit geschehen darf, so wird die Berechnung dieses sphärischen Dreiecks selten genug auszuführen sein und kann demnach den vorbereitenden Rechnungen angeschlossen werden.

Es ist klar, dass bei der vorliegenden Methode der Störungsrechnung, da die Störungscoordinaten auf eine fixe Ebene bezogen sind, eine Aenderung des Aequinoctiums auf dieselbe ohne Einfluss ist; nur muss darauf geachtet werden, dass auf diese Aenderung bei der Berechnung der Coordinaten gehörig Rücksicht genommen wird. Man wird demgemäss in den Elementen die durch die Präcession im Knoten, in der Neigung und im Abstände des Perihels vom Knoten bewirkten Aenderungen in Rechnung ziehen (I pag. 81) und mit den auf dasselbe Aequinoctium bezogenen Coordinaten des störenden Planeten verbinden; da aber voraussichtlich im Berliner Jahrbuch zu jenen Epochen, wo eine Aenderung des Aequinoctiums eintritt,

auch eine Aenderung der Grössen Ω' und i' vorgenommen werden wird, so wird man die Berechnung der Formeln 11) stets auf die Epoche dieser Aenderungen beschränken dürfen.

Schliesslich dürfte es passend sein, an dieser Stelle zu erwähnen, wie man die nach dieser Methode erlangten Störungswerthe zur Berechnung einer strengen Ephemeride verwerthen kann.

Man wird sich zu dem Ende aus den Störungstabellen für die Epochen der Ephemeride die Werthe ΔM , $\Delta \omega$, ν und z ermitteln. Es wird hierbei zweckmässig sein, für einige der Ephemeride nahe liegende Störungsepochen und für die Mitte derselben die Störungswerthe zu bestimmen, und mit Hilfe der so gebildeten kleinen Störungstafeln die Zwischenwerthe zu interpoliren; es wird sich dieses Verfahren, bei welchem man eine Reihe von Werthen braucht, etwas kürzer erweisen, als die directe Rechnung für jeden einzelnen Werth mit Hilfe der P - und Q -Coëfficienten (vergl. Tafel VI—IX).

Man gelangt mit Hilfe der Formeln V) und VI) pag. 145 zur Kenntniss der Coordinaten des Planeten in der ungestörten Bahnlage; es ist also zu rechnen:

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 + \mu_0 t + \Delta M \\ M &= E - e_0'' \sin E \\ ((r)) \sin V &= a_0 \cos q_0 \sin E \\ ((r)) \cos V &= a_0 (\cos E - e_0) \\ l &= V + \omega_0 + \Delta \omega \\ (r) &= ((r)) (1 + \nu) \end{aligned} \right\} \quad 12)$$

Um nun z bei der Berechnung der rechtwinkligen Aequatoral-Coordinaten zu berücksichtigen, denke man sich zwei rechtwinklige Coordinatensysteme mit einem gemeinsamen Anfangspunkt und mit gemeinsamer X -Achse, welche letztere mit der Knotenlinie der ungestörten Bahn in der Ekliptik (Ω_0) zusammenfallen soll; die $X Y$ -Ebene möge die gewählte fixe Ekliptik sein, die $X_1 Y_1$ -Ebene aber soll der ungestörten Bahnlage entsprechen und die diesbezüglichen Z -Coordinaten sollen in der üblichen Weise gezählt werden. Bezeichnet man mit i_0 die Neigung der ungestörten Bahnebene gegen die Ekliptik, so hat man sofort die Relationen:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 \cos i_0 - z_1 \sin i_0 \\ z &= y_1 \sin i_0 + z_1 \cos i_0 . \end{aligned}$$

Setzt man für x_1 , y_1 die polaren Coordinaten, so werden die ekliptikalen auf Ω_0 als Ausgangspunkt bezogenen Coordinaten:

$$\begin{aligned} x &= (r) \cos l \\ y &= (r) \sin l \cos i_0 - z_1 \sin i_0 \\ z &= (r) \sin l \sin i_0 + z_1 \cos i_0 . \end{aligned}$$

Verlegt man nun den Ausgangspunkt der Zählung auf den Frühljahrspunkt, so wird sein:

$$x_{\varepsilon} = x \cos \Omega_0 - y \sin \Omega_0$$

$$y_{\varepsilon} = x \sin \Omega_0 + y \cos \Omega_0$$

$$z_{\varepsilon} = z,$$

und die Substitution ergibt:

$$x_{\varepsilon} = (r) \{ \cos l \cos \Omega_0 - \sin l \sin \Omega_0 \cos i_0 \} + z_1 \sin \Omega_0 \sin i_0$$

$$y_{\varepsilon} = (r) \{ \cos l \sin \Omega_0 + \sin l \cos \Omega_0 \cos i_0 \} - z_1 \cos \Omega_0 \sin i_0$$

$$z_{\varepsilon} = (r) \sin l \sin i_0 + z_1 \cos i_0;$$

verwandelt man diese Ekliptikalkoordinaten mit Hilfe der im ersten Bande (pag. 12) angesetzten Transformationsformeln, so wird man leicht finden:

$$x' = (r) \{ \cos l \cos \Omega_0 - \sin l \sin \Omega_0 \cos i_0 \} + z_1 \sin \Omega_0 \sin i_0$$

$$y' = (r) \{ \cos l \sin \Omega_0 \cos \varepsilon + \sin l \cos \Omega_0 \cos i_0 \cos \varepsilon - \sin l \sin i_0 \sin \varepsilon \} \\ - z_1 \{ \cos \Omega_0 \sin i_0 \cos \varepsilon + \cos i_0 \sin \varepsilon \}$$

$$z' = (r) \{ \cos l \sin \Omega_0 \sin \varepsilon + \sin l \cos \Omega_0 \cos i_0 \sin \varepsilon + \sin l \sin i_0 \cos \varepsilon \} \\ + z_1 \{ - \cos \Omega_0 \sin i_0 \sin \varepsilon + \cos i_0 \cos \varepsilon \}.$$

Die Einführung einiger Hilfsgrößen wird die Berechnung dieser Ausdrücke erleichtern (vergl. I pag. 16); setzt man nämlich:

$$\left. \begin{aligned} n \sin N &= \sin i_0 \\ n \cos N &= \cos \Omega_0 \cos i_0 \\ m \sin M &= \cos \Omega_0 \sin i_0 \\ m \cos M &= \cos i_0 \\ \sin a \sin A &= \cos \Omega_0 \\ \sin a \cos A &= - \sin \Omega_0 \cos i_0 \\ \sin b \sin B &= \sin \Omega_0 \cos \varepsilon \\ \sin b \cos B &= n \cos (N + \varepsilon) \\ \sin c \sin C &= \sin \Omega_0 \sin \varepsilon \\ \sin c \cos C &= n \sin (N + \varepsilon) \\ \cos a &= \sin \Omega_0 \sin i_0 \\ \cos b &= - m \sin (M + \varepsilon) \\ \cos c &= m \cos (M + \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad 13)$$

so ist, wenn man statt z_1 den Buchstaben z schreibt und darunter die Störung in der auf der Bahnebene senkrechten Coordinate versteht:

$$\left. \begin{aligned} x' &= (r) \sin a \sin (A + l) + z \cos a \\ y' &= (r) \sin b \sin (B + l) + z \cos b \\ z' &= (r) \sin c \sin (C + l) + z \cos c \end{aligned} \right\} \quad 14)$$

Als Probe für die Richtigkeit dieser Constanten kann benützt werden (vergl. I pag. 17):

$$\operatorname{tg} i = - \frac{\sin b \sin c \sin (C - B)}{\sin a \cos A}.$$

§ 4. Uebergang auf osculirende Elemente nach Hansen-Tietjen's Methode.

Das Bedürfniss des Ueberganges auf osculirende Elemente tritt bei dieser Methode aus ähnlichen Ursachen ein, wie bei Encke's Methode; nur werden im Allgemeinen die Störungen weit mehr anwachsen können, als bei der letzteren Methode, bevor es nothwendig wird, diesen Uebergang zu machen.

Um nun diese Uebertragung, falls sie aus irgend einer Ursache wünschenswerth erscheinen sollte, ausführen zu können, bedarf man geeigneter Formeln und ich werde ähnlich, wie früher, zwei Arten des Ueberganges vornehmen, nämlich vorerst jene Methode, nach der man die Unterschiede der gestörten und ungestörten Elemente ermittelt, und welche einer grösseren Genauigkeit fähig ist, ohne allzugrosse logarithmische Tafeln anwenden zu müssen, und dann jene, in der man aus den gestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten unmittelbar die Elemente ableitet.

Aus der Störungsrechnung sind für die gewählte Osculationsepoche zu bestimmen: $\mathcal{A}M$, $\mathcal{A}\omega$, ν , $\frac{dr}{dt}$, z , $\frac{dz}{dt}$ und $\int \Sigma U dt$; die erste Aufgabe, die zu lösen ist, besteht dann wieder darin, $\mathcal{A}(r)$, $\mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right)$ und $\mathcal{A}(\downarrow p)$ (vergl. über die Bedeutung dieser Symbole pag. 89) zu ermitteln, da dann die Herleitung der Elemente wie bei Encke's Methode möglich ist.

Man hat vorerst:

$$r = (\langle r \rangle) (1 + \nu) : \cos b = (\langle r \rangle) (1 + \nu) \left(1 + \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} b}{\cos b}\right) \quad 1)$$

wobei der Winkel b bestimmt ist durch die Relation:

$$\text{tang } b = \frac{z}{\langle r \rangle} \quad 2)$$

Es soll also zunächst der Unterschied:

$$\langle r \rangle - r_0$$

ermittelt werden. Es ist:

$$M_0 + \mathcal{A}M = E - e_0 \sin E$$

also findet sich der Unterschied der excentrischen Anomalien durch die Gleichung:

$$\mathcal{A}M = (E - E_0) - 2 e_0 \sin \frac{1}{2} (E - E_0) \cos \frac{1}{2} (E + E_0) . \quad 3)$$

Da aber durch eine vorausgehende Rechnung sowohl E , als auch E_0 mit einem hohen Grade der Annäherung bekannt ist, so kann eine fast directe Bestimmung von $E - E_0$ leicht genug ausgeführt werden. Setzt man nämlich:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (E - E_0)}{\frac{1}{2} (E - E_0)} = \beta$$

wo β die Bogenverwandlung ist, welche Grösse sich fast ohne Mühe aus den logarithmischen Tafeln ergibt und bei der Kleinheit von $(E - E_0)$ im Allgemeinen wenig von der Einheit verschieden ist, so wird:

$$E - E_0 = \frac{JM}{1 - e_0 \beta \cos \frac{1}{2} (E + E_0)} \quad 4)$$

Nun bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} ((r)) \sin V &= a_0 \cos q_0 \sin E = r_0 \sin v_0 + 2 a_0 \cos q_0 \sin \frac{1}{2} (E - E_0) \cos \frac{1}{2} (E + E_0) \\ ((r)) \cos V &= a_0 (\cos E - e_0) = r_0 \cos v_0 - 2 a_0 \sin \frac{1}{2} (E - E_0) \sin \frac{1}{2} (E + E_0) ; \end{aligned}$$

setzt man also:

$$\begin{aligned} \cos q_0 \cos \frac{1}{2} (E + E_0) &= n' \cos N \\ \sin \frac{1}{2} (E + E_0) &= n' \sin N \\ 2 a_0 n' \sin \frac{1}{2} (E - E_0) &= a_0 \beta n' (E - E_0) \sin v'' = n \end{aligned} \quad 5)$$

so wird:

$$\begin{aligned} \tan (V - v_0) &= \frac{\frac{n}{r_0} \cos (N - v_0)}{1 - \frac{n}{r_0} \sin (N - v_0)} \\ ((r)) - r_0 &= - \frac{n \sin \{ N - \frac{1}{2} (V + v_0) \}}{\cos \frac{1}{2} (V - v_0)} . \end{aligned} \quad 6)$$

Man kann aber $V - v_0$ und $((r)) - r_0$ auch in anderer Weise ableiten, die mit Vortheil als Controle angewendet werden kann; es ist:

$$\begin{aligned} ((r)) &= a_0 (1 - e_0 \cos E) \\ r_0 &= a_0 (1 - e_0 \cos E_0) \end{aligned}$$

also wird:

$$\begin{aligned} ((r)) - r_0 &= 2 a_0 e_0 \sin \frac{1}{2} (E - E_0) \sin \frac{1}{2} (E + E_0) = \\ &= a_0 e_0 \beta (E - E_0) \sin v'' \sin \frac{1}{2} (E + E_0) \end{aligned} \quad 7a)$$

Um eine andere Form für die Berechnung von $V - v_0$ zu erhalten, erinnere man sich an die bekannten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sqrt{((r))} \sin \frac{1}{2} V &= \sqrt{a_0 (1 + e_0)} \sin \frac{1}{2} E \\ \sqrt{((r))} \cos \frac{1}{2} V &= \sqrt{a_0 (1 - e_0)} \cos \frac{1}{2} E ; \end{aligned}$$

multipliziert man die erste Gleichung links mit $\sqrt{r_0} \cos \frac{1}{2} v_0$, rechts mit dem äquivalenten Werthe $\sqrt{a_0 (1 - e_0)} \cos \frac{1}{2} E_0$ und ähnlich die zweite Gleichung beziehungsweise mit $\sqrt{r_0} \sin \frac{1}{2} v_0$ und $\sqrt{a_0 (1 + e_0)} \sin \frac{1}{2} E_0$ und subtrahirt, so folgt sofort:

$$\sin \frac{1}{2} (V - v_0) = \frac{a_0 \cos q_0}{\sqrt{r_0 ((r))}} \sin \frac{1}{2} (E - E_0) . \quad 7b)$$

Der Uebergang von $((r))$ auf (r) macht sich sehr einfach, da die Relation besteht:

$$(r) = ((r)) (1 + v) ;$$

es ist also:

$$(r) - ((r)) = ((r)) v ; \quad 8)$$

schliesslich folgt aus 1. (pag. 163) unmittelbar:

$$r - (r) = 2 (r) \frac{\sin \frac{1}{2} b}{\cos b} ;$$

setzt man also:

$$\frac{\nu + z \sin^2 \frac{1}{2} b}{\cos b} = \gamma \quad 9)$$

so wird:

$$\mathcal{A}(r) = r - r_0 = (r) - r_0 + (r) \gamma \quad 10)$$

wobei $(r) - r_0$ nach 6) oder 7a) zu berechnen sein wird.

Um $\left(\frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt}\right)$ zu erhalten, beachte man, dass:

$$r^2 = (r)^2 + z^2$$

ist, woraus durch Differentiation nach der Zeit:

$$r \frac{dr}{dt} = (r) \frac{d(r)}{dt} + z \frac{dz}{dt}$$

folgt, da nun:

$$r \cos b = (r)$$

ist, so kann man schreiben:

$$\frac{dr}{dt} \sec b = \frac{d(r)}{dt} + \tan b \frac{dz}{dt} \quad 11)$$

aus der Gleichung 7) (pag. 146) folgt:

$$\frac{d(r)}{dt} = (r) \frac{d\nu}{dt} + \frac{k e_0 \sin I}{(1+\nu) \sqrt{p_0}};$$

man hat also die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \sec b &= (r) \frac{d\nu}{dt} + \frac{k e_0 \sin I}{(1+\nu) \sqrt{p_0}} + \tan b \frac{dz}{dt} \\ \frac{dr_0}{dt} \sec b &= \frac{k e_0 \sin v_0}{\sqrt{p_0}} \sec b = \frac{k e_0 \sin v_0}{\sqrt{p_0}} + \frac{z \sin^2 \frac{1}{2} b}{\cos b} \frac{k e_0 \sin v_0}{\sqrt{p_0}}, \end{aligned}$$

und durch Subtraction folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt}\right) \sec b &= (r) \frac{d\nu}{dt} + \frac{k e_0}{\sqrt{p_0}} \left\{ \frac{2 \sin \frac{1}{2} (I - v_0) \cos \frac{1}{2} (I + v_0)}{1 + \nu} - \right. \\ &\quad \left. - \sin v_0 \left(\frac{\nu}{1 + \nu} + \frac{z \sin^2 \frac{1}{2} b}{\cos b} \right) \right\} + \tan b \frac{dz}{dt}; \end{aligned}$$

führt man hier nach Gleichung 9) den Werth von γ ein, so resultirt endlich:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt} &= \frac{\cos b}{1 + \nu} \left\{ (r) \frac{d\nu}{dt} + \frac{k e_0}{\sqrt{p_0}} \left[2 \sin \frac{1}{2} (I - v_0) \cos \frac{1}{2} (I + v_0) - \gamma \sin v_0 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z}{(r)} \frac{dz}{dt} \right\}. \quad 12) \end{aligned}$$

Die Bestimmung von $\mathcal{A}(\sqrt{p})$ kann leicht mit der Bestimmung des Knotens K_0 , und der Neigung J der gestörten Bahn in der ungestörten Bahnebene verbunden werden.

Die Coordinaten und Geschwindigkeiten sind dargestellt durch:

$$\begin{aligned} x &= (r) \cos l \\ y &= (r) \sin l \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= - (r) \sin l \frac{dl}{dt} + \cos l \frac{d(r)}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= (r) \cos l \frac{dl}{dt} + \sin l \frac{d(r)}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz}{dt} .\end{aligned}$$

Man erhält also:

$$\left. \begin{aligned}k \sqrt{p} \cos J &= x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = (r)^2 \frac{dl}{dt} \\ k \sqrt{p} \sin K_0 \sin J &= y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = (r) \sin l \frac{dz}{dt} - z (r) \cos l \frac{dl}{dt} - z \sin l \frac{d(r)}{dt} \\ k \sqrt{p} \cos K_0 \sin J &= x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} = (r) \cos l \frac{dz}{dt} + z (r) \sin l \frac{dl}{dt} - z \cos l \frac{d(r)}{dt} .\end{aligned} \right\} 13)$$

Zählt man alle Längen vom Punkte l aus und beachtet, dass nach Gleichung I) pag. 141:

$$(r)^2 \frac{dl}{dt} = k \sqrt{p_0} + \int \Sigma U dt ,$$

ist, so erhält man:

$$\begin{aligned}k \sqrt{p} \cos J &= k \sqrt{p_0} + \int \Sigma U dt \\ k \sqrt{p} \sin (K_0 - l) \sin J &= - \frac{z}{(r)} \left\{ k \sqrt{p_0} + \int \Sigma U dt \right\} \\ k \sqrt{p} \cos (K_0 - l) \sin J &= (r) \frac{dz}{dt} - z \frac{d(r)}{dt} .\end{aligned}$$

Beachtet man nun (vergl. Gleichung 7) pag. 146):

$$\frac{d(r)}{dt} = (r) \frac{dr}{dt} + \frac{k e_0 \sin V}{(1+r)\sqrt{p_0}} \quad 14)$$

so findet sich:

$$\left. \begin{aligned}\sin (l - K_0) \tan J &= \frac{z}{(r)} \\ \cos (l - K_0) \tan J &= \frac{(r) \frac{dz}{dt} - z \frac{d(r)}{dt}}{k \sqrt{p_0} + \int \Sigma U dt}\end{aligned} \right\} 15)$$

womit K_0 und J bestimmt erscheinen; dabei wird l erhalten durch die Gleichung:

$$l = V + \omega_0 + \mathcal{A} \omega . \quad 16)$$

Ans

$$k \sqrt{p} = \left(k \sqrt{p_0} + \int \Sigma U dt \right) \sec J$$

folgt weiter:

$$\mathcal{A}(\sqrt{p}) = \sqrt{p} - \sqrt{p_0} = \left\{ \frac{1}{k} \int \Sigma U dt + 2 \sqrt{p_0} \sin^2 \frac{1}{2} J \right\} \sec J \quad 17)$$

und

$$\mathcal{A}(p) = p - p_0 = \left\{ 2 \sqrt{p_0} + \mathcal{A}(\sqrt{p}) \right\} \mathcal{A}(\sqrt{p}) . \quad 18)$$

Es erscheint angemessen, gleich hier den Uebergang von K_0 und J auf $\Omega - \Omega_0$ und $i - i_0$ aufzuweisen, wobei sich die Bestimmung von $\omega - \omega_0$ unter Einem durchführen lässt.

Nennt man das Argument der Breite des Planeten in der gestörten Bahn in Bezug auf die ungestörte (u) , so ist:

$$\tan(u) = \tan(l - K_0) \sec J.$$

Erinnert man sich, dass Ausdrücke von der Form:

$$\tan \psi = n \tan \varphi$$

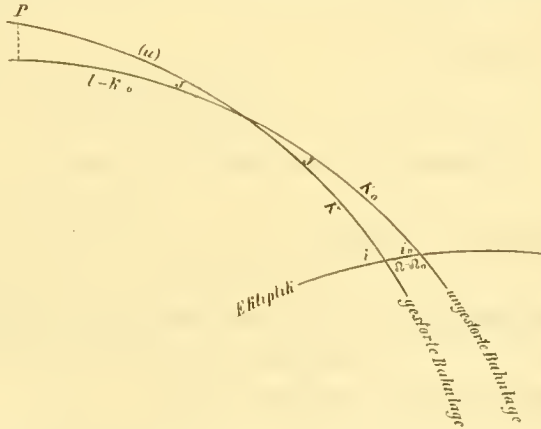
sich in die bekannte Reihe (vergl. I pag. 28):

$$\psi - \varphi = \frac{n-1}{n+1} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \sin 4\varphi + \dots + \frac{1}{m} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^m \sin 2m\varphi + \dots$$

auflösen lassen, so wird man mit Rücksicht auf die Kleinheit von J zweckmässig erhalten:

$$A(u) = (u) - (l - K_0) = -\frac{\tan^2 \frac{1}{2} J}{\sin 1''} \sin 2(l - K_0) + \frac{1}{2} \frac{(\tan^2 \frac{1}{2} J)^2}{\sin 1''} \sin 4(l - K_0) + \dots \quad (19)$$

Um nun die Aenderung des Knotens, der Neigung und des Arguments der Breite in Bezug auf die Ekliptik zu finden, wird die Betrachtung des bezüglichen sphärischen Dreieckes leicht die verlangten Relationen finden lassen. Die Durchschnitte der in Betracht kommenden Ebenen mit der Himmelskugel seien durch Kreise dargestellt, bei P befinde sich der Planet zur Zeit der gewählten neuen Osculationsepoche, die punktirte Linie stelle das sphärische Perpendikel vom Punkte P auf den die ungestörte Bahnlage darstellendengrössten Kreis vor; die Bedeutung der Seiten und Winkel ist unmittelbar in die Figur eingesetzt und bedarf daher keiner näheren Erläuterung.



Setzt man also als Seiten:

$$a = K_0$$

$$b = K$$

$$c = \Omega - \Omega_0$$

als Winkel:

$$A = 180^\circ - i$$

$$B = i_0$$

$$C = J$$

so geben die Neper'schen Gleichungen:

$$\tan \frac{b+c}{2} = \tan \frac{1}{2} a \frac{\cos \frac{1}{2} (B-C)}{\cos \frac{1}{2} (B+C)}$$

$$\tan \frac{b-c}{2} = \tan \frac{1}{2} a \frac{\sin \frac{1}{2} (B-C)}{\sin \frac{1}{2} (B+C)}$$

sofort:

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{1}{2} \{ K + (\Omega - \Omega_0) \} &= \frac{\cos \frac{1}{2} (i_0 - J)}{\cos \frac{1}{2} (i_0 + J)} \tan \frac{1}{2} K_0 \\ \tan \frac{1}{2} \{ K - (\Omega - \Omega_0) \} &= \frac{\sin \frac{1}{2} (i_0 - J)}{\sin \frac{1}{2} (i_0 + J)} \tan \frac{1}{2} K_0 \end{aligned} \right\} \quad 20)$$

welche Formeln man zur Bestimmung von K und $(\Omega - \Omega_0)$ benützen kann. Ist aber i_0 nicht gar zu klein (nur wenige Bogenminuten), so wird man mit Vortheil von den folgenden Reihenentwicklungen Gebrauch machen, die man wohl stets bei den in der Regel stattfindenden Verhältnissen wird benützen können. Wendet man die oben in Erinnerung gebrachte Reihenentwicklung auf die Gleichung 20) an, so findet sich leicht:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \{ K + (\Omega - \Omega_0) \} - \frac{1}{2} K_0 &= \frac{\tan \frac{1}{2} J \tan \frac{1}{2} i_0}{\sin 1''} \sin K_0 + \frac{1}{2} \frac{(\tan \frac{1}{2} J \tan \frac{1}{2} i_0)^2}{\sin 1''} \sin 2 K_0 + \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{(\tan \frac{1}{2} J \tan \frac{1}{2} i_0)^3}{\sin 1''} \sin 3 K_0 + \dots = I \\ \frac{1}{2} \{ K - (\Omega - \Omega_0) \} - \frac{1}{2} K_0 &= - \frac{\tan \frac{1}{2} J \cotg \frac{1}{2} i_0}{\sin 1''} \sin K_0 + \frac{1}{2} \frac{(\tan \frac{1}{2} J \cotg \frac{1}{2} i_0)^2}{\sin 1''} \sin 2 K_0 - \\ &\quad - \frac{1}{3} \frac{(\tan \frac{1}{2} J \cotg \frac{1}{2} i_0)^3}{\sin 1''} \sin 3 K_0 + \dots = II \end{aligned} \right\} \quad 21)$$

und man hat:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}(K) &= K - K_0 = I + II \\ \mathcal{A}(\Omega) &= \Omega - \Omega_0 = I - II \end{aligned} \right\} \quad 22)$$

Weiter ist in der ungestörten Bahn:

$$\omega_0 = l_0 - v_0$$

dagegen der Abstand des Perihels vom Knoten in der gestörten Bahn:

$$\omega = (u) + K - v = (l - K_0) + \mathcal{A}(u) + K - v;$$

die Subtraction der letzteren Gleichungen ergibt:

$$\omega - \omega_0 = \mathcal{A}(K) + \mathcal{A}(u) + (l - l_0) - (v - v_0);$$

man hat aber zu beachten, dass ist:

$$\begin{aligned} l_0 &= v_0 + \omega_0 \\ l &= V + \omega_0 + \mathcal{A}\omega \end{aligned}$$

demnach ist:

$$l - l_0 = (V - v_0) + \mathcal{A}\omega$$

und man wird daher haben:

$$\left. \begin{aligned} \omega - \omega_0 &= \mathcal{A}(K) + \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}\omega + \{ (V - v_0) - (v - v_0) \} \\ \pi - \pi_0 &= (\omega - \omega_0) + (\Omega - \Omega_0) \end{aligned} \right\} \quad 23)$$

wobei die Bestimmung von $v - v_0$ noch nöthig ist, die weiter unten vorgenommen wird.

Aus der Neper'schen Gleichung:

$$\tan \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \cotg \frac{1}{2} C$$

folgt sofort:

$$\tan \frac{1}{2} (i - i_0) = \frac{\cos \{ K_0 + \frac{1}{2} \mathcal{A}(K) \}}{\cos \frac{1}{2} \mathcal{A}(K)} \tan \frac{1}{2} J \quad 24)$$

womit $i - i_0$ bestimmt erscheint.

Zur Bestimmung von $(x - x_0)$, $(e - e_0)$, $(e^2 - e_0^2)$, $(q - q_0)$, $(u - u_0)$ und $(M - M_0)$ wird man dieselben Formeln verwenden können, welche früher für den Uebergang auf osculirende Elemente bei rechtwinkligen Coordinaten aufgestellt wurden (pag. 102, 103), so dass hiermit die Entwicklung der Formeln für die erste Form des Uebergangs erledigt ist.

Will man aber unmittelbar die gestörten Elemente erhalten, so lassen sich auch hierfür recht bequeme Formeln angeben, deren Berechnung mit Vortheil dazu benützt werden kann, um die aus den eben entwickelten Formeln erhaltenen Resultate zu controliren.

Zur Berechnung der gestörten Bahnlage gegen die ungestörte Bahn wird man die Formeln 15) (pag. 166) benützen und weiter rechnen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= (k \bar{p}_0 + \int \Sigma U dt) \sec J \\ l &= l' + \omega_0 + J \omega \\ \text{tang } u &= \text{tang } (l - K_0) \sec J, \end{aligned} \right\} \quad 25)$$

hierauf wird man die Formeln 20) und 24) (pag. 168) heranziehen, um daraus Ω , i und K zu erhalten.

Die Excentricität und die wahre Anomalie resultiren aus (vergl. pag. 89):

$$\left. \begin{aligned} \sin q \sin v &= \frac{\bar{p}}{k} \frac{dr}{dt} \\ \sin q \cos v &= \frac{p}{r} - 1 \end{aligned} \right\} \quad 26)$$

wobei $\frac{dr}{dt}$ zu berechnen sein wird aus (pag. 165):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(r)}{r} \frac{dr'}{dt} + \frac{z}{r} \frac{dz}{dt}; \quad 27)$$

die Grösse $\frac{dr}{dt}$ fand schon bei Berechnung der Formeln 15) ihre Verwendung und ist nach Formel 14) (pag. 166) leicht zu erhalten; ferner ist nach pag. 168:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= (u' + K - v) \\ A &= \omega + \Omega. \end{aligned} \right\} \quad 28)$$

Weiter ist:

$$\left. \begin{aligned} \text{tang } \frac{1}{2} E &= \text{tang } \frac{1}{2} v \cotg (45 + \frac{1}{2} q) \\ M &= E - \frac{\sin q}{\sin i''} \sin E \end{aligned} \right\} \quad 29)$$

und:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{p}{\cos^2 q} \\ \mu &= \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \right\} \quad 30)$$

Ich werde nun die für die Rechnung nöthigen Formeln hier zusammentragen. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass für die neue Osculationsepoche aus der Störungsrechnung entlehnt sind die Werthe von:

$$JM, J\omega, v, \frac{dr}{dt}, z, \frac{dz}{dt} \text{ und } \int \Sigma U dt.$$

Man wird hierbei den Umstand zu berücksichtigen haben, dass für t als Einheit der Sonnentag gilt, wenn man für die Constante des Sonnensystems $\frac{1}{k}$ den im ersten Bande pag. 45 angeführten Werth benützt. Um aber aus den Summationstabellen mit möglichster Bequemlichkeit die Integralwerthe entlehnen zu können, wird es sich empfehlen, als Zeiteinheit das bei der Störungsrechnung benützte Zeitintervall w zu wählen, man wird demnach in den folgenden Formeln überall dort, wo die Grösse k erscheint, sofort (wk) annehmen und kann dann w , soweit es bei den einfachen und doppelten Integralen in Betracht kommt, der Einheit gleich setzen.

Zunächst bestimmt man:

$$M_0 = M_{00} + \mu_0 t. \quad \text{I)}$$

wo M_{00} die mittlere Anomalie der Ausgangselemente ist, t die Zeit (in Einheiten des mittleren Sonnentages) die zwischen der Epoche dieser Elemente und der gewählten neuen Osculationsepoche verflossen ist. Bezeichnet man mit E_{00} die zur mittleren Anomalie M_0 , dagegen mit E_0 die zu $M_0 + JM$ gehörende excentrische Anomalie, so hat man zu rechnen:

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= E_{00} - e_0'' \sin E_{00}, & M_0 + JM &= E_0 - e_0'' \sin E_0 \\ r_0 \sin v_0 &= a_0 \cos q_0 \sin E_{00}, & (r) \sin I &= a_0 \cos q_0 \sin E_0 \\ r_0 \cos v_0 &= a_0 (\cos E_{00} - e_0), & (r) \cos I &= a_0 (\cos E_0 - e_0) \\ r &= (r) (1 + v) \\ r &= (r) \sec b, \quad \text{tg } b = \frac{z}{(r)} \\ \frac{d(r)}{dt} &= (r) \frac{dv}{dt} + \frac{(wk) e_0 \sin I}{(1 + v) \sqrt{p_0}} \end{aligned} \right\} \quad \text{II)}$$

Hierauf berechnet man:

$$\left. \begin{aligned} \sin (l - K_0) \text{tg } J &= \frac{z}{(r)} \\ \cos (l - K_0) \text{tg } J &= \frac{(r) \frac{dz}{dt} - z \frac{d(r)}{dt}}{(wk) \sqrt{p_0} + \int \Sigma U dt} \\ l &= I' + \omega_0 + J\omega \\ J(l - \bar{p}) &= \left\{ \frac{1}{(rk)} \int \Sigma U dt + 2 \sqrt{p_0} \sin^2 \frac{1}{2} J \right\} \sec J \\ J(p) &= \left\{ 2 \sqrt{p_0} + J(l - \bar{p}) \right\} J(Vp) \\ J(u) &= \frac{\text{tg}^2 \frac{1}{2} J}{\sin 1''} \sin 2(l - K_0) + \frac{1}{2} \frac{(\text{tg}^2 \frac{1}{2} J)^2}{\sin 1''} \sin 4(l - K_0) + \dots \end{aligned} \right\} \quad \text{III)}$$

Dann ist:

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \frac{1}{2} J \text{tg } \frac{1}{2} i_0 &= a \\ \text{tg } \frac{1}{2} J \cotg \frac{1}{2} i_0 &= b \\ \text{I} &= \frac{a}{\sin 1''} \sin K_0 + \frac{a^2}{2 \sin 1''} \sin 2 K_0 + \frac{a^3}{3 \sin 1''} \sin 3 K_0 + \dots \\ \text{II} &= - \frac{b}{\sin 1''} \sin K_0 + \frac{b^2}{2 \sin 1''} \sin 2 K_0 - \frac{b^3}{3 \sin 1''} \sin 3 K_0 + \dots \end{aligned} \right\} \quad \text{IV)}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}(K) &= I + II \\ \Omega - \Omega_0 &= I - II \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(i - i_0) &= \frac{\cos \{K_0 + \frac{1}{2}\mathcal{A}(K)\}}{\cos \frac{1}{2}\mathcal{A}(K)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}J \end{aligned} \right\}$$

Hierauf schreitet man zur Bestimmung von $\mathcal{A}(r)$ und $\mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right)$. Bezeichnet man mit β die zu $\sin \frac{1}{2}(E - E_0)$ gehörige Bogenverwandlung also:

$$\log \beta = S - \log \sin 1''$$

wobei S die bekannte Hilfsgrösse zur Berechnung des Logarithmus des Sinus der kleinen Bogen darstellt, so wird sein:

$$\left. \begin{aligned} E_0 - E_{00} &= \frac{\mathcal{A}M}{1 - e_0 \beta \cos \frac{1}{2}(E_0 + E_{00})} \\ n' \cos N &= \cos q_0 \cos \frac{1}{2}(E_0 + E_{00}) \\ n' \sin N &= \sin \frac{1}{2}(E_0 + E_{00}) \\ n &= n' a_0 \beta (E_0 - E_{00}) \sin 1'' \\ \operatorname{tg}(I' - v_0) &= \frac{n \cos(N - v_0)}{r_0 - n \sin(N - v_0)} \\ \{(r')\} - r_0 &= - \frac{n \sin \{N - \frac{1}{2}(I' + v_0)\}}{\cos \frac{1}{2}(I' - v_0)} \end{aligned} \right\} \quad \text{V)}$$

Zur Controle rechne man:

$$\left. \begin{aligned} \{(r')\} - r_0 &= a_0 e_0 \beta (E_0 - E_{00}) \sin 1'' \sin \frac{1}{2}(E_0 + E_{00}) \\ \sin \frac{1}{2}(I' - v_0) &= \frac{a_0 \cos q_0 \beta}{2 \sqrt{r_0 \{(r')\}}} (E_0 - E_{00}) \sin 1'' \end{aligned} \right\} \quad \text{VI)}$$

Man findet dann:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{r + 2 \sin^2 \frac{1}{2} b}{\cos b} \\ \mathcal{A}(r) &= r - r_0 = \{ \{(r')\} - r_0 \} + \{(r')\} \gamma \\ \mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right) &= \frac{\cos b}{1 + r} \left[\{(r')\} \frac{dr}{dt} + \frac{(wk) e_0}{\sqrt{p_0}} \{ 2 \sin \frac{1}{2}(I' - v_0) \cos \frac{1}{2}(I' + v_0) - \gamma \sin v_0 \} + \frac{z}{(r)} \frac{dz}{dt} \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{VII)}$$

Zur Bestimmung der Excentricität und der wahren Anomalie hat man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_0}{dt} &= \frac{(wk)}{\sqrt{p_0}} e_0 \sin v_0 \\ g \sin G &= \frac{1}{wk} \left\{ \frac{dr_0}{dt} \mathcal{A}(\sqrt{p}) + \sqrt{p} \mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right) \right\} \\ g \cos G &= \frac{1}{r} \left\{ \mathcal{A}(p) - \frac{p_0}{r_0} \mathcal{A}(r) \right\} \\ \operatorname{tg}(v - v_0) &= \frac{g \sin(G - v_0)}{e_0 + g \cos(G - v_0)} \\ \mathcal{A}(e) &= e - e_0 = \frac{g \cos \{G - \frac{1}{2}(v + v_0)\}}{\cos \frac{1}{2}(v - v_0)} \\ \sin q &= e_0 + \mathcal{A}(e) \\ \mathcal{A}(e^2) &= \{ 2 e_0 + \mathcal{A}(e) \} \mathcal{A}(e) \\ \sin \frac{1}{2}(q - q_0) &= \frac{\mathcal{A}(e)}{2 \cos \frac{1}{2}(q + q_0)} \end{aligned} \right\} \quad \text{VIII)}$$

Um den Unterschied der mittleren Anomalien anzugeben, hat man:

$$\left. \begin{aligned}
 (\sigma) &= 2 \sin \frac{1}{2} (r - v_0) \cos \frac{1}{2} (v + v_0) \cos q - 2 \sin \frac{1}{2} (q - q_0) \sin \frac{1}{2} (q + q_0) \sin v_0 \\
 (\gamma) &= J(e) - 2 \sin \frac{1}{2} (v - v_0) \sin \frac{1}{2} (r + v_0) \\
 (\lambda) &= -\frac{r}{p} g \cos G \\
 g' \sin G' &= (\lambda) \sin E_{00} + (\sigma) \frac{r}{p} \\
 g' \cos G' &= (\lambda) \cos E_{00} + (\gamma) \frac{r}{p} \\
 \text{tang } (E - E_{00}) &= \frac{g' \sin (G' - E_{00})}{1 + g' \cos (G' - E_{00})} \\
 M - M_0 &= (E - E_{00}) - \frac{2 e_0}{\sin i''} \sin \frac{1}{2} (E - E_{00}) \cos \frac{1}{2} (E + E_{00}) - \frac{J(e)}{\sin i''} \sin E
 \end{aligned} \right\} \text{IX) }$$

Weiter ist:

$$\left. \begin{aligned}
 \omega - \omega_0 &= J(K) + J(u) + J\omega + (V - v_0) - (v - v_0) \\
 r - r_0 &= (\omega - \omega_0) + (\Omega - \Omega_0) .
 \end{aligned} \right\} \text{X) }$$

Zur Bestimmung des letzten Elementes μ hat man:

$$\left. \begin{aligned}
 q &= \frac{J(p) + a_0 J(e^2)}{2 \{ p_0 - a_0 J(e^2) \}} \\
 q \text{ als Argument für die } f\text{-Tafel (Tafel XI)} \\
 \mu - \mu_0 &= -f' q \mu_0
 \end{aligned} \right\} \text{XI) }$$

Zur Controle der Richtigkeit der Rechnung wird man die Elemente durch die directe Rechnung bestimmen und haben, indem man vorerst die Formelsysteme I) und II) (pag. 170) wie oben erledigt:

$$\left. \begin{aligned}
 \sin (l - K_0) \operatorname{tg} J &= \frac{z}{(r)} \\
 \cos (l - K_0) \operatorname{tg} J &= \frac{(r) \frac{dz}{dt} - z \frac{d(r)}{dt}}{(wk) \sqrt{p_0} + \int \Sigma U dt} \\
 l &= V + \omega_0 + J\omega \\
 (wk) \sqrt{p} &= \{ (wk) \sqrt{p_0} + \int \Sigma U dt \} \sec J \\
 \operatorname{tg} (u) &= \operatorname{tg} (l - K_0) \sec J .
 \end{aligned} \right\} \text{III) }$$

Weiter ist:

$$\left. \begin{aligned}
 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \{ K + (\Omega - \Omega_0) \} &= \frac{\cos \frac{1}{2} (i_0 - J)}{\cos \frac{1}{2} (i_0 + J)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} K_0 \\
 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \{ K - (\Omega - \Omega_0) \} &= \frac{\sin \frac{1}{2} (i_0 - J)}{\sin \frac{1}{2} (i_0 + J)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} K_0 \\
 \operatorname{tg} \frac{1}{2} (i - i_0) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (K_0 + K)}{\cos \frac{1}{2} (K - K_0)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} J .
 \end{aligned} \right\} \text{IV) }$$

Dann ist zu rechnen:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dr}{dt} &= \frac{(r)}{r} \frac{d(r)}{dt} + \frac{z}{r} \frac{dz}{dt} \\
 \sin q \sin v &= \frac{\sqrt{p}}{(wk)} \frac{dr}{dt} \\
 \sin q \cos v &= \frac{p}{r} - 1
 \end{aligned} \right\} \text{V) }$$

$$\begin{aligned}\omega &= (u) + K - v \\ \pi &= \omega + \Omega.\end{aligned}$$

Schliesslich ist:

$$\left. \begin{aligned}\tan \frac{1}{2} E &= \tan \frac{1}{2} v \cot g (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) \\ M &= E - \frac{\sin \varphi}{\sin i''} \sin E \\ a &= \frac{p}{\cos^2 \varphi} \\ \mu &= \frac{k'}{a^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\right\} \text{VI)}$$

§ 5. Rechnungsbeispiel zu Hansen-Tietjen's Methode.

Es sollen, um die voranstehenden Entwicklungen durch ein Beispiel zu erläutern, die Störungen ermittelt werden, die der Planet ⁽⁶²⁾ Erato durch die Anziehung der Planeten Jupiter und Saturn erleidet, und zwar innerhalb desselben Intervalles und mit Annahme derselben Elemente, die zur Ermittlung der Störungen nach den rechtwinkligen Coordinaten gedient haben, um Anhaltspunkte zur Vergleichung der Resultate, die nach verschiedenen Methoden erhalten wurden, zu gewinnen. Indem ich betreffs der allgemeinen Bemerkungen, über die Wahl der Intervalle des fixen Aequinoctiums etc. auf den § 5 der Encke'schen Methode (pag. 105) verweise, setze ich nochmals die der Störungsrechnung zu Grunde gelegten Elemente hier an:

⁽⁶²⁾ Erato

Epoche und Osculation 1874 Decbr. 26,0 mittlere Berliner Zeit.

$$\begin{aligned}\text{mittl. Aeq. } &1870.0 \\ L_0 &= 219^\circ 8' 6''8 \\ M_0 &= 180 40 48.9 \\ \pi_0 &= 38 27 17.9 \\ \Omega_0 &= 125 42 39.7 \\ i_0 &= 2 12 23.9 \\ \varphi_0 &= 9 59 14.9 \\ \mu_0 &= 640'' 89605 \\ \log a_0 &= 0.4954793.\end{aligned}$$

Auf den unteren Rand eines Zettels schreibt man vorerst jene constanten Logarithmen hin, die im Verlaufe der Störungsrechnung auftreten; hierbei hat man zu beachten, dass:

$$\begin{aligned}e_0'' &= \frac{\sin \varphi_0}{\sin i''} \\ e_0 &= \sin \varphi_0 \\ p_0 &= a_0 \cos^2 \varphi_0\end{aligned}$$

ist. Mit Rücksicht auf die voranstehenden Elemente und Massenannahmen (vergl. Tafel XII) der störenden Planeten hat man:

$$\begin{aligned} \log e_0'' &= 4.553\ 556 & \log \frac{3}{2} (w^2 k^2) 10^7 &= 6.851 \\ \log e_0 &= 9.239\ 131 & \log 2 k 10^7 \sqrt{p_0} &= 7.379\ 778 \\ \log a_0 \cos q_0 &= 0.488\ 847 & \log 2 k \sqrt{p_0} &= 0.379\ 778 \\ \log a_0 &= 0.495\ 479 & \log (w^2 k^2) 10^7 &= 6.675\ 283 \\ \omega &= 272^\circ 44' 38'' 2 & \log 12 &= 1.079\ 181 \\ \log (w^2 k^2) m_2 &= 3.654\ 972 \quad (w = 40) & \log (-\mu_0) &= 2.806\ 788 \\ \log (w^2 k^2) m_6 &= 3.13102 & \log 10^{-7} : \sin 1'' &= 8.314\ 425 \end{aligned}$$

wobei die Zahlen so angesetzt sind, dass die in Einheiten des Radius verstandenen Störungsgrössen in Einheiten der siebenten Decimale, die im Bogenmaass ansetzen in Einheiten der Bogensekunde erscheinen.

Hieran schliesst sich die Rechnung der Grössen:

$$\begin{aligned} M &= M_0 + \mu_0 t + \mathcal{A} M \\ M &= E - e_0'' \sin E \\ (r) \sin V &= a_0 \cos q_0 \sin E \\ (r) \cos V &= a_0 (\cos E - e_0) \\ l &= V + \omega_0 + \mathcal{A} \omega \\ (r) &= (r) (1 + r) \\ s &= 10^7 (w^2 k^2) : (r)^3 \end{aligned}$$

Bei den zwei der Osculationsepoche vorangehenden und folgenden Intervallen kann man, wenn sonst keine Näherungen bekannt sind, die Grössen $\mathcal{A} M$, $\mathcal{A} \omega$ und r der Null gleich setzen; man übergeht dadurch nur Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Störungen, die bei der grossen Nähe der Osculationsepoche wohl stets unmerklich sein werden. Hat aber die Rechnung bereits die Anfangsintervalle überschritten, so bildet man, je nachdem die Rechnung der Zeit nach fortschreitet oder nach rückwärts fortgesetzt wird, die Grössen $\mathcal{A} M$ und $\mathcal{A} \omega$ mit Benützung der diesbezüglichen Integraltafeln (vergl. pag. 68 Formel 2) und 3)) durch die Formeln:

bei Rechnung nach Vorwärts:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+[i+1]w} f(x) dx &= f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + \frac{1}{2} f(a + iw) + \frac{1}{24} \left[10 f'(a + [i - \frac{1}{2}]w) + \right. \\ &\quad \left. + 9 f''(a + [i - 1]w) + 8 f'''(a + [i - \frac{3}{2}]w) + \dots \right] \end{aligned}$$

und bei Durchführung der Rechnung nach rückwärts:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+[i-1]w} f(x) dx &= f(a + [i - \frac{1}{2}]w) - \frac{1}{2} f(a + iw) + \frac{1}{24} \left[10 f'(a + [i + \frac{1}{2}]w) - \right. \\ &\quad \left. - 9 f''(a + [i + 1]w) + 8 f'''(a + [i + \frac{3}{2}]w) - \dots \right] \end{aligned}$$

Für r und die später erforderliche Grösse z hat man Doppelintegrale nöthig. Man bildet also, je nachdem die Rechnung mit der Zeit vor- oder rückschreitet,

nach vorwärts:

$$f(a + [i + 1]w) = f(a + iw) + f'(a + [i - \frac{1}{2}]w) + f''(a + [i - 1]w) + \\ + f'''(a + [i - \frac{3}{2}]w) + \dots$$

nach rückwärts:

$$f(a + [i - 1]w) = f(a + iw) - f'(a + [i + \frac{1}{2}]w) + f''(a + [i + 1]w) - \\ - f'''(a + [i + \frac{3}{2}]w) + \dots,$$

und hat damit die folgende für diese Zwecke genügende Annäherung:

$$\int\limits_{a-iw}^{a+iw} f(x) dx^2 = \frac{1}{12} f(a + [i \pm 1]w) + \frac{1}{12} f(a + [i \pm 1]w) \quad .$$

Nun kann an die Berechnung der störenden Kräfte geschritten werden; da das Berliner Jahrbuch für das hier in Betracht kommende Intervall der Störungsrechnung die auf pag. 158 ff. erwähnten erleichternden Hilfsmittel noch nicht gibt, so wird es am zweckmässigsten sein, unmittelbar aus den heliocentrischen auf das fixe mittlere Aequinoctium bezogenen Längen (λ_0') und Breiten (β_0') der störenden Planeten (über die Ermittlung dieser Angaben vergl. pag. 82, 83, 156) und deren Radienvectoren, die nöthigen Grössen nach den Formeln 2) und 3) pag. 157 zu berechnen.

Man hat dann:

$$q \sin Q = \sin \beta_0' \\ q \cos Q = \cos \beta_0' \sin (\lambda_0' - \varpi_0) \\ \cos B_1 \cos L_1 = \cos \beta_0' \cos (\lambda_0' - \varpi_0) \\ \cos B_1 \sin L_1 = q \cos (Q - i_0) \\ \sin B_1 = q \sin (Q - i_0) \quad .$$

Da aber die in diesem Paragraphen enthaltene Zusammenstellung der Formeln bei der practischen Verwendung als Leitfaden dienen soll, so muss hier auch die zweite Formelgruppe aufgeführt werden, die auf pag. 159 und 160 erläutert ist, und die allenfalls ohne erheblichen Irrthum angewendet werden kann, wenn man genähert richtige Annahmen über die Bahnlage des störenden Planeten macht und B_0 der Null gleich setzt. Man hat so vorerst zu rechnen:

$$\sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Phi + \Phi') = \sin \frac{1}{2} (\varpi' - \varpi) \sin \frac{1}{2} (i' + i) \\ \sin \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Phi + \Phi') = \cos \frac{1}{2} (\varpi' - \varpi) \sin \frac{1}{2} (i' - i) \\ \cos \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Phi - \Phi') = \sin \frac{1}{2} (\varpi' - \varpi) \cos \frac{1}{2} (i' + i) \\ \cos \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Phi - \Phi') = \cos \frac{1}{2} (\varpi' - \varpi) \cos \frac{1}{2} (i' - i),$$

welche Rechnung zu den Vorbereitungsrechnungen gezählt werden kann.

Ist nun L die Länge in der Bahn bezogen auf das fixe Aequinoctium, B_0 die Breite über der durch ϖ' und i' bestimmten Bahnebene, so ist zu rechnen:

$$u' = L - (\varpi' + \Phi') \\ \cos B_1 \cos u = \cos u' \\ \cos B_1 \sin u = \sin u' \cos J - B_0 \sin 1'' \sin J \\ \sin B_1 = \sin u' \sin J + B_0 \sin 1'' \cos J \\ L_1 = u + \Phi, \quad$$

wodurch B_1 und L_1 bestimmt erscheinen.

Nun gestaltet sich die Rechnung für beide Methoden gleichmässig in folgender Weise :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l) \\ \eta_1 &= r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l) \\ \zeta_1 &= r_1 \sin B_1 \\ \varrho \cos \vartheta \cos \Theta &= \xi_1 - (r) \\ \varrho \cos \vartheta \sin \Theta &= \eta_1 \\ \varrho \sin \vartheta &= \zeta_1 - z\end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}$$

$$U = (w^2 k^2) m_1 10^7 K_{11} (r)$$

$$R = (w^2 k^2) m_1 10^7 K'_{11} \frac{\xi_1}{(r)}$$

$$W_1 = (w^2 k^2) m_1 10^7 K'_{11} \zeta_1$$

$$w_1 = (w^2 k^2) m_1 10^7 \frac{1}{\varrho^3} .$$

Die Werthe $(w^2 k^2) m_1 10^7$ sind in der Tafel XII für die verschiedenen Planeten aufgenommen. Die Rechnung nach den voranstehenden Formeln ist für jeden störenden Planeten gesondert durchzuführen; bei Beginn der Rechnung wird man für die beiden der Osculationsepoche vorangehenden und folgenden Intervalle wieder ohne Nachtheil $z = 0$ setzen dürfen; bei der Rechnung der Grössen U , R , W_1 und w_1 wird man sich auf die zweite Decimale der siebenten Stelle beschränken können und dem entsprechend ist die Rechnung für das folgende Beispiel durchgeführt.

Bezeichnet man die für die verschiedenen störenden Planeten erhaltenen Werthe von U , R , W_1 und w_1 durch die entsprechenden Indices, so bildet man jetzt :

$$\begin{aligned}\Sigma U &= U_4 + U_6 + U_8 + U_9 + \dots \\ \Sigma R &= R_4 + R_6 + R_8 + R_9 + \dots \\ \Sigma W_1 &= W_{14} + W_{16} + W_{18} + W_{19} + \dots \\ \Sigma w_1 &= w_{14} + w_{16} + w_{18} + w_{19} + \dots\end{aligned}$$

Ist die Störung in z schon beträchtlich angewachsen, was übrigens erst im weiteren Verlaufe der Rechnung eintreten wird, und jedenfalls bei den Werthen in der Nähe der Osculationsepoche nicht in Betracht kommt, so wird man zur Berücksichtigung des Einflusses der höheren Potenzen von z auf die Störungen noch zu rechnen haben :

$$\begin{aligned}\Delta \Sigma R &= \frac{3}{2} (w^2 k^2) 10^7 \left(\frac{f}{3} \right) \frac{z^2}{(r)^5} \\ \Delta \Sigma W &= \frac{3}{2} (w^2 k^2) 10^7 \left(\frac{f}{3} \right) \frac{z^3}{(r)^5} ,\end{aligned}$$

wobei z näherungsweise für die geforderte Epoche ohne Schwierigkeit aus dem doppelt summirten Werthe erhalten wird; in diesen Ausdrücken wird man unbe-

denklich $\frac{f}{3}$ der Einheit gleich setzen dürfen; sollte diese Annahme, was wohl kaum je eintreten wird, nicht genügend genau sein, so entlehne man mit dem Argumente:

$$q = \frac{z^2}{2(r)^2}$$

aus der Encke'schen f Tafel (Tafel XI) den Werth von f .

Sobald der Werth ΣU bekannt ist, bildet man das Integral $\int \Sigma U dt$; für die Anfangsconstante und den Integralwerth gelten die folgenden Formeln (vergl. pag. 35):

$$f(a - \frac{1}{2}w) = -\frac{1}{24}f''(a - \frac{1}{2}w) + \frac{17}{5760}f'''(a - \frac{1}{2}w) - \dots$$

$$\int_{a-\frac{1}{2}w}^{a+iw} f(x) dx = f(a+iw) - \frac{1}{12}f'(a+iw) + \frac{11}{720}f'''(a+iw) - \dots$$

wobei die Funktionswerthe aus der U -Tafel zu entnehmen sind, die in dem unten folgenden Beispiele mitgetheilt ist. Die Bestimmung der Anfangsconstante hat keine Schwierigkeit, da sofort nach der Anlage der Rechnung vier Werthe für ΣU bekannt sind. Bei der Bildung der Integrale hat man zu beachten, dass die Funktionswerthe arithmetische Mittel sind und dass man die bei der Rechnung fehlenden Differenzwerthe nach dem Gange der Funktion bestimmen muss. Die Annahme für $f'''(a+iw)$ kann wegen des verhältnissmässig kleinen Factors $\frac{11}{720}$ leicht genug überschlagsweise gemacht werden, die Berechnung von $f'(a+iw)$ aber muss genauer durchgeführt werden. Man erhält leicht, wenn man auf die Bedeutung von $f'(a+iw)$ zurückgeht und nur auf jene Differenzwerthe Rücksicht nimmt, die in völliger Strenge gegeben sind (vergl. pag. 67) bei der Rechnung: nach vorwärts:

$$f'(a+iw) = f'(a+[i-\frac{1}{2}]w) + \frac{1}{2} \left[f''(a+[i-1]w) + f''(a+[i-\frac{3}{2}]w) + f'''(a+[i-2]w) + \dots \right]$$

nach rückwärts:

$$f'(a+iw) = f'(a+[i+\frac{1}{2}]w) + \frac{1}{2} \left[f''(a+[i+1]w) - f''(a+[i+\frac{3}{2}]w) + f'''(a+[i+2]w) - \dots \right]$$

In dem für die Summation von U bestimmten Bogen setzt man nun in die entsprechende Columnne $\log \int \Sigma U dt$ und $\log \int U' dt$, wobei man sich zu erinnern hat, dass:

$$\int U' dt = \left\{ 1 + \frac{\int \Sigma U dt}{2(wk) 10^7 \sqrt{\rho_0}} \right\} \cdot \int \Sigma U dt$$

ist. Sind die störenden Kräfte sehr bedeutend, so wird stets eine grosse Unsicherheit in der Berechnung von $\int U dt$ in den letzten Stellen übrig bleiben, doch hat dieses auf das Resultat keine sehr schädigende Wirkung, weil dieses Integral schliesslich mit dem bei Störungsrechnungen stets kleinen Factor $\frac{z(wk) \sqrt{p_0}}{(r)^4}$ zu multipliciren ist.

Hieran schliesst sich die Berechnung der Formeln:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{z(wk) \sqrt{p_0}}{(r)^4} \int U dt \\ H_2 &= \sum R - \sum w_1 + A \sum R \\ H_0 &= H_1 + H_2 \\ h &= s - H_0 \\ h' &= \frac{h \cdot 10^{-7}}{1 + \frac{1}{2} h \cdot 10^{-7}} . \end{aligned}$$

Nunmehr hat die Berechnung des zweiten Differentialquotienten von ν keine Schwierigkeit; wie derselbe für die ersten Intervalle erlangt wird, ist oben (pag. 151 ff.) ausführlich aneinandergesetzt worden; ist die Rechnung einmal im Gange, so geben die doppelt summirten Werthe $\frac{d^2 \nu}{dt^2}$, die aus dem ν -Bogen zu entnehmen sind, sofort:

$$\begin{aligned} S_h &= {}^{11}f(a+iw) - \frac{1}{240} f^{11}(a+iw) + \frac{1}{12} H_0 \\ \frac{d^2 \nu}{dt^2} &= H_0 - h' S_h , \end{aligned}$$

wobei der im Allgemeinen fast unmerkliche Werth von $\frac{1}{240} f^{11}(a+iw)$ in Bezug auf $f^{11}(a+iw)$ nach dem Gange der Funktion zu extrapoliren ist.

Nun rechnet man, da jetzt $f(a+iw) = \frac{d^2 \nu}{dt^2}$ bekannt ist genau:

$$\nu = {}^{11}f(a+iw) + \frac{1}{12} f(a+iw) - \frac{1}{240} f^{11}(a+iw) + \dots ,$$

wobei jetzt über den Werth von $f^{11}(a+iw)$ eine wesentlich genauere Annahme möglich ist, da es sich nunmehr bloss um eine Extrapolation um ein Intervall handelt.

Weiter hat man:

$$\frac{dJM}{dt} = - \mu_0 \sigma \nu ,$$

wobei σ mit dem Argumente ν aus der Tafel XIII zu entnehmen ist; in dieser Tafel ist die Constante w gleich 40 Tagen bereits in die Grösse σ mit aufgenommen. Wollte man zur Ermittlung von σ nicht die Tafel benützen, so würde sich die Rechnung mit Hilfe der Additionslogarithmen am einfachsten in der Form gestalten:

$$\frac{dJM}{dt} = - (w \mu_0) \frac{\nu}{1+\nu} \left(1 + \frac{\nu}{1+\nu} \right) .$$

Die Summation dieser Werthe nebst derjenigen, die sich späterhin für $\frac{dJ\omega}{dt}$ ergeben, führe ich auf einem und demselben Bogen aus; zur Bestimmung der Annahmescostante für diese einfachen Quadraturen wird man wieder haben:

$$f(a - \frac{1}{2}w) = -\frac{1}{24}f''(a - \frac{1}{2}w) + \frac{17}{5760}f'''(a - \frac{1}{2}w) - \dots$$

Man hat nun, um zur Kenntniss von $\frac{d^2z}{dt^2}$ zu gelangen, zu rechnen:

$$W_0 = \Sigma W_1 + J \Sigma W$$

$$[w] = s + \Sigma w_1$$

$$[w'] = \frac{[w] 10^{-7}}{1 + \frac{1}{12}[w] 10^{-7}},$$

aus dem z -Bogen wird man erhalten:

$$S_w = f''(a + iw) - \frac{1}{240}f'''(a + iw) + \frac{1}{12}W_0,$$

wodurch

$$\frac{d^2z}{dt^2} = W_0 - [w'] S_w$$

wird. Schliesslich ist noch:

$$\frac{dJ\omega}{dt} = \frac{1}{(r)^2} \cdot \frac{10^{-7}}{\sin 1''} \int \Sigma U dt,$$

wobei zu beachten ist, dass man in diesem Ausdrucke nicht irrthümlicher Weise den früher benützten Werth von $\int U' dt$ verwendet.

Ich habe nun ausführlich die diessbezügliche Rechnung für Erato hier aufgenommen, und es bedarf dieselbe nur einiger erläuternder Worte.

Vorerst ist zu beachten, dass die vier ersten Orte entsprechend den auf pag. 151 ff. gemachten Auseinandersetzungen durchgeführt sind, demnach von dem allgemeinen Rechnungsschema abweichen; sonst ist Alles gleichmässig durchgeführt. Die Rechnung ist so abgetheilt, dass die mit ⑥ überschriebenen Bogen wesentlich Grössen, die von dem Orte des gestörten Planeten in der Bahn abhängig sind, enthalten, während auf den mit ④ und ⑤ bezeichneten Bogen die Berechnung der störenden Kräfte für jeden einzelnen dieser Planeten aufgenommen ist. Ueberdies sind auf den ④-Bogen die Summirungen der störenden Kräfte und der von z^2 und z^3 abhängigen Correctionen ausgeführt, welche letztere Correctionen jedoch für das vorliegende Beispiel innerhalb des behandelten Zeitintervalles unmerklich bleiben, da dieselben niemals den Werth 0.005 der siebenten Decimale erreichen.

Die Berechnung der Annahmen für JM , $J\omega$, ν und z für das jeweilige nächste Intervall, nebst den Zwischenwerthen, die zur Kenntniss von $\int U dt$ führen,

ist stets auf einem Nebenpapiere ausgeführt; ich werde aber, um die in obiger Zusammenstellung enthaltenen Formeln durch ein Beispiel zu erläutern, hier eine solche Bestimmung ausführlich durchnehmen, und, um keinen Zweifel übrig zu lassen, mehr Zahlen hinschreiben, als man sonst mitzunehmen gezwungen ist.

Da die Rechnung nach rückwärts fortschreitet, so sind der obigen Zusammenstellung die diesbezüglichen Formeln zu entlehnen.

Die Rechnung sei etwa bis 1872 März 11 vorgeschritten, und man habe die Störungswerthe für 1872 Januar 31 zu berechnen. Wenn man also nur jene Summations- und Differenzwerthe in Betracht zieht, die in dieser Phase der Rechnung schon bekannt sind, und die Werthe von ΔM und Δw auf Zehnthelle der Bogensekunde, den Werth von ν auf die sechste Decimale und jenen von z auf die siebente Decimale genau zu erhalten wünscht, so wird man haben:

	für ΔM	für Δw
${}^{\text{I}}f(a + [i - \frac{1}{2}]w)$	+ 52'38"99	— 7'23"92
$f(a + iw)$	— 3'21.88	+ 13.27
$f^{\text{I}}(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	— 17.48	— 0.10
$f^{\text{II}}(a + [i + 1]w)$	+ 4.85	+ 0.11
$f^{\text{III}}(a + [i + \frac{3}{2}]w)$	+ 0.22	+ 0.04
$f^{\text{IV}}(a + [i + 2]w)$	— 0.23	— 0.01 ;

man findet also leicht, wenn man rechnet:

$$\gamma = \frac{1}{24} \left\{ 10f^{\text{I}}(a + [i + \frac{1}{2}]w) - 9f^{\text{II}}(a + [i + 1]w) + 8f^{\text{III}}(a + [i + \frac{3}{2}]w) - 7f^{\text{IV}}(a + [i + 2]w) \right\}$$

	ΔM	Δw
${}^{\text{I}}f(a + [i - \frac{1}{2}]w)$	+ 52'38"99	— 7'23"92
$-\frac{1}{2}f(a + iw)$	+ 1'40.94	— 6.63
γ	— 8.96	— 0.08
$\Delta M = + 54'11''0$		$\Delta w = - 7'30''6$.

Für ν und z wird man nach den betreffenden Summationsbogen haben:

${}^{\text{II}}f(a + [i - 1]w)$	+ 35354	— 447.1
$f(a + iw)$	— 870	+ 20.7
$f^{\text{I}}(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	— 89	+ 8.4
$f^{\text{II}}(a + [i + 1]w)$	+ 45	— 1.4 ;

setzt man wieder:

$$z = \frac{1}{12} \left[f(a + iw) - f^{\text{I}}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + f^{\text{II}}(a + [i + 1]w) - f^{\text{III}}(a + [i + \frac{3}{2}]w) + \dots \right]$$

so wird:

	r	z
${}^{11}f(a + [i - 1]w)$	+ 35354	— 447.1
z	— 61	+ 0.9
$1 + r$	+ 1,003529	$z = - 0,000046$

womit alle Werthe gegeben sind, deren man zur Berechnung der störenden Kräfte für 1872 Januar 31 bedarf.

Im Verlaufe der Rechnung tritt noch die Nothwendigkeit hervor, den Werth von $\int U dt$ für dieses Datum zu berechnen. Auf dem U -Bogen sind die diesbezüglichen Zahlen:

${}^1f(a + iw)$	$= \frac{1}{2} 4464.45 + 4365.21 = + 4414.83$
$f^1(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	$= + 57.09$
$f^{11}(a + [i + 1]w)$	$= + 11.05$
$f^{111}(a + [i + \frac{3}{2}]w)$	$= + 0.83$
$f^{1111}(a + [i + 2]w)$	$= - 0.21$

Man findet also aus diesen Zahlen (vergl. pag. 177):

$$f^1(a + iw) = + 52.09.$$

Für $f^{111}(a + iw)$ wird man schätzungsweise $+ 0.95$ annehmen können; der genaue Werth hierfür ist, wie sich später zeigt $+ 0.99$. Nunmehr hat man:

$$\int \Sigma U dt = + 4414.83 \quad - 4.34 \quad + 0.01 = + 4410.50,$$

womit der für die weitere Rechnung nöthige Integralwerth bekannt ist.

Für die Berechnung von S_h und S_w wird man haben, wenn man für $f^{11}(a + iw)$ dem Gange der Funktion entsprechend beziehungsweise $+ 31$ und $- 0.3$ annimmt (die genauen Werthe dieser zweiten Differenzen sind beziehungsweise $+ 28.64$ und $- 0.22$).

	S_h	S_w
${}^{11}f(a + iw)$	+ 35353.87	— 447.15
$\frac{1}{12} H_0$	+ 17.17	$\frac{1}{12} W_0$ — 0.04
$— \frac{1}{240} f^{11}(a + iw)$	— 0.13	0.00
	$S_h = + 35370.91$	$S_w = - 447.19$

Als Anhang für die voranstehende Rechnung habe ich für die Zeit von 1860, Sept. 1 bis 1877 Dec. 30, mit Ausschluss der bereits im Beispiel enthaltenen Zahlen die einfach summirten Werthe von $\frac{dJ M}{dt}$ und $\frac{dJ w}{dt}$, dann die doppelt summirten

Werthe von $\frac{d^2 v}{dt^2}$ und $\frac{d^2 z}{dt^2}$ mitgetheilt, weil diese Werthe bei dem unten folgenden Beispiele der Ableitung der Erato-Elemente nothwendig sind.

Schliesslich will ich noch erwähnen, dass man als Probe für die Richtigkeit der Rechnung den regelmässigen Gang der Differenzen verwerthen kann. Man wird diese Prüfung durch Differenzen auch im Verlaufe der Rechnung mehrfach vornehmen können, um etwa vorhandene Fehler sofort zu erkennen und zu verbessern, ehe dieselben in das Resultat übergehen. Ich prüfe demgemäss stets die Werthe l , $\log r$, $\log \varrho_4$ und $\log \varrho_6$ durch Differenzen; ausserdem wird es sich empfehlen, auch die Differenzwerthe von E zu bilden; man wird daraus leicht einen sehr nahe richtigen Schluss auf die folgende excentrische Anomalie machen können und dadurch die Auflösung der transcendenten Gleichung (vergl. I pag. 49) wesentlich erleichtern.

Ausführliches Beispiel
zu
Hansen-Tietjen's Methode
der
Störungsrechnung.

Datum	1875		1874					
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Jun. 29	Mai 20
$\mathcal{J}\omega$	(vergl.	pag. 151	ff.)		—	10"8	—	21"1
$\mathcal{J}M$					+	1"8	+	5"2
$M_0 + \mu_0 t$	191° 21' 42" 7	184° 14' 26" 8	177° 7' 11" 0	169° 59' 55" 1	162° 52' 39" 3	155° 45' 23" 4	148° 38' 7" 6	141° 30' 51" 7
M	191° 21' 42" 7	184° 14' 26" 8	177° 7' 11" 0	169° 59' 55" 1	162° 52' 41" 1	155° 45' 28" 6	148° 38' 19" 5	141° 31' 15" 3
E	189° 41' 21" 8	183° 36' 51" 7	177° 32' 43" 1	171° 28' 19" 9	165° 23' 7" 2	159° 16' 28" 3	153° 7' 47" 8	146° 56' 29" 3
$\sin E$	9 _n 226102	8 _n 799621	8.631742	9.171110	9.401947	9.548869	9.655108	9.736791
$\cos E$	9 _n 993760	9 _n 999136	9 _n 999601	9 _n 995172	9 _n 985716	9 _n 970945	9 _n 950382	9 _n 923303
Subtrl.	0.070386	0.069586	0.069518	0.070176	0.071600	0.073877	0.077158	0.081683
$\cos E - e_0$	0.064146	0.068722	0.069119	0.065348	0.057316	0.044822	0.027540	0.004986
$((r)) \sin I'$	9 _n 714949	9 _n 288468	9.120589	9.659957	9.890794	0.037716	0.143955	0.225638
$\sin I'$ oder $\cos I'$	9 _n 995605	9 _n 999391	9 _n 999719	9 _n 996599	9 _n 989939	9 _n 979537	9 _n 965068	9 _n 946045
$((r)) \cos I'$	0.559625	0.564201	0.564598	0.560827	0.552795	0.543031	0.523019	0.500465
I'	188° 8' 16" 5	183° 2' 1" 6	177° 56' 23" 0	172° 50' 19" 8	167° 42' 52" 2	162° 32' 57" 8	157° 19' 34" 9	152° 1' 38" 6
$\omega_0 + \mathcal{J}\omega$	272° 44' 38" 2	272° 44' 38" 2	272° 44' 38" 2	272° 44' 38" 2	272° 44' 27" 4	272° 44' 17" 1	272° 44' 3" 3	272° 43' 46" 3
l	100° 52' 54" 7	95° 46' 39" 8	90° 41' 1" 2	85° 34' 58" 0	80° 27' 19" 6	75° 17' 14" 9	70° 3' 38" 2	64° 45' 24" 9
$1 + \nu$	(vergl.	pag. 151	ff.)		1.000041	1.000092	1.000171	1.000285
$\log (1 + \nu)$					0.000018	0.000040	0.000074	0.000124
$((r))$	0.564020	0.564810	0.564879	0.564228	0.562856	0.560764	0.557951	0.554420
(r)					0.562874	0.560804	0.558025	0.554544
$(r)^3$	1.692060	1.694430	1.694637	1.692684	1.688622	1.682412	1.674075	1.663632
$2(rk) \sqrt{p_0} \int U dt$	3 _n 864411	3 _n 400659	3.411549	3.896506	4.122474	4.268008	4.370913	4.445106
$(r)^4$	2.256080	2.259240	2.259516	2.256912	2.251496	2.243216	2.232100	2.218176
H_1	— 40.58	— 13.85	— 14.19	— 43.61	— 74.30	— 105.87	— 137.66	— 168.63
H_2	— 57.26	— 76.74	— 99.50	— 125.63	— 154.88	— 186.36	— 218.37	— 248.26
H_0	— 16.68	— 62.89	— 113.69	— 169.24	— 229.18	— 292.23	— 356.03	— 416.89
Σw_1	+ 267.83	+ 306.68	+ 349.89	+ 396.90	+ 446.43	+ 495.92	+ 541.67	+ 578.78
s	+96210.6	+95687.0	+95641.4	+96072.5	+96975.2	+98371.8	+100278.6	+102719.0
h	+96193.9	+95624.1	+95527.7	+95903.3	+96746.0	+98079.6	+99922.6	+102302.1
$10^{-7} h$					7.985633	7.991578	7.999663	8.009885
$1 + \frac{1}{2} 10^{-7} h$					0.000350	0.000355	0.000362	0.000370
S_h	(vergl.	pag. 151	ff.)		+	412.60	+	922.51
$\log S_h$					2.615529	2.964971	3.234438	3.454470
h'					7.985283	7.991223	7.999301	8.009515
$h' S_h = h\nu$					+	3.99	+	9.04
$d^2 \nu : d t^2$	+	16.00	+	62.80	+	113.58	+	168.01
					+	225.19	+	283.19
					+	338.90	+	387.78
ν	+ 70.93	+ 9.91	+ 12.03	+ 128.03	+ 412.29	+ 921.76	+ 1714.24	+ 2845.13
$\log \nu$	1.8508..	0.9961..	1.0803..	2.1073..	2.615203	2.964618	3.234071	3.454102
σ	4.9031..	4.9031..	4.9031..	4.9031..	4.903063	4.903030	4.902979	4.902905
$\log d \mathcal{J} M : d t$	9 _n 5607..	8 _n 7060..	8 _n 7902..	9 _n 8172..	0 _n 325054	0 _n 674436	0 _n 943836	1 _n 163795
$d \mathcal{J} M : d t$	— 0"364	— 0"051	— 0"062	— 0"656	— 2"114	— 4"725	— 8"787	— 14"581
$[w]$	+96478.4	+95993.7	+95991.3	+96469.4	+97421.6	+98867.7	+100820.3	+103297.8
$10^{-7} [w]$	7.984430	7.982243	7.982232	7.984390	7.988655	7.995054	8.003548	8.014091
$1 + \frac{1}{2} 10^{-7} [w]$					0.000352	0.000358	0.000365	0.000374
S_w	(vergl.	pag. 151	ff.)		—	76.69	—	152.99
$\log S_w$					1 _n 884739	2 _n 184663	2 _n 408257	2 _n 585246
$[w'] S_w = z [w]$					7.988303	7.994696	8.003183	8.013717
H_0					— 0.75	— 1.51	— 2.58	— 3.97
$d^2 z : d t^2$	— 19.67	— 21.99	— 24.02	— 25.63	— 27.38	— 28.32	— 28.45	— 27.59
					— 26.63	— 26.81	— 25.87	— 23.62
$10^{-7} \int \Sigma U dt : \sin i''$	1 _n 799113	1 _n 335325	1.346177	1.831093	2.057021	2.202515	2.305383	2.379542
$(r)^2$	1.128040	1.129620	1.129758	1.128456	1.125748	1.121608	1.116050	1.109088
$d \mathcal{J} \omega : d t$	— 4"689	— 1"606	— 1"646	— 5"042	— 8"536	— 12"048	— 15"464	— 18"640

1874			1873						
April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25	April 15
— 1'11"9	— 1'34"2	— 1'58"7	— 2'24"3	— 2'50"2	— 3'15"9	— 3'40"7	— 4' 4"4	— 4'26"5	— 4'47"1
+ 42"1	+ 1' 8"6	+ 1'46"7	+ 2'38"6	+ 3'45"2	+ 5' 9"2	+ 6'52"2	+ 8'55"1	+ 11'18"1	+ 14' 1"3
134"23'35"9	127"16'20"0	120" 9' 4"2	113" 1'48"4	105"54'32"5	98"47'16"7	91"40' 0"8	84"32'45"0	77"25'29"1	70"18'13"3
134"24'18"0	127"17'28"6	120"10'50"9	113" 4'27"0	105"58'17"7	98"52'25"9	91"46'53"0	84"41'40"1	77"36'47"2	70"32'14"6
140"41'56"4	134"23'31"0	128" 0'36"6	121"32'34"5	114"58'44"6	108"18'28"2	101"31' 5"7	94"35'57"9	87"32'27"3	80"19'59"7
9.801674	9.854045	9.896472	9.930566	9.957349	9.977441	9.991165	9.998599	9.999600	9.993789
9.9888645	9.9844827	9.9789441	9.9718615	9.9625608	9.9497099	9.9300335	8.9904113	8.632517	9.225096
0.087825	0.096185	0.107765	0.124349	0.149434	0.190925	0.271505	0.165055	9.876569	8.516469
9.976470	9.941012	9.897206	9.842964	9.775042	9.688024	9.571840	9.404186	9.115700	7.741565
0.290521	0.342892	0.385319	0.419413	0.446196	0.466288	0.480012	0.487446	0.488447	0.482636
9.921778	9.891280	9.8553137	9.886218	9.920021	9.947771	9.969747	9.985969	9.996212	9.999993
0.471949	0.436491	0.392685	0.338443	0.270521	0.183503	0.067319	9.899665	9.611179	8.237044
146"38' 2"8	141" 7'3"7	135"29' 9"0	129"41'22"3	123"42'55"6	117"32'23"7	111" 8'18"6	104"29' 9"4	97"33'23"8	90"19'31"7
272"43'26"3	272"43' 4"0	272"42'36"5	272"42'13"9	272"41'48"0	272"41'22"3	272"40'55"5	272"40'33"8	272"40'11"7	272"39'51"1
59"21'29"1	53"50'41"0	48"11'48"5	42"23'36"2	36"24'43"6	30"13'46"0	23"49'16"1	17" 9'43"2	10"13'35"5	2"59'22"8
1.000436	1.000630	1.000868	1.001149	1.001471	1.001826	1.002207	1.002603	1.003002	1.003392
0.000189	0.000273	0.000377	0.000499	0.000639	0.000792	0.000957	0.001129	0.001302	0.001471
0.550171	0.545211	0.539548	0.533195	0.526175	0.518517	0.510265	0.501477	0.492235	0.482643
0.550360	0.545484	0.539925	0.533694	0.526814	0.519309	0.511222	0.502606	0.493537	0.484114
1.651080	1.636452	1.619775	1.601082	1.580442	1.557927	1.533666	1.507818	1.480611	1.452342
4.496920	4.529682	4.545478	4.545958	4.532805	4.507855	4.473119	4.430700	4.382730	4.331288
2.201440	2.181936	2.159700	2.134776	2.107256	2.077236	2.044888	2.010424	1.974148	1.936456
+ 197.46	+ 222.71	+ 243.10	+ 257.74	+ 266.41	+ 269.54	+ 268.06	+ 263.19	+ 256.20	+ 248.22
+ 272.53	+ 287.55	+ 290.45	+ 280.14	+ 257.75	+ 226.34	+ 189.79	+ 151.87	+ 115.48	+ 82.47
+ 469.99	+ 510.26	+ 533.55	+ 537.88	+ 524.16	+ 495.88	+ 457.85	+ 415.06	+ 371.68	+ 330.69
+ 601.75	+ 605.86	+ 588.63	+ 551.10	+ 497.63	+ 434.80	+ 369.43	+ 306.99	+ 250.98	+ 202.96
+105731.2	+109353.0	+113633.9	+118631.7	+124406.0	+131025.5	+138553.2	+147050.0	+156556.8	+167086.5
+105261.2	+108842.7	+113100.4	+118093.8	+123881.8	+130529.6	+138095.4	+146634.9	+156185.1	+166755.8
8.022268	8.036800	8.053465	8.072227	8.093007	8.115709	8.140179	8.166237	8.193639	8.222081
0.000381	0.000394	0.000409	0.000427	0.000448	0.000472	0.000499	0.000530	0.000565	0.000603
+ 4366.52	+ 6308.52	+ 8690.71	+11506.72	+14723.30	+18280.60	+22094.63	+26061.34	+30061.37	+33964.40
3.640135	3.799927	3.939055	4.060951	4.168005	4.261990	4.344287	4.415997	4.478009	4.531024
8.021887	8.036406	8.053056	8.071800	8.092559	8.115237	8.139680	8.165707	8.193074	8.221478
+ 45.92	+ 68.60	+ 98.20	+ 135.75	+ 182.21	+ 238.36	+ 304.77	+ 381.68	+ 468.90	+ 565.59
+ 424.07	+ 441.66	+ 435.35	+ 402.13	+ 341.95	+ 257.52	+ 153.08	+ 33.38	— 97.22	+ 234.90
+ 4362.71	+ 6302.81	+ 8682.56	+11495.39	+14708.10	+18260.74	+22069.24	+26029.54	+30022.30	+33917.26
3.639756	3.799535	3.938648	4.060524	4.167557	4.261519	4.343788	4.415466	4.477444	4.530420
4.902805	4.902679	4.902525	4.902342	4.902133	4.901902	4.901654	4.901397	4.901138	4.900884
1.9349349	1.9509002	1.9647961	1.9769654	1.9876478	1.9970209	2.0052230	2.0123651	2.0185370	2.0238092
— 22"354	— 32"285	— 44"459	— 58"837	— 1'15"245	— 1'33"370	— 1'52"779	— 2'12"938	— 2'33"239	— 2'53"018
+106332.9	+109958.9	+114222.5	+119182.8	+124903.6	+131460.3	+138922.6	+147357.0	+156807.8	+167289.5
8.026668	8.041231	8.057751	8.076213	8.096575	8.118795	8.142773	8.168371	8.195368	8.223469
0.000385	0.000398	0.000413	0.000431	0.000452	0.000475	0.000503	0.000533	0.000567	0.000605
— 537.15	— 709.31	— 896.17	— 1091.44	— 1288.12	— 1478.94	— 1656.77	— 1814.96	— 1947.53	— 2049.08
2.730096	2.850836	2.952390	3.038000	3.109957	3.169951	3.219262	3.258867	3.289484	3.311559
8.026283	8.040833	8.057338	8.075782	8.096123	8.118320	8.142270	8.167838	8.194801	8.222864
— 5.71	— 7.79	— 10.23	— 13.00	— 16.07	— 19.42	— 22.99	— 26.71	— 30.50	— 34.23
— 25.61	— 22.57	— 18.69	— 14.40	— 10.16	— 6.38	— 3.29	— 1.00	+ 0.55	+ 1.49
— 19.90	— 14.78	— 8.46	— 1.40	+ 5.91	+ 13.04	+ 19.70	+ 25.71	+ 31.05	+ 35.72
2.431330	2.464073	2.479860	2.480340	2.467195	2.442259	2.407542	2.365143	2.317195	2.265773
1.100722	1.090968	1.079850	1.067388	1.053628	1.038618	1.022444	1.005212	0.987074	0.968228
+ 21"410	+ 23"610	+ 25"119	+ 25"879	+ 25"916	+ 25"330	+ 24"272	+ 22"905	+ 21"386	+ 19"840

Datum	1873		1872					
	März 6	Jan. 25	Dec. 16	Nov. 6	Sept. 27	Aug. 18	Juli 9	Mai 30
$\mathcal{L} \omega$	— 5' 6"2	— 5' 23"8	— 5' 40"3	— 5' 55"7	— 6' 10"2	— 6' 24"2	— 6' 37"6	— 6' 50"9
$\mathcal{L} M$	+ 17' 3"7	+ 20' 23"9	+ 23' 59"3	+ 27' 47"2	+ 31' 43"9	+ 35' 45"2	+ 39' 46"3	+ 43' 42"5
$M_0 + \mu_0 t$	63"10' 57"5	56" 3' 41"7	48"56' 25"8	41"49' 10"0	34"41' 54"1	27"34' 38"3	20"27' 22"5	13"20' 6"6
M	63"28' 1"2	56"24' 5"6	49"20' 25"1	42"16' 57"2	35"13' 38"0	28"10' 23"5	21" 7' 8"8	14" 3' 49"1
E	72"58' 5"3	65"26' 22"0	57"44' 37"2	49"52' 53"3	41"51' 28"8	33"41' 3"9	25"22' 40"7	16"57' 45"9
$\sin E$	9.980522	9.958814	9.927200	9.883499	9.824312	9.743994	9.632040	9.465011
$\cos E$	9.466724	9.618733	9.727304	9.809136	9.872040	9.920179	9.955928	9.980682
Subtrl.	9.838129	0.145083	9.829331	9.863828	9.884876	9.898491	9.907434	9.913113
$\cos E - e_0$	9.072760	9.384214	9.556635	9.672964	9.756916	9.818670	9.863362	9.893795
$(r) \sin I$	0.469369	0.447661	0.416047	0.372346	0.313159	0.232841	0.120887	9.953858
$\sin I$ oder $\cos I$	9.996533	9.984675	9.962752	9.928334	9.877749	9.886356	9.937379	9.972571
$(r) \cos I$	9.572739	9.879693	0.052114	0.168443	0.523955	0.314149	0.358841	0.389274
I	82"46' 9"6	74"52' 5"6	66"36' 27"4	57"58' 54"3	48"59' 42"9	39"40' 3"5	30" 2' 4"8	20" 8' 58"6
$\omega_0 + \mathcal{L} \omega$	272"39' 32"0	272"39' 14"4	272"38' 57"9	272"38' 42"5	272"38' 28"0	272"38' 14"0	272"38' 0"6	272"37' 47"3
l	355"25' 41"6	347"31' 20"0	339"15' 25"3	330"37' 36"8	321"38' 10"9	312"18' 17"5	302"40' 5"4	292"46' 45"9
$1 + r$	1.003758	1.004086	1.004363	1.004574	1.004709	1.004755	1.004705	1.004556
$\log(1 + r)$	0.001629	0.001771	0.001891	0.001982	0.002040	0.002060	0.002038	0.001974
(r)	0.472836	0.462986	0.453295	0.444012	0.435410	0.427793	0.421462	0.416703
(r)	0.474465	0.464757	0.455186	0.445994	0.437450	0.429853	0.423500	0.418677
$(r)^3$	1.423395	1.394271	1.365558	1.337982	1.312350	1.289559	1.270500	1.256031
$2 \pi k \int \frac{1}{p_0} U^2 dt$	4.278455	4.226226	4.176583	4.131399	4.092343	4.060763	4.037499	4.022804
$(r)^4$	1.897860	1.859028	1.820744	1.783976	1.749800	1.719412	1.694000	1.674708
H_1	+ 240.21	+ 232.92	+ 226.90	+ 222.55	+ 220.06	+ 219.46	+ 220.55	+ 222.89
H_2	+ 53.76	+ 29.63	+ 10.01	— 5.37	— 16.91	— 24.88	— 29.68	— 31.63
H_0	+ 293.97	+ 262.55	+ 236.91	+ 217.18	+ 203.15	+ 194.58	+ 190.87	+ 191.26
Σw_1	+ 163.13	+ 130.85	+ 105.08	+ 84.71	+ 68.74	+ 56.22	+ 46.45	+ 38.79
s	+ 178602.8	+ 190990.5	+ 204044.5	+ 217421.0	+ 230638.9	+ 243066.1	+ 253970.6	+ 262574.1
h	+ 178308.8	+ 190728.0	+ 203807.6	+ 217203.8	+ 230435.8	+ 242871.5	+ 253779.7	+ 262382.8
$10^{-7} h$	8.251173	8.280414	8.309220	8.336868	8.362550	8.385377	8.404456	8.418935
$1 + \frac{1}{12} 10^{-7} h$	0.000645	0.000689	0.000737	0.000785	0.000833	0.000878	0.000918	0.000949
S_h	+ 37632.87	+ 40925.73	+ 43702.27	+ 45827.04	+ 47175.89	+ 47643.33	+ 47150.97	+ 45655.76
$\log S_h$	4.575567	4.611991	4.640504	4.661121	4.673720	4.678002	4.673491	4.659496
h'	8.250528	8.279725	8.308483	8.336083	8.361717	8.384499	8.403538	8.417986
$h' S_h = h r$	+ 670.03	+ 779.33	+ 889.17	+ 993.58	+ 1085.02	+ 1154.78	+ 1194.07	+ 1195.31
$d^2 r : dt^2$	— 376.06	— 516.78	— 652.26	— 776.40	— 881.87	— 960.20	— 1003.20	— 1004.05
r	+ 37577.03	+ 40860.77	+ 43628.17	+ 45744.24	+ 47085.47	+ 47547.08	+ 47051.46	+ 45556.14
$\log r$	4.574922	4.611306	4.639767	4.660336	4.672887	4.677124	4.672573	4.658547
σ	4.900647	4.900434	4.900255	4.900118	4.900031	4.900001	4.900034	4.900130
$\log d \mathcal{L} M : dt$	$2_n 282357$	$2_n 318528$	$2_n 346810$	$2_n 367242$	$2_n 379706$	$2_n 383913$	$2_n 379395$	$2_n 365465$
$d \mathcal{L} M : dt$	— 3' 11"583	— 3' 28"223	— 3' 42"234	— 3' 52"939	— 3' 59"721	— 4' 2"054	— 3' 59"549	— 3' 51"988
$[w]$	+ 178765.9	+ 191121.3	+ 204149.6	+ 217505.7	+ 230707.0	+ 243122.3	+ 254017.0	+ 262612.9
$10^{-7} [w]$	8.252285	8.281309	8.309948	8.337470	8.363062	8.385825	8.404863	8.419316
$1 + \frac{1}{12} 10^{-7} [w]$	0.000647	0.000691	0.000739	0.000787	0.000834	0.000879	0.000918	0.000949
S_w	— 2114.95	— 2141.13	— 2124.36	— 2062.30	— 1953.70	— 1798.60	— 1598.72	— 1357.52
$\log S_w$	$3_n 325300$	$3_n 330643$	$3_n 327228$	$3_n 314352$	$3_n 290858$	$3_n 254935$	$3_n 203772$	$3_n 132746$
$[w']$	8.251638	8.280618	8.309209	8.336683	8.362228	8.384946	8.403945	8.418367
$[w] S_w = z [w]$	— 37.75	— 40.86	— 43.29	— 44.77	— 44.99	— 43.64	— 40.52	— 35.57
H_0	+ 1.97	+ 2.10	+ 2.01	+ 1.79	+ 1.50	+ 1.15	+ 0.80	+ 0.44
$d^2 z : dt^2$	+ 39.72	+ 42.96	+ 45.30	+ 46.56	+ 46.49	+ 44.79	+ 41.32	+ 36.01
$10^{-7} \int \Sigma U^2 dt : \sin i''$	2.212958	2.160746	2.111117	2.065944	2.026896	1.995323	1.972063	1.957371
$(r)^2$	0.948930	0.929514	0.910372	0.891988	0.874900	0.859706	0.847000	0.837354
$d \mathcal{L} \omega : dt$	+ 18"367	+ 17"031	+ 15"876	+ 14"926	+ 14"190	+ 13"665	+ 13"337	+ 13"183

1872			1871					
April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24	Juli 15	Juni 5
— 7' 4"0	— 7' 1"2	— 7' 30"6	— 7' 44"0	— 7' 5"8	— 8' 11"7	— 8' 25"9	— 8' 40"1	— 8' 54"5
+ 47' 28"7	+ 50' 59"6	+ 54' 11"0	+ 56' 58"4	+ 59' 18"6	+ 1° 1' 9"0	+ 1° 2' 27"8	+ 1° 3' 14"3	+ 1° 3' 28"4
6° 12' 50"8	359° 5' 34"9	351° 58' 19"1	344° 51' 3"2	33° 43' 7"4	330° 36' 31"6	323° 29' 15"7	316° 21' 59"9	309° 14' 44"0
7° 0' 19"5	359° 56' 34"5	352° 52' 30"1	345° 48' 1"6	338° 43' 6"0	331° 3' 40"6	324° 31' 43"5	317° 25' 14"2	310° 18' 12"4
8° 28' 7"9	359° 55' 51"4	351° 23' 12"6	342° 52' 27"6	334° 25' 45"5	326° 4' 59"6	317° 51' 42"6	309° 47' 4"1	301° 51' 50"2
9. 168120	7 _n 081076	9 _n 175403	9 _n 469039	9 _n 635106	9 _n 746625	9 _n 826671	9 _n 885620	9 _n 929063
9. 995239	0.000000	9. 995074	9. 980304	9. 955232	9. 918999	9. 870128	9. 806113	9. 722555
9. 916273	9. 917278	9. 916237	9. 913030	9. 902669	9. 898180	9. 884294	9. 862009	9. 827026
9. 911512	9. 917278	9. 911311	9. 893334	9. 862501	9. 817179	9. 754422	9. 668822	9. 549581
9. 656967	7 _n 569923	9 _n 664250	9 _n 957886	0 _n 123953	0 _n 235472	0 _n 315518	0 _n 374467	0 _n 417910
9. 993241	0.000000	9. 993007	9. 972033	9. 936388	9. 884666	9 _n 879825	9 _n 930076	9 _n 964133
0. 406991	0. 412757	0. 406790	0. 388813	0. 357980	0. 312658	0. 249901	0. 164301	0. 045060
10° 4' 58"2	359° 55' 3"8	349° 44' 44"1	339° 39' 29"1	329° 44' 25"2	320° 3' 53"7	310° 41' 16"7	301° 38' 52"8	292° 58' 0"2
272° 37' 34"2	272° 37' 21"0	272° 37' 7"6	272° 36' 54"2	272° 36' 40"4	272° 36' 26"5	272° 36' 12"3	272° 35' 58"1	272° 35' 43"7
282° 42' 32"4	272° 32' 24"8	262° 21' 51"7	252° 16' 23"3	242° 21' 5"6	232° 40' 20"2	223° 17' 29"0	214° 14' 50"9	205° 33' 43"9
1.004306	1.003961	1.003529	1.003024	1.002459	1.001854	1.001226	1.000590	0.999963
0.001866	0.001717	0.001530	0.001311	0.001066	0.000804	0.000532	0.000256	9.999984
0. 413750	0. 412757	0. 413783	0. 416780	0. 421592	0. 427992	0. 435693	0. 444391	0. 453777
0. 415616	0. 414474	0. 415313	0. 418091	0. 422658	0. 428796	0. 436225	0. 444647	0. 453761
1.246848	1.243422	1.245939	1.254273	1.267974	1.286388	1.308675	1.333941	1.361283
4.016333	4.017238	4.024346	4.036346	4.051958	4.070037	4.089628	4.109959	4.130453
1.662464	1.657896	1.661252	1.672364	1.690632	1.715184	1.744900	1.778588	1.815044
+ 225.88	+ 228.74	+ 230.72	+ 231.20	+ 229.79	+ 226.39	+ 221.17	+ 214.47	+ 206.73
— 31.15	— 28.68	— 24.64	— 19.56	— 13.85	— 7.93	— 2.09	+ 3.49	+ 8.65
+ 194.73	+ 200.06	+ 206.08	+ 211.64	+ 215.94	+ 218.46	+ 219.08	+ 217.96	+ 215.38
+ 32.80	+ 28.12	+ 24.43	+ 21.55	+ 19.28	+ 17.50	+ 16.12	+ 15.05	+ 14.23
+268185.3	+270309.4	+268747.5	+263639.4	+255451.8	+244847.2	+232598.9	+219453.2	+206062.9
+267990.6	+270109.3	+268541.2	+263427.8	+255235.9	+244628.7	+232379.8	+219235.2	+205847.5
8. 428120	8. 431540	8. 429011	8. 420661	8. 406942	8. 388508	8. 366199	8. 340910	8. 313546
0.000969	0.000977	0.000971	0.000952	0.000923	0.000885	0.000840	0.000792	0.000744
+43156.79	+39698.72	+35370.91	+30301.45	+24647.00	+18580.61	+12278.97	+5911.38	— 367.72
4.635049	4.598777	4.548646	4.481463	4.391764	4.269061	4.089162	3.771689	2 _n 565517
8. 427151	8. 430563	8. 428040	8. 419709	8. 406019	8. 387623	8. 365359	8. 340118	8. 312802
+ 1153.98	+ 1069.89	+ 947.73	+ 796.47	+ 627.74	+ 453.61	+ 284.79	+ 129.36	— 7.56
— 959.25	— 869.83	— 741.65	— 584.83	— 411.80	— 235.15	— 65.71	+ 88.60	+ 222.94
+43060.63	+39609.56	+35291.94	+30235.07	+24594.69	+18542.84	+12255.21	+5900.60	— 367.08
4.634080	4.597800	4.547675	4.480511	4.390841	4.268176	4.088321	3.770896	2 _n 564761
4.900292	4.900515	4.900796	4.901124	4.901490	4.901884	4.902292	4.902705	4.903114
2 _n 341160	2 _n 305103	2 _n 255259	2 _n 188423	2 _n 099119	1 _n 976848	1 _n 797401	1 _n 480389	0.274663
— 3' 39" 361	— 3' 21" 885	— 2' 59" 994	— 2' 34" 320	— 2' 5" 637	— 1' 34" 809	— 1' 2" 719	— 30" 227	+ 1" 882
+268218.1	+270337.5	+268771.9	+263660.9	+255471.1	+244864.7	+232615.0	+219468.2	+206077.1
8. 428488	8. 431906	8. 429384	8. 421046	8. 407342	8. 388926	8. 366637	8. 341371	8. 314030
0.000970	0.000977	0.000971	0.000953	0.000923	0.000885	0.000841	0.000793	0.000745
— 1080.31	— 774.08	— 447.19	— 108.83	+ 231.60	+ 565.07	+ 883.42	+ 1179.73	+ 1448.46
3 _n 033548	2 _n 888786	2 _n 650492	2 _n 036749	2.364739	2.752102	2.946167	3.071783	3.160906
8. 427518	8. 430929	8. 428413	8. 420093	8. 406419	8. 388041	8. 365796	8. 340578	8. 313285
— 28.91	— 20.88	— 11.99	— 2.86	+ 5.90	+ 13.81	+ 20.51	+ 25.84	+ 29.80
+ 0.11	— 0.22	— 0.52	— 0.80	— 1.06	— 1.30	— 1.54	— 1.75	— 1.95
+ 29.02	+ 20.66	+ 11.47	+ 2.06	— 6.96	— 15.11	— 22.05	— 27.59	— 31.75
1.950902	1.951806	1.958913	1.970911	1.986520	2.004595	2.024182	2.044509	2.064998
0. 831232	0. 828048	0. 830626	0. 836182	0. 845316	0. 857592	0. 872450	0. 889294	0. 907522
+ 13" 173	+ 13" 270	+ 13" 437	+ 13" 637	+ 13" 842	+ 14" 028	+ 14" 182	+ 14" 296	+ 14" 371

Datum	1875		1874						
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Jun. 29	Mai 20	
λ_0'	+1°16'24"0	+1°17'16"7	+1°17'56"4	+1°18'23"1	+1°18'36"8	+1°18'37"5	+1°18'25"0	+1°17'59"4	
λ_0''	202°47'52"5	199°46'32"6	196°45'19"1	193°44'9"0	190°42'59"1	187°41'46"3	184°40'27"3	181°38'59"2	
$\lambda_0' - \lambda_0''$	7°51'12"8	74°3'52"0	71°0'23"9	68°1'29"3	65°0'19"4	61°59'6"6	58°5'47"6	55°56'19"5	
$\sin \lambda_0' - \lambda_0''$	9.988875	9.982982	9.975786	9.967241	9.957294	9.945875	9.932898	9.918260	
$\cos \lambda_0'$	9.999893	9.999890	9.999888	9.999887	9.999886	9.999886	9.999887	9.999888	
$\cos \lambda_0' - \lambda_0''$	9.349225	9.438625	9.511666	9.573110	9.625861	9.671821	9.712303	9.748250	
$\sin \lambda_0'$	8.346784	8.351747	8.355449	8.357921	8.359185	8.359249	8.358097	8.355728	
$\sin Q$ oder $\cos Q$	9.999887	9.999881	9.999875	9.999869	9.999862	9.999854	9.999846	9.999837	
$\cos \lambda_0' \sin (\lambda_0' - \lambda_0'')$	9.988768	9.982872	9.975674	9.967128	9.957294	9.945875	9.932898	9.918260	
Q	1°18'22"9	1°20'21"9	1°22'24"4	1°24'31"4	1°26'44"0	1°29'3"4	1°31'30"8	1°34'8"0	
$Q - \lambda_0'$	-0°54'1"0	-0°52'2"0	-0°49'59"5	-0°47'52"5	-0°45'39"9	-0°43'20"5	-0°40'53"1	-0°38'17"9	
$\sin (Q - \lambda_0')$	8.9196236	8.9179991	8.9162608	8.9143820	8.9123297	8.9100620	8.9075280	8.9046519	
q	9.988881	9.982991	9.975799	9.967259	9.957318	9.945907	9.932939	9.918311	
$\cos (Q - \lambda_0')$	9.999946	9.999950	9.999954	9.999958	9.999962	9.999965	9.999969	9.999973	
$\cos B_1 \sin L_1$	9.988827	9.982941	9.975753	9.967217	9.957280	9.945872	9.932908	9.918284	
$\sin L_1$ oder $\cos L_1$	9.988878	9.982987	9.975794	9.967254	9.957312	9.945899	9.932930	9.918303	
$\cos B_1 \cos L_1$	9.349118	9.438515	9.511554	9.572997	9.625747	9.671707	9.712190	9.748138	
L_1	77°5'18"9	74°4'1"5	71°2'51"0	68°1'43"8	65°0'37"5	61°59'28"4	58°5'8"3	55°56'49"1	
$\cos B_1$	9.999949	9.999954	9.999959	9.999963	9.999968	9.999973	9.999978	9.999981	
r_1	0.736575	0.736732	0.736828	0.736862	0.736885	0.736907	0.736927	0.736946	
$\sin B_1$	8.9185117	8.9162982	8.9138407	8.9111079	8.9080615	8.9046527	8.9008219	8.8964830	
$L_1 - l$	336°12'24"2	338°17'21"7	340°21'49"8	342°26'45"8	344°33'17"9	346°42'13"5	348°34'55"2	351°0'14"2	
$\cos (L_1 - l)$	9.961425	9.968046	9.973980	9.979290	9.984026	9.988200	9.991813	9.994846	
$r_1 \cos B_1$	0.736524	0.736686	0.736787	0.736825	0.736860	0.736892	0.736920	0.736946	
$\sin (L_1 - l)$	9.9605777	9.9568107	9.9526399	9.9479437	9.9425394	9.9361702	9.9284102	9.9185138	
ξ_1	0.697949	0.704732	0.710767	0.716115	0.720829	0.724920	0.728388	0.731213	
(r)	0.564020	0.564810	0.564879	0.564228	0.562874	0.560804	0.558025	0.554544	
Subtract.	9.557774	9.579939	9.601221	9.621890	9.642117	9.662006	9.681553	9.700700	
ξ_1	8.921692	8.9299714	8.9375235	8.9447941	8.9517450	8.9583274	8.9644816	8.9701216	
z	0	0	0	0	4.989...	5.9185...	5.94082...	5.95843...	
Subtract.	0	0	0	0	9.999949	9.999891	9.999800	9.999668	
$\xi_1 - (r)$	0.121794	0.144749	0.166100	0.186118	0.204991	0.222810	0.239578	0.255244	
$\sin \theta$ oder $\cos \theta$	9.932875	9.915085	9.892647	9.864034	9.828929	9.789891	9.742446	9.687705	
r_1	0.342301	0.304793	0.263186	0.216262	0.162197	0.098422	0.020677	9.921505	
$q \cos \theta$	0.409426	0.389708	0.370539	0.352228	0.335162	0.319919	0.307132	0.297539	
$\sin \theta$	9.999770	9.999773	9.999778	9.999787	9.999800	9.999817	9.999837	9.999861	
$q \sin \theta$	8.921692	8.9299714	8.9375235	8.9447941	8.9517450	8.9583274	8.9644816	8.9701216	
q^{-1}	9.592344	9.610065	9.629239	9.647559	9.664638	9.679898	9.692705	9.702322	
q^{-3}	8.771052	8.830195	8.877717	8.912677	8.939314	8.959694	8.978115	8.996966	
r_1^{-3}	7.790275	7.789804	7.789516	7.789414	7.789495	7.789759	7.790209	7.790842	
Subtract.	9.952051	9.958507	9.963900	9.968359	9.971991	9.974860	9.977021	9.978503	
K	8.723083	8.788702	8.851617	8.911036	8.965905	9.014354	9.055136	9.085469	
$\xi_1 : r$	0.133929	0.139922	0.145888	0.151887	0.157955	0.164116	0.170363	0.176669	
$w k^2 m_1 10^7 K$	2.378055	2.443674	2.506589	2.566008	2.620877	2.669526	2.710108	2.740441	
$r_1 (r)$	0.906321	0.869603	0.828065	0.780490	0.725071	0.659226	0.578702	0.476049	
U	-1924.76	-2057.20	-2160.99	-2220.74	-2217.93	-2131.83	-1944.51	-1646.23	
R	+325.08	+383.35	+449.24	+522.27	+600.94	+681.78	+759.40	+826.25	
W_1	-19.94	-22.05	-24.09	-25.94	-27.43	-28.37	-28.51	-27.65	
w_1	+266.69	+305.61	+348.89	+395.96	+445.54	+495.07	+540.86	+578.01	
ΣR	+325.09	+383.42	+449.39	+522.53	+601.31	+682.28	+760.04	+827.04	
Σw_1	+267.83	+306.68	+349.89	+396.90	+446.43	+495.92	+541.67	+578.78	
ΣW_1	-19.91	-22.02	-24.05	-25.89	-27.38	-28.32	-28.45	-27.59	
z	0	0	0	0	0	0	0	0	
z^2	0	0	0	0	0	0	0	0	
$(r)^5$	0	0	0	0	0	0	0	0	
z^3	0	0	0	0	0	0	0	0	
$z^2 : r^5$	0	0	0	0	0	0	0	0	
ΣR	+325.09	+383.42	+449.39	+522.53	+601.31	+682.28	+760.04	+827.04	
$\Sigma R - \Sigma w_1$	+57.26	+76.74	+99.50	+125.63	+154.88	+186.36	+218.37	+248.26	
$z^3 : r^5$	0	0	0	0	0	0	0	0	
ΣW_1	-19.91	-22.02	-24.05	-25.89	-27.38	-28.32	-28.45	-27.59	

1874			1873							
April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Jul. 4	Mai 25	April 15	
+1°17'20"7 1°8'33"19"2 52°54'39"5 9.901839 9.999890 9.780357	+1°16'29"0 1°5'35"24"2 49°52'44"5 9.883483 9.999802 9.809158	+1°15'24"6 1°2'33"11"4 46°50'31"7 9.863008 9.999896 9.835063	+1°14'7"0 1°6'03'37"4 43°47'57"4 9.840191 9.999899 9.858398	+1°12'36"6 1°6'27'39"3 40°44'59"6 9.814752 9.999903 9.879421	+1°10'53"6 1°6'24'14"2 37°41'34"5 9.786346 9.999908 9.898341	+1°8'58"4 1°6'20'19"1 34°37'39"4 9.754532 9.999913 9.915327	+1°6'50"8 1°5'15'51"6 31°33'11"9 9.718444 9.999918 9.930518	+1°4'31"2 1°5'10'48"3 28°28'8"6 9.678231 9.999924 9.944026	+1°2'0"0 1°5'1'5"7 25°22'27"4 9.631981 9.999929 9.955942	
8.352122 9.999827 9.901720 1°36'57"1 -0°35'26"8	8.342577 9.999816 9.883375 1°40'05"5 -0°32'23"4	8.341121 9.999804 9.862904 1°43'21"7 -0°29'2"2	8.333608 9.999790 9.840090 1°47'40"0 -0°25'19"9	8.324690 9.999773 9.814655 1°51'12"8 -0°21'11"1	8.314301 9.999753 9.786254 1°55'55"2 -0°16'28"5	8.302378 9.999729 9.754445 2°0'11'20"8 -0°11'31"1	8.288788 9.999700 9.718662 2°0'42"0 -0°7'41"9	8.273395 9.999663 9.678155 2°0'15'1"8 0°0'25'3"9	8.256094 9.999615 9.631910 2°0'24'36"7 0°0'12'12"8	
8.9013294 9.901902 9.999977	7.9974131 9.883559 9.999981	7.9926668 9.863100 9.999985	7.9867386 9.840300 9.999988	7.9789752 9.814882 9.999992	7.9680637 9.786501 9.999995	7.9507153 9.754716 9.999998	7.9315670 9.718962 0.000000	6.925875 9.678492 0.000000	7.550559 9.632295 9.999997	
9.901879 9.901894 9.780247 52°55'13"7	9.883540 9.883552 9.809050 49°53'23"1	9.863085 9.863093 9.834959 46°51'14"5	9.840288 9.858303 9.858297 43°48'44"5	9.814874 9.879327 9.879324 40°45'50"9	9.786496 9.898250 9.882499 37°42'30"0	9.754714 9.915240 9.915240 34°38'39"1	9.718962 9.930436 9.930436 31°34'15"5	9.678492 9.943949 9.943950 28°29'15"7	9.632292 9.955871 9.955871 25°23'37"6	
9.999985 0.736113 7.915196	9.999988 0.735780 7.8857690	9.999992 0.735387 7.8789768	9.999994 0.734934 7.870686	9.999997 0.734427 7.8604634	9.999999 0.733864 7.8467138	0.000000 0.733246 7.8261869	0.000000 0.732574 6.8054632	0.000000 0.731849 6.604367	0.000000 0.731074 7.182854	
353°33'44"6 9.997253 0.736098 9.9049688	356°2'42"1 9.998964 0.735768 8.9838676	358°39'26"0 9.999881 0.735379 8.9639842	1°25'8"3 9.999867 0.734928 8.939306	4°21'7"3 9.998846 0.734420 8.880151	7°28'44"0 9.996290 0.733863 9.114480	10°49'23"0 9.992200 0.733246 9.273641	14°24'32"3 9.986120 0.732574 9.395923	18°15'40"2 9.977558 0.731849 9.496028	22°24'14"8 9.965916 0.731074 9.581080	
0.733351 0.550360 9.719349	0.734732 0.545484 9.737303	0.735260 0.539925 9.754317	0.734795 0.533694 9.770054	0.733170 0.526814 9.784089	0.730153 0.519309 9.795855	0.725451 0.511222 9.804603	0.718694 0.502606 9.809362	0.709407 0.493537 9.808805	0.696990 0.484114 9.801121	
8.651309 7.9300... 9.999479	8.593470 5.98506... 9.999214	8.525155 5.99518... 9.998839	8.442620 6.90374... 9.998288	8.339061 6.91096... 9.997431	8.201002 6.91697... 9.995940	7.995115 6.9218796 9.992669	7.9587206 6.9258398 9.979138	7.336216 6.9288920 0.037299	7.913928 6.9310906 0.010700	
0.269709 9.977792 9.785786 0.291917 9.999887 8.650788	0.282787 9.991837 9.957444 0.290950 9.999913 8.592684	0.294242 9.999092 9.910521 0.295150 9.999938 8.523994	0.303748 9.999033 9.128734 0.304715 9.999959 8.440908	0.310903 9.991381 9.614575 0.319522 9.999979 8.336492	0.315164 9.976069 9.848343 0.339095 9.999989 8.196942	0.315825 9.953104 0.006887 0.362721 9.999966 7.987784	0.311968 9.922393 0.128497 0.389575 0.000000 7.566344	0.302342 9.883541 0.227877 0.418801 0.000000 7.373515	0.285235 9.862528 0.312154 0.449626 9.999998 7.924628	
9.707970 9.129910 7.791661 9.979306 9.103216	9.708963 9.126889 7.792660 9.979402 9.106291	9.704788 9.114364 7.793839 9.978726 9.093090	9.695244 9.085732 7.795198 9.977164 9.062896	9.680455 9.041365 7.796719 9.974543 9.015908	9.660894 8.982682 7.798408 9.970615 8.953297	9.637275 8.911825 7.800262 9.965039 8.876864	9.610425 8.831275 7.802278 9.957348 8.788623	9.581199 8.773597 7.804453 9.946923 8.690520	9.550372 8.651116 7.806778 9.932926 8.584042	
0.182991 2.758188 0.336146 -1242.61 +873.33	0.189248 2.761263 0.119928 760.66 +892.30	0.195335 2.748062 9.645145 -247.29 +877.80	0.201101 2.717868 9.662428 +240.05 +829.79	0.206356 2.670880 0.141389 +649.04 +733.76	0.210844 2.608269 0.367652 +946.06 +659.35	0.214229 2.531836 0.518109 +1121.88 +557.27	0.216088 2.445395 0.631103 +1187.68 +456.75	0.215870 2.345497 0.721414 +1166.56 +364.22	0.212876 2.239014 0.796268 +1084.63 +283.07	
+25.67 +601.01	+22.63 +605.15	+18.76 +587.94	+14.47 +550.43	+10.23 +496.98	+6.45 +434.16	+3.36 +368.80	+1.07 +306.37	+0.48 +250.36	+1.42 +202.34	
+874.28 +601.75 -25.61	+893.41 +605.86 -22.57	+879.08 +588.63 -18.69	+831.24 +551.10 -14.40	+755.38 +497.63 -10.16	+661.14 +434.80 -6.38	+559.22 +369.43 -3.29	+458.86 +306.99 -1.00	+366.46 +250.98 +0.55	+285.43 +202.96 +1.49	
-537	-709	-895	-1090	-1287	-1478	-1655	-1813	-1945	-2046	
+272.53	+287.55	+290.45	+280.14	+257.75	+226.34	+189.79	+151.87	+115.97	+82.47	

Datum	1873		1872					
	März 6	Jan. 25	Dec. 16	Nov. 6	Sept. 27	Aug. 13	Juli 9	Mai 30
λ_0'	+0° 59' 1" 4	+0° 56' 23" 4	+0° 53' 18" 8	+0° 50' 3" 6	+0° 46' 38" 4	+0° 43' 3" 8	+0° 39' 20" 1	+0° 35' 28" 0
λ_0''	14° 58' 45" 3	144° 51' 40" 0	141° 43' 48" 6	138° 35' 8" 5	135° 25' 37" 6	132° 15' 13" 8	129° 3' 54" 8	125° 51' 38" 7
$\lambda_0' - \lambda_0''$	22° 16' 5" 6	19° 9' 0" 3	16° 1' 8" 9	12° 52' 28" 8	9° 42' 57" 9	6° 32' 34" 1	3° 21' 15" 1	0° 8' 59" 0
$\sin \lambda_0' - \lambda_0''$	9.578574	9.515932	9.440844	9.347952	9.227285	9.056697	8.767218	7.417163
$\cos \lambda_0'$	9.999935	9.999942	9.999948	9.999954	9.999960	9.999966	9.999972	9.999977
$\cos \lambda_0' - \lambda_0''$	9.966339	9.975277	9.982800	9.988942	9.993726	9.997162	9.999255	9.999999
$\sin \lambda_0'$	8.236686	8.214909	8.190545	8.163201	8.132471	8.097822	8.058495	8.013539
$\sin Q$ oder $\cos Q$	9.999551	9.999457	9.999315	9.999075	9.998601	9.997391	9.991849	9.986499
$\cos \lambda_0' \sin (\lambda_0' - \lambda_0'')$	9.578509	9.515874	9.440792	9.347906	9.227245	9.056663	8.767190	7.417140
Q	2° 36' 22" 2	2° 51' 46" 2	3° 13' 0" 4	3° 44' 21" 8	4° 35' 47" 0	6° 16' 26" 2	11° 3' 56" 7	75° 4' 13" 3
$Q - i_0$	0° 23' 58" 3	0° 39' 22" 3	1° 0' 36" 5	1° 31' 57" 9	2° 23' 23" 1	4° 4' 2" 3	8° 51' 32" 8	73° 34' 49" 4
$\sin (Q - i_0)$	7.843421	8.058900	8.246236	8.427297	8.620104	8.850819	9.187536	9.981917
Q	9.578958	9.516417	9.441477	9.348831	9.228644	9.059272	8.775341	8.027040
$\cos (Q - i_0)$	9.999989	9.999972	9.999932	9.999844	9.999622	9.999050	9.994788	9.981279
$\cos B_1 \sin L_1$	9.578947	9.516389	9.441409	9.348675	9.228266	9.058177	8.770129	7.478319
$\sin L_1$ oder $\cos L_1$	9.966276	9.975221	9.982753	9.988904	9.993696	9.997142	9.999245	9.999998
$\cos B_1 \cos L_1$	9.966274	9.975219	9.982748	9.988896	9.993686	9.997128	9.999227	9.999976
L_1	22° 17' 18" 4	19° 10' 16" 2	16° 2' 26" 4	12° 53' 48" 1	9° 44' 18" 6	6° 33' 55" 6	3° 22' 36" 9	0° 10' 20" 5
$\cos B_1$	9.999998	9.999998	9.999995	9.999992	9.999990	9.999986	9.999982	9.999978
r_1	0.730250	0.729380	0.728465	0.727507	0.726509	0.725473	0.724406	0.723308
$\sin B_1$	7.422379	7.575317	7.687713	7.776128	7.848748	7.910091	7.962877	8.008957
$L_1 - l$	26° 51' 37" 1	31° 38' 56" 2	36° 47' 1" 4	42° 16' 11" 3	48° 6' 7" 4	54° 15' 38" 1	60° 42' 31" 5	67° 23' 34" 6
$\cos (L_1 - l)$	9.950419	9.930072	9.903579	9.869224	9.824650	9.766487	9.689530	9.584794
$r_1 \cos B_1$	0.730248	0.729378	0.728460	0.727499	0.726499	0.725459	0.724388	0.723286
$\sin (L_1 - l)$	9.654962	9.719922	9.772729	9.827771	9.871770	9.909386	9.940588	9.965278
ξ_1	0.680667	0.659450	0.632039	0.596723	0.551149	0.491946	0.413918	0.308080
(r)	0.474465	0.464757	0.455186	0.445994	0.437450	0.428853	0.423500	0.418677
Subtract.	9.783682	9.752543	9.701252	9.617955	9.476061	9.186677	8.348455	9.462430
ξ_1	8.152629	8.304697	8.416178	8.503635	8.575257	8.635564	8.687283	8.732265
z	6.324694	6.330008	6.326541	6.313656	6.290035	6.254064	6.202761	6.131619
Subtract.	0.006407	0.004579	0.003519	0.002795	0.002246	0.001800	0.001421	0.001088
$\xi_1 - (r)$	0.258147	0.217300	0.156438	0.063949	0.913511	9.616530	8.762373	9.770510
$\sin \theta$ oder $\cos \theta$	9.903852	9.935872	9.960378	9.978500	9.990919	9.998013	9.999666	9.996856
r_1	0.385210	0.449300	0.505739	0.555270	0.598269	0.634845	0.664976	0.688564
$q \cos \theta$	0.481358	0.513428	0.545361	0.576770	0.607350	0.636832	0.665010	0.691708
$\cos \theta$	9.999995	9.999992	9.999988	9.999984	9.999981	9.999978	9.999974	9.999970
$q \sin \theta$	8.159036	8.309276	8.419697	8.506430	8.577503	8.637364	8.688704	8.733353
q^{-1}	9.518637	9.486564	9.454627	9.423214	9.392631	9.363146	9.334966	9.308266
q^{-3}	8.555911	8.459692	8.363881	8.269642	8.177893	8.089438	8.004898	7.924798
r_1^{-3}	7.809250	7.811860	7.814605	7.817479	7.820473	7.823381	7.826782	7.830076
Subtract.	9.914237	9.889306	9.855938	9.810870	9.762993	9.710629	9.654552	9.594015
K	8.470148	8.348998	8.219819	8.080512	7.926766	7.750133	7.531797	7.216965
$\xi_1 : (r)$	0.206202	0.194693	0.176853	0.150729	0.113699	0.062093	9.990418	9.889403
$w h^2 m_1 10^7 K$	2.125120	2.003970	1.874791	1.735484	1.581738	1.405105	1.186769	0.871937
r_1	0.859675	0.914057	0.960925	1.001264	1.035719	1.064698	1.088476	1.107241
U	+ 965.59	+ 827.99	+ 685.04	+ 545.44	+ 414.44	+ 294.99	+ 188.47	+ 95.32
R	+ 214.45	+ 158.00	+ 112.63	+ 76.95	+ 49.59	+ 29.32	+ 15.04	+ 5.77
W_1	+ 1.90	+ 2.04	+ 1.95	+ 1.73	+ 1.44	+ 1.10	+ 0.75	+ 0.40
w_1	+ 162.51	+ 130.22	+ 104.44	+ 84.06	+ 68.06	+ 55.51	+ 45.70	+ 38.00
ΣR	+ 216.89	+ 160.48	+ 115.09	+ 79.34	+ 51.83	+ 31.34	+ 16.77	+ 7.16
Σw_1	+ 163.13	+ 130.85	+ 105.08	+ 84.71	+ 68.74	+ 56.22	+ 46.45	+ 38.79
ΣW_1	+ 1.97	+ 2.10	+ 2.01	+ 1.79	+ 1.50	+ 1.15	+ 0.80	+ 0.44
z	— 2112	— 2138	— 2121	— 2059	— 1950	— 1795	— 1595	— 1354
z^2								
$(r)^5$								
z^3								
$z^2 : (r)^5$								
ΣR	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0
$\Sigma R - \Sigma w_1$	+ 53.76	+ 29.63	+ 10.01	+ 5.37	+ 16.91	+ 24.88	+ 29.68	+ 31.63
$z^3 : (r)^5$								
$\Sigma \Sigma W_1$	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0

1872			1871						
April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24	Juli 15	Juni 5	
+ 0°31'27"8 122°38'23"2 356°55'43"5 8 _n 728984 9.999982 9.999376	+ 0°27'20"5 119°24' 6"7 353°41'27"0 9 _n 040971 9.999986 9.997361	+ 0°23' 6"7 116° 8'48"0 350°26' 8"3 9 _n 220514 9.999990 9.993920	+ 0°18'46"7 112°52'25"3 347° 9'45"6 9 _n 346712 9.999993 9.989007	+ 0°14'21"8 109°34'57"4 343°52'17"7 9 _n 443719 9.999996 9.982562	+ 0° 9'52"5 106°16'23"0 340°33'43"3 9 _n 522165 9.999998 9.974513	+ 0° 5'19"6 102°56'41"4 33°-0'14"1 9 _n 587679 9.999999 9.964774	+ 0° 0'44"1 99°35'51"5 333°53'11"8 9 _n 643599 0.000000 9.953240	- 0° 3'53"1 96°13'53"4 330°31'13"7 9 _n 692064 0.000000 9.939784	
7.961525 9.993753 8 _n 728966 170°18'21"1 168° 5'57"2	7.900546 9.998866 9 _n 040957 175°51'37"6 173°39'13"7	7.827554 9.999645 9 _n 220504 177°40'58"6 175°28'34"7	7.737381 9.999869 9 _n 346705 178°35'29"9 176°23' 6"0	7.620980 9.999951 9 _n 443715 179° 8'17"9 176°55'54"0	7.458263 9.999984 9 _n 522163 179°30'19"6 177°17'55"7	7.190181 9.999996 9 _n 587678 179°46'14"1 177°33'50"2	6.330014 0 _n 000000 9 _n 643599 179°58'19"8 177°45'55"9	7 _n 053117 9 _n 999999 9 _n 692064 180° 7'53"7 177°55'29"8	
9.314325 8.735213 9 _n 990564	9.043502 9.042091 9 _n 997331	8.896919 9.220859 9 _n 998645	8.799697 9.346836 9 _n 999135	8.728572 9.443764 9 _n 999377	8.673273 9.522179 9 _n 999518	8.628434 9.587682 9 _n 999607	8.590942 9.643599 9 _n 999670	8.558813 9.692065 9 _n 999715	
8 _n 725777 9.999384 9.999358 356°57'4"3	9 _n 039422 9.997380 9.997347 353°42'46"5	9 _n 219504 9.993948 9.993910 350°27'26"0	9 _n 345971 9.989043 9.989000 347°11'11"1	9 _n 443141 9.982605 9.982558 343°53'30"4	9 _n 521697 9.974564 9.974511 340°34'52"8	9 _n 587289 9.964832 9.964773 33°-0'14"1	9 _n 643269 9.953304 9.953240 333°54'13"9	9 _n 691780 9.939854 9.939784 330°32'11"4	
9.999974 0.722180 8.049538	9.999967 0.721028 8.085593	9.999962 0.719851 8.117778	9.999957 0.718657 8.146533	9.999953 0.717448 8.172336	9.999947 0.716231 8.195452	9.999941 0.715006 8.216116	9.999936 0.713777 8.234541	9.999930 0.712551 8.250878	
74°14'31"9 9.433884 0.722154 9.983364	81°10'21"7 9.185986 0.720995 9.994826	88° 5'34"3 8.522179 0.719813 9.999759	94°54'57"8 8 _n 932471 0.718614 9.998403	101°32'24"8 9 _n 301151 0.717401 9.991131	107°54'32"6 9 _n 487855 0.716178 9.978429	113°57'38"6 9 _n 608644 0.714947 9.960862	119°39'23"0 9 _n 694427 0.713713 9.939024	124°58'27"5 9 _n 758313 0.712481 9.913501	
0.156038 0.415616 9.912718	9.906981 0.414474 9.838334	9.241992 0.415313 9.969838	9 _n 651085 0.418091 0.068556	0 _n 018552 0.422658 0.144375	0 _n 204033 0.428796 0.203030	0 _n 323591 0.436225 0.248354	0 _n 408140 0.444647 0.283160	0 _n 470794 0.453761 0.292597	
8.771718 6 _n 032619 0.000791	8.806621 5 _n 887617 0.000523	8.837629 5 _n 649333 0.000281	8.865190 5 _n 037426 0.000064	8.889784 5.363612 9.999871	8.911683 5.751279 9.999699	8.931122 5.945469 9.999551	8.948318 6.007776 9.999424	8.963429 6.160168 9.999316	
0 _n 068756 9.988731 0.705518 0.716787 9.999972 8.772509	0 _n 252808 9.975668 0.715821 0.740153 9.999970 8.807144	0 _n 385151 9.957825 0.719572 0.761747 9.999969 8.837910	0 _n 486647 9.935454 0.717017 0.781563 9.999968 8.865254	0 _n 567033 9.908907 0.708332 0.799625 9.999967 8.889655	0 _n 631826 9.878615 0.694607 0.815992 9.999966 8.911382	0 _n 684579 9 _n 853826 0.675809 0.830753 9.999965 8.930673	0 _n 727807 9 _n 883792 0.652737 0.844015 9.999965 8.947742	0 _n 763391 9 _n 907497 0.625982 0.855894 9.999964 8.962745	
9.283185 7.849555 7.833460 8.576973 6.410433	9.259817 7.779451 7.836916 9.150667 6 _n 930118	9.238222 7.714666 7.840447 9.526238 7 _n 240904	9.218405 7.655215 7.844029 9.736071 7 _n 391286	9.200342 7.601026 7.847656 9.883398 7 _n 484424	9.183974 7.551922 7.851307 9.996704 7 _n 548626	9.169212 7.507636 7.854982 0.088165 7 _n 595801	9.155950 7.467850 7.858669 0.164158 7 _n 632008	9.144070 7.432210 7.862347 9.798362 7 _n 660709	
9.740422 0.065405 1.121134 + 15.37 + 0.64	9.492507 0 _n 585090 1.130295 — 51.93 — 1.20	8.826679 0 _n 895876 1.134885 — 107.34 — 0.53	9 _n 232994 1 _n 046258 1.135108 — 151.83 + 1.90	9 _n 595894 1 _n 139396 1.131190 — 186.46 + 5.44	9 _n 775237 1 _n 203598 1.123403 — 212.32 + 9.52	9 _n 887366 1 _n 250773 1.112034 — 230.57 + 13.74	9 _n 963493 1 _n 286980 1.097384 — 242.31 + 17.80	0 _n 017033 1 _n 315681 1.079743 — 248.56 + 21.51	
+ 0.07 + 31.95	— 0.25 + 27.19	— 0.54 + 23.42	— 0.82 + 20.43	— 1.07 + 18.03	— 1.30 + 16.10	— 1.52 + 14.54	— 1.72 + 13.27	— 1.90 + 12.22	
+ 1.65 + 32.80 + 0.11	— 0.56 + 28.12 — 0.22	— 0.21 + 24.43 — 0.52	+ 1.99 + 21.55 — 0.80	+ 5.43 + 19.28 — 1.06	+ 9.57 + 17.50 — 1.30	+ 14.03 + 16.12 — 1.54	+ 18.54 + 15.05 — 1.75	+ 22.88 + 14.23 — 1.95	
— 107.8	— 772	— 446	— 109	+ 231	+ 564	+ 882	+ 1177	+ 1446	
— 31.15	— 28.68	— 24.64	— 19.56	— 13.85	— 7.93	— 2.09	+ 3.49	+ 8.65	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	

b₁

Datum	1875		1874					
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 17	Sept. 17	Aug. 8	Jun. 29	Mai 20
λ_0'	— 1° 2' 23" —	0° 59' 26"	— 0° 56' 27"	— 0° 53' 27"	— 0° 50' 25"	— 0° 47' 23"	— 0° 44' 19"	— 0° 41' 19"
λ_0'	317° 15' 3"	316° 0' 27"	314° 45' 59"	313° 31' 39"	312° 17' 26"	311° 3' 21"	309° 49' 23"	308° 35' 32"
$\lambda_0' - \varpi_0$	191° 32' 23"	190° 17' 47"	189° 3' 19"	187° 48' 59"	186° 34' 46"	185° 20' 41"	184° 6' 43"	182° 52' 52"
$\sin (\lambda_0' - \varpi_0)$	9,930113	9,925222	9,919697	9,913354	9,905911	8,996917	8,985555	8,970125
$\cos \lambda_0'$	9,999993	9,999993	9,999994	9,999995	9,999995	9,999996	9,999996	9,999997
$\cos (\lambda_0' - \varpi_0)$	9,999113	9,999295	9,999455	9,999595	9,999713	9,999811	9,999888	9,999945
$\sin \lambda_0'$	8,925877	8,923773	8,921537	8,919166	8,916628	8,913934	8,911028	8,907984
$\sin Q$ oder $\cos Q$	9,999822	9,999798	9,999765	9,999718	9,999647	9,999530	9,999309	9,998793
$\cos \lambda_0' \sin (\lambda_0' - \varpi_0)$	9,930106	9,925215	9,919691	9,913349	9,905906	8,996913	8,985551	8,970122
Q	185° 11' 2"	185° 31' 31"	185° 57' 24"	186° 31' 21"	187° 17' 40"	188° 25' 4"	190° 11' 32"	193° 26' 53"
$Q - i_0$	182° 58' 38"	183° 19' 7"	183° 45' 0"	184° 18' 57"	185° 5' 16"	186° 12' 40"	187° 59' 8"	191° 14' 29"
$\sin (Q - i_0)$	8,971549	8,976259	8,981560	8,987653	8,994783	9,903420	9,914278	9,928991
q	9,30284	9,25417	9,19926	9,13631	9,06259	8,97383	8,86242	8,71329
$\cos (Q - i_0)$	9,999941	9,999927	9,999907	9,999877	9,999828	9,999744	9,999577	9,999159
$\cos B_1 \sin L_1$	9,930225	9,925344	9,919833	9,913508	9,906087	8,997127	8,985819	8,970488
$\sin L_1$ oder $\cos L_1$	9,999109	9,999291	9,999452	9,999592	9,999711	9,999809	9,999887	9,999944
$\cos B_1 \cos L_1$	9,999106	9,999288	9,999449	9,999590	9,999708	9,999807	9,999884	9,999942
L_1	191° 34' 14"	190° 19' 35"	189° 5' 4"	187° 50' 41"	186° 36' 24"	185° 22' 15"	184° 8' 14"	182° 54' 19"
$\cos B_1$	9,999997	9,999997	9,999997	9,999998	9,999997	9,999998	9,999997	9,999998
$\sin B_1$	0,99500	0,99537	0,99573	0,99608	0,99642	0,99676	0,99708	0,99740
	8,901833	8,901676	8,901486	8,901284	8,901042	8,900803	8,900520	8,900320
$I_1 - l$	90° 41' 19"	94° 32' 55"	98° 24' 3"	102° 15' 43"	106° 9' 4"	110° 5' 0"	114° 4' 36"	118° 8' 54"
$\cos (L_1 - l)$	8,907984	8,909930	9,916464	9,932712	9,944431	9,953578	9,961062	9,967372
$r_1 \cos B_1$	0,99497	0,99534	0,99570	0,99606	0,99639	0,99674	0,99705	0,99738
$\sin (L_1 - l)$	9,99997	9,999863	9,999532	9,998998	9,998251	9,997276	9,996047	9,994534
ξ_1	9,907481	9,9089464	0,916034	0,932318	0,944070	0,953252	0,960767	0,967110
(r)	0,56402	0,56481	0,56488	0,56423	0,56287	0,56080	0,55802	0,55454
Subtract.	0,01386	0,08412	0,14425	0,19702	0,24423	0,28712	0,327691	0,36665
ξ_1	9,901333	9,901213	9,901059	9,900892	9,900684	9,900479	9,900228	9,900060
z	0	0	0	0	4,989...	5,9185...	5,94082...	5,95843...
Subtract.	0	0	0	0	9,999997	9,999993	9,999989	9,999983
$\xi_1 - (r)$	0,957788	0,964893	0,970913	0,976125	0,980710	0,984792	0,988458	0,991775
$\sin \theta$ oder $\cos \theta$	9,97031	9,95966	9,94758	9,93401	9,91882	9,90188	9,88291	9,86161
r_1	0,99494	0,99397	0,99102	0,98604	0,97890	0,96950	0,95752	0,94272
$q \cos \theta$	1,02463	1,03431	1,04344	1,05203	1,06008	1,06762	1,07461	1,08111
$\cos \theta$	9,99998	9,99998	9,99998	9,99998	9,99998	9,99998	9,99998	9,99999
$q \sin \theta$	9,901333	9,901213	9,901059	9,900892	9,900681	9,900472	9,900217	9,900043
q^{-1}	8,97535	8,96567	8,95654	8,94795	8,93990	8,93236	8,92537	8,91888
q^{-3}	6,92605	6,89701	6,86962	6,84385	6,81970	6,79708	6,77611	6,75664
r_1^{-3}	7,01500	7,01389	7,01281	7,01176	7,01074	7,00972	7,00876	7,00780
Subtract.	9,35659	9,48970	9,59169	9,67395	9,74236	9,80051	9,85042	9,89378
K	6,928264	6,938671	6,946131	6,951780	6,956206	6,959759	6,962653	6,965042
$\xi_1 - (r)$	8,951079	9,932983	9,959546	9,975895	9,987783	9,997172	0,904965	0,911656
$(rK)^2 m_1 10^7 K$	9,941366	9,951773	9,959233	9,964882	9,969308	9,972861	9,975755	9,978144
$\xi_1 (r)$	1,555896	1,55878	1,55590	1,55027	1,54177	1,53030	1,51554	1,49726
U	— 9,39	— 11,93	— 14,07	— 15,82	— 17,17	— 18,15	— 18,75	— 19,00
R	+ 0,01	+ 0,07	+ 0,15	+ 0,26	+ 0,37	+ 0,50	+ 0,64	+ 0,79
W_1	+ 0,03	+ 0,03	+ 0,04	+ 0,05	+ 0,05	+ 0,05	+ 0,06	+ 0,06
w_1	+ 1,14	+ 1,07	+ 1,00	+ 0,94	+ 0,89	+ 0,85	+ 0,81	+ 0,77

b₂

1874			1873						
April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25	April 15
— 0°38' 9" — 307°21' 48" 181°39' 8" 8 _n 45988 9.99997 9 _n 99982	— 0°35' 3" — 306° 8' 10" 180°25' 30" 7 _n 87026 9.99998 9 _n 99999	— 0°31' 56" — 304°54' 38" 179°11' 58" 8.14525 9.99998 9 _n 99996	— 0°28' 48" — 303°41' 12" 177°58' 32" 8.54809 9.99998 9 _n 99973	— 0°25' 40" — 302°27' 53" 176°45' 13" 8.75305 9.99999 9 _n 99930	— 0°22' 31" — 301°14' 39" 175°31' 59" 8.89145 9.99999 9 _n 99868	— 0°19' 22" — 300° 1' 30" 174°18' 50" 8.99598 9.99999 9 _n 99786	— 0°16' 13" — 298°48' 27" 173° 5' 47" 8.99790 0.00000 9 _n 99684	— 0°13' 3" — 297°35' 29" 171°52' 49" 9.14997 0.00000 9 _n 99562	— 0° 9' 54" — 296°22' 36" 170°39' 56" 9.21004 0.00000 9 _n 99421
8 _n 04521 9 _n 97000 8 _n 45985 201° 3' 8" 198°50' 44"	8 _n 00841 9 _n 90776 7 _n 87024 233°57' 52" 231°45' 28"	7 _n 96796 9.92051 8.14523 326°22' 54" 324°10' 30"	7 _n 92311 9.98812 8.54807 346°39' 30" 344°27' 6"	7 _n 87309 9.99626 8.75304 352°29' 22" 350°16' 58"	7 _n 81623 9.99847 8.89144 355°11' 34" 352°59' 10"	7 _n 75078 9.99930 8.99597 356°44' 44" 354°32' 20"	7 _n 67369 9.99967 9.07990 357°45' 9" 355°32' 45"	7 _n 57934 9.99984 9.14997 358°27' 38" 356°15' 14"	7 _n 45936 9.99993 9.21004 358°58' 58" 356°46' 34"
9 _n 50922 8.48985 9 _n 97607	9 _n 89509 8.10065 9 _n 79168	9 _n 76739 8.22472 9.90892	9 _n 42822 8.55995 9.98381	9 _n 22733 8.75678 9.99372	9 _n 08675 8.89297 9.99674	8 _n 97850 8.99667 9.99802	8 _n 89021 9.08023 9.99869	8 _n 81515 9.15013 9.99907	8 _n 75003 9.21011 9.99931
8 _n 46592 9.99981 9 _n 99979 181°40' 32"	7 _n 89233 9.99999 9.99997 180°26' 50"	8.13364 9.99996 9.99994 179°13' 14"	8.54376 9.99973 9.99971 177°59' 44"	8.75050 9.99931 9.99929 176°46' 21"	8.88971 9.99869 9.99867 175°33' 3"	8.99469 9.99787 9.99785 174°19' 50"	9.07892 9.99685 9.99684 173° 6' 43"	9.14920 9.99564 9.99562 171°53' 39"	9.20942 9.99423 9.99421 170°40' 43"
9.99998 0.99770 7 _n 99907	9.99998 0.99800 7 _n 99574	9.99998 0.99829 7 _n 99211	9.99998 0.99857 7 _n 98817	9.99998 0.99884 7 _n 98411	9.99998 0.99909 7 _n 97972	9.99998 0.99934 7 _n 97517	9.99999 0.99958 7 _n 97044	9.99998 0.99981 7 _n 96528	9.99998 1.00003 7 _n 96014
122°19' 3" — 9 _n 72804 0.99768 9.92691	126°36' 9" — 9 _n 77544 0.99798 9.90460	131° 1' 26" — 9 _n 81715 0.99827 9.87762	135°36' 8" — 9 _n 85401 0.99855 9.84487	140°21' 37" — 9 _n 88653 0.99882 9.80479	145°19' 17" — 9 _n 91506 0.99907 9.75509	150°30' 34" — 9 _n 93973 0.99932 9.69221	155°57' 0" — 9 _n 96056 0.99957 9.61016	161°40' 4" — 9 _n 97738 0.99979 9.49766	167°41' 20" — 9 _n 98990 1.00001 9.32883
0 _n 72572 0.55036 0.22214	0 _n 77342 0.54548 0.20185	0 _n 81542 0.53992 0.18477	0 _n 85256 0.53369 0.17023	0 _n 88535 0.52681 0.15775	0 _n 91413 0.51931 0.14702	0 _n 93905 0.51122 0.13780	0 _n 96013 0.50261 0.12992	0 _n 97717 0.49354 0.12332	0 _n 98991 0.48411 0.11794
8 _n 99677 5 _n 7300. 9.99977	8 _n 99374 5 _n 8506. 9.99969	8 _n 99040 5 _n 9518. 9.99960	8 _n 98674 6 _n 0374. 9.99951	8 _n 98295 6 _n 1096. 9.99942	8 _n 97881 6 _n 1697. 9.99933	8 _n 97451 6 _n 21880 9.99924	8 _n 97002 6 _n 25840 9.99916	8 _n 96509 6 _n 28892 9.99908	8 _n 96017 6 _n 31091 9.99902
0 _n 94786 9 _n 86081 0.92459 1.08705 9.99999 8 _n 99654	0 _n 97527 9 _n 88280 0.90258 1.09247 9.99999 8 _n 99343	1 _n 00019 9 _n 90286 0.87589 1.09733 9.99999 8 _n 99000	1 _n 02279 9 _n 92115 0.84342 1.10164 9.99999 8 _n 98625	1 _n 04310 9 _n 93776 0.80361 1.10534 9.99999 8 _n 98237	1 _n 06115 9 _n 95272 0.75416 1.10843 9.99999 8 _n 97814	1 _n 07685 9 _n 96599 0.69153 1.11086 9.99999 8 _n 97375	1 _n 09005 9 _n 97744 0.60973 1.11261 9.99999 8 _n 96918	1 _n 10049 9 _n 98689 0.49745 1.11360 9.99999 8 _n 96417	1 _n 10785 9 _n 99407 0.32884 1.11378 9.99999 8 _n 95919
8.91294 6.73882 7.00690 9.93139 6 _n 67021	8.90752 6.72256 7.00600 9.96408 6 _n 68664	8.90266 6.70798 7.00513 9.99220 6 _n 70018	8.89835 6.69505 7.00429 0.01627 6 _n 71132	8.89465 6.68395 7.00348 0.03624 6 _n 72019	8.89156 6.67468 7.00273 0.05246 6 _n 72714	8.88913 6.66739 7.00198 0.06471 6 _n 73210	8.88738 6.66214 7.00126 0.07731 6 _n 73525	8.88639 6.65917 7.00057 0.07708 6 _n 73647	8.88621 6.65863 6.99991 0.07708 6 _n 73571
0 _n 17536 9 _n 80123 1.47495 — 18.89 + 0.95	0 _n 22794 9 _n 81766 1.44806 — 18.44 + 1.11	0 _n 27550 9 _n 83120 1.41581 — 17.66 + 1.28	0 _n 31887 9 _n 84234 1.37711 — 16.57 + 1.45	0 _n 35854 9 _n 85121 1.33042 — 15.19 + 1.62	0 _n 39482 9 _n 85816 1.27347 — 13.54 + 1.79	0 _n 42783 9 _n 86312 1.20275 — 11.64 + 1.95	0 _n 45752 9 _n 86627 1.11234 — 9.52 + 2.11	0 _n 48363 9 _n 86749 0.99099 — 7.22 + 2.24	0 _n 50580 9 _n 86673 0.81295 — 4.78 + 2.36
+ 0.06 + 0.74	+ 0.06 + 0.71	+ 0.07 + 0.69	+ 0.07 + 0.67	+ 0.07 + 0.65	+ 0.07 + 0.64	+ 0.07 + 0.63	+ 0.07 + 0.62	+ 0.07 + 0.62	+ 0.07 + 0.62

ϑ_3

Datum	1873		1872					
	März 6	Jan. 25	Dec. 16	Nov. 6	Sept. 27	Aug. 18	Juli 9	Mai 30
β_0'	— 0° 6' 44"	— 0° 3' 34"	— 0° 0' 25"	+ 0° 2' 45"	+ 0° 5' 54"	+ 0° 9' 3"	+ 0° 12' 11"	+ 0° 15' 19"
λ_0'	295° 9' 47"	293° 57' 2"	292° 44' 21"	291° 31' 45"	290° 19' 12"	289° 6' 43"	287° 54' 17"	286° 41' 54"
$\lambda_0' - \varrho_0$	169° 27' 7"	168° 14' 22"	167° 1' 41"	165° 49' 5"	164° 36' 32"	163° 24' 3"	162° 11' 37"	160° 59' 14"
$\sin (\lambda_0' - \varrho_0)$	9.26259	9.30925	9.35117	9.38917	9.42391	9.45587	9.48544	9.51293
$\cos \beta_0'$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\cos (\lambda_0' - \varrho_0)$	9.99260	9.99079	9.98877	9.98656	9.98414	9.98151	9.97868	9.97563
$\sin \beta_0'$	7.29196	7.01599	6.08351	6.90306	7.23458	7.42037	7.54949	7.64889
$\sin Q$ oder $\cos Q$	9.99998	9.99999	0.00000	0.00000	9.99999	9.99998	9.99997	9.99996
$\cos \beta_0' \sin (\lambda_0' - \varrho_0)$	9.26259	9.30925	9.35117	9.38917	9.42391	9.45587	9.48544	9.51293
Q	359° 23' 13"	359° 42' 30"	359° 58' 9"	0° 11' 13"	0° 22' 14"	0° 31' 41"	0° 39' 50"	0° 47' 1"
$Q - i_0$	357° 10' 49"	357° 30' 6"	357° 45' 45"	357° 58' 49"	358° 9' 50"	358° 19' 17"	358° 27' 26"	358° 34' 37"
$\sin (Q - i_0)$	8.69191	8.63939	8.59153	8.54708	8.50570	8.46676	8.43013	8.39505
q	9.26261	9.30926	9.35117	9.38917	9.42392	9.45589	9.48547	9.51297
$\cos (Q - i_0)$	9.99947	9.99959	9.99967	9.99973	9.99978	9.99981	9.99984	9.99987
$\cos B_1 \sin L_1$	9.26208	9.30885	9.35084	9.38890	9.42370	9.45570	9.48531	9.51284
$\sin L_1$ oder $\cos L_1$	9.99262	9.99080	9.98879	9.98658	9.98415	9.98152	9.97869	9.97565
$\cos B_1 \cos L_1$	9.99260	9.99079	9.98877	9.98656	9.98414	9.98151	9.97868	9.97563
L_1	169° 27' 51"	168° 15' 0"	167° 2' 14"	165° 49' 36"	164° 36' 57"	163° 24' 25"	162° 11' 55"	160° 59' 26"
$\cos B_1$	9.99998	9.99999	9.99998	9.99998	9.99999	9.99999	9.99999	9.99998
r_1	1.00024	1.00034	1.00063	1.00081	1.00098	1.00114	1.00128	1.00142
$\sin B_1$	7.95452	7.94865	7.94270	7.93625	7.92962	7.92265	7.91560	7.90802
$L_1 - l$	174° 2' 9"	180° 43' 40"	187° 46' 49"	195° 11' 59"	202° 58' 46"	211° 6' 8"	219° 31' 50"	228° 12' 40"
$\cos (L_1 - l)$	9.99764	9.99996	9.99598	9.98453	9.96409	9.93260	9.88722	9.82373
$r_1 \cos B_1$	1.00022	1.00043	1.00061	1.00079	1.00097	1.00113	1.00127	1.00140
$\sin (L_1 - l)$	9.01664	8.10386	9.13154	9.41860	9.59151	9.71312	9.80379	9.87251
ξ_1	0.99786	1.00039	0.99659	0.98532	0.96506	0.93373	0.88849	0.82513
(r)	0.47446	0.46476	0.45519	0.44599	0.43745	0.42985	0.42350	0.41868
Subtract.	0.11382	0.11103	0.10974	0.11020	0.11286	0.11840	0.12800	0.14371
ξ_1	8.95476	8.94909	8.94333	8.93706	8.93060	8.92379	8.91688	8.90944
z	6.32469	6.33001	6.32654	6.31366	6.29003	6.25406	6.20276	6.13162
Subtract.	9.99898	9.99896	9.99895	9.99897	9.99901	9.99907	9.99916	9.99927
$\xi_1 - (r)$	1.11168	1.11142	1.10633	1.09552	1.07792	1.05213	1.01649	0.96884
$\sin \vartheta$ oder $\cos \vartheta$	9.99860	9.99998	9.99757	9.99056	9.97794	9.95844	9.93042	9.89180
i_1	0.01686	9.10429	0.13215	0.41939	0.59248	0.71425	0.80506	0.87391
$q \cos \vartheta$	1.11308	1.11144	1.10876	1.10496	1.09998	1.09369	1.08607	1.07704
$\cos \vartheta$	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999
$q \sin \vartheta$	8.95374	8.94805	8.94228	8.93603	8.92961	8.92286	8.91604	8.90871
q^{-1}	8.88691	8.88855	8.89123	8.89503	8.90001	8.90630	8.91392	8.92295
q^{-3}	6.66073	6.66565	6.67369	6.68509	6.70003	6.71890	6.74176	6.76885
r_1^{-3}	6.99928	6.99868	6.99811	6.99757	6.99706	6.99658	6.99616	6.99574
Subtract.	0.07205	0.06180	0.05558	0.02261	9.99196	9.95197	9.90112	9.83640
K	6.73278	6.72745	6.71927	6.70770	6.69199	6.67087	6.64288	6.60525
$\xi_1 : (r)$	0.952340	0.953563	0.954140	0.953937	0.952761	0.950388	0.946499	0.940645
$(r k)^2 m_1 10^7 K$	9.986380	9.985847	9.985029	9.983872	9.982301	9.980189	9.977390	9.973627
$r_1 (r)$	0.49132	9.56905	0.58734	0.86538	1.02993	1.14410	1.22856	1.29259
U	— 2.27	+ 0.27	+ 2.74	+ 5.06	+ 7.13	+ 8.83	+ 10.06	+ 10.69
R	+ 2.44	+ 2.48	+ 2.46	+ 2.39	+ 2.24	+ 2.02	+ 1.73	+ 1.39
W_1	+ 0.07	+ 0.06	+ 0.06	+ 0.06	+ 0.06	+ 0.05	+ 0.05	+ 0.04
w_1	+ 0.62	+ 0.63	+ 0.64	+ 0.65	+ 0.68	+ 0.71	+ 0.75	+ 0.79

b₄

1872			1871					
April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24	Juli 15	Juni 5
+ 0°18'27" 285°29'34" 159°46'54" 9.53857 9.99999 9.97238	+ 0°21'34" 284°17'16" 158°34'36" 9.56260 9.99999 9.96891	+ 0°24'40" 283°5'0" 157°22'20" 9.58517 9.99999 9.96521	+ 0°27'46" 281°52'47" 156°10'7" 9.60643 9.99999 9.96130	+ 0°30'50" 280°40'35" 154°57'55" 9.62651 9.99998 9.95715	+ 0°33'54" 279°28'25" 153°45'45" 9.64551 9.99998 9.95278	+ 0°36'57" 278°16'17" 152°33'37" 9.66352 9.99997 9.94817	+ 0°39'59" 277°4'10" 151°21'30" 9.68063 9.99997 9.94331	+ 0°43'0" 275°52'3" 150°9'23" 9.69691 9.99997 9.93821
7.72972 9.99995 9.53856 0°53'23" 358°40'59"	7.79751 9.99994 9.56259 0°59'2" 358°46'38"	7.85583 9.99992 9.58516 1°4'6" 358°51'42"	7.90724 9.99991 9.60642 1°8'43" 358°56'19"	7.95274 9.99990 9.62649 1°12'51" 359°0'27"	7.99392 9.99989 9.64549 1°16'40" 359°4'16"	8.03133 9.99988 9.66349 1°20'10" 359°7'46"	8.06559 9.99987 9.68060 1°23'24" 359°11'0"	8.09718 9.99986 9.69688 1°26'24" 359°14'0"
8.36141 9.53861 9.99989	8.32919 9.56265 9.99990	8.29812 9.58524 9.99991	8.26773 9.60651 9.99993	8.23859 9.62659 9.99993	8.20982 9.64560 9.99994	8.18166 9.66361 9.99995	8.15391 9.68073 9.99996	8.12647 9.69702 9.99996
9.53850 9.97238 9.97237 159°47'3"	9.56255 9.96891 9.96890 158°34'43"	9.58515 9.96521 9.96520 157°22'22"	9.60644 9.96130 9.96129 156°10'4"	9.62652 9.95715 9.95713 154°57'50"	9.64554 9.95277 9.95276 153°45'37"	9.66356 9.94816 9.94814 152°33'26"	9.68069 9.94329 9.94328 151°21'12"	9.69698 9.93819 9.93818 150°9'2"
9.99999 1.00155 7.90002	9.99999 1.00166 7.89184	9.99999 1.00177 7.88336	9.99999 1.00186 7.87424	9.99998 1.00195 7.86518	9.99999 1.00202 7.85552	9.99998 1.00208 7.84527	9.99999 1.00214 7.83464	9.99999 1.00218 7.82349
237°4'31" 9.73523 1.00154 9.92396	246°2'18" 9.60866 1.00165 9.96086	255°0'30" 9.41276 1.00176 9.98496	263°53'41" 9.2676 1.00185 9.99753	272°36'44" 8.65847 1.00193 9.99955	281°5'17" 9.28402 1.00201 9.99182	289°15'57" 9.51845 1.00206 9.97497	297°6'21" 9.65861 1.00213 9.94947	304°35'18" 9.75410 1.00217 9.91553
0.73677 0.41562 0.16949	0.61031 0.41447 0.21406	0.41452 0.41531 0.30063	0.02861 0.41809 0.14856	9.66067 0.42266 9.91751	0.28603 0.42880 9.59019	0.52051 0.43622 9.33082	0.66074 0.44465 9.80937	0.75627 0.45376 0.00295
8.90157 6.03262 9.99941	8.89350 5.88762 9.99957	8.88513 5.64933 9.99975	8.87610 5.03743 9.99994	8.86713 5.36361 0.00014	8.85754 5.75128 0.00034	8.84735 5.94547 0.00054	8.83678 6.07078 0.00074	8.82567 6.16017 0.00094
0.90626 9.85890 0.92550 1.06660 9.99999 8.90098	0.82437 9.90775 0.96251 1.05476 9.99999 8.89307	0.71594 9.94515 0.98672 1.04157 9.99999 8.88488	0.56665 9.97225 0.99938 1.02713 9.99999 8.87604	0.34017 9.98991 1.00148 1.01157 9.99999 8.86727	9.87622 9.99874 0.99383 0.99509 9.99999 8.85788	9.76704 9.99918 0.97703 0.97785 9.99999 8.84789	0.25402 9.99143 0.95160 0.96017 9.99999 8.83752	0.45671 9.97545 0.91770 0.94225 9.99999 8.82661
8.93339 6.80017 6.99535 9.75389 6.55406	8.94523 6.83569 6.99502 9.64661 6.48230	8.95842 6.87526 6.99469 9.50041 6.37567	8.97286 6.91858 6.99442 9.28059 6.19917	8.98842 6.96526 6.99415 8.83749 5.80275	9.00490 7.01470 6.99394 8.68987 5.68381	9.02214 7.06642 6.99376 9.26035 6.25411	9.03982 7.11946 6.99388 9.52663 6.52021	9.05774 7.17322 6.99346 9.70989 6.70335
0.32115 9.68508 1.34112 + 10.62 + 1.01	0.19584 9.61332 1.37698 + 9.78 + 0.64	9.99921 9.50669 1.40203 + 8.10 + 0.32	9.61052 9.33019 1.41747 + 5.59 + 0.09	9.23801 8.93377 1.42414 + 2.28 + 0.01	9.85723 8.81483 1.42263 — 1.73 + 0.05	0.08429 9.38513 1.41325 — 6.29 + 0.29	0.21609 9.65123 1.39625 — 11.16 + 0.74	0.30251 9.83437 1.37146 — 16.06 + 1.37
+ 0.04 + 0.85	+ 0.03 + 0.93	+ 0.02 + 1.01	+ 0.02 + 1.12	+ 0.01 + 1.25	+ 0.00 + 1.40	+ 0.02 + 1.58	+ 0.03 + 1.78	+ 0.05 + 2.01

Datum	f^{iv}	f^{iii}	f^{ii}	f^i	ΣU	f	$\int \Sigma U dt$	$\log \int \Sigma U dt$	$\log \int U'' dt$
1871 Juni 5				+ 11.15	- 264.62	+ 5499.25	+ 5630.84	3.750573 + 102	3.750675
Juli 15			+ 5.46	+ 16.61	- 253.47	+ 5245.78	+ 5371.36	3.730084 + 97	3.730181
Aug. 24	+ 0.12	+ 0.74	+ 6.20	+ 22.81	- 236.86	+ 5008.92	+ 5125.75	3.709757 + 93	3.709850
Oct. 3	+ 0.15	+ 1.01	+ 7.06	+ 29.87	- 214.05	+ 4794.87	+ 4899.71	3.690170 + 89	3.690259
Nov. 12	- 0.02	+ 0.99	+ 8.07	+ 37.94	- 184.18	+ 4610.69	+ 4699.97	3.672095 + 85	3.672180
Dec. 22	+ 0.04	+ 1.03	+ 9.06	+ 47.00	- 146.24	+ 4464.45	+ 4534.05	3.656486 + 82	3.656568
1872 Jan. 31	- 0.07	+ 0.96	+ 10.09	+ 57.09	- 99.24	+ 4365.21	+ 4410.50	3.644488 + 80	3.644568
März 11	- 0.13	+ 0.83	+ 11.05	+ 68.14	- 42.15	+ 4323.06	+ 4338.91	3.637381 + 79	3.637460
April 20	- 0.21	+ 0.62	+ 11.88	+ 80.02	+ 25.99	+ 4349.05	+ 4329.89	3.636477 + 78	3.636555
Mai 30	- 0.35	+ 0.27	+ 12.50	+ 92.52	+ 106.01	+ 4455.06	+ 4394.87	3.642946 + 80	3.643026
Juli 9	- 0.58	- 0.31	+ 12.77	+ 105.29	+ 198.53	+ 4653.59	+ 4546.09	3.657638 + 83	3.657721
Aug. 18	- 0.97	- 1.28	+ 12.46	+ 117.75	+ 303.82	+ 4957.41	+ 4796.21	3.680898 + 87	3.680985
Sept. 27	- 1.55	- 2.83	+ 11.18	+ 128.93	+ 421.57	+ 5378.98	+ 5157.88	3.712471 + 94	3.712565
Nov. 6	- 2.32	- 5.15	+ 8.35	+ 137.28	+ 550.50	+ 5929.48	+ 5643.11	3.751519 + 102	3.751621
Dec. 16	- 3.47	- 8.62	+ 3.20	+ 140.48	+ 687.78	+ 6617.26	+ 6261.70	3.796692 + 113	3.796805
1873 Jan. 25	- 4.49	- 13.11	- 5.42	+ 135.06	+ 828.26	+ 7445.52	+ 7019.73	3.846321 + 127	3.846448
März 6	- 5.40	- 18.51	- 18.53	+ 116.53	+ 963.32	+ 8408.84	+ 7916.50	3.898533 + 144	3.898677
April 15	- 5.12	- 23.63	- 37.04	+ 79.49	+ 1079.85	+ 9488.69	+ 8940.23	3.951348 + 162	3.951510
Mai 25	- 2.44	- 26.07	- 60.67	+ 18.82	+ 1159.34	+ 10648.03	+ 10063.98	4.002770 + 182	4.002952
Juli 4	+ 3.01	- 23.06	- 86.74	- 67.92	+ 1178.16	+ 11826.19	+ 11238.75	4.050718 + 204	4.050922
Aug. 13	+ 11.91	- 11.15	- 109.80	- 177.72	+ 1110.24	+ 12936.43	+ 12391.32	4.093117 + 224	4.093341
Sept. 22	+ 20.40	+ 9.25	- 120.95	- 298.67	+ 932.52	+ 13868.95	+ 13422.51	4.127834 + 243	4.128077
Nov. 1	+ 24.39	+ 33.64	- 111.70	- 410.37	+ 633.85	+ 14502.80	+ 14215.76	4.152770 + 257	4.153027
Dec. 11	+ 18.70	+ 52.34	- 78.06	- 488.43	+ 223.48	+ 14726.28	+ 14652.59	4.165915 + 265	4.166180
1874 Jan. 20	+ 5.13	+ 57.47	- 25.72	- 514.15	- 264.95	+ 14461.33	+ 14636.44	4.165435 + 265	4.165700
März 1	- 10.55	+ 46.92	+ 31.75	- 482.40	- 779.10	+ 13682.23	+ 14113.93	4.149648 + 256	4.149904
April 10	- 19.89	+ 27.03	+ 78.67	- 403.73	- 1261.50	+ 12420.73	+ 13088.96	4.116905 + 237	4.117142
Mai 20	- 21.42	+ 5.61	+ 105.70	- 298.03	- 1665.23	+ 10755.50	+ 11617.61	4.065117 + 211	4.065328
Juni 29	- 15.32	- 9.71	+ 111.31	- 186.72	- 1963.26	+ 8792.24	+ 9793.95	3.990958 + 177	3.991135
Aug. 8	- 8.23	- 17.94	+ 101.60	- 85.12	- 2149.98	+ 6642.26	+ 7728.40	3.888090 + 140	3.888230
Sept. 17	- 2.76	- 20.70	+ 83.66	- 1.46	- 2235.10	+ 4407.16	+ 5528.36	3.742596 + 100	3.742696
Oct. 27	+ 2.17	- 18.53	+ 62.96	+ 61.50	- 2236.56	+ 2170.60	+ 3286.00	3.516668 + 60	3.516728
Dec. 6	+ 3.15	- 15.38	+ 44.43	+ 105.93	- 2175.06	- 4.46	+ 1075.85	3.031752 + 19	3.031771
1875 Jan. 15			+ 29.05	+ 134.98	- 2069.13	- 2073.59	- 1049.30	3.020900 - 19	3.020881
Febr. 24					- 1934.15		- 3052.73	3.048488 - 55	3.048463

Datum	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^I	$\frac{d^2 \nu}{dt^2}$	f	$''f$
1871 Juni 5				— 134.34	+ 222.94	— 6278.89	— 385.75
Juli 15			— 19.97	+ 154.31	+ 88.60	+ 6367.49	+ 5893.14
Aug. 24	+ 3.08	+ 4.84	— 15.13	— 169.44	— 65.71	+ 6301.78	+ 12260.63
Oct. 3	+ 2.91	+ 7.92	— 7.21	— 176.65	— 235.15	+ 6066.63	+ 18562.41
Nov. 12	+ 1.76	+ 10.83	+ 3.62	— 173.03	— 411.80	+ 5654.83	+ 24629.04
Dec. 22	— 0.16	+ 12.59	+ 16.21	— 156.82	— 584.83	+ 5070.00	+ 30283.87
1872 Jan. 31	— 2.31	+ 12.43	+ 28.64	— 128.18	— 741.65	+ 4328.35	+ 35353.87
März 11	— 4.26	+ 10.12	+ 38.76	— 89.42	— 869.83	+ 3458.52	+ 39682.22
April 20	— 4.83	+ 5.86	+ 44.62	— 44.80	— 959.25	+ 2499.27	+ 43140.74
Mai 30	— 4.53	+ 1.03	+ 45.65	+ 0.85	— 1004.05	+ 1495.22	+ 45640.01
Juli 9	— 3.32	— 3.50	+ 42.15	+ 43.00	— 1003.20	+ 492.02	+ 47135.23
Aug. 18	— 1.37	— 6.82	+ 35.33	+ 78.33	— 960.20	— 468.18	+ 47627.25
Sept. 27	— 0.28	— 8.19	+ 27.14	+ 105.47	— 881.87	— 1350.05	+ 47159.07
Nov. 6	+ 1.14	— 8.47	+ 18.67	+ 124.14	— 776.40	— 2126.45	+ 45809.02
Dec. 16	+ 1.23	— 7.33	+ 11.34	+ 135.48	— 652.26	— 2778.71	+ 43682.57
1873 Jan. 25	+ 1.30	— 6.10	+ 5.24	+ 140.72	— 516.78	— 3295.49	+ 40903.86
März 6	+ 0.88	— 4.80	+ 0.44	+ 141.16	— 376.06	— 3671.55	+ 37608.37
April 15	+ 0.32	— 3.92	— 3.48	+ 137.68	— 234.90	— 3906.45	+ 33936.82
Mai 25	— 0.22	— 3.60	— 7.08	+ 130.60	— 97.22	— 4003.67	+ 30030.37
Juli 4	— 0.54	— 3.82	— 10.90	+ 119.70	+ 33.38	— 3970.29	+ 26026.70
Aug. 13	— 0.39	— 4.36	— 15.26	+ 104.44	+ 153.08	— 3817.21	+ 22056.41
Sept. 22	+ 0.51	— 4.24	— 20.01	+ 84.43	+ 257.52	— 3559.69	+ 18239.20
Nov. 1	+ 1.53	— 4.24	— 24.25	+ 60.18	+ 341.95	— 3217.74	+ 14679.51
Dec. 11	+ 2.76	— 2.71	— 26.96	+ 33.22	+ 402.13	— 2815.61	+ 11461.77
1874 Jan. 20	+ 2.96	+ 0.05	— 26.91	+ 6.31	+ 435.35	— 2380.26	+ 8646.16
März 1	+ 2.19	+ 3.01	— 23.90	— 17.59	+ 441.66	— 1938.60	+ 6265.90
April 10	+ 0.91	+ 5.20	— 18.70	— 36.29	+ 424.07	— 1514.53	+ 4327.30
Mai 20	— 0.35	+ 6.11	— 12.59	— 48.88	+ 387.78	— 1126.75	+ 2812.77
Juni 29	— 1.22	+ 5.76	— 6.83	— 55.71	+ 338.90	— 787.85	+ 1686.02
Aug. 8	— 1.43	+ 4.54	— 2.29	— 58.00	+ 283.19	— 504.66	+ 898.17
Sept. 17	— 1.18	+ 3.11	+ 0.82	— 57.18	+ 225.19	— 279.47	+ 393.51
Oct. 27	— 1.03	+ 1.93	+ 2.75	— 54.43	+ 168.01	— 111.46	+ 114.04
Dec. 6	— 0.57	+ 0.90	+ 3.65	— 50.78	+ 113.58	+ 2.12	+ 2.58
1875 Jan. 15		+ 0.33	+ 3.98	— 46.80	+ 62.80	+ 64.92	+ 4.70
Feb. 24					+ 16.00	+ 80.92	+ 69.62
							+ 150.54

z

Datum	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^I	$\frac{d^2z}{dt^2}$	f	${}^{II}f$
1871 Juni 5				+ 4.16	— 31.75	— 268.74	+ 1448.63
Juli 15			+ 1.38	+ 5.54	— 27.59	— 296.33	+ 1179.89
Aug. 24	— 0.21	+ 0.02	+ 1.40	+ 6.94	— 22.05	— 318.38	+ 883.56
Oct. 3	— 0.15	— 0.19	+ 1.21	+ 8.15	— 15.11	— 333.49	+ 565.18
Nov. 12	— 0.14	— 0.34	+ 0.87	+ 9.02	— 6.96	— 340.45	+ 231.69
Dec. 22	— 0.13	— 0.48	+ 0.39	+ 9.41	+ 2.06	— 338.39	— 108.76
1872 Jan. 31	0	— 0.61	— 0.22	+ 9.19	+ 11.47	— 326.92	— 447.15
März 11	+ 0.07	— 0.61	— 0.83	+ 8.36	+ 20.66	— 306.26	— 774.07
April 20	+ 0.23	— 0.54	— 1.37	+ 6.99	+ 29.02	— 277.24	— 1080.33
Mai 30	+ 0.15	— 0.31	— 1.68	+ 5.31	+ 36.01	— 241.23	— 1357.57
Juli 9	+ 0.23	— 0.16	— 1.84	+ 3.47	+ 41.32	— 199.91	— 1598.80
Aug. 18	+ 0.07	+ 0.07	— 1.77	+ 1.70	+ 44.79	— 155.12	— 1798.71
Sept. 27	+ 0.16	+ 0.14	— 1.63	+ 0.07	+ 46.49	— 108.63	— 1953.83
Nov. 6	— 0.05	+ 0.30	— 1.33	— 1.26	+ 46.56	— 62.07	— 2062.46
Dec. 16	— 0.07	+ 0.25	— 1.08	— 2.34	+ 45.30	— 16.77	— 2124.53
1873 Jan. 25	— 0.04	+ 0.18	— 0.90	— 3.24	+ 42.96	+ 26.19	— 2141.30
März 6	— 0.05	+ 0.14	— 0.76	— 4.00	+ 39.72	+ 65.91	— 2115.11
April 15	— 0.09	+ 0.09	— 0.67	— 4.67	+ 35.72	+ 101.63	— 2049.20
Mai 25	0	0	— 0.67	— 5.34	+ 31.05	+ 132.68	— 1947.57
Juli 4	+ 0.02	0	— 0.67	— 6.01	+ 25.71	+ 158.39	— 1814.89
Aug. 13	+ 0.16	+ 0.02	— 0.65	— 6.66	+ 19.70	+ 178.09	— 1656.50
Sept. 22	+ 0.11	+ 0.18	— 0.47	+ 13.04	+ 191.13	— 1478.41	
Nov. 1	+ 0.14	+ 0.29	— 0.18	— 7.13	+ 5.91	+ 197.04	— 1287.28
Dec. 11	+ 0.06	+ 0.43	+ 0.25	— 7.31	— 1.40	+ 195.64	— 1090.24
1874 Jan. 20	— 0.03	+ 0.49	+ 0.74	— 7.06	— 8.46	+ 187.18	— 894.60
März 1	— 0.26	+ 0.46	+ 1.20	— 6.32	— 14.78	+ 172.40	— 707.42
April 10	— 0.13	+ 0.20	+ 1.40	— 5.12	— 19.90	+ 152.50	— 535.02
Mai 20	— 0.23	+ 0.07	+ 1.47	— 3.72	— 23.62	+ 128.88	— 382.52
Juni 29	— 0.03	— 0.16	+ 1.31	— 2.25	— 25.87	+ 103.01	— 253.64
Aug. 8	— 0.11	— 0.19	+ 1.12	— 0.94	— 26.81	+ 76.20	— 150.63
Sept. 17	+ 0.09	— 0.30	+ 0.82	+ 0.18	— 26.63	+ 49.57	— 74.43
Oct. 27	+ 0.02	— 0.21	+ 0.61	+ 1.00	— 25.63	+ 23.94	— 24.86
Dec. 6	+ 0.06	— 0.19	+ 0.42	+ 1.61	— 24.02	— 0.08	— 0.92
1875 Jan. 15		— 0.13	+ 0.29	+ 2.03	— 21.99	— 22.07	— 1.00
Febr. 24				+ 2.32	— 19.67	— 41.74	— 23.07
							— 64.81

Datum	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^I	$\frac{dAM}{dt}$	f
1871 Juni 5					+ 1''882	+ 1° 3'24''810
Juli 15			— 0''383	— 32''109	— 30''227	+ 1° 3'26''692
Aug. 24	+ 0''075	+ 0''785	+ 0.402	— 32.492	— 1' 2''719	+ 1° 2'56''465
Oct. 3	+ 0.023	+ 0.860	+ 1.262	— 32.090	— 1'34''809	+ 1° 1'53''746
Nov. 12	— 0.019	+ 0.883	+ 2.145	— 30.828	— 2' 5''637	+ 1° 0'18''937
Dec. 22	— 0.090	+ 0.864	+ 3.009	— 28.683	— 2'34''320	+ 58'13''300
1872 Jan. 31	— 0.142	+ 0.774	+ 3.009	— 25.674	— 2'59''994	+ 55'38''980
März 11	— 0.198	+ 0.632	+ 3.783	— 21.891	— 3'21''885	+ 52'38''986
April 20	— 0.217	+ 0.434	+ 4.415	— 17.476	— 3'39''361	+ 49'17''101
Mai 30	— 0.227	+ 0.217	+ 4.849	— 12.627	— 3'51''988	+ 45'37''740
Juli 9	— 0.208	— 0.010	+ 5.066	— 7.561	— 3'59''549	+ 41'45''752
Aug. 18	— 0.218	— 0.218	+ 5.056	— 2.505	— 3'59''549	+ 37'46''203
Sept. 27	— 0.171	— 0.389	+ 4.838	+ 2.333	— 4' 2''054	+ 33'44''149
Nov. 6	— 0.137	— 0.526	+ 4.449	+ 6.782	— 3'59''721	+ 29'44''428
Dec. 16	— 0.091	— 0.617	+ 3.923	+ 10.705	— 3'52''939	+ 25'51''489
1873 Jan. 25	— 0.060	— 0.677	+ 3.306	+ 14.011	— 3'42''234	+ 22' 9''255
März 6	— 0.027	— 0.704	+ 2.629	+ 16.640	— 3'28''223	+ 18'41''032
April 15	— 0.007	— 0.711	+ 1.925	+ 18.565	— 3'11''583	+ 15'29''449
Mai 25	+ 0.019	— 0.692	+ 1.214	+ 19.779	— 2'53''018	+ 12'36''431
Juli 4	+ 0.028	— 0.664	+ 0.522	+ 20.301	— 2'33''239	+ 10' 3''192
Aug. 13	+ 0.056	— 0.608	— 0.142	+ 20.159	— 2'12''938	+ 7'50''254
Sept. 22	+ 0.074	— 0.534	— 0.750	+ 19.409	— 1'52''779	+ 5'57''475
Nov. 1	+ 0.101	— 0.433	— 1.284	+ 18.125	— 1'33''370	+ 4'24''105
Dec. 11	+ 0.120	— 0.313	— 1.717	+ 16.408	— 1'15''245	+ 3' 8''860
1874 Jan. 20	+ 0.139	— 0.174	— 2.030	+ 14.378	— 58''837	+ 2'10''023
März 1	+ 0.135	— 0.039	— 2.204	+ 12.174	— 44''459	+ 1'25''564
April 10	+ 0.124	+ 0.085	— 2.243	+ 9.931	— 32''285	+ 0'53''279
Mai 20	+ 0.094	+ 0.179	— 2.158	+ 7.773	— 22''354	+ 30''925
Juni 29	+ 0.068	+ 0.247	— 1.979	+ 5.794	— 14''581	+ 16''344
Aug. 8	+ 0.034	+ 0.281	— 1.732	+ 4.062	— 8''887	+ 7''557
Sept. 17	+ 0.017	+ 0.298	— 1.451	+ 2.611	— 4''725	+ 2''832
Oct. 27	— 0.009	+ 0.289	— 1.153	+ 1.458	— 2''114	+ 0''718
Dec. 6	— 0.008	+ 0.281	— 0.864	+ 0.594	— 0''656	+ 0''062
1875 Jan. 15	— 0.022	+ 0.259	— 0.583	+ 0.011	— 0''062	+ 0''000
Febr. 24			— 0.324	— 0.313	— 0''051	— 0''051
					— 0''364	— 0''415

$\Delta\omega$

Datum	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^I	$\frac{d\Delta\omega}{dt}$	f
1871 Juni 5					+ 14''371	— 9' 1''718
Juli 15			— 0''039	— 0''075	+ 14.296	— 8'47''347
Aug. 24	+ 0''009	— 0''001	— 0.040	— 0.114	+ 14.182	— 8'33''051
Oct. 3	+ 0.005	+ 0.008	— 0.032	— 0.154	+ 14.028	— 8'18''869
Nov. 12	+ 0.011	+ 0.013	— 0.019	— 0.186	+ 13.842	— 8' 4''841
Dec. 22	+ 0.004	+ 0.024	+ 0.005	— 0.205	+ 13.637	— 7'50''999
1872 Jan. 31	+ 0.009	+ 0.028	+ 0.033	— 0.200	+ 13.437	— 7'37''362
März 11	0	+ 0.037	— 0.167	— 0.167	+ 13.270	— 7'23''925
April 20	0	+ 0.037	+ 0.070	— 0.097	+ 13.173	— 7'10''655
Mai 30	— 0.007	+ 0.037	+ 0.107	+ 0.010	+ 13.183	— 6'57''482
Juli 9	— 0.007	+ 0.030	+ 0.144	+ 0.154	+ 13.183	— 6'44''299
Aug. 18	— 0.009	+ 0.023	+ 0.174	+ 0.328	+ 13.337	— 6'30''962
Sept. 27	— 0.011	+ 0.014	+ 0.197	+ 0.525	+ 13.665	— 6'17''297
Nov. 6	— 0.012	+ 0.003	+ 0.211	+ 0.736	+ 14.190	— 6' 3''107
Dec. 16	— 0.015	— 0.009	+ 0.214	+ 0.950	+ 14.926	— 5'48''181
1873 Jan. 25	— 0.020	— 0.024	+ 0.205	+ 1.155	+ 15.876	— 5'32''305
März 6	— 0.020	— 0.044	+ 0.181	+ 1.336	+ 17.031	— 5'15''274
April 15	— 0.036	— 0.064	+ 0.137	+ 1.473	+ 18.367	— 4'56''907
Mai 25	— 0.025	— 0.100	+ 0.073	+ 1.546	+ 19.840	— 4'37''067
Juli 4	— 0.032	— 0.125	— 0.027	+ 1.519	+ 21.386	— 4'15''681
Aug. 13	— 0.006	— 0.157	— 0.152	+ 1.367	+ 22.905	— 3'52''776
Sept. 22	+ 0.012	— 0.163	— 0.309	+ 1.058	+ 24.272	— 3'28''504
Nov. 1	+ 0.051	— 0.151	— 0.472	+ 0.586	+ 25.330	— 3' 3''174
Dec. 11	+ 0.074	— 0.100	— 0.623	— 0.037	+ 25.916	— 2'37''258
1874 Jan. 20	+ 0.084	— 0.026	— 0.723	— 0.760	+ 25.879	— 2'11''379
März 1	+ 0.063	+ 0.058	— 0.749	— 1.509	+ 25.119	— 1'46''260
April 10	+ 0.043	+ 0.121	— 0.691	— 2.200	+ 23.610	— 1'22''650
Mai 20	+ 0.002	+ 0.164	— 0.570	— 2.770	+ 21.410	— 1' 1''240
Juni 29	— 0.022	+ 0.166	— 0.406	— 3.176	+ 18.640	— 42''600
Aug. 8	— 0.030	+ 0.144	— 0.240	— 3.416	+ 15.464	— 27''136
Sept. 17	— 0.034	+ 0.114	— 0.096	— 3.512	+ 12.048	— 15''088
Oct. 27	— 0.034	+ 0.080	+ 0.018	— 3.494	+ 8.536	— 6''552
Dec. 6	— 0.021	+ 0.046	+ 0.098	— 3.396	+ 5.042	— 1''510
1875 Jan. 15		+ 0.025	+ 0.144	— 3.252	+ 1.646	+ 0''136
Febr. 24			+ 0.169	— 3.083	— 1.606	— 1''470
					— 4.689	— 6''159

Datum			$\Sigma \frac{d \Delta M}{dt}$	$\Sigma \frac{d \Delta \omega}{dt}$	$\Sigma \Sigma \frac{d^2 r}{dt^2}$	$\Sigma \Sigma \frac{d^2 z}{dt^2}$
1860	Juni	22	+ 3° 7' 16" 749	— 39' 25" 450	— 59172.01	+ 8844.62
	Aug.	1	+ 3° 11' 3" 545	— 39' 11" 278	— 44051.97	+ 7708.41
	Sept.	10	+ 3° 13' 25" 366	— 38' 57" 288	— 27625.01	+ 6384.95
	Oct.	20	+ 3° 14' 17" 824	— 38' 43" 615	— 10257.87	+ 4899.22
	Nov.	29	+ 3° 13' 38" 818	— 38' 30" 383	+ 7614.36	+ 3284.52
1861	Jan.	8	+ 3° 11' 28" 729	— 38' 17" 694	+ 25509.36	+ 1581.28
	Febr.	17	+ 3° 7' 50" 448	— 38' 5" 611	+ 42927.36	— 165.17
	März	29	+ 3° 2' 49" 247	— 37' 54" 152	+ 59385.22	— 1907.51
	Mai	8	+ 2° 56' 32" 489	— 37' 43" 283	+ 74449.26	— 3599.63
	Juni	17	+ 2° 49' 9" 219	— 37' 32" 923	+ 87761.20	— 5199.52
	Juli	27	+ 2° 40' 49" 711	— 37' 22" 948	+ 99053.77	— 6671.46
	Sept.	5	+ 2° 31' 44" 991	— 37' 13" 201	+ 108155.12	— 7987.28
	Oct.	15	+ 2° 22' 6" 405	— 37' 3" 499	+ 114983.78	— 9126.67
	Nov.	24	+ 2° 12' 5" 249	— 36' 53" 645	+ 119537.17	— 10076.78
	Dec.	24	+ 2° 1' 52" 473	— 36' 43" 431	+ 121877.04	— 10831.36
1862	Jan.	3	+ 1° 51' 38" 463	— 36' 32" 644	+ 122114.33	— 11389.70
	Febr.	12	+ 1° 41' 32" 883	— 36' 21" 066	+ 120395.52	— 11755.50
	März	24	+ 1° 31' 44" 569	— 36' 8" 478	+ 116890.99	— 11935.88
	Mai	3	+ 1° 22' 21" 474	— 35' 54" 658	+ 111785.97	— 11940.54
	Juni	12	+ 1° 13' 30" 624	— 35' 39" 383	+ 105273.76	— 11781.08
	Aug.	31	+ 1° 5' 18" 107	— 35' 22" 430	+ 97551.02	— 11470.55
	Oct.	10	+ 0° 57' 49" 075	— 35' 3" 576	+ 88814.59	— 11023.08
	Nov.	19	+ 0° 51' 7" 739	— 34' 42" 606	+ 79259.63	— 10453.71
	Dec.	29	+ 0° 45' 17" 381	— 34' 19" 317	+ 69078.57	— 9778.27
	Jan.	7	+ 0° 40' 20" 357	— 33' 53" 533	+ 58460.57	— 9013.36
1863	März	19	+ 0° 36' 18" 108	— 33' 25" 121	+ 47591.30	— 8176.34
	April	28	+ 0° 33' 11" 167	— 32' 54" 013	+ 36652.51	— 7285.32
	Juni	7	+ 0° 30' 59" 170	— 32' 20" 234	+ 25821.25	— 6359.08
	Juli	17	+ 0° 29' 40" 878	— 31' 43" 933	+ 15268.28	— 5416.83
	Aug.	26	+ 0° 29' 14" 213	— 31' 5" 403	+ 5155.57	— 4477.77
	Oct.	5	+ 0° 29' 36" 310	— 30' 25" 095	— 4367.28	— 3560.43
	Nov.	14	+ 0° 30' 43" 596	— 29' 43" 603	— 13167.29	— 2681.78
	Dec.	24	+ 0° 32' 31" 892	— 29' 1" 628	— 21132.32	— 1856.31

Datum			$\Sigma \frac{dJM}{dt}$	$\Sigma \frac{dJ\omega}{dt}$	$\Sigma \Sigma \frac{d^2\nu}{dt^2}$	$\Sigma \Sigma \frac{d^2z}{dt^2}$
1864	Febr.	2	+ 0°34'56"534	— 28'19"911	— 28174.28	— 1095.25
	März	13	+ 0°37'52"502	— 27'39"166	— 34230.37	— 406.10
	April	22	+ 0°41'14"546	— 27' 0"008	— 39261.96	+ 207.30
	Juni	1	+ 0°44'57"298	— 26'22"912	— 43251.31	+ 744.28
	Juli	11	+ 0°48'55"363	— 25'48"193	— 46197.12	+ 1206.49
	Aug.	20	+ 0°53' 3"383	— 25'16"013	— 48109.97	+ 1597.03
	Sept.	29	+ 0°57'16"087	— 24'46"402	— 49008.37	+ 1919.65
	Nov.	8	+ 1° 1'28"322	— 24'19"286	— 48916.09	+ 2178.15
	Dec.	18	+ 1° 5'35"080	— 23'54"517	— 47860.61	+ 2375.96
	Jan.	27	+ 1° 9'31"518	— 23'31"897	— 45872.82	+ 2515.97
	März	8	+ 1°13'12"980	— 23'11"197	— 42987.54	+ 2600.48
	April	17	+ 1°16'35"036	— 22'52"169	— 39244.94	+ 2631.26
1865	Mai	27	+ 1°19'33"515	— 22'34"558	— 34692.46	+ 2609.68
	Juli	6	+ 1°22' 4"561	— 22'18"106	— 29387.26	+ 2536.89
	Aug.	15	+ 1°24' 4"696	— 22' 2"558	— 23398.97	+ 2414.07
	Sept.	24	+ 1°25'30"902	— 21'47"663	— 16812.52	+ 2242.66
	Nov.	3	+ 1°26'20"707	— 21'33"178	— 9730.85	+ 2024.66
	Dec.	13	+ 1°26'32"288	— 21'18"874	— 2277.02	+ 1762.93
	Jan.	22	+ 1°26' 4"571	— 21' 4"538	+ 5404.88	+ 1461.46
	März	3	+ 1°24'57"328	— 20'49"983	+ 13150.62	+ 1125.61
	April	12	+ 1°23'11"251	— 20'35"057	+ 20779.32	+ 762.25
	Mai	22	+ 1°20'47"995	— 20'19"650	+ 28099.94	+ 379.72
	Juli	1	+ 1°17'50"172	— 20' 3"701	+ 34920.71	— 12.36
	Aug.	10	+ 1°14'21"291	— 19'47"202	+ 41060.70	— 403.54
1866	Sept.	19	+ 1°10'25"635	— 19'30"194	+ 46361.97	— 783.12
	Oct.	29	+ 1° 6' 8"092	— 19'12"760	+ 50700.16	— 1140.84
	Dec.	8	+ 1° 1'33"951	— 18'55"011	+ 53991.71	— 1467.57
	Jan.	17	+ 0°56'48"689	— 18'37"073	+ 56196.56	— 1755.79
	Febr.	26	+ 0°51'57"768	— 18'19"071	+ 57316.18	— 1999.93
	April	7	+ 0°47' 6"456	— 18' 1"123	+ 57388.03	— 2196.43
	Mai	17	+ 0°42'19"695	— 17'43"327	+ 56477.94	— 2343.62
	Juni	26	+ 0°37'42"001	— 17'25"763	+ 54671.82	— 2441.49
	Aug.	5	+ 0°33'17"402	— 17' 8"488	+ 52067.96	— 2491.34

Datum			$\Sigma \frac{dJM}{dt}$	$\Sigma \frac{dJ\omega}{dt}$	$\Sigma \Sigma \frac{d^2r}{dt^2}$	$\Sigma \Sigma \frac{d^2z}{dt^2}$
1867	Sept.	14	+ 0°29' 9"412	— 16'51"541	+ 48770.61	— 2495.50
	Oct.	24	+ 0°25'21"024	— 16'34"944	+ 44885.04	— 2457.00
	Dec.	3	+ 0°21'54"-20	— 16'18"706	+ 40514.04	— 2379.34
1868	Jan.	12	+ 0°18'52"498	— 16' 2"823	+ 35755.66	— 2266.27
	Febr.	21	+ 0°16'15"894	— 15'47"285	+ 30701.94	— 2121.68
	April	1	+ 0°14' 6"019	— 15'32"075	+ 25438.35	— 1949.46
	Mai	11	+ 0°12'23"585	— 15'17"170	+ 20043.66	— 1753.44
	Juni	20	+ 0°11' 8"938	— 15' 2"546	+ 14590.21	— 1537.34
	Juli	30	+ 0°10'22"089	— 14'48"175	+ 9144.32	— 1304.75
	Sept.	8	+ 0°10' 2"734	— 14'34"028	+ 3766.80	— 1059.14
	Oct.	18	+ 0°10'10"282	— 14'20"076	— 1486.47	— 803.80
	Nov.	27	+ 0°10'43"874	— 14' 6"289	— 6564.03	— 541.89
1869	Jan.	6	+ 0°11'42"403	— 13'52"637	— 11418.30	— 276.45
	Febr.	15	+ 0°13' 4"529	— 13'39"091	— 16005.12	— 10.39
	März	27	+ 0°14'48"693	— 13'25"622	— 20283.32	+ 253.50
	Mai	6	+ 0°16'53"132	— 13'12"202	— 24214.35	+ 512.53
	Juni	15	+ 0°19'15"887	— 12'58"804	— 27762.01	+ 764.08
	Juli	25	+ 0°21'54"820	— 12'45"404	— 30892.18	+ 1005.60
	Sept.	3	+ 0°24'47"616	— 12'31"979	— 33572.71	+ 1234.62
	Oct.	13	+ 0°27'51"802	— 12'18"509	— 35773.36	+ 1448.73
	Nov.	22	+ 0°31' 4"749	— 12' 4"977	— 37465.81	+ 1645.56
1870	Jan.	1	+ 0°34'23"692	— 11'51"370	— 38623.81	+ 1822.78
	Febr.	10	+ 0°37'45"736	— 11'37"677	— 39223.40	+ 1978.11
	März	22	+ 0°41' 7"876	— 11'23"892	— 39243.30	+ 2109.31
	Mai	1	+ 0°44'27"011	— 11'10"012	— 38665.44	+ 2214.21
	Juni	10	+ 0°47'39"972	— 10'56"038	— 37475.65	+ 2290.71
	Juli	20	+ 0°50'43"543	— 10'41"972	— 35664.53	+ 2336.81
	Aug.	29	+ 0°53'34"496	— 10'27"820	— 33228.57	+ 2350.64
	Oct.	8	+ 0°56' 9"631	— 10'13"590	— 30171.54	+ 2330.52
	Nov.	17	+ 0°58'25"823	— 9'59"291	— 26506.10	+ 2275.03
	Dec.	27	+ 1° 0'20"078	— 9'44"936	— 22255.75	+ 2183.09
1871	Febr.	5	+ 1° 1'49"605	— 9'30"541	— 17457.10	+ 2054.09
	März	17	+ 1° 2'51"894	— 9'16"126	— 12162.34	+ 1888.01

Datum			$\sum \frac{dJ M}{dt}$	$\sum \frac{dJ \omega}{dt}$	$\sum \sum \frac{d^2 r}{dt^2}$	$\sum \sum \frac{d^2 z}{dt^2}$
1871	April	26	+ 1 ⁰ 3'24"810	— 9' 1"718	— 6441.70	+ 1685.62
	Juni	5	+ 1 ⁰ 3'26"692	— 8'47"347	— 385.75	+ 1448.63
	Juli	15	+ 1 ⁰ 2'56"465	— 8'33"051	+ 5893.14	+ 1179.89
	Aug.	24	+ 1 ⁰ 1'53"746	— 8'18"869	+ 12260.63	+ 883.56
1875	Jan.	15	— 0"051	— 1"470	+ 4.70	— 1.00
	Febr.	24	— 0"415	— 6"159	+ 69.62	— 23.07
	April	5	— 1"175	— 13"756	+ 150.54	— 64.81
	Mai	15	— 2"196	— 24"093	+ 204.58	— 123.74
	Juni	24	— 3"139	— 37"012	+ 192.53	— 197.26
	Aug.	3	— 3"484	— 52"375	+ 78.56	— 282.71
	Sept.	12	— 2"542	— 1'10"060	— 170.05	— 377.39
	Oct.	22	+ 0"530	— 1'29"966	— 583.14	— 478.57
	Dec.	1	+ 6"713	— 1'52"011	— 1187.79	— 583.49
1876	Jan.	10	+ 17"115	— 2'16"131	— 2008.31	— 689.36
	Febr.	19	+ 32.952	— 2'42"277	— 3066.08	— 793.36
	März	30	+ 55"535	— 3'10"414	— 4379.25	— 892.64
	Mai	9	+ 1'26"252	— 3'40"519	— 5962.23	— 984.33
	Juni	18	+ 2' 6"541	— 4'12"575	— 7824.98	— 1065.52
	Juli	28	+ 2'57"867	— 4'46"570	— 9972.04	— 1133.32
	Sept.	6	+ 4' 1"686	— 5'22"488	— 12401.39	— 1184.86
	Oct.	16	+ 5'19"406	— 6' 0"302	— 15103.00	— 1217.36
	Nov.	25	+ 6'52"336	— 6'39"966	— 18057.28	— 1228.23
1877	Jan.	4	+ 8'41"628	— 7'21"399	— 21233.47	— 1215.17
	Febr.	13	+ 10'48"215	— 8' 4"472	— 24588.09	— 1176.35
	März	25	+ 13'12"733	— 8'48"993	— 28063.85	— 1110.57
	Mai	4	+ 15'55"453	— 9'34"697	— 31589.29	— 1017.47
	Juni	13	+ 18'56"208	— 10'21"238	— 35079.71	— 897.73
	Juli	23	+ 22'14"338	— 11' 8"203	— 38439.78	— 753.17
	Sept.	1	+ 25'48"658	— 11'55"132	— 41568.16	— 586.81
	Oct.	11	+ 29'37"457	— 12'41"550	— 44363.85	— 402.74
	Nov.	20	+ 33'38"539	— 13'27"011	— 46733.46	— 205.92
	Dec.	30	+ 37'49"294	— 14'11"129	— 48598.29	— 1.79
					— 40899.82	+ 204.11

Als Beispiel zu den Formeln zum Uebergang auf osculirende Elemente leite ich die osculirenden Elemente für 1871 Sept. 13 ab. Es tritt zwar, wie die im obigen Beispiele ausgeführte Störungsrechnung erweist, durchaus nicht die Nothwendigkeit auf, die Störungen auf die Elemente zu übertragen, da der Gang der Störungen noch hinreichend regelmässig ist und selbst bei der Fortführung der Rechnung bis zum Jahre 1860 zurück, vom Anfang 1875 ausgehend, niemals allzu unregelmässig wird. Der Uebergang wird also hier nur als Beispiel aufzufassen sein, welches vergleichende Anhaltspunkte für die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Methoden der Störungsrechnung abgeben soll; denn für dieselbe Epoche wurden bereits osculirende Elemente abgeleitet bei dem Beispiele der Störungsrechnung nach den rechtwinkligen Coordinaten, wobei jedoch für diese letztere Methode der Uebergang auf osculirende Elemente dringend nothwendig war. Die Elemente, welche der Störungsrechnung zu Grunde liegen, sind wie oben (pag. 173):

⑥² Erato

Epoche, Osculation 1874 Dec. 26,0 mittl. Berl. Zeit
mittl. Aeq. 1870,0

$$\begin{aligned} L_0 &= 219^{\circ} \quad 8' \quad 6''8 \\ M_0 &= 180 \quad 40 \quad 48.9 \\ \pi_0 &= 38 \quad 27 \quad 17.9 \\ Q_0 &= 125 \quad 42 \quad 39.7 \\ i_0 &= 2 \quad 12 \quad 23.9 \\ \varphi_0 &= 9 \quad 59 \quad 14.9 \\ \mu_0 &= 640''89605 \\ \log a_0 &= 0.495 \quad 4793 . \end{aligned}$$

Wählt man wieder als Zeiteinheit das Intervall der Störungsrechnung (40 Tage, also für k überall $40k$, für w aber die Einheit einzusetzen), so finden sich die der Rechnung zu Grunde zu legenden einfachen und Doppelintegrale, weil die neue Osculationsepoche in die Mitte eines Störungsintervalles fällt, nach den Formeln (vergl. pag. 35, 53):

$$\int_{a+[i+\frac{1}{2}]w}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(x) dx = f(a+[i+\frac{1}{2}]w) + \frac{1}{24} f' (a+[i+\frac{1}{2}]w) - \frac{17}{5760} f''' (a+[i+\frac{1}{2}]w) + \\ + \frac{367}{967680} f^{(v)} (a+[i+\frac{1}{2}]w) - \dots$$

$$\iint_{a+[i+\frac{1}{2}]w}^{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(x) dx^2 = f(a+[i+\frac{1}{2}]w) - \frac{1}{24} f'(a+[i+\frac{1}{2}]w) + \frac{17}{1920} f'' (a+[i+\frac{1}{2}]w) - \\ - \frac{367}{193536} f^{(iv)} (a+[i+\frac{1}{2}]w) + \dots$$

und man findet demnach unter Zugrundelegung der beim obigen Beispiele erhaltenen Integraltafeln, zunächst für die einfachen Integrale leicht:

$$\begin{array}{r}
 AM \quad \quad \quad A\omega \quad \quad \quad dv:dt \quad \quad \quad dz:dt \quad \int \Sigma U dt \\
 f(a + [i + \frac{1}{2}]w) + 1^{\circ}1'53''746 - 8'18''869 + 6301.78 - 318.38 + 5008.92 \\
 + \frac{1}{24} f' (a + [i + \frac{1}{2}]w) - 1''337 - 0.006 - 7.06 + 0.29 + 0.95 \\
 - \frac{17}{5760} f'''(a + [i + \frac{1}{2}]w) - 0.003 \quad 0 - 0.02 \quad 0 \quad 0 \\
 \hline
 \int_{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(x) dx + 1^{\circ}1'52''406 - 8'18''875 + 6294.70 - 318.09 + 5009.87
 \end{array}$$

und für die Doppelintegrale:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c}
 f(a + [i + \frac{1}{2}]w) \\
 - \frac{1}{24} f' (a + [i + \frac{1}{2}]w) \\
 + \frac{17}{2920} f'' (a + [i + \frac{1}{2}]w) \\
 - \frac{367}{193536} f'''(a + [i + \frac{1}{2}]w)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nu \\
 + 15411.52 \\
 + 6.27 \\
 - 0.10 \\
 - 0.01
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 z \\
 + 724.37 \\
 + 0.77 \\
 + 0.01 \\
 0.00
 \end{array} \\
 \hline
 \iint_{a+[i+\frac{1}{2}]w} f(x) dx^2 \quad + 15417.68 \quad + 725.15
 \end{array}$$

Die Rechnung nach dem Formelsystem II) (pag. 170) führe ich 7stellig durch, weil man die aus derselben resultirenden Zahlen später bei der Controlrechnung mit grösserer Genauigkeit braucht, als dies die 6stellige Rechnung gewähren kann:

M_0	327° 2' 53" 64	M	328° 4' 46" 05
E_{00}	320° 45' 45" 99	E_0	321° 57' 20" 09
$\sin E_{00}$	9 _n 801 0829	$\sin E_0$	9 _n 789 7726
$\cos E_{00}$	9.889 0403	$\cos E_0$	9.896 2688
Subtr.	0.110 0930	Subtr.	0.108 0295
$\cos E_{00} - e_0$	9.778 9473	$\cos E_0 - e_0$	9.788 2393
$r_0 \sin v_0$	0 _n 289 9304	$((r)) \sin I'$	0 _n 278 6201
	9 _n 857 0986		9 _n 852 0193
$r_0 \cos v_0$	0.274 4266	$((r)) \cos I'$	0.283 7186
v_0	313° 58' 39" 07	I'	315° 20' 10" 71
r_0	0.432 8318	$((r))$	0.431 6993
		$\log (1+r)$	0.000 6691
z	5.860 4279	(r)	0.432 3684
$\text{tang } b$	5.428 0595	r	0.432 3684
$\cos b$	0.000 0000		
$(wk): \sqrt{p_0}$	9.596 5336	$dv:dt$	6.798 9750
$(wk) e_0: \sqrt{p_0}$	8.835 6650	$d(r)_1$	7.230 6743
$\sin I'$	9 _n 846 9208	Add.	0.015 6437
$(1+r)^{-1}$	9.999 3309	$d(r):dt$	8 _n 666 2730.
$d(r)_2$	8 _n 681 9167		

Von hier ab kann die Rechnung 6stellig geführt werden; man erhält so nach III) (pag. 170):

$dz:dt$	5 _n 502 550	$\sin (l-K_0) \tan g J$	5.428 059
$(r) dz:dt$	5 _n 934 918		9 _n 969 477
$z d(r):dt$	4 _n 526 701	$\cos (l-K_0) \tan g J$	5 _n 838 682
Subtr.	9.982 694	$l-K_0$	158°46'10"2
$wk) \sqrt{p_0}$	0.078 749	$l=V+\omega_0+\Delta\omega$	227°56'30"0
$\int \Sigma U dt$	6.699 826	K_0	69°10'19"8
Add.	0.000 181		
Nenner	0.078 930	$\tan g J$	5.869 205
Zähler	5 _n 917 612	$\tan g \frac{1}{2} J$	5.568 175
		$\sin^2 \frac{1}{2} J$	1.136 ...
$\left(\frac{1}{wk}\right) \int \Sigma U dt$	6.862 185	$2 \sqrt{p_0}$	0.542 138
$2 \sqrt{p_0} \sin^2 \frac{1}{2} J$	1.678 ...	log. Add.	0.000 091
Add.	0.000 003	$2 \sqrt{p_0} + \Delta(Vp)$	0.542 229
sec J	0.000 000	log $\Delta(p)$	7.404 417
log $\Delta(\sqrt{p})$	6.862 188	$\Delta(u)$	0"000

weiter lässt IV) (pag. 170, 171) finden:

$\frac{1}{2} i_0$	1°6'11"95	$2 K_0$	138°20'39"6
$\tan g \frac{1}{2} i_0$	8.284 632	$\sin K_0$	9.970 651
a	3.852 807	$\sin 2 K_0$	9.822 595
b	7.283 543	$\sin K_0 : \sin 1''$	5.285 07
b^2	4.567 086	$\sin 2 K_0 : \sin 2''$	4.835 990
(II) ₁	— 6'10"356	$\Delta(K)$	— 6'9"966
(II) ₂	+ 0"253	$\Omega-\Omega_0$	+ 6'10"240
II	— 6'10"103		
I	+ 0.137	$\frac{1}{2} \Delta(K)$	— 3' 5"0
$K_0 + \frac{1}{2} \Delta(K)$	69° 7'14"8	$\tan g \frac{1}{2} (i-i_0)$	5.120 112
$\cos \{ K_0 + \frac{1}{2} \Delta(K) \}$	9.551 937	T	4.685 575
$\tan g \frac{1}{2} J$	5.568 175	$\frac{1}{2} (i-i_0)$	+ 2"720
$\sec \frac{1}{2} \Delta(K)$	0.000 000	$i-i_0$	+ 5"440

Nun kann an die Berechnung der Formeln V) (pag. 171) geschritten werden.

$\frac{1}{2} (E_0+E_{00})$	321°21'33"0	$\cos \varphi_0$	9.993 368
β	9.999 992	$n' \cos N$	9.886 061
$\cos \frac{1}{2} (E_0+E_{00})$	9.892 693		9.890 083
$\sin \varphi_0$	9.239 131	$n' \sin N$	9 _n 795 488
$e_0 \beta \cos \frac{1}{2} (E_0+E_{00})$	9.131 816	N	320°55'54"2

Nenner	9.936 784	n'	9.995 978
$A M''$	3.569 656	$a_0 \beta$	0.495 471
$E_0 - E_{00} + 1^{\circ}11'34''10$		$E_0 - E_{00}$	3.632 872
		$\sin 1''$	4.685 575
$N - v_0$	$6^{\circ}57'15''1$		
$\cos (N - v_0)$	9.996 793	$\frac{1}{2} (V - v_0)$	$0^{\circ}40'45''8$
n	8.809 896	$\frac{1}{2} (V + v_0)$	$314^{\circ}39'24''9$
$\sin (N - v_0)$	9.083 057	$N - \frac{1}{2} (V + v_0)$	$6^{\circ}16'29.3$
$n \sin (N - v_0)$	7.892 953	$\sin \{ N - \frac{1}{2} (V + v_0) \}$	9.038 610
r_0	0.432 832	$- n$	$8_n 809 896$
Subtr.	9.998 746	$\sec \frac{1}{2} (V - v_0)$	0.000 031
Nenner	0.431 578	$\log [((r)) - r_0]$	$7_n 848 537$
$n \cos (N - v_0)$	8.806 689		
$\text{tang} (V - v_0)$	8.375 111		
T	4.685 656		
$V - v_0 + 1^{\circ}21'31''64$			

Zur Controle der eben erhaltenen Werthe findet man aus VI) (pag. 171):

$a_0 \beta (E_0 - E_{00}) \sin 1''$	8.813 918	$\frac{1}{2} a_0 \cos \varphi_0$	0.187 817
$e_0 \sin \frac{1}{2} (E_0 + E_{00})$	$9_n 034 619$	$\text{compl. } \sqrt{r_0((r))}$	9.567 734
$\log [((r)) - r_0]$	$7_n 848 537$	$\beta \sin 1'' (E_0 - E_{00})$	8.318 439
		$\sin \frac{1}{2} (V - v_0)$	8.073 990
		S	4.685 565
		$\frac{1}{2} (V - v_0) + 40'45''82$	
		$V - v_0 + 1^{\circ}21'31''64$	

Die Controlwerthe stimmen somit vollkommen; aus VII) (pag. 171) ergibt sich nun:

$\sin \frac{1}{2} b$	5.127 029	$((r)) \gamma$	7.619 718
$2 \sin^2 \frac{1}{2} b$	0.555 088	Add.	9.841 129
ν	7.188 019	$A(r)$	$7_n 460 847$
Add.	0.000 000		
$\nu + 2 \sin^2 \frac{1}{2} b$	7.188 019	$\sin v_0$	$9_n 857 099$
γ	7.188 019	$d\nu : dt$	6.798 975
$2 \sin \frac{1}{2} (V - v_0)$	8.375 020	$(r) d\nu : dt$	7.231 343
$\cos \frac{1}{2} (V + v_0)$	9.846 869	$(wk) e_0 \{ \dots \} : \sqrt{p_0}$	7.085 540
$2 \sin \frac{1}{2} (V - v_0) \cos \frac{1}{2} (V + v_0)$	8.221 889	Add.	0.234 219
$\gamma \sin v_0$	$7_n 045 118$	$dz : dt$	$5_n 502 550$
Subtr.	0.027 986	$\{z : (r)\} \{dz : dt\}$	$0_n 930 609$
$\{ \dots \}$	8.249 875	$(1) + (2)$	7.465 562
$(wk) e_0 : \sqrt{p_0}$	8.835 665	Add.	0

$$\sqrt{p} \quad 0.241 \ 289$$

$$p \quad 0.482 \ 578$$

$$\cos b : (1 + r) \quad 9.999 \ 331$$

$$\mathcal{A} \left(\frac{dr}{dt} \right) \quad 7.464 \ 893$$

Nun kann an die Bestimmung der Excentricität und der wahren Anomalie geschritten werden; die Formel VIII) (pag. 171) liefern hierfür:

$$dr_0 : dt \quad 8_n 692 \ 764$$

$$\text{I} \quad 5_n 554 \ 952$$

$$\text{II} \quad 7.706 \ 182$$

$$\text{Add.} \quad 9.996 \ 924$$

$$\text{Compl. } (wk) \quad 0.162 \ 359$$

$$p_0 : r_0 \quad 0.049 \ 384$$

$$\text{II} \quad 7_n 510 \ 231$$

$$\text{I} \quad 7.404 \ 417$$

$$\text{Subtr.} \quad 0.251 \ 338$$

$$\text{Compl. } r \quad 9.567 \ 632$$

$$G - \frac{1}{2} (v + r_0) \quad 118^\circ 41' \ 2'' 4$$

$$\cos \{ G - \frac{1}{2} (v + r_0) \} \quad 9_n 681 \ 222$$

$$g \cos \{ G - \frac{1}{2} (v + r_0) \} \quad 7_n 564 \ 326$$

$$\sec \frac{1}{2} (v - v_0) \quad 0.000 \ 083$$

$$\mathcal{A} (e) \quad 7_n 564 \ 409$$

$$e_0 \quad 9.239 \ 131$$

$$\text{Add.} \quad 9.990 \ 717$$

$$\sin \varphi \quad 9.229 \ 848$$

$$\varphi \quad 9^\circ 46' 27'' 0$$

$$\frac{1}{2} (\varphi + \varphi_0) \quad 9^\circ 52' 50.9$$

$$\cos \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_0) \quad 9.993 \ 510$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{A} (e) \quad 7_n 263 \ 379$$

$$\sin \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) \quad 7_n 269 \ 869$$

$$S \quad 4.685 \ 575$$

$$\frac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) \quad - \ 6' 23'' 967$$

$$\varphi - \varphi_0 \quad -12' 47'' 934$$

$$g \sin G \quad 7.865 \ 465$$

$$9.982 \ 361$$

$$g \cos G \quad 7.329 \ 201$$

$$G \quad 73^\circ 46' 50'' 0$$

$$G - v_0 \quad 119^\circ 48' 10'' 9$$

$$\sin (G - r_0) \quad 9.938 \ 389$$

$$g \quad 7.883 \ 104$$

$$\cos (G - r_0) \quad 9_n 696 \ 373$$

$$g \cos (G - v_0) \quad 7_n 579 \ 477$$

$$e_0 \quad 9.239 \ 131$$

$$\text{Add.} \quad 9.990 \ 385$$

$$\text{Nenner} \quad 9.229 \ 516$$

$$g \sin (G - v_0) \quad 7.821 \ 493$$

$$\text{tang } (v - r_0) \quad 8.591 \ 977$$

$$T \quad 4.685 \ 796$$

$$v - v_0 \quad 2^\circ 14' 17'' 14$$

$$\frac{1}{2} (v - r_0) \quad 1^\circ \ 7' \ 8'' 57$$

$$\frac{1}{2} (v + r_0) \quad 315^\circ \ 5' 47'' 6$$

$$2 e_0 \quad 9.540 \ 161$$

$$\text{Add.} \quad 9.995 \ 383$$

$$(2 e_0 + \mathcal{A} e) \quad 9.535 \ 544$$

$$\mathcal{A} e^2 \quad 7_n 099 \ 953$$

Aus IX) (pag. 172) findet sich weiter:

$$\log 2 \quad 0.301 \ 030$$

$$\sin \frac{1}{2} (v - v_0) \quad 8.290 \ 699$$

$$\cos \frac{1}{2} (v + v_0) \quad 9.850 \ 216$$

$$\cos \varphi \quad 9.993 \ 650$$

$$(\sigma)_1 \quad 8.435 \ 595$$

$$2 \sin \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) \quad 7_n 570 \ 899$$

$$\sin \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_0) \quad 9.234 \ 515$$

$$2 \sin \frac{1}{2} (v - r_0) \quad 8.591 \ 729$$

$$\sin \frac{1}{2} (v + r_0) \quad 9_n 848 \ 752$$

$$(\gamma)_2 \quad 8_n 440 \ 481$$

$$\text{Subtr.} \quad 9.938 \ 007$$

$$(\gamma) \quad 8.378 \ 488$$

$$(r : p) \quad 9.949 \ 790$$

$\sin v_0$	9 _n 857 099	$-g \cos G$	7 _n 329 201
$(\sigma)_2$	6.662 513	(λ)	7 _n 278 991
Subtr.	9.992 614	$\sin E_{00}$	9 _n 801 083
(σ)	8.428 209	$\cos E_{00}$	9.889 040
$(\sigma) (r : p)$	8.377 999	$g' \cos (G' - E_{00})$	6 _n 708 394
$(\lambda) \sin E_{00}$	7.080 074	Nenner	9.999 778
Add.	0.021 338	$g' \sin (G' - E_{00})$	8.504 663
$(\gamma) (r : p)$	8.328 278	$\text{tang } (E - E_{00})$	8.504 885
$(\lambda) \cos E_{00}$	7 _n 168 031	T	4.685 723
Add.	9.968 883	$E - E_{00}$	1°49'54"20
$g' \sin G'$	8.399 337	$\frac{1}{2} (E - E_{00})$	0°54'57"10
	9.894 618	$\frac{1}{2} (E + E_{00})$	321°40'43"1
$g' \cos G'$	8.297 161	$\cos \frac{1}{2} (E + E_{00})$	9.894 618
G'	51°40'43"0	$\sin \frac{1}{2} (E - E_{00})$	8.203 688
$G' - E_{00}$	90°54'57"0	$-2 \sin \varphi_0 : \sin 1''$	4 _n 854 586
$\sin (G' - E_{00})$	9.999 944	$\log JM_2$	2 _n 952 892
g'	8.504 719	$JM_2 -$	14'57"206
$\cos (G' - E_{00})$	8 _n 203 675	$JM_3 -$	7'39"564
		$M - M_0 +$	1°27'17"43
E	322°35'40"2		
$-\sin E$	9.783 512		
$J(e) : \sin 1''$	2 _n 878 834		
$\log JM_3$	2 _n 662 346		

Nach X (pag. 172) erhält man:

$J(K) -$	6' 9"966	$\omega - \omega_0 -$	1° 7'14"34
$J(u)$	0.000	$\lambda - \lambda_0 -$	1° 1' 1"10
$J\omega -$	8'18"875	$L - L_0 +$	0°26'13"33
$V - v_0 +$	1°21'31"64	$\mu_0 t -$	213°37'55"26
$-(r - r_0) -$	2°14'17"14		

Aus XI (pag. 172) leitet man schliesslich ab mit Benützung der Tafel XI:

$J(p)$	7.404 417	$J(p) + a_0 J(e^2)$	7 _n 146 703
$a_0 J(e^2)$	7 _n 595 432	$\log q$	6 _n 362 894
p_0	0.482 216	$q -$	0.000 2306
Subtr.	0.000 563	f	0.477 371
Add.	9.742 286	$-\mu_0$	2 _n 806 787
$p_0 - a_0 J(e^2)$	0.482 779	$\log (\mu - \mu_0)$	9.647 052
Nenner	0.783 809	$\mu - \mu_0 +$	0"44366

Die neuen Elemente sind also, wenn man die Epoche auf den Osculationspunkt legt:

(62) Erato

Epoche und Osculation 1871 Sept. 13,0 mittl. Berl. Zeit.

mittl. Aeq. 1870,0.

$$L = 5^{\circ}56'24''87$$

$$M = 328\ 30\ 11.07$$

$$x = 37\ 26\ 13.80$$

$$\Omega = 125\ 48\ 49.94$$

$$i = 2\ 12\ 29.34$$

$$q = 9\ 46\ 26.97$$

$$\mu = 641''33971$$

Vergleicht man diese Elemente mit jenen, die auf pag. 136 mitgetheilt sind und in ganz anderer Weise durch eine völlig verschiedene Methode der Störungsrechnung erhalten wurden, so findet man die befriedigendste Uebereinstimmung; doch ist den hier erhaltenen Elementen das grössere Vertrauen zu schenken, weil die Störungsrechnung nach Encke's Methode, in Folge des Anwachsens der Störungen, nicht mehr die hinreichende Sicherheit bot und eigentlich länger fortgesetzt wurde, als es gestattet erscheint; man kann aber aus dem hohen Grade der Uebereinstimmung den Schluss ziehen, dass selbst in diesen extremen Fällen die mechanischen Quadraturen alles geleistet haben, was von denselben verlangt werden kann. Die unten durchgeführte Störungsrechnung nach der Variation der Constanten bestätigt die eben hier gemachten Schlüsse.

Zur Controle kann man die Formeln III — VI (pag. 172. 173) benützen; man erhält aus III, wenn man die Rechnung 7stellig durchführt:

$dz : dt$	5 _n 502 5500	$\sin (l - K_0) \tan J$	5.428 0595
$(v) dz : dt$	5 _n 934 9184		9 _n 969 4760
$z dv : dt$	4 _n 526 7009	$\cos (l - K_0) \tan J$	5 _n 838 6820
Subtr.	0.017 3058	$l - K_0$	158°46'10''03
Zähler	5 _n 917 6126	$I + \omega_0 + J\omega = l$	227°56'30''04
$(wk) \sqrt{p_0}$	0.078 7492	K_0	60°10'20''01
$\int \Sigma U dt$	6.699 8265		
Add.	0.000 1814	$\tan J$	5.869 2051
Nenner	0.078 9306	T	4.685 5749
$(wk) \sqrt{p}$	0.078 9306	J	15.263

$$(u) = 158^{\circ}46'10''03$$

Aus IV) (pag. 172) findet sich nun:

$\frac{1}{2} i_0$	1° 6'11''95	$\cos \frac{1}{2} (i_0 - J)$	9.999 9198
$\frac{1}{2} J$	0° 0'7''631	$\sec \frac{1}{2} (i_0 + J)$	0.000 0809

$\frac{1}{2} (i_0 + J)$	$1^0 6' 19'' 581$	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \{K + (\Omega - \Omega_0)\}$	$9.838 5325$
$\frac{1}{2} (i_0 - J)$	$1^0 6' 4'' 319$	$\frac{1}{2} \{K + (\Omega - \Omega_0)\}$	$34^0 35' 10'' 16$
$\frac{1}{2} K_0$	$34^0 35' 10'' 00$	K	$69^0 4' 10'' 07$
$\operatorname{tang} \frac{1}{2} K_0$	$9.838 5318$	$\frac{1}{2} (K + K_0)$	$69^0 7' 15'' 04$
$\sin \frac{1}{2} (i_0 - J)$	$8.283 7167$	$\cos \frac{1}{2} (K + K_0)$	$9.551 9354$
$\operatorname{cosec} \frac{1}{2} (i_0 + J)$	$1.714 6147$	$\sec \frac{1}{2} (K - K_0)$	$0.000 0002$
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \{K - (\Omega - \Omega_0)\}$	$9.836 8632$	$\operatorname{tang} \frac{1}{2} J$	$5.568 1751$
$\frac{1}{2} \{K - (\Omega - \Omega_0)\}$	$34^0 28' 59'' 91$	$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (i - i_0)$	$5.120 1107$
$\Omega - \Omega_0 +$	$6' 10'' 25$	$T - \log 2$	$4.384 5449$
Ω	$125^0 48' 49'' 95$	$i - i_0 +$	$5'' 440$

Aus V) (pag. 172, 173) erhält man nun:

$\frac{dr}{dt}$	$8_n 666 2730$	$\sin \varphi \sin v$	$9_n 069 9208$
$(r) : r$	$0.000 0000$		$9.858 5055$
$\frac{z}{r} \left(\frac{dz}{dt} \right)$	$0_n 930 6095$	$\sin \varphi \cos v$	$9.088 3528$
Add.	$0.000 0000$	v	$316^0 12' 55'' 76$
$dr : dt$	$8_n 666 2730$	$\sin \varphi$	$9.229 8473$
$\bar{p} : (wk)$	$0.403 6478$	φ	$9^0 46' 26'' 89$
p	$0.482 5784$	$K - v$	$112^0 51' 14'' 31$
$p : r$	$0.050 2100$	ω	$271^0 37' 24'' 34$
		π	$37^0 26' 14'' 29$

Schliesslich findet sich nach VI) (pag. 173):

$(45^0 + \frac{1}{2} \varphi)$	$49^0 53' 13'' 44$	$\sin E$	$9_n 783 5134$
$\frac{1}{2} v$	$158^0 6' 27.88$	$\sin \varphi : \sin 1''$	$4.544 2724$
$\cotg (45 + \frac{1}{2} \varphi)$	$9.925 5514$	AM	$- 5^0 54' 30'' 90$
$\operatorname{tang} \frac{1}{2} v$	$9_n 604 0536$	M	$328^0 30' 10'' 62$
$\frac{1}{2} E$	$161^0 17' 49'' 86$		
E	$322^0 35' 39'' 72$	$\cos \varphi$	$9.993 6498,5$
$\cos \varphi^2$	$9.987 2997$	$\log a^{\frac{3}{2}}$	$0.742 9180$
$\log a$	$0.495 2787$	k''	$3.550 0066$
$\frac{1}{2} \log a$	$0.247 6393$	μ	$641'' 3404$

Die Uebereinstimmung ist eine im Ganzen genügende, zeigt aber ganz deutlich den überwiegenden Vorthail, den die Bestimmung der neuen osculirenden Elemente durch die Differenzen gewährt.

C. Variation der Constanten.

§ 1. Aufstellung der Differentialgleichungen.

In den vorausgehenden Paragraphen wurden die Methoden der Störungsrechnung zum Vortrage gebracht, die den Einfluss der Störungen auf die Coordinaten finden lassen. Man kann aber auch die Störungen dadurch bestimmen, dass man durch Variation der sechs willkürlichen Constanten des Problemcs für jeden gegebenen Augenblick den Ort und die Geschwindigkeit des gestörten Himmelskörpers darstellt; diese Methode bewährt auch in der Anwendung die hohen Vorzüge, welche dieselbe in der Analyse in Anspruch nimmt und ich stehe nicht an, zu erklären, dass mir dieselbe in den meisten Fällen als das geeignetste Mittel erscheint, die Störungen mit der grössten Schärfe zu bestimmen.

Eine verhältnissmässig kurze Ableitung der diesbezüglichen Formeln lässt sich auf die bereits vorhandenen Entwicklungen gründen, und ich werde hierzu die Formeln heranziehen, die oben beim Uebergange auf die osculirenden Elemente entwickelt wurden; man kann dieselben nämlich sofort für das vorliegende Problem verwerthen, wenn man die Störungen in den Coordinaten selbst der Null gleich setzt, die Geschwindigkeiten aber den störenden Kräften entsprechend abändert, und nur die ersten Potenzen der Störungen mitnimmt, da man es thatsächlich nur mit differentiellen Aenderungen zu thun hat.

Als störende Kräfte sollen eingeführt werden: die Störung im Radiusvector R_0 , positiv gezählt, wenn der Radius vector vergrössert wird; die Störung senkrecht auf denselben in der Bahnebene S_0 , positiv in der Richtung der Bewegung des Himmelskörpers und endlich die auf der Bahnebene senkrechte Störungscomponente W_0 . Die positive Richtung der Zählung für die letzte Coordinate ist dadurch bestimmt, dass, vom Pol der positiven Z-Achse gesehen, sich der Himmelskörper im umgekehrten Sinne wie der Zeiger einer Uhr bewegt. Es soll vorerst vorausgesetzt werden, dass die Kraftcomponenten berechnet vorliegen; wie dieselben bestimmt werden, wird im folgenden Paragraphen erläutert werden.

Um zunächst den Einfluss der Störungen auf die Lage der Bahnebene zu bestimmen, nehmen wir die Gleichungen 15 (pag. 166) vor; mit Rücksicht darauf, dass die Störungen in den Coordinaten selbst der Null gleich gesetzt, die Geschwindigkeiten aber um den Betrag der angreifenden Kräfte vermehrt, und dass die Glieder zweiter Ordnung weggelassen werden müssen, nehmen diese Gleichungen die Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} \sin (l - K_0) \tan g J &= 0 \\ \cos (l - K_0) \tan g J &= \frac{r}{k \sqrt{\rho}} \frac{dz}{dt} = \frac{r W_0}{k \sqrt{\rho}}; \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

es ist l in diesem Falle mit dem Argumente der Breite u identisch, denn es berechnet sich l aus:

$$l = V + \omega_0 + J\omega;$$

da aber die Elemente osculiren, so ist V identisch mit v und $J\omega$ ist der Null gleich, wodurch:

$$l = u$$

wird; hieraus erschliesst man sofort mit Rücksicht auf die erste Relation in 1), (pag. 213), dass auch

$$K_0 = u$$

ist, welche Relation übrigens sofort aus der geometrischen Anschauung klar wird. Mit Rücksicht auf diesen Umstand ist also, wenn man wieder den Bogen mit der Tangente vertauscht:

$$J = \frac{r W_0}{k \sqrt{p}}. \quad 2)$$

Man erhält daher statt der Formeln 21) (pag. 168) sofort:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta K + \frac{1}{2} \delta \Omega &= \frac{1}{2} J \tan \frac{1}{2} i \sin u \\ \frac{1}{2} \delta K - \frac{1}{2} \delta \Omega &= -\frac{1}{2} J \cotg \frac{1}{2} i \sin u, \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta K + \frac{1}{2} \delta \Omega \\ \frac{1}{2} \delta K - \frac{1}{2} \delta \Omega \end{aligned}} \right\} 3)$$

wobei ich von nun an die Variationen der Elemente durch die Störungen, soweit dieselben von der Ordnung differentieller Grössen sind, durch ein vorgesetztes δ von den Differentiationen unterscheide; es wird also aus 3) erhalten:

$$\delta \Omega = \frac{J \sin u}{\sin i} = \left(\frac{W_0}{k \sqrt{p}} \right) \frac{r \sin u}{\sin i} \quad 4)$$

$$\delta K = -J \cotg i \sin u = - \left(\frac{W_0}{k \sqrt{p}} \right) r \cotg i \sin u, \quad 5)$$

und aus der Gleichung 24) (pag. 168) folgt sofort:

$$\delta i = J \cos u = \left(\frac{W_0}{k \sqrt{p}} \right) r \cos u. \quad 6)$$

Die erste Gleichung in 13) (pag. 166) gibt, da $\cos J$ der Einheit gleich gesetzt werden kann:

$$k \sqrt{p} = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt};$$

legt man die X -Achse, wie es von nun ab vorausgesetzt werden soll, in den Radius-vector, so wird:

$$x = r, \quad y = 0$$

und nothwendig:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + S_0.$$

wenn durch $\frac{dy_0}{dt}$ die ungestörte Geschwindigkeit in der Y -Coordinate dargestellt wird; nun ist aber wegen:

$$\frac{dy_0}{r_0} = dv$$

auch:

$$r_0 \frac{dy_0}{dt} = k \sqrt{p_0}$$

und man hat also, da r_0 mit r identificirt werden muss:

$$k \delta \sqrt{p} = r S_0$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} \delta \sqrt{p} &= \frac{r S_0}{k} \\ \delta p &= \frac{2 r S_0}{k} \sqrt{p} \end{aligned} \right\} \quad 7)$$

Beim Uebergange auf osculirende Elemente wurden auf pag. 89 die Gleichungen gefunden:

$$\begin{aligned} e \sin v &= e_0 \sin v_0 + \frac{1}{k} \left\{ \frac{dr_0}{dt} \mathcal{A}(\sqrt{p}) + \sqrt{p} \mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right) \right\} \\ e \cos v &= e_0 \cos v_0 + \frac{1}{r} \left\{ \mathcal{A}(p) - \frac{p_0}{r_0} \mathcal{A}(r) \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man nun in diesen Gleichungen für die Aenderungen des Parameters die Variationen aus 7) ein und beachtet die Relationen:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= e \sin v \frac{k}{\sqrt{p}} \\ \mathcal{A}\left(\frac{dr}{dt}\right) &= R_0 \\ \mathcal{A}(r) &= 0 \end{aligned}$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} \delta(e \sin v) &= \sin v \delta e + e \cos v \delta v = \frac{1}{k} \left\{ \frac{e \sin v}{\sqrt{p}} r S_0 + \sqrt{p} R_0 \right\} \\ \delta(e \cos v) &= \cos v \delta e - e \sin v \delta v = \frac{2 S_0}{k} \sqrt{p} \end{aligned} \right\} \quad 8)$$

Bei diesen Gleichungen hat man, um späteren Missverständnissen vorzubeugen, zu beachten, dass unter δv die Variation zu verstehen ist, welche die wahre Anomalie durch die momentanen Störungen allein erleidet; es ist also δv wohl zu trennen von dem Ausdrücke $\left(\frac{dr}{dt}\right) dt$; dieser Umstand wird später nochmals ausführlich besprochen werden.

Um δe und δv aus den Gleichungen 8) zu bestimmen, hat man zunächst, wenn man statt e den Excentricitätswinkel φ einführt,

$$\begin{aligned} \delta e &= \cos \varphi \delta \varphi \\ \cos \varphi \delta \varphi &= \{ e r \sin v^2 + 2 p \cos v \} \left(\frac{S_0}{k \sqrt{p}} \right) + p \sin v \left(\frac{R_0}{k \sqrt{p}} \right); \end{aligned}$$

ersetzt man nun r durch den Werth $\frac{p}{1 + e \cos v}$, so findet sich leicht:

$$\begin{aligned} e r \sin v^2 + 2 p \cos v &= p \left\{ \frac{e \sin v^2}{1 + e \cos v} + 2 \cos v \right\} = p \left\{ \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v} + \frac{\cos v + e \cos v^2}{1 + e \cos v} \right\} = \\ &= p \{ \cos v + \cos E \}, \end{aligned}$$

und man hat, wenn man p durch $a \cos q^2$ ersetzt, sofort:

$$\delta q = a \cos q \{ \cos v + \cos E \} \left(\frac{S_0}{k \sqrt{p}} \right) + a \cos q \sin v \left(\frac{R_0}{k \sqrt{p}} \right). \quad 9)$$

Weiter folgt aus 8) (pag. 215):

$$e \delta v = \sin v \{ e r \cos v - 2 p \} \left(\frac{S_0}{k \sqrt{p}} \right) + p \cos v \left(\frac{R_0}{k \sqrt{p}} \right);$$

man ist aber:

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1$$

wodurch erhalten wird:

$$\delta v = - \frac{\sin v}{\sin q} \{ p + r \} \left(\frac{S_0}{k \sqrt{p}} \right) + \frac{p \cos v}{\sin q} \left(\frac{R_0}{k \sqrt{p}} \right). \quad 10)$$

Die Formel 23) (pag. 168) gibt weiter die Relation:

$$\mathcal{A} \pi = \mathcal{A}(K) + \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(\omega) + \{ (V - v_0) - (v - v_0) \} + (\Omega - \Omega_0);$$

hierbei ist den gemachten Voraussetzungen und Entwicklungen nach zu setzen:

$$\mathcal{A}(K) = - r \sin u \cot g i \left(\frac{W_0}{k \sqrt{p}} \right)$$

$$\mathcal{A}(u) = 0$$

$$\mathcal{A}(\omega) = 0$$

$$V - v_0 = 0$$

$$v - v_0 = \delta v$$

$$\Omega - \Omega_0 = \delta \Omega = \frac{r \sin u}{\sin i} \left(\frac{W_0}{k \sqrt{p}} \right);$$

demnach wird man haben:

$$\delta \pi = \frac{\sin v}{\sin q} \{ p + r \} \left(\frac{S_0}{k \sqrt{p}} \right) - \frac{p \cos v}{\sin q} \left(\frac{R_0}{k \sqrt{p}} \right) + r \sin u \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \left(\frac{W_0}{k \sqrt{p}} \right) \dots \quad 11)$$

Um die Variation der täglichen mittleren siderischen Bewegung μ zu finden, soll zuerst der in dem Ausdrucke

$$\delta \mu = - f q \mu$$

(vergl. pag. 92) auftretende Factor $f q$ näher erörtert werden.

Wenn man beachtet, dass q von der Ordnung der Störungen ist, und dass der Factor f sich von dem numerischen Werthe 3 nur um Grössen von der Ordnung der Störungen unterscheidet, so wird man auf die hier gestellten Bedingungen sich stützend schreiben dürfen:

$$\delta \mu = - 3 q \mu, \quad 12)$$

und es stellt sich demnach die Aufgabe, den Factor q durch die störenden Kräfte auszudrücken, wobei man q nach pag. 92 annimmt, sofort aber die Glieder zweiter Ordnung fortlässt und statt

$$\mathcal{A}(e^2) = 2 e \delta e$$

schreibt; man hat so zunächst:

$$q = \frac{\delta p + 2ae\delta e}{2p} = \frac{\delta p}{2p} + \tan q \delta q ;$$

die Substitution der Variationen aus 7) und 9) gibt, wenn man beachtet, dass

$$r + a \sin q \{ \cos v + \cos E \} = a (1 + \sin q \cos v) = \frac{ap}{r}$$

ist, sofort:

$$q = \frac{ap}{r} \left(\frac{S_0}{kVp} \right) + a \sin q \sin v \left(\frac{R_0}{kVp} \right) ;$$

führt man diesen Werth in 12) ein und ersetzt μ durch $\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$, so findet sich:

$$\delta \mu = - \frac{3k}{1a} \cdot \frac{p}{r} \left(\frac{S_0}{kVp} \right) - \frac{3k}{1a} \sin q \sin v \left(\frac{R_0}{kVp} \right) . \quad (13)$$

Wir haben nun noch die Störung des letzten Elementes, nämlich der mittleren Anomalie zu betrachten. Diese bedarf einer besonderen Erwägung.

Will man die ungestörte mittlere Anomalie M zur Zeit T finden, so hat man, wenn man mit M_0 die mittlere Anomalie zur Zeit T_0 darstellt:

$$(M) = M_0 + \int_{T_0}^T \left(\frac{dM_0}{dt} \right) dt . \quad (14)$$

Da aber in der ungestörten Bewegung

$$\frac{dM_0}{dt} = \mu_0$$

ist, so kann die Gleichung 14) in der gewöhnlichen Form

$$(M) = M_0 + (T - T_0) \mu_0$$

geschrieben werden, doch bietet die erstere Schreibweise für die vorliegenden Betrachtungen wesentliche Vortheile.

Die gestörte mittlere Anomalie zur Zeit T , die mit M bezeichnet werden soll, erscheint von der Zeit in zweifacher Weise abhängig, indem dieselbe vorerst eine explicite Funktion der Zeit ist und andererseits durch die Störungen Aenderungen erfährt. Wir haben hier also Differentiationen und Variationen getrennt von einander zu halten.

Ich bezeichne daher die Zeit mit t , wenn eine gewöhnliche Differentiation nach der Zeit verstanden werden soll, und mit τ , wenn es sich um eine Variation durch die Störungen handelt; ausserdem unterscheide ich die erstere Operation von der letzteren durch die beziehungsweise vorgesetzten Operationszeichen d und δ .

Will man nun die gestörte mittlere Anomalie zur Zeit T kennen und durch die Gleichung 14) darstellen, indem man derselben durch die Variation der Constanten Genüge leistet, so wird offenbar sein:

$$M = M_0 + \delta M_0 + \int_{T_0}^T \left(\frac{dM_0}{dt} + \delta \frac{dM_0}{dt} \right) dt , \quad (15)$$

wobei $\mathcal{A}M_0$ die unmittelbare Variation von M_0 durch die Störungen vorstellt, $\mathcal{A} \frac{dM_0}{dt}$ jedoch der Idee des Integrales entsprechend, die Variation für die unbestimmt gelassene Zeit t bezeichnet; es ist aber leicht einzusehen, dass

$$\mathcal{A} M_0 = \int_{T_0}^T \left(\frac{\delta M}{d\tau} \right) d\tau$$

$$\mathcal{A} \frac{dM_0}{dt} = \int_{T_0}^T \left(\frac{\delta \mu}{d\tau} \right) d\tau$$

ist, man hat also statt 15) (pag. 217) zu schreiben:

$$M = M_0 + \mu_0 (T - T_0) + \int_{T_0}^T \left(\frac{\delta M}{d\tau} \right) d\tau + \int_{T_0}^T dt \int_{T_0}^T \left(\frac{\delta \mu}{d\tau} \right) d\tau \quad 16)$$

Die Störung der mittleren Anomalie $\mathcal{A}M$ zerfällt also in zwei wesentlich verschiedene Theile; der erste Theil entsteht aus einer einfachen Integration der Variation des Elementes M_0 , der zweite Theil beruht auf der integrierten Variation von μ nach der Zeit. Da aber in dem vorliegenden Falle die Variation und Integration nach derselben Grösse stattfinden, indem $dt = d\tau$ ist, so kann man, wenn auch in nicht ganz correcter Weise dafür das Doppelintegral (eigentlich iterirtes Integral)

$$\iint_{T_0}^T \left(\frac{d\mu}{d\tau} \right) d\tau^2$$

schreiben, und erhält so die allgemein übliche Schreibweise für dasselbe.

Bildet man nach 16) die Variation von $\delta \mathcal{A}M$ nach t , so erhält man sogleich:

$$\delta \mathcal{A}M = (\delta M)_T + \int_{T_0}^T \left(\frac{\delta \mu}{d\tau} \right) d\tau, \quad 17)$$

wobei der dem ersten Gliede angehängte Index anzeigt, dass für δM die für den Zeitpunkt T geltende Variation einzusetzen ist, ebenso ist im zweiten Gliede die obere Grenze dem entsprechend eingeführt. Beide Bestimmungen erklären sich einfach aus der Bedeutung des Differentiales eines bestimmten Integrales. Es stellt sich nun die Aufgabe, die Variation von $\mathcal{A}M$ durch die störenden Kräfte auszudrücken, und hierbei kann man sich auf das Glied $(\delta M)_T$ allein beschränken, da die Variationen von μ durch die störenden Kräfte bereits oben entwickelt sind und daher auf die bekannte Anwendung der mechanischen Quadraturen reducirt erscheinen. Man wird übrigens diesen zweiten Theil bei der Anwendung zweckmässig nicht mit dem ersten Gliede von $\delta \mathcal{A}M$ vereinigen, sondern, um zur Kenntniss von $\mathcal{A}M$ zu gelangen, die Integration der Variation von $\mathcal{A}M$ durch eine einfache Quadratur für sich allein ausführen und nach der Integration das Doppelintegral, welches aus $\frac{\delta \mu}{d\tau}$ entsteht, nachträglich hinzufügen.

Um zur Kenntniss der Variation δM zu gelangen, bieten die vorangehenden

Entwickelungen hinreichende Anhaltspunkte, doch wird die hierfür nöthige Reduction ziemlich weitläufig.

Die Formeln 8) (pag. 91) geben mit Weglassung der Glieder zweiter Ordnung und unter Berücksichtigung der Formel 7) (pag. 215):

$$(\sigma) = \cos q \cos v \delta v - \sin q \sin v \delta q$$

$$(\gamma) = \cos q \delta q - \sin v \delta v$$

$$(\lambda) = - \frac{2r S_0}{k\sqrt{p}}$$

und es findet sich demnach:

$$\sin E = \sin E_0 - \frac{2r S_0}{k\sqrt{p}} \sin E_0 + \frac{r}{p} \left\{ \cos q \cos v \delta v - \sin q \sin v \delta q \right\}$$

$$\cos E = \cos E_0 - \frac{2r S_0}{k\sqrt{p}} \cos E_0 + \frac{r}{p} \left\{ \cos q \delta q - \sin v \delta v \right\}$$

woraus sofort folgt:

$$\delta E = \frac{r}{p} \left\{ (\cos q \cos v \cos E + \sin v \sin E) \delta v - (\sin q \sin v \cos E + \cos q \sin E) \delta q \right\}; \quad 18)$$

ausserdem hat man:

$$M = E - e \sin E,$$

es ist also:

$$\delta M = \frac{r}{a} \delta E - \sin E \cos q \delta q;$$

die Vereinigung dieses Ausdruckes mit 18) gibt:

$$\delta M = \frac{r^2}{ap} \left\{ \cos q \cos v \cos E + \sin v \sin E \right\} \delta v - \left\{ \frac{r^2}{ap} (\sin q \sin v \cos E + \cos q \sin E) + \cos q \sin E \right\} \delta q. \quad 19)$$

Dieser Ausdruck ist einer wesentlichen Reduction fähig; vorerst soll in dieser Richtung der Coefficient von δv vorgenommen werden.

Setzt man die bekannten Relationen

$$\cos v = \frac{a \cos E - e}{r}$$

$$\sin v = \frac{a \sin E \cos q}{r}$$

ein, so wird

$$\frac{\delta M}{\delta v} = \frac{r}{p} \cos q (1 - e \cos E) = \frac{r^2}{a^2 \cos q}. \quad 20)$$

Die Reduction des Ausdruckes $\frac{\delta M}{\delta q}$ ergibt, wenn man $\sin v$ wie oben durch die excentrische Anomalie ersetzt, vorerst

$$\begin{aligned} \frac{\delta M}{\delta q} &= - \left\{ \cos q \sin E \left(1 + \frac{r}{p} e \cos E \right) + \frac{r^2}{ap} \cos q \sin E \right\} \\ &= - \left\{ \frac{p}{r} + \frac{r}{a} + e \cos E \right\} \frac{r^2 \sin v}{pa}; \end{aligned}$$

nun ist aber bekanntlich:

$$e \cos E = 1 - \frac{r}{a}.$$

so dass schliesslich

$$\frac{\delta M}{\delta \varphi} = - \left(\frac{p+r}{r} \right) \frac{r^2 \sin v}{a^2 \cos \varphi^2} \quad (21)$$

wird.

Es findet sich demnach die Variation von M als Funktion der Variationen δv und $\delta \varphi$ nach den obigen Formeln:

$$\delta M = \frac{r^2}{a^2 \cos \varphi} \delta v - (p+r) \frac{r \sin v}{a^2 \cos \varphi^2} \delta \varphi \quad (22)$$

Da aber die Variationen von v und φ durch die störenden Kräfte mittelst der Formeln 9) und 10) (pag. 216) gegeben sind, so enthält die Gleichung 22) bereits die Lösung des Problemes.

Ehe ich jedoch diese Substitution anführe, soll noch statt der Variation von M die Variation der mittleren Länge δL eingeführt werden, da bei der häufigen Anwendung dieser Methode auf die Berechnung der speciellen Störungen der kleinen Planeten diese Transformation zweckmässig erscheint. Denn bei der meist nicht allzugrossen Excentricität der Bahnen der kleinen Planeten werden, da δv nahezu gleich $-\delta \pi$ ist, die Variationen von π und M nahe gleich, erhalten aber das entgegengesetzte Vorzeichen und sind überdies meist gross, da dieselben im Nenner den Factor $\sin \varphi$ enthalten; es ist aber

$$L = M + \pi,$$

also:

$$\delta L = \delta M + \delta \pi, \quad (23)$$

und das Element L erscheint demnach von den eben angeführten Nachtheilen befreit. Nach Gleichung 11) (pag. 216) ist:

$$\delta \pi = -\delta v + r \sin u \tan \frac{1}{2} i \left(\frac{H_0}{k \sqrt{p}} \right);$$

es ist also auch:

$$\delta L = \left(\frac{r^2}{a^2 \cos \varphi} - 1 \right) \delta v - (p+r) \frac{r \sin v}{a^2 \cos \varphi^2} \delta \varphi + r \sin u \tan \frac{1}{2} i \left(\frac{H_0}{k \sqrt{p}} \right). \quad (24)$$

Der Coëfficient von δv lässt sich aber schreiben, wenn man für r die excentrische Anomalie einführt:

$$\frac{\delta L}{\delta v} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \varphi^2 + e^2 \cos E^2 - 2 e \cos E}{\cos \varphi};$$

man ist aber:

$$2 \sin \frac{1}{2} \varphi = \frac{e}{\cos \frac{1}{2} \varphi}, \quad \cos E (2 - e \cos E) = \cos E \left(1 + \frac{r}{a} \right);$$

man kann daher statt 24) setzen:

$$\delta L = \frac{a \tan \frac{1}{2} \varphi - (a+r) \cos E}{a \cos \varphi} e \delta v - \frac{p+r}{a^2 \cos \varphi^2} r \sin v \delta \varphi + r \sin u \tan \frac{1}{2} i \left(\frac{H_0}{k \sqrt{p}} \right). \quad (25)$$

Substituirt man nun für δv und $\delta \varphi$ die Werthe aus den Gleichungen 9) und 10) (pag. 216), so erhält man, wenn man diejenigen Glieder zusammenzieht, die mit dem Factor $\left(\frac{R_0}{k \sqrt{p}} \right)$ multiplicirt erscheinen, den Coëfficienten von $\left(\frac{R_0}{k \sqrt{p}} \right)$

$$\frac{p \cos v}{a \cos \varphi} \left\{ a \tan \frac{1}{2} \varphi - (a+r) \cos E \right\} - \frac{r(p+r) \sin v^2}{a \cos \varphi} . \quad 26)$$

Setzt man also für $a \cos E$ den Werth $(r \cos v + a e)$ und beachtet, dass

$$\frac{\tan \frac{1}{2} \varphi - \sin \varphi}{\cos \varphi} = - \tan \frac{1}{2} \varphi \quad 27)$$

ist, so verwandelt sich 26) in

$$- \frac{r}{a \cos \varphi} \left\{ (p+r) \sin v^2 + p \cos v (\cos v + \cos E) \right\} - p \cos v \tan \frac{1}{2} \varphi ,$$

oder:

$$- \frac{r \cos \varphi}{p} \left\{ p + r \sin v^2 + p \cos v \cos E \right\} - p \cos v \tan \frac{1}{2} \varphi .$$

Nun ist aber:

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} ;$$

es wird also der Coefficient von $\left(\frac{R_0}{k \sqrt{p}} \right)$ schliesslich:

$$- (2 r \cos \varphi + p \cos v \tan \frac{1}{2} \varphi) . \quad 28)$$

Der Coefficient von $\left(\frac{S_0}{k \sqrt{p}} \right)$ findet sich zunächst:

$$- \frac{(\cos v + \cos E)}{a \cos \varphi} \left\{ (p+r) r \sin v - \frac{a \tan \frac{1}{2} \varphi - (a+r) \cos E}{a \cos \varphi} (p+r) \sin v \right.$$

oder:

$$- \frac{(p+r) \sin v}{a \cos \varphi} \left\{ r \cos v - a \cos E + a \tan \frac{1}{2} \varphi \right\} ;$$

da nun

$$r \cos v = a (\cos E - e)$$

ist, so erhält man mit Rücksicht auf 27) sofort den Coefficienten von $\left(\frac{S_0}{k \sqrt{p}} \right)$ in der schliesslichen Form:

$$(p+r) \sin v \tan \frac{1}{2} \varphi . \quad 29)$$

Für die Variation von L wird man also durch Vereinigung der Resultate der Gleichungen 25), 28), 29) anzunehmen haben:

$$\delta L = - (2 r \cos \varphi + p \cos v \tan \frac{1}{2} \varphi) \left(\frac{R_0}{k \sqrt{p}} \right) + (p+r) \sin v \tan \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{S_0}{k \sqrt{p}} \right) +$$

$$+ r \sin v \tan \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{W_0}{k \sqrt{p}} \right) , \quad 30)$$

und hiermit ist die gesammte für die Variation der Constanten nöthige Entwicklung beendet.

Trägt man alle Formeln übersichtlich zusammen und wählt als Zeiteinheit das bei der Störungsrechnung zu Grunde gelegte Zeitintervall w , so erhält man das

folgende Formelsystem, in welchem entsprechend der gewählten Zeiteinheit w , abkürzend

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{S_0}{(wk) \sqrt{p}} \\ R &= \frac{R_0}{(wk) \sqrt{p}} \\ W &= \frac{W_0}{(wk) \sqrt{p}} \end{aligned} \right\} \quad 31)$$

gesetzt, und ausserdem, um das Resultat der doppelten Integration für ΔL unverändert beibehalten zu können, der Zeiteinheit w gemäss, $w\delta\mu$ statt $\delta\mu$ eingeführt ist:

$$\left. \begin{aligned} \delta i &= r \cos u W \\ \delta \Omega &= \frac{r \sin u}{\sin i} W \\ w\delta\mu &= -\frac{3(wk)}{\sqrt{a}} \sin \varphi \sin v R - \frac{3(wk)}{\sqrt{a}} \frac{p}{r} S \\ \delta L &= -\left(2r \cos \varphi + p \cos v \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi\right) R + (r+p) \sin v \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi S + r \sin u \operatorname{tg} \frac{1}{2} i W \\ \delta \pi &= -\frac{p \cos v}{\sin \varphi} R + (r+p) \frac{\sin v}{\sin \varphi} S + r \sin u \operatorname{tg} \frac{1}{2} i W \\ \delta \varphi &= a \cos \varphi \sin v R + a \cos \varphi (\cos v + \cos E) S \\ \Delta L &= \int -\frac{\delta L}{d\tau} d\tau + \int dt \int \frac{\delta \mu}{d\tau} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad 32)$$

Die Ermittlung der gestörten Elemente hat daher keine Schwierigkeiten, indem die Variationen der Elemente durch einfache numerische Quadraturen erhalten werden, und die hierfür geltenden Formeln im ersten Abschnitte des vorliegenden Bandes entwickelt sind. Man wird natürlich die Anfangsconstanten der einfachen Integrale und des doppelten Integrales so zu bestimmen haben, dass die Integrale für die Zeit der Osculationsepoche verschwinden.

Die Anwendung des oben stehenden Formelsystems 32) erscheint unter Umständen unzulässig oder sehr unbequem. Nähert sich nämlich die Bahn einem Kreise, so werden die Störungen in π wegen des Nenners $\sin \varphi$ sehr gross und unendlich für eine Kreisbahn; ähnliche Verhältnisse treten auf, wenn die Neigung gegen die Ekliptik verschwindend klein wird, wegen des Nenners $\sin i$ in $\delta \Omega$; endlich werden wegen der Wahl der Elemente, deren Variationen hier bestimmt erscheinen, die obigen Formeln für die Anwendung auf Kometen, wenn deren Bahn nahezu parabolisch ist, unbrauchbar.

Wir wollen vorerst den Ausnahmefall der kleinen Neigungen vornehmen. Das erste und naheliegendste Hilfsmittel wäre darin zu suchen, dass man die Elemente i und Ω auf eine andere Fundamentalebene beziehen würde, etwa auf den Aequator; diese Transformation würde jedoch besonders bei der Ermittlung der störenden Kräfte manche Unbequemlichkeit mit sich bringen. Zweckmässiger wird es sein, in diesen Fällen anstatt i und Ω als Elemente einzuführen:

$$\Xi = \frac{\sin i \sin \Omega}{\sin i''}$$

$$\Omega = \frac{\sin i \cos \Omega}{\sin i''}$$

und die Variationen dieser Elemente zu bestimmen. Die Variation nach der Zeit ergibt:

$$\delta \Xi = \cos i \sin \Omega \delta i + \sin i \cos \Omega \delta \Omega$$

$$\delta \Omega = \cos i \cos \Omega \delta i - \sin i \sin \Omega \delta \Omega ;$$

führt man nun die Ausdrücke aus 32) ein, so findet sich:

$$\delta \Xi = r \{ \sin \Omega \cos u \cos i + \cos \Omega \sin u \} W$$

$$\delta \Omega = r \{ \cos \Omega \cos u \cos i - \sin \Omega \sin u \} W .$$

In den Fällen nun, in denen diese Formeln in Anwendung kommen, wird i stets sehr klein sein; man erhält daher die folgende für die Rechnung bequeme Form, wenn man beachtet, dass $u = v + \pi - \Omega$ ist:

$$\left. \begin{aligned} \delta \Xi &= r \sin (v + \pi) W - 2 r \sin \frac{1}{2} v^2 \sin \Omega \cos u W \\ \delta \Omega &= r \cos (v + \pi) W - 2 r \sin \frac{1}{2} v^2 \cos \Omega \cos u W , \end{aligned} \right\} \quad 33)$$

wobei man wohl das zweite Glied meist wird weglassen, oder sich auf dessen Berücksichtigung nur bei bedeutenden Störungen wird beschränken können.

Ebenso wird man sich im Falle sehr nahe kreisförmiger Bahnen zu behelfen in der Lage sein. Setzt man:

$$\Phi = \frac{\sin \varphi \sin \pi}{\sin i''}$$

$$\Psi = \frac{\sin \varphi \cos \pi}{\sin i''} ,$$

so erhält man wieder durch die Variation nach der Zeit leicht:

$$\delta \Phi = \sin \varphi \cos \pi \delta \pi + \sin \pi \cos \varphi \delta \varphi$$

$$\delta \Psi = - \sin \varphi \sin \pi \delta \pi + \cos \pi \cos \varphi \delta \varphi .$$

Die Substitution aus 32) lässt daher finden:

$$\delta \Phi = - p \cos (v + \pi) R + \{ (r + p) \sin v \cos \pi + p \cos v + \cos E \} \sin \pi \} S$$

$$+ \sin \varphi \cos \pi r \sin u \tan \frac{1}{2} i W$$

$$\delta \Psi = p \sin (v + \pi) R + \{ - (r + p) \sin v \sin \pi + p (\cos v + \cos E) \cos \pi \} S$$

$$- \sin \varphi \sin \pi r \sin u \tan \frac{1}{2} i W .$$

oder wenn man beachtet, dass

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v} = \cos v + e \frac{r}{p}$$

ist, auch:

$$\left. \begin{aligned} \delta \Phi &= - p \cos (v + \pi) R + \{ (p + r) \sin (v + \pi) + r \Phi \sin i'' \} S + \\ &\quad + r \sin u (\tan \frac{1}{2} i \Psi \sin i'') W \\ \delta \Psi &= p \sin (v + \pi) R + \{ (p + r) \cos (v + \pi) + r \Psi \sin i'' \} S - \\ &\quad - r \sin u (\tan \frac{1}{2} i \Phi \sin i'') W . \end{aligned} \right\} \quad 34)$$

Die durch die Formeln 33) und 34) eingeführten Variationen der Elemente können in der That praktische Bedeutung erlangen, wiewohl die unten angegebene Methode der Anwendung der Formeln 32) derartig beschaffen ist, dass wohl kaum je die Nothwendigkeit eintreten wird, von diesen Abänderungen Gebrauch zu machen.

So einfach die Sache vorstehend sich gestaltet hat, um für sehr nahe kreisförmige Bahnen und für sehr geringe Neigungen die obigen Formeln in geeignete Ausdrücke umzugestalten, um so schwieriger wird das Problem, wenn es sich um nahezu parabolische Bahnen handelt, und man wird sich hierbei leicht überzeugen können, dass die Variation der Constanten in Folge der Discontinuität des Elementes a für parabolische Bahnen überhaupt nicht mit Vortheil angewendet werden kann und gerade hier die früher zum Vortrag gebrachten Methoden, die die Variation der Coordinaten ermitteln, den Vorzug verdienen. Ich will aber doch hier zeigen, wie man den Nachtheil, so weit als thunlich, beheben kann.

Führt man statt der Störung der mittleren Länge die Störung der Perihelzeit T , und statt der Störung der mittleren täglichen siderischen Bewegung die Störung der Periheldistanz q ein, so erhält man die Störungen in den Elementen ausgedrückt, die sonst bei nahezu parabolischen Bahnen angewendet werden.

Bildet man zuerst die Variation von M , so ist zunächst:

$$\begin{aligned} M &= L - \pi \\ \delta M &= \delta L - \delta \pi \end{aligned}$$

und die Verbindung der entsprechenden Ausdrücke in 32) (pag. 222) ergibt:

$$\delta M = \{-2r \cos q + p \cos v \cotg q\} R - (r+p) \sin v \cotg q S \quad 35)$$

da

$$\operatorname{cosec} q - \tan \frac{1}{2} q = \cotg q$$

ist. Der hier für δM gefundene Ausdruck enthält die vollständige Variation von M nach τ ; denn variirt man den Ausdruck 16) (pag. 218) nach der Zeit τ , so sieht man sofort, dass das von der Zeit t abhängige Doppelintegral verschwindet; nun ist aber:

$$M = (t - T) \mu$$

oder:

$$T = t - \frac{M}{\mu}$$

also, wenn man nach τ variirt:

$$\delta T = -\frac{\delta M}{\mu} + \frac{M}{\mu^2} \delta \mu = -\frac{a^{\frac{3}{2}}}{k} \delta M + \frac{t-T}{\mu} \delta \mu.$$

Substituirt man nun die Variationen von M und μ nach den Gleichungen 35) und 32), so erhält man nach einigen leichten Reductionen und Einführung der Grösse e statt $\sin q$:

$$\left. \begin{aligned} \delta T &= \frac{a \sqrt{p}}{k} \left\{ 2r - \frac{p \cos v}{e} - \frac{3k(t-T)}{\sqrt{p}} e \sin v \right\} R \\ &+ \frac{a \sqrt{p}}{k} \left\{ \frac{(r+p)}{e} \sin v - \frac{3k(t-T)}{r} \sqrt{p} \right\} S. \end{aligned} \right\} \quad 36)$$

Zur Ermittlung der Variation von q hat man, ausgehend von den Gleichungen:

$$q = \frac{p}{1+e} = a(1-e), \quad \mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$\delta q = (1-e) \delta a - a \delta e = -\frac{2}{3}(1-e) \frac{a^{\frac{5}{2}}}{k} \delta \mu - a \cos \varphi \delta \varphi.$$

In diesem Ausdrucke nun hat man die Variationen von μ und φ aus 32) (pag. 222) einzuführen, durch deren Substitution man zunächst findet:

$$\delta q = \{2 \sin \varphi (1 - \sin \varphi) - \cos \varphi^2\} a^2 \sin v R + \{2(1-e) \frac{p}{r} - \cos \varphi^2 (\cos v + \cos E)\} a^2 S;$$

berücksichtigt man die Relationen:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$$

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v},$$

so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$\delta q = -q^2 \sin v R + \frac{q^2}{1 + e \cos v} \{2(1 - \cos v) + e \sin v^2\} S$$

oder schliesslich:

$$\delta q = -q^2 \sin v R + \frac{4qr \sin \frac{1}{2} v^2}{1+e} \{1 + e \cos \frac{1}{2} v^2\} S. \quad (37)$$

Die Berechnung des Ausdruckes 37) bietet keine Schwierigkeit, anders jedoch verhält es sich mit dem Ausdrucke 36); der Factor a zeigt sofort an, dass der Klammerausdruck nothwendig nahe gleich Null sein muss für nicht allzuweit vom Perihel gelegene Epochen; für die Parabel wird derselbe in der That, wie dieses eine einfache Substitution zeigt, die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ annehmen. Dieser Nachtheil lässt sich aber leicht umgehen mit Hilfsmitteln, die später bei der Entwicklung der Differentialquotienten für nahezu parabolische Bahnen abgeleitet werden; ich weise in den folgenden Zeilen nur kurz auf dieselben hin, da, wie schon oben erwähnt, nach meiner Ansicht, die Methode der Variation der Constanten für die Ermittlung der Störungen in nahezu parabolischen Bahnen nicht sehr geeignet ist und die Methoden der Coordinatenstörungen den Vorzug verdienen. Es werden an dem angeführten Orte die Differentialquotienten von $\frac{dr}{de}$ und $\frac{dr}{dv}$ in strenge und für die Rechnung bequeme Ausdrücke übergeführt. Setzt man nämlich:

$$\theta = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2$$

und entlehnt mit diesem Argumente aus der Tafel XVI die Coëfficienten E_2^v , E_4^v , E_0^r und E_4^r , so ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{de} &= \frac{\sin v \cos \frac{1}{2} v^2}{2(1+e)} \{1 + E_2^v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 + E_4^v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4\} \\ \frac{dr}{de} &= \frac{r \sin v^2}{4(1+e)} \{E_0^r + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 + E_4^r \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4\} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

andererseits ist die ursprüngliche Form dieser Differentialquotienten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{de} &= \left\{ \left(1 + \frac{p}{r}\right) \sin v - \frac{3}{2} \frac{k(t-T)}{r^2} (1+e) \sqrt{p} \right\} \frac{1}{1-e^2} \\ \frac{dr}{de} &= \left\{ r - q \cos v - \frac{3}{2} \frac{k(t-T)}{\sqrt{p}} e \sin v \right\} \frac{1}{1-e} \end{aligned} \right\} \quad 39)$$

Beachtet man die Relationen:

$$a = \frac{q}{1-e}, \quad p = q(1+e), \quad \frac{1+e}{2e} = 1 + \frac{1-e}{2e}$$

so wird man leicht den Ausdruck 36) (pag. 224) auf die Form bringen können:

$$\delta T = \frac{2q^{\frac{3}{2}}}{k} \sqrt{1+e} \left\{ \frac{dr}{de} - \frac{q \cos v}{2e} \right\} R + \frac{2q^{\frac{3}{2}}}{k} \sqrt{1+e} \left\{ r \frac{dv}{de} + \frac{(r+p) \sin v}{2e(1+e)} \right\} S \quad 40)$$

welche ohne Schwierigkeit das vorgesteckte Ziel erreichen lässt, wenn man beachtet, dass die Berechnung der auftretenden Differentialquotienten nach 38) (pag. 225) leicht ausgeführt werden kann.

§ 2. Berechnung der Coordinaten und der störenden Kräfte.

Die Berechnung der störenden Kräfte kann hier ganz kurz vorgenommen werden, indem auf den § 3 bei Hansen-Tietjen's Methode (pag. 156) hingewiesen werden kann, und hier nur die geringen Abänderungen berührt werden, die durch die etwas abweichenden Vorschriften geboten sind.

Man bedarf der Kenntniss der störenden Kräfte in der Richtung des Radius-vectors, senkrecht auf diesen in der Bahnebene im Sinne der Bewegung und endlich in der auf der Bahnebene senkrechten Richtung. Legt man demnach ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Sonnenmittelpunkte liegt, so, dass die positive X-Achse mit dem Radiusvector und die X Y-Ebene mit der Bahnebene zusammenfällt, und zählt die Y- und Z-Coordinaten in der bereits festgestellten Weise (vergl. pag. 213), so transformiren sich die Summen der angreifenden Kräfte nach pag. 213 in:

$$\begin{aligned} \Sigma k^2 m_1 \left\{ \frac{\xi_1 - r}{q^3} - \frac{\xi_1}{r_1^3} \right\} &= R_0 \\ \Sigma k^2 m_1 \left\{ -\frac{\eta_1}{q^3} - \frac{\eta_1}{r_1^3} \right\} &= S_0 \\ \Sigma k^2 m_1 \left\{ -\frac{\zeta_1}{q^3} - \frac{\zeta_1}{r_1^3} \right\} &= W_0 \end{aligned}$$

oder wenn man:

$$\frac{1}{q^3} - \frac{1}{r_1^3} = K$$

setzt, die Relation 31) (pag. 222) berücksichtigt und w als Zeiteinheit annimmt, so erhält man:

$$R = \Sigma \frac{(wk)}{\sqrt{p}} m_1 \left\{ \xi_1 K - \frac{r}{q^3} \right\} \quad | \quad 1)$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \Sigma \frac{(wk)}{\sqrt{\rho}} m_1 \eta_1 K \\ W &= \Sigma \frac{(wk)}{\sqrt{\rho}} m_1 \zeta_1 K. \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

Hierbei wird man k in Bogensekunden ansetzen, um die Störungen der Elemente in Bogensekunden zu erhalten. Die Werthe für (wk'') m_1 finden sich unter der Annahme $w = 40$ für die einzelnen Planeten in der Tafel XII aufgenommen.

Die Bestimmung der Coordinaten ξ_1 , η_1 und ζ_1 unterliegt keinen Schwierigkeiten. Sind nämlich die heliocentrischen Längen λ_0' und Breiten β_0' (vergl. pag. 82) des störenden Himmelskörpers bezogen auf das gewählte fixe Aequinoctium gegeben, so hat man, wenn man die Formeln 2), 3) und 4) pag. 157 vergleicht, zu rechnen:

$$\begin{aligned} q \sin Q &= \sin \beta_0' \\ q \cos Q &= \cos \beta_0' \sin (\lambda_0' - \Omega) \\ \cos B_1 \cos L_1 &= \cos \beta_0' \cos (\lambda_0' - \Omega) \\ \cos B_1 \sin L_1 &= q \cos (Q - i_0) \\ \sin B_1 &= q \sin (Q - i_0) \\ \xi_1 - r &= q \cos \vartheta \cos \Theta = r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l) - r \\ \eta_1 &= q \cos \vartheta \sin \Theta = r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l) \\ \zeta_1 &= q \sin \vartheta = r_1 \sin B_1, \end{aligned}$$

wobei offenbar:

$$l = v + w$$

sein wird (vergl. IVb pag. 144).

Mit Hilfe dieser Formeln ist es leicht mit strenger Berücksichtigung des Ortes des störenden Planeten die störenden Kräfte zu ermitteln. Die zweite früher angegebene Form (pag. 158 ff.) mit Hilfe der Grösse B_0 die Coordinaten des störenden Planeten zu berechnen, bietet in dem vorliegenden Falle keinen Vortheil, weil wegen der Veränderlichkeit der Grössen i und Ω die Berechnung der Grössen Φ , Ψ und J von Fall zu Fall vorgenommen werden müsste.

Indem die Zusammenstellung der Formeln auf den nächstfolgenden Paragraphen verwiesen wird, in welchem dieselben an der Hand eines Beispieles erläutert werden sollen, mögen hier noch einige Bemerkungen eingeschaltet werden.

Man wird die Rechnung nach den obigen Formeln für jeden der störenden Planeten durchzuführen haben; dann kann man entweder die Summen der Kräfte für dieselben Coordinaten bilden und mit diesen Summen nach den Formeln 32) (pag. 222) die Variationen der Elemente bilden, oder, man bildet für jeden einzelnen Planeten, ohne die Summirung auszuführen, die Variationen der Elemente, und summirt erst die letzteren nachträglich. Das letztere Verfahren erfordert zwar eine gewisse Mehrarbeit, scheint aber Vortheile zu bieten, wenn man die berechneten Störungswerthe allenfalls wegen Correctionen der Planetenmassen verbessern will. Ich gebe daher dem zweiten Verfahren stets den Vorzug. In diesem Umstande, ohne erhebliche Mühe die Wirkungen der einzelnen Planeten gesondert

berechnen zu können, liegt ein grosser Vortheil der Methode der Variation der Constanten, gegenüber der Methode, die Störungen der Coordinaten zu ermitteln.

Die Störungen in den Elementen Ω , i , π und L sind von der Lage der gewählten Fundamentalebene abhängig und werden gewissen Veränderungen unterworfen sein, sobald man dieselbe ändert, also wenn das fixe Aequinoctium auf eine andere Epoche übertragen wird, welche Uebertragung nach einem Zeitraume von 10 Jahren nöthig ist, wenn man die Angaben des Berliner Jahrbuches mit der möglichsten Bequemlichkeit in Anwendung ziehen will.

An sich werden die ungestörten Elemente (Ω_0 , i_0 , π_0 und L_0) durch diese Aequinoctialänderung beeinflusst; diese Aenderung kann aber leicht nach den bei der Präcession entwickelten Formeln (I, 81) in Rechnung gezogen werden; dem Umstande aber, dass im Momente der Uebertragung die Elemente die Werthe Ω , i , π und L haben, welche Werthe dadurch erhalten werden, dass man zu den ungestörten Werthen die durch die Störungsrechnung ermittelten Incremente hinzufügt, würde dadurch Rechnung getragen werden können, dass man zur Berechnung des Einflusses der Präcession auf die Elemente die durch die Störungen veränderten Elemente verwendet. Ausserdem müssten bei völliger Strenge die Integrationsconstanten eine geringe Abänderung erfahren, weil die Differenzwerthe an der Uebertragungsstelle selbst Functionen der Lage des Aequinoctiums und der Grösse der Störungen sind; doch ist der Einfluss dieser Correction, wie dieses eine einfache Ueberlegung zeigt, so gering, dass sie selbst für die schärfsten Rechnungen ohne Bedenken übergangen werden darf; ich werde daher auf diesen Umstand weiter keine Rücksicht nehmen.

Dieses eben angedeutete Verfahren ist aber nicht ganz bequem, indem man zur Bestimmung sehr kleiner Correctionen die Differenzen verhältnissmässig grosser Zahlen verwerten muss. Ueberdies wird gewöhnlich der Einfluss der Präcession auf die ungestörten Elemente ein für allemal durch eine einmalige scharfe Rechnung nach Potenzen der Zeit entwickelt sein; es wird daher zweckmässig erscheinen, nur jene Correctionen zu berechnen, welche durch den Einfluss der Störungen in diesen Werthen entstehen und dieselben an der Stelle der Aequinoctialänderung mit den betreffenden Differentialquotienten zu vereinigen. Differentiirt man daher die I pag. 81 gegebenen Ausdrücke nach den Elementen Ω und i , indem man nur die Glieder erster Ordnung mitnimmt und bezeichnet die Störungen zur Zeit der Aequinoctialänderung mit $\Delta\Omega$ und Δi , so erhält man sofort, wenn man $\Delta\Omega$ und Δi in Bogensekunden angesetzt nimmt:

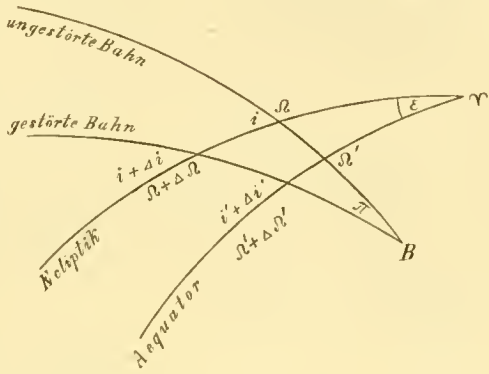
$$\begin{aligned}\delta \Delta\Omega &= \cotg i_0 \cos (\Omega_0 - \Pi) \pi \Delta\Omega \sin 1'' - \frac{\sin (\Omega_0 - \Pi)}{\sin i_0^2} \pi \Delta i \sin 1'' \\ \delta \Delta L &= \delta \Delta\pi = - \tan g \frac{1}{2} i_0 \cos (\Omega_0 - \Pi) \pi \Delta\Omega \sin 1'' - \frac{\sin (\Omega_0 - \Pi)}{2 \cos \frac{1}{2} i_0^2} \pi \Delta i \sin 1'' \\ \delta \Delta i &= \sin (\Omega_0 - \Pi) \pi \Delta\Omega \sin 1'',\end{aligned}$$

wobei die Werthe für Π und π für die entsprechende Epoche und das Intervall nach I pag. 81 anzunehmen sind.

Hierbei wäre nur noch zu bemerken, dass, wenn im Verlaufe der Rechnung

eine solche Uebertragung bereits stattgefunden hat, man von dem Resultate der zweiten Uebertragung das der ersten in Abzug bringen muss, oder man ermittelt die vorstehenden Correctionen dadurch, dass man für $\mathcal{I}\Omega$ und $\mathcal{I}i$ die Incremente der Störungen innerhalb des Zeitintervalles zwischen der ersten und zweiten Uebertragung allein in Rechnung zieht; ähnlich wird man bei allen folgenden Uebertragungen vorzugehen haben.

Die Störungen beziehen sich der gemachten Voraussetzung nach auf die Ekliptik; es kann aber unter Umständen erwünscht sein, dieselben auf den Aequator zu übertragen. Die strenge Lösung gestaltet sich, wie folgt: Nennt man die Länge des aufsteigenden Knotens der gestörten Bahn in der ungestörten H , die Neigung π , so wird das sphärische Dreieck $\Omega B \Omega + \mathcal{I}\Omega$ haben:



die Seiten	die Winkel
$\mathcal{I}\Omega$	π
$180 - \mathcal{I}\Psi$	$180 - i$
$180 - H$	$i + \mathcal{I}i$

wobei $\mathcal{I}\Psi$ die Länge des absteigenden Knotens der ungestörten Bahn in der gestörten bezeichnet. Die hier auftretenden Grössen π und H sind nicht mit den obigen gleich bezeichneten Präcessionsgrössen zu verwechseln.

Aus diesem Dreiecke ergeben sich nun die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \pi \sin \frac{1}{2} (\mathcal{I}\Psi + H) &= \sin \frac{1}{2} \mathcal{I}\Omega \sin (i + \frac{1}{2} \mathcal{I}i) \\ \sin \frac{1}{2} \pi \cos \frac{1}{2} (\mathcal{I}\Psi + H) &= \cos \frac{1}{2} \mathcal{I}\Omega \sin \frac{1}{2} \mathcal{I}i \\ \cos \frac{1}{2} \pi \sin \frac{1}{2} (H - \mathcal{I}\Psi) &= \sin \frac{1}{2} \mathcal{I}\Omega \cos (i + \frac{1}{2} \mathcal{I}i) \\ \cos \frac{1}{2} \pi \cos \frac{1}{2} (H - \mathcal{I}\Psi) &= \cos \frac{1}{2} \mathcal{I}\Omega \cos \frac{1}{2} \mathcal{I}i \end{aligned} \right\} 1)$$

Von diesen Grössen werden in der weiteren Entwicklung die Werthe von π , H und $H - \mathcal{I}\Psi$ gebraucht; die Werthe von π und $H - \mathcal{I}\Psi$ werden selbst bei Anwendung kleiner logarithmischer Tafeln mit grosser Genauigkeit erhalten werden, da beide Winkel nur von der Ordnung der Störungen sind.

Betrachtet man das sphärische Dreieck $B\Omega'(\Omega' + \mathcal{I}\Omega')$, so sind in demselben bekannt die Winkel $180 - i'$ und π , ferner die Seiten $B\Omega' = 180 - H - \sigma$, wobei σ den Bogen $\Omega\Omega'$ vorstellt, welcher Bogen aus der einmaligen strengen Uebertragung der ekliptikalen Elemente in die äquatorealen (I pag. 9) bekannt ist; zu ermitteln sind $\mathcal{I}\Omega'$, $\mathcal{I}i'$ und $\mathcal{I}\omega'$.

Letztere Grösse setzt sich aus mehreren Correctionen zusammen; ist ϱ der Bogen $(\Omega + \mathcal{I}\Omega)(\Omega' + \mathcal{I}\Omega')$, so ist, wenn der Index 0 für die ungestörte, der Index 1 für die gestörte Bahn angenommen wird:

$$\begin{aligned} \omega_0' &= \omega_0 + \sigma \\ \omega_1' &= \omega_1 + \varrho; \end{aligned}$$

daraus folgt:

$$A\omega' = A\omega + \varrho - \sigma$$

und:

$$\varrho - \sigma = (\psi + \varrho) - (\Pi + \sigma) + (\Pi - \psi)$$

in welcher Relation $\psi + \varrho$ vorerst unbekannt ist. Das oben erwähnte sphärische Dreieck ergibt aber:

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2} (\psi + \varrho - A\Omega') &= \frac{\sin \frac{1}{2} (i' - \pi)}{\sin \frac{1}{2} (i' + \pi)} \tan \frac{1}{2} (\Pi + \sigma) \\ \tan \frac{1}{2} (\psi + \varrho + A\Omega') &= \frac{\cos \frac{1}{2} (i' - \pi)}{\cos \frac{1}{2} (i' + \pi)} \tan \frac{1}{2} (\Pi + \sigma) . \end{aligned}$$

Die Berechnung dieser Ausdrücke würde bei der fast nothwendigen Kleinheit von π sehr beschwerlich sein. Ist aber π klein, so wird man mit Vortheil die folgende Reihe anwenden dürfen (vergl. I pag. 27 und 28). Hat man nämlich Ausdrücke von der Form:

$$\tan \varphi' = n \tan \varphi ,$$

so ist:

$$\varphi' - \varphi = \frac{n-1}{n+1} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \sin 4\varphi + \frac{1}{3} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^3 \sin 6\varphi + \dots$$

Ersetzt man nun die beiden obigen Gleichungen durch diese Reihe und schreibt vorerst:

$$\left. \begin{aligned} - \tan \frac{1}{2} \pi \cotg \frac{1}{2} i' &= a \\ \tan \frac{1}{2} \pi \tan \frac{1}{2} i' &= b \end{aligned} \right\} \text{ II)}$$

so wird man berechnen:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{a}{\sin i''} \sin (\Pi + \sigma) + \frac{a^2}{2 \sin i''} \sin 2 (\Pi + \sigma) + \frac{a^3}{3 \sin i''} \sin 3 (\Pi + \sigma) + \dots \\ B &= \frac{b}{\sin i''} \sin (\Pi + \sigma) + \frac{b^2}{2 \sin i''} \sin 2 (\Pi + \sigma) + \frac{b^3}{3 \sin i''} \sin 3 (\Pi + \sigma) + \dots \end{aligned} \right\} \text{ III)}$$

woraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} A\omega' &= A\omega + (A+B) + (\Pi - \psi) \\ A\Omega' &= (B-A) \end{aligned} \right\} \text{ IV)}$$

Das eben betrachtete sphärische Dreieck gibt aber auch:

$$\tan \frac{1}{2} A i' = \frac{\cos \{ (\Pi + \sigma) + \frac{1}{2} (A+B) \}}{\cos \frac{1}{2} (A+B)} \tan \frac{1}{2} \pi . \quad \text{V)}$$

Die Gleichungen I), II), III), IV) und V) enthalten die strenge Auflösung des Problems; will man aber nur die ersten Potenzen der Aenderungen mitnehmen, was meistens ausreicht, weil die bei den Planeten meist kleinen Störungen der Bahnlage nur in Betracht kommen, so werden die Ausdrücke weit einfacher und man erhält leicht aus den voranstehenden Formeln durch diese Abkürzung:

$$\left. \begin{aligned} \pi \sin \Pi &= A\Omega \sin i \\ \pi \cos \Pi &= Ai \\ \Pi - \psi &= A\Omega \cos i \end{aligned} \right\} \text{ Ia)}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \omega' &= \Delta \omega - \frac{\pi \sin (II + \sigma)}{\tan g i'} + (II - \psi) \\ \Delta \Omega' &= \frac{\pi \sin (II + \sigma)}{\sin i'} \\ \Delta i' &= \pi \cos (II + \sigma) . \end{aligned} \right\} \text{Ia)}$$

Will man den Ort eines Himmelskörpers mit den Elementen unter Berücksichtigung der Störungen vergleichen, so wird man sich erst aus den Integraltafeln die Störungen der Elemente ableiten und mit diesen gestörten Elementen den Ort des Himmelskörpers berechnen. Hierbei können die Formeln Ia), wenn die Coordinaten des Planeten sich auf den Aequator beziehen, und die Vergleichung mehrmals mit veränderten Elementen aber unveränderten Störungen vorgenommen werden muss, zur Abkürzung der Rechnung nützlich sein.

Hat man aber eine Ephemeride zu rechnen, und hat dieselbe keine allzugrosse Ausdehnung, so kann man mit den beiläufig für die Mitte der Zeit osculirenden Elementen dieselbe ableiten, ohne weiter auf Störungen Rücksicht zu nehmen; hat die Ephemeride aber eine grössere Ausdehnung und will man dieselbe strenge den Beobachtungen anschliessen, so kann man ganz zweckmässig sich für die Ermittlung dieser Störungen der Eneke'schen Methode bedienen, indem man von der gewählten Osculationsepoche, die der Mitte der Zeit nahe entsprechen soll, ausgeht; es führt diese Methode in diesem Falle auf eine sehr kurze Rechnung, da man selbst für Ephemeriden, die sich auf ein halbes Jahr erstrecken, mit der Doppelintegration der directen Glieder ausreichend genaue Resultate erhält und die indirecten Glieder ganz unberücksichtigt lassen kann.

§ 3. Rechnungsbeispiel zur Variation der Constanten.

Ich werde wieder, um die voranstehenden Entwicklungen durch ein Beispiel zu erläutern, die Störungen ermitteln, welche der Planet ⁽⁶²⁾ Erato durch die Anziehung der Planeten Jupiter und Saturn erleidet, und zwar innerhalb desselben Intervalles und mit Annahme derselben Elemente, die zur Ermittlung der Störungen nach den rechtwinkligen und polaren Coordinaten gedient haben; es werden damit neue Gesichtspunkte zur Beurtheilung der verschiedenen Methoden gewonnen. Indem ich wieder betreffs der Wahl des Intervalles, des fixen Aequinoctiums etc. auf die bei der Eneke'schen Methode gemachten allgemeinen Bemerkungen verweise, führe ich nochmals die der Störungsrechnung zu Grunde gelegten Elemente hier an.

(62) Erato

Epoche und Osculation 1874 Decbr. 26,0 mittlere Berliner Zeit.

mittl. Aeq. 1870,0

$L = 219^{\circ} 8' 6''8$

$M = 180 40 48.9$

$$\kappa = 38^{\circ}27'17''9$$

$$\Omega = 125\ 42\ 39.7$$

$$i = 2\ 12\ 23.9$$

$$\varphi = 9\ 59\ 14.9$$

$$\mu = 640''89605$$

$$\log a = 0.4954793.$$

Das Zeitintervall w für die Störungsrechnung mit 40 Tagen annehmend, wird im Beginn der Rechnung für zwei der Osculationsepoche vorangehende und nachfolgende Orte die Variation der Elemente unter Annahme der obigen constanten Elemente auf einem Nebenblatte berechnet. Die in Betracht kommenden Zeitepochen der Rechnung sind also für diese 4 Orte:

1874 Oct. 27, Dec. 6, 1875 Jan. 15 und Febr. 24.

Die Rechnung wird ganz nach den weiter unten folgenden Vorschriften ausgeführt, nur werden jene vorbereitenden Rechnungen, die die Elemente, den Störungen entsprechend, variiren, fortgelassen; es entstehen auf diese Art Fehler zweiter Ordnung in Bezug auf die störenden Massen, welche übrigens bei der Nähe der Osculationsepoche als völlig verschwindend betrachtet werden können, umsomehr, da diese so gewonnenen Werthe erst der definitiven Rechnung zu Grunde gelegt werden, also Fehler dritter Ordnung veranlassen.

Mit diesen provisorischen Werthen der Elementenänderungen:

$$w \left(\frac{di}{dt} \right), w \left(\frac{d\Omega}{dt} \right), w \left(\frac{dL}{dt} \right), w \left(\frac{d\pi}{dt} \right), \dot{w} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right), w^2 \left(\frac{d\mu}{dt} \right)$$

für die obigen vier Orte bildet man für die sechs Elemente einzeln die einfach summirten Reihen und bestimmt die Anfangsconstanten so, dass die einfachen Integrale für die Osculationsepoche verschwinden; man hat hierfür (vergleiche pag. 35):

$${}^1f(a - \tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{24} {}^1f'(a - \tfrac{1}{2}w) + \tfrac{17}{5760} {}^1f''(a - \tfrac{1}{2}w) - \dots$$

Für das letzte Element wird man eine Doppelintegration auszuführen haben und man wird als Anfangsconstante für die Bildung der zweiten summirten Reihe den Werth

$${}^11f(a) = \tfrac{1}{24} {}^1f(a-w) - \tfrac{17}{5760} \{ 2 {}^11f(a-w) + {}^11f(a) \} + \dots$$

annehmen (vergl. pag. 53).

Nunmehr ergeben sich die einfachen und Doppel-Integrale für die vier oben genannten Zeitepochen mit genügender Genauigkeit durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \int_{a+iv} f(x) dx &= {}^1f(a+iv) - \tfrac{1}{12} {}^1f'(a+iv) \\ \iint_{a+iv} f(x) dx^2 &= {}^11f(a+iv) + \tfrac{1}{12} {}^1f(a+iv) \end{aligned}$$

Indem man diese so gewonnenen Incremente zu den constanten Elementen hinzufügt, wobei zu beachten ist, dass man für die Störung der täglichen mittleren siderischen Bewegung den w -fachen Betrag (hier den 40-fachen Betrag) erhält und überdiess setzt:

$$L = L_0 + \mu_0 t + \int \left(\frac{dL}{dt} \right) dt + \iint \left(\frac{d\mu}{dt} \right) dt^2$$

erhält man die für die obigen Zeitepochen osculirenden Elemente, die nun der definitiven Rechnung zu Grunde gelegt werden, wobei eventuell schliesslich eine Neubestimmung der Anfangsconstanten der Integrale vorgenommen werden kann.

Ist die Rechnung einmal im Gange, so werden, je nachdem dieselbe nach vorwärts oder nach rückwärts fortschreitet, aus den bekannten Differenz- und Summenwerthen leicht die für das nächste Intervall geltenden Störungsgrössen ermittelt werden nach den Formeln (vergl. pag. 68):

für die Rechnung nach vorwärts:

$$\begin{aligned} \int_{a+[i-1]w}^{a+[i+1]w} f(x) dx = & f(a+[i+\frac{1}{2}]w) + \frac{1}{2}f(a+iw) + \frac{1}{24} \left[10f'(a+[i-\frac{1}{2}]w) + \right. \\ & \left. + 9f''(a+[i-1]w) + 8f'''(a+[i-\frac{3}{2}]w) + 7f^{iv}(a+[i-2]w) + \dots \right] \end{aligned}$$

für die Rechnung nach rückwärts:

$$\begin{aligned} \int_{a+[i-1]w}^{a+[i+1]w} f(x) dx = & f(a+[i+\frac{1}{2}]w) - \frac{1}{2}f(a+iw) + \frac{1}{24} \left[10f'(a+[i+\frac{1}{2}]w) - \right. \\ & \left. - 9f''(a+[i+1]w) + 8f'''(a+[i+\frac{3}{2}]w) - 7f^{iv}(a+[i+2]w) + \dots \right] \end{aligned}$$

Die Bestimmung des Incrementes von μ entspricht hier natürlich wieder dem w -fachen Betrage.

Für das Doppelintegral hat man zunächst zu ermitteln:

für die Rechnung nach vorwärts:

$$f(a+[i+1]w) = f(a+iw) + f'(a+[i+\frac{1}{2}]w) + f''(a+[i-1]w) + f'''(a+[i-\frac{3}{2}]w) + \dots$$

für die Rechnung nach rückwärts:

$$f(a+[i-1]w) = f(a+iw) - f'(a+[i+\frac{1}{2}]w) + f''(a+[i+1]w) - f'''(a+[i+\frac{3}{2}]w) + \dots$$

und hat dann mit genügender Annäherung:

$$\iint_{a+[i\pm 1]w}^{a+[i\pm 1]w} f(x) dx^2 = f(a+[i\pm 1]w) + \frac{1}{12} f'(a+[i\pm 1]w)$$

Dann ist:

$$L = L_0 + \mu_0 t + \int \left(\frac{dL}{dt} \right) dt + \iint \left(\frac{d\mu}{dt} \right) dt^2$$

wobei man, da $L_0 + \mu_0 t$ von den Störungen unabhängig ist, die Rechnung dieser Grösse gleich im Beginne der Störungsrechnung für den ganzen Verlauf derselben erledigen kann.

Ich entlehne zur Erläuterung dieser Formeln aus dem unten folgenden ausführlichen Beispiele die Bestimmung der Störungen der Elemente für 1871 Dec. 16, wobei vorausgesetzt ist, dass die Rechnung nach rückwärts geführt werde und bis 1872 Januar 25 fortgesetzt sei. Die in Betracht kommenden völlig bekannten Summen- und Differenzwerthe, die ich der Deutlichkeit halber hier aus dem später folgenden Rechnungsschema herausschreibe und, was vollkommen genügt, auf zwei Decimalstellen abkürze, sind also:

	μ	L	π	q	Ω	i
${}^{11}f(a + [i - 1]w)$	+ 9'52"45	—	—	—	—	—
$f(a + [i - \frac{1}{2}]w)$	+ 5"72	+ 21'12"37	- 51'0"45	- 12'21"20	+ 6'8"76	+ 5"80
$f(a + iw)$	— 6.23	— 6.22	+ 159.20	+ 14.23	— 0.60	+ 0.10
$f^I(a + [i + \frac{1}{2}]w)$	— 0.92	— 7.21	+ 30.68	+ 0.93	+ 0.39	0.00
$f^{II}(a + [i + 1]w)$	+ 0.13	— 2.14	— 1.25	— 0.20	— 0.06	— 0.02
$f^{III}(a + [i + \frac{3}{2}]w)$	+ 0.10	— 0.15	— 2.70	+ 0.24	— 0.22	— 0.01
$f^{IV}(a + [i + 2]w)$	+ 0.02	+ 0.25	— 0.42	+ 0.12	— 0.08	
$f^V(a + [i + \frac{5}{2}]w)$	— 0.02	+ 0.15	+ 0.42			

Nach der oben angesetzten Formel findet sich für $f(a + [i - 1]w)$ der Werth — 5"24 und hiermit für 1871 Dec. 16

$$(\mathcal{A}L)_2 = \iint \left(\frac{d\mu}{dt} \right) dt^2 = + 9'52"0.$$

Für die einfache Integration findet sich der Reihe nach, wenn man den Klammerausdruck

$$10 f^I(a + [i + \frac{1}{2}]w) - 9 f^{II}(a + [i + 1]w) + 8 f^{III}(a + [i + \frac{3}{2}]w) - \dots$$

mit γ bezeichnet:

	$40 \mathcal{A}\mu$	$(\mathcal{A}L)_1$	$\mathcal{A}\pi$	$\mathcal{A}q$	$\mathcal{A}\Omega$	$\mathcal{A}i$
$f(a + [i - \frac{1}{2}]w)$	+ 5"72	+ 21'12"37	- 51'0"45	- 12'21"20	+ 6'8"76	+ 5"80
$-\frac{1}{2}f(a + iw)$	+ 3.11	+ 3.11	- 119.60	- 7.11	+ 0.30	- 0.05
$+\frac{1}{24}\gamma$	- 0.41	— 2.29	+ 12.58	+ 0.51	+ 0.13	
	+ 8"42	+ 21'13"2	- 52'7"5	- 12'27"8	+ 6'9"2	+ 5"8

Hieraus folgt für $\mathcal{A}\mu$ der Werth + 0"210 und ausserdem für

$$L = \begin{cases} L_0 + \mu_0 t = 87^{\circ}23'43"7 \\ + (\mathcal{A}L)_1 = + 21'13"2 \\ + (\mathcal{A}L)_2 = + 9'52"0; \end{cases}$$

dennach sind die Elemente, die man zur Berechnung der Störungen für 1871 Dec. 16 anzuwenden hat:

L	87°54'48"9
π	37 35 10.4
q	9 46 47.1
Ω	125 48 48.9
i	2 12 29.7
μ	641"106

Dieses hier auseinandergesetzte Verfahren weicht von dem sonst hierbei üblichen ab; man liess die Elemente gewöhnlich durch mehrer Intervalle unverändert. Man wird sich aber, wenn man einmal an den hier vorgeschlagenen Rechnungsmechanismus gewöhnt ist, bald überzeugen, dass keine wesentliche Mehrarbeit aus dieser Modification entsteht, insbesondere, wenn man beachtet, dass man bei der älteren Methode, um sich vor constanten Fehlern zu schützen, häufig genug den Anschlussort doppelt rechnen muss. Zudem erreicht man mit der hier vorgeschlagenen Methode den Vortheil, dass man frei wird von Sprüngen im Gange der Functionen, die sonst unvermeidlich sind und das Resultat keineswegs so wenig schädigen, als man es bisher anzunehmen gewohnt war.

Sind die bezüglichen osculirenden Elemente ermittelt, die ich auf dem Bogen, der mit ⑥2 überschrieben ist, in die ersten sechs Zeilen aufnehme, dann kann an die Rechnung der Zerlegungscoëfficienten geschritten werden, die sich auf diesem Bogen erledigt. Die zur Ausführung dieser Rechnung nöthigen Formeln sind mit Rücksicht auf 32) (pag. 222):

$$a^3 = \frac{k''}{\mu} \quad \log k'' = 3.550\ 007$$

$$e'' = \frac{\sin q}{\sin i''} \quad \log \frac{1}{\sin i''} = 5.314\ 425$$

$$M = L - \pi$$

$$E - e'' \sin E = M$$

$$r \sin v = a \cos q \sin E$$

$$r \cos v = a (\cos E - \sin q)$$

$$w = \pi - \Omega$$

$$u = v + w$$

$$p = a \cos q^2$$

$$\{i : W\} = r \cos u$$

$$\{\Omega : W\} = \frac{r \sin u}{\sin i}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu : R \\ \mu : S \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{l} \frac{3kw}{\sqrt{a}} \sin q \sin v \\ \frac{3kw}{\sqrt{a}} \cdot \frac{p}{r} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} w \text{ das Intervall in Tagen; unter} \\ \text{der Annahme } w = 40 \text{ wird:} \end{array} \right\}$$

$$3kw = 0.314763$$

$$\{L : R\} = -p \tan \frac{1}{2} q \cos v - 2r \cos q$$

$$\{L : S\} = (p + r) \sin v \tan \frac{1}{2} q$$

$$\{L : W\} = r \sin u \tan \frac{1}{2} i$$

$$\{\pi : R\} = -\frac{p}{\sin q} \cos v$$

$$\{\pi : S\} = (p + r) \frac{\sin v}{\sin q}$$

$$\{q : R\} = a \cos q \sin v$$

$$\{q : S\} = a \cos q (\cos v + \cos E)$$

Nun beginnt die Rechnung der störenden Kräfte, und es ist jedem der in Rücksicht gezogenen störenden Planeten ein Bogen gewidmet, der als Ueberschrift das Zeichen des betreffenden Planeten trägt.

Bezeichnet

β_0'	die heliocentrische Breite des störenden Planeten	} bezogen auf das fixe Aequi- noctium der Elemente
λ_0'	» » Länge » » »	
r_1	» » Entfernung des störenden Planeten	

und ist m_1 die Masse des störenden Planeten in Einheiten der Sonnenmasse, so hat man für jeden Planeten gesondert zu rechnen:

$$\begin{aligned} q \sin Q &= \sin \beta_0' \\ q \cos Q &= \cos \beta_0' \sin (\lambda_0' - \Omega) \\ \cos B_1 \cos L_1 &= \cos \beta_0' \cos (\lambda_0' - \Omega) \\ \cos B_1 \sin L_1 &= q \cos (Q - i) \\ \sin B_1 &= q \sin (Q - i) \\ \xi_1 &= r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - u) \\ \eta_1 &= r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - u) \\ \zeta_1 &= r_1 \sin B_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q \cos \vartheta \cos \Theta &= \xi_1 - r \\ q \cos \vartheta \sin \Theta &= \eta_1 \\ q \sin \vartheta &= \zeta_1 \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{q^3} - \frac{1}{r_1^3}$$

$$\begin{aligned} R_0 &= K \xi_1 - \frac{r}{q^3} & R &= \left(\frac{w k'' m_1}{\sqrt{p}} \right) R_0 \\ S_0 &= K \eta_1 & S &= \left(\frac{w k'' m_1}{\sqrt{p}} \right) S_0 \\ W_0 &= K \zeta_1 & W &= \left(\frac{w k'' m_1}{\sqrt{p}} \right) W_0 \end{aligned}$$

Die Logarithmen der Werthe $w k'' m_1$ finden sich unter der Annahme $w = 40$ in der Tafel XII. Weiter ist nun:

$$\begin{aligned} \Delta i &= \{ i : W \} W \\ \Delta \Omega &= \{ \Omega : W \} W \\ w \Delta \mu &= \{ \mu : R \} R + \{ \mu : S \} S \\ \Delta L_1 &= \{ L : R \} R + \{ L : S \} S + \{ L : W \} W \\ \Delta \pi &= \{ \pi : R \} R + \{ \pi : S \} S + \{ L : W \} W \\ \Delta \varphi &= \{ \varphi : R \} R + \{ \varphi : S \} S. \end{aligned}$$

Sind die Werthe der Differentialquotienten der Störungen für die einzelnen Planeten bekannt, so werden dieselben summiert, und die Resultate in die Inte-

grationsbogen eingetragen, welche wohl keiner näheren Erklärung bedürfen. Der Ausdruck

$$L_0 + \mu_0 t$$

wurde vor Beginn der Störungsrechnung für alle vorgelegten Intervalle an der betreffenden Stelle eingesetzt.

Schliesslich muss ich noch erwähnen, dass für die vier ersten Orte des hier ausführlich aufgenommenen Rechnungsbeispielen die Störungswerthe einer früheren auf anderen weniger genauen Elementen beruhenden Rechnung entlehnt wurden, welcher Umstand keine wesentlichen Fehler hervorbringen kann; in der That unterscheiden sich die gemachten Annahmen nicht merklich von den definitiven Störungswerthen.

Es wurden angenommen für:

	1875 Febr. 21	1875 Jan. 15	1874 Dec. 6	1874 Oct. 27
$(\Delta L)_1 + (\Delta L)_2$	— 36''2	— 16''7	+ 21''9	+ 1'21''1
$\Delta \mu$	+ 0''347	+ 0''119	— 0''121	— 0''368
$\Delta \pi$	+ 2'39''6	+ 51''1	— 48''9	— 2'20''1
$\Delta \varphi$	+ 1'27''3	+ 30''0	— 30''7	— 1'36''5
$\Delta \Omega$	— 52''4	— 18''4	+ 17''3	+ 1'0''2
Δi	+ 0''2	+ 0''1	0''0	+ 0''1

Ermittelt man mit den Ergebnissen des unten folgenden Beispielen für die Epoche 1871 Sept. 13, d. i. für jenen Zeitpunkt, für welchen bei den früher behandelten Methoden der Störungsrechnung von Encke und von Hansen-Tietjen der Uebergang auf osculirende Elemente gemacht wurde, die Werthe der Störungen, wie sie jetzt durch die Methode der Variation der Constanten erhalten werden und setzt die aus den drei verschiedenen Methoden erhaltenen Störungswerthe zur Vergleichung neben einander, so hat man:

	Encke	Hansen-Tietjen	Variation d. Const.
$L_0 - L_{00}$	+ 0°26'13''36	+ 0°26'13''33	+ 0°26'13''36
$\pi - \pi_0$	— 1° 1' 4''12	— 1° 1' 4''10	— 1° 1' 4''08
$\Omega - \Omega_0$	+ 6'10''36	+ 6'10''24	+ 6'10''27
$i - i_0$	+ 5''44	+ 5''44	+ 5''44
$\varphi - \varphi_0$	— 12'47''91	— 12'47''93	— 12'47''94
$\mu - \mu_0$	+ 0''44353	+ 0''44366	+ 0''44367

Die Uebereinstimmung ist eine sehr befriedigende; dennoch aber zeigt sich die überwiegende Genauigkeit der Hansen-Tietjen'schen Methode gegen die Encke'sche, wenn die Störungen stark anwachsen, denn das für die künftige Uebereinstimmung wichtigste Element $\mu - \mu_0$ ist nach der letzteren Methode fast identisch

mit dem nach der Variation der Constanten sich ergebenden Werthe gefunden worden, während der aus Encke's Methode resultirende Werth schon eine kleine •Abweichung zeigt. Uebrigens ist dieser Fehler nur dem Umstande zuzuschreiben, dass die Rechnung nach Encke's Methode länger fortgesetzt wurde, als es die Grösse der Störungen rathsam erscheinen lässt und man hätte früher auf osculirende Elemente übergehen müssen. Auch hierin zeigt sich ein eminenter Vortheil der Hansen-Tietjen'schen Methode, denn die Störungsrechnung liess sich nach dieser Methode für mehr als 10 Jahre, innerhalb welcher Zeit sich noch einmal die Jupiternähe ereignete, fortführen, ohne dass die Rechnung sehr beschwerlich und unsicher wurde, so dass im Allgemeinen für diese Methode wohl nur erst nach sehr langer Zeit ein Uebergang auf osculirende Elemente nöthig wird.

Ausführliches Beispiel
zur
Methode der Variation
der
Constanten.

Datum	1875		1874					
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	June 29	May 20
μ	641"243	641"015	640"775	640"528	640"280	640"042	639"825	639"641
L	229°48'24"4	222°41'28"0	215°34'50"8	208°28'34"4	201°22'40"8	194°17'10"0	187°12'1"8	180°7'13"9
π	38°29'57"5	38°26'29"0	38°26'29"0	38°24'57"8	38°23'33"3	38°22'13"7	38°20'53"6	38°19'25"1
q	10°0'41"2	9°59'44"9	9°58'44"2	9°57'38"4	9°56'29"8	9°55'20"0	9°54'10"6	9°53'3"9
Ω	125°41'47"3	125°42'21"3	125°42'57"0	125°43'39"9	125°44'23"2	125°45'7"6	125°45'51"5	125°46'33"0
i	2°12'24"1	2°12'24"0	2°12'23"9	2°12'24"0	2°12'24"1	2°12'24"5	2°12'25"0	2°12'25"7
$\frac{1}{2}i$	1°6'12"0	1°6'12"0	1°6'11"9	1°6'12"0	1°6'12"0	1°6'12"2	1°6'12"5	1°6'12"8
$\frac{1}{2}q$	5°0'20"6	4°59'52"4	4°59'22"1	4°58'49"2	4°58'14"9	4°57'40"0	4°57'5"3	4°56'31"9
μ	2.807023	2.806868	2.806705	2.806538	2.806370	2.806208	2.806061	2.805937
$a^{\frac{3}{2}}$	0.742984	0.743139	0.743302	0.743469	0.743637	0.743799	0.743946	0.744070
$a^{\frac{1}{2}}$	0.247661	0.247713	0.247767	0.247823	0.247879	0.247933	0.247982	0.248023
u	0.495323	0.495426	0.495535	0.495646	0.495758	0.495866	0.495964	0.496047
$\cos q$	9.993337	9.993357	9.993379	9.993404	9.993429	9.993455	9.993481	9.993505
$\sin q$	9.240162	9.239490	9.238764	9.237976	9.237153	9.236313	9.235477	9.234672
$\log e''$	4.554587	4.553915	4.553189	4.552401	4.551578	4.550738	4.549902	4.549097
M	191°18'26"9	184°13'19"0	177°8'21"8	170°3'36"6	162°59'7"5	155°54'56"3	148°51'8"2	141°47'48"8
E	189°38'22"5	183°35'52"3	177°33'42"4	171°31'17"0	165°28'3"2	159°23'26"7	153°16'56"8	147°8'3"5
$\sin E$	9.223885	8.797636	8.628819	9.168616	9.399549	9.546533	9.652819	9.734537
$u \cos q$	0.488660	0.488783	0.488914	0.489050	0.489187	0.489321	0.489445	0.489552
$\cos E$	9.993824	9.999143	9.999606	9.995227	9.9985878	9.9971277	9.9950965	9.9924251
Subtract.	0.070531	0.069638	0.069462	0.069995	0.071274	0.073386	0.076472	0.080761
$\cos E - e$	0.064355	0.068781	0.069068	0.065222	0.057152	0.044663	0.027437	0.005012
$r \sin e$	9.9712545	9.9286419	9.117733	9.657666	9.888736	0.035854	0.142264	0.224089
$r \cos r$	9.995654	9.999397	9.999723	9.996635	9.9990036	9.9979725	9.9965375	9.9946515
r	0.559678	0.564207	0.564603	0.560868	0.5552910	0.540529	0.523401	0.501059
v	188°5'33"4	183°1'10"1	177°57'11"6	172°52'36"5	167°46'26"2	162°37'41"2	157°25'24"5	152°8'39"8
ω	272°48'10"2	272°45'47"7	272°43'32"0	272°41'17"9	272°39'10"1	272°37'6"1	272°35'2"1	272°32'52"1
u	100°53'43"6	95°46'57"8	90°40'43"6	85°33'54"4	80°25'36"3	75°14'47"3	70°0'26"6	64°41'31"9
r	0.564024	0.564810	0.564880	0.564233	0.562874	0.560804	0.558026	0.554544
p	0.481997	0.482140	0.482293	0.482354	0.482616	0.482776	0.482926	0.483057
Add.	0.343977	0.344326	0.344284	0.343841	0.343010	0.341794	0.340201	0.338243
$r + p$	0.825974	0.826469	0.826577	0.826295	0.825626	0.824570	0.823127	0.821300
$\sin v$	9.9148521	8.721609	8.552853	9.093433	9.325862	9.475050	9.584238	9.669545
$\cos v$	9.995654	9.999397	9.999723	9.996635	9.9990036	9.9979725	9.9965375	9.9946515
Add.	0.300116	0.300903	0.300971	0.300327	0.298956	0.296826	0.293885	0.290041
$\cos r + \cos E$	0.295770	0.300300	0.300694	0.296962	0.288992	0.276551	0.259260	0.236556
$\sin u$	9.992100	9.997784	9.999970	9.998698	9.993910	9.985440	9.973006	9.956180
$\cos u$	9.9276502	9.9003272	8.9073595	8.888326	9.220914	9.405964	9.533898	9.630917
$\lg \frac{1}{2}i$	8.284638	8.284638	8.284627	8.284638	8.284638	8.284660	8.284692	8.284725
$r \sin u$	0.556124	0.562594	0.564850	0.562931	0.556784	0.546244	0.531032	0.510724
$\sin i$	8.585512	8.585506	8.585501	8.585506	8.585512	8.585534	8.585561	8.585599
$-(p \sin q)$	1.241835	1.242650	1.243529	1.244478	1.245403	1.246403	1.247449	1.248385
$(p + r) \sin v$	9.974495	9.948078	9.379430	9.919728	0.151488	0.299602	0.407365	0.490845
$\lg \frac{1}{2}i$	8.942582	8.941767	8.941032	8.940231	8.939396	8.938544	8.937694	8.936876
$\sin q \sin v$	8.388683	7.961099	7.791617	8.331409	8.563015	8.711363	8.819715	8.904217
$-3kw : a$	0.067102	0.067050	0.066996	0.066940	0.066884	0.066830	0.066781	0.066740
$p : r$	9.917973	9.917330	9.917413	9.918221	9.919742	9.921972	9.924900	9.928513
$-p \lg \frac{1}{2}q$	9.9424579	9.9423907	9.9423325	9.9422685	9.9422012	9.9421320	9.9420620	9.9419933
$-2 \cos q$	0.294367	0.294387	0.294409	0.294434	0.294459	0.294485	0.294511	0.294535
$-2 \cos q \cdot r$	0.858391	0.859197	0.859289	0.858667	0.857333	0.855289	0.852537	0.849079
$-p \lg \frac{1}{2}q \cos r$	9.420233	9.423304	9.423048	9.419320	9.412048	9.401045	9.385995	9.366448
Add.	9.983869	9.983783	9.983796	9.983914	9.984137	9.984466	9.984907	9.985465
$\{i : W\}$	9.840526	9.568082	8.638475	9.452559	9.783788	9.966768	0.091924	0.185461
$\{Q : W\}$	1.970612	1.977088	1.979349	1.977425	1.971272	1.960710	1.945471	1.925125
$\{\mu : R\}$	8.455785	8.028149	7.858613	8.398349	8.629899	8.778193	8.886496	8.970957
$\{u : S\}$	9.9860575	9.984380	9.984409	9.985161	9.986626	9.988802	9.991681	9.995253
$\{L : R\}$	0.842260	0.842980	0.843085	0.842581	0.841470	0.839755	0.837444	0.834544
$\{L : S\}$	8.917077	8.489845	8.320462	8.859959	9.090884	9.238164	9.345059	9.427721
$\{L : W\}$	8.840762	8.847232	8.849477	8.847569	8.841422	8.830904	8.815724	8.795449
$\{n : R\}$	1.237489	1.242047	1.243252	1.241113	1.235499	1.226188	1.212824	1.194900
$\{x : S\}$	0.734333	0.308588	0.140666	0.681752	0.914335	1.063307	1.171888	1.256173
$\{q : R\}$	9.637181	9.210392	9.041767	9.582483	9.815049	9.964371	0.073683	0.159097
$\{q : S\}$	0.784430	0.780083	0.786080	0.786012	0.787819	0.785872	0.7848705	0.7826108
\sqrt{p}	0.240998	0.241070	0.241146	0.241227	0.241308	0.241388	0.241463	0.241528

1874			1873					
April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25
639°506 173°2'42"1 38°17'39"0 9°52'2"1 125°47'10"5 2°12'26"5	639°430 165°58'20"4 38°15'25"8 9°51'7"3 125°47'42"1 2°12'27"3	639°422 158°54'0"5 38°12'38"6 9°50'20"4 125°48'7"2 2°12'28"0	639°482 151°49'34"9 38°9'15"1 9°49'41"6 125°48'25"2 2°12'28"7	639°603 144°44'55"0 38°5'19"2 9°49'10"2 125°48'37"1 2°12'29"3	639°771 137°39'55"3 38°0'59"7 9°48'44"6 125°48'43"6 2°12'29"7	639°970 130°34'32"4 37°56'29"2 9°48'23"2 125°48'46"8 2°12'29"9	640°185 123°28'45"1 37°52'0"8 9°48'4"5 125°48'47"8 2°12'30"0	640°401 116°22'34"5 37°47'46"2 9°47'47"3 125°48'47"8 2°12'30"0
1°6'13"2 4°56'1"0 2.805845 0.744162 0.248054 0.496108	1°6'13"6 4°55'33"6 2.805793 0.744214 0.248071 0.496143	1°6'14"0 4°55'10"2 2.805787 0.744220 0.248073 0.496147	1°6'14"3 4°54'50"8 2.805828 0.744179 0.248060 0.496119	1°6'14"6 4°54'35"1 2.805910 0.744097 0.248032 0.496065	1°6'14"8 4°54'22"3 2.806025 0.743982 0.247994 0.495988	1°6'14"9 4°54'11"6 2.806160 0.743847 0.247949 0.495898	1°6'15"0 4°54'2"2 2.806305 0.743702 0.247901 0.495801	1°6'15"0 4°53'53"6 2.806452 0.743555 0.247852 0.495703
9.993527 9.233924 4.548349	9.993548 9.233260 4.547685	9.993565 9.232692 4.547117	9.993579 9.232221 4.546646	9.993591 9.231838 4.546263	9.993600 9.231527 4.545952	9.993608 9.231267 4.545692	9.993614 9.231039 4.545464	9.993621 9.230829 4.545254
134°45'3"1 140°56'17"1 9.799451 0.489635	127°42'54"6 134°41'7"0 9.851857 0.489691	120°41'21"9 128°21'57"4 9.894350 0.489712	113°40'19"8 121°58'8"3 9.928567 0.489698	106°39'35"8 115°28'51"4 9.955557 0.489656	99°38'55"6 108°53'15"0 9.975962 0.489588	92°38'3"2 102°10'24"4 9.990123 0.489506	85°36'44"3 95°19'25"5 9.998123 0.489415	78°34'48"3 88°19'29"0 9.999814 0.489324
9.890122 0.086609 9.976731 0.289086 9.922478 0.0472839 146°46'29"6 272°30'28"5 59°16'58"1	9.847086 0.094582 9.941668 0.341548 9.892325 0.0437811 141°17'54"8 272°27'43"7 53°45'38"5	9.8792869 0.105616 9.898485 0.384062 9.854706 0.0394632 135°41'49"8 272°24'31"4 48°0'21"2	9.823833 0.121361 9.845194 0.418265 9.884570 0.0341313 129°57'0"9 272°20'49"9 42°17'50"8	9.83681 0.145017 9.778698 0.445213 9.918398 0.0274763 124°2'3"9 272°16'42"1 36°18'46"0	9.510157 0.183687 9.693844 0.465550 9.946241 0.0189832 117°55'26"1 272°12'16"1 30°7'42"2	9.824018 0.257126 9.581144 0.479629 9.968406 0.0077042 111°35'26"9 272°7'42"4 23°43'9"3	8.967470 0.188941 9.419980 0.487538 9.984931 9.915781 105°0'22"6 272°3'13"0 17°3'35"6	8.465902 0.918125 9.418954 0.489138 9.995601 9.644657 98°8'29"4 271°58'58"4 10°7'27"8
0.550361 0.483162 0.335927 0.819089	0.545486 0.483239 0.333268 0.816507	0.539926 0.483277 0.330277 0.813554	0.533695 0.483277 0.326971 0.810248	0.526815 0.483247 0.323600 0.806607	0.519309 0.483188 0.319466 0.802654	0.511223 0.483114 0.315312 0.798426	0.502607 0.483029 0.310930 0.793959	0.493537 0.482945 0.306358 0.789303
9.738725 9.922478 0.285153 0.207631	9.796062 9.892325 0.278999 0.171324	9.844136 9.854706 0.271211 0.125917	9.884570 9.807618 0.261155 0.068773	9.918398 9.747948 0.247644 9.995592	9.946241 9.670523 0.228207 9.898730	9.968406 9.565819 0.196754 9.762545	9.984931 9.413174 0.133009 9.546183	9.995601 9.151120 9.899583 9.050703
9.934347 9.708252 8.284769 0.484708 8.585643	9.906634 9.771704 8.284812 0.452120 8.585687	9.871795 9.824618 8.284856 0.411721 8.585725	9.828002 9.869032 8.284889 0.361697 8.585763	9.772463 9.906225 8.284922 0.299278 8.585796	9.700651 9.936967 8.284944 0.219660 8.585818	9.604502 9.961672 8.284955 0.115725 8.585829	9.467418 9.980457 8.284966 9.970025 8.585834	9.244984 9.993184 8.284966 9.738521 8.585834
1.249238 0.557814 8.936118	1.249979 0.612569 8.934444	1.250585 0.657690 8.934867	1.251056 0.694818 8.934389	1.251409 0.725005 8.934001	1.251661 0.748895 8.933658	1.251847 0.766832 8.933421	1.251990 0.778890 8.933189	1.252116 0.784904 8.932976
8.972649 0.066709 9.932801	9.029322 0.066692 9.937753	9.076828 0.066690 9.943351	9.116791 0.066703 9.949582	9.150236 0.066731 9.956432	9.177768 0.066769 9.963879	9.199673 0.066814 9.971891	9.215970 0.066862 9.980422	9.226430 0.066911 9.98408
9.419280 0.294557 0.844918 9.341758 9.986147	9.418683 0.294578 0.840064 9.311008 9.986962	9.418144 0.294595 0.834521 9.272850 9.987918	9.417666 0.294609 0.828304 9.252584 9.989029	9.417248 0.294621 0.821436 9.165196 9.990309	9.416873 0.294630 0.813939 9.087396 9.991771	9.416535 0.294638 0.805861 8.982354 9.993430	9.416212 0.294644 0.797251 8.829392 9.995282	9.415921 0.294651 0.788188 8.567041 9.997382
0.258613 1.899065 9.039358 9.999510	0.317190 1.866433 9.096014 0.004445	0.364544 1.825996 9.143518 0.010041	0.402727 1.775934 9.183494 0.016285	0.433040 1.713482 9.216967 0.023163	0.456276 1.634142 9.244537 0.030648	0.472895 1.529896 9.266487 0.038705	0.483064 1.384191 9.288232 0.047284	0.486721 1.152687 9.293341 0.056319
0.831065 9.493932 8.769477	0.827026 9.548013 8.736932	0.822439 9.592557 8.696577	0.817733 9.629207 8.646586	0.811745 9.659006 8.584200	0.805710 9.682580 8.504904	0.799291 9.700253 8.400680	0.792549 9.712079 8.254991	0.785570 9.717880 8.023480
1.171716 1.323890 0.228360 0.697266	1.142304 1.379309 0.285753 0.661015	1.105291 1.424998 0.333848 0.615629	1.058674 1.462597 0.374268 0.558471	0.999357 1.493167 0.408054 0.485248	0.922184 1.517368 0.435829 0.388318	0.817666 1.535565 0.457912 0.252070	0.665164 1.547851 0.474346 0.035598	0.403236 1.554075 0.484925 9.540027
0.241581	0.241619	0.241638	0.241638	0.241623	0.241594	0.241557	0.241514	0.241472

Datum	1873			1872				
	April 15	März 6	Jan. 25	Dec. 16	Nov. 6	Sept. 27	Aug. 18	Juli 9
μ	640''607	640''796	640''963	641''106	641''225	641''320	641''391	641''441
L	109°16'2''7	102°9'12''6	95°2'7''0	87°54'48''9	80°47'21''1	73°39'45''8	66°32'5''3	59°24'21''2
π	37°43'53''8	37°40'29''1	37°37'34''5	37°35'10''4	37°33'15''0	37°31'45''3	37°30'37''6	37°29'47''3
φ	9°47'31''0	9°47'15''5	9°47'0''8	9°46'47''1	9°46'34''9	9°46'24''5	9°46'16''2	9°46'10''2
Ω	125°48'47''6	125°48'47''7	125°48'48''1	125°48'48''9	125°48'49''9	125°48'51''1	125°48'52''2	125°48'53''2
i	2°12'30''0	2°12'39''9	2°12'29''7	2°12'29''7	2°12'29''6	2°12'29''5	2°12'29''5	2°12'29''4
$\frac{1}{2}i$	1°6'15''0	1°6'14''9	1°6'14''8	1°6'14''8	1°6'14''8	1°6'14''7	1°6'14''7	1°6'14''7
$\frac{1}{2}\varphi$	4°53'45''5	4°53'37''7	4°53'30''4	4°53'23''5	4°53'17''4	4°53'12''2	4°53'8''1	4°53'5''1
$a^{\frac{3}{2}}$	2.806592	2.806720	2.806833	2.806930	2.807010	2.807075	2.807123	2.807157
$a^{\frac{3}{2}}$	0.743415	0.743287	0.743174	0.743077	0.742997	0.742932	0.742884	0.742850
$a^{\frac{1}{2}}$	0.247805	0.247762	0.247725	0.247692	0.247666	0.247644	0.247628	0.247617
a	0.495610	0.495525	0.495449	0.495385	0.495331	0.495288	0.495256	0.495233
$\cos \varphi$	9.993627	9.993632	9.993638	9.993642	9.993647	9.993651	9.993654	9.993656
$\sin \varphi$	9.230630	9.230441	9.230262	9.230094	9.229945	9.229818	9.229717	9.229643
$\log e''$	4.545055	4.544866	4.544687	4.544519	4.544370	4.544243	4.544142	4.544068
M	71°32'8''9	64°28'43''5	57°24'32''5	50°19'38''5	43°14'6''1	36°8'0''5	29°1'27''7	21°54'33''9
E	81°9'52''3	73°50'1''3	66°19'32''8	58°38'15''8	50°46'17''0	42°44'0''8	34°32'14''0	26°12'7''8
$\sin E$	9.994816	9.982478	9.961822	9.931404	9.889094	9.831608	9.753538	9.644970
$a \cos \varphi$	0.489237	0.489157	0.489087	0.489027	0.488978	0.488939	0.488910	0.488889
$\cos E$	9.186385	9.444711	9.603725	9.716377	9.801003	9.866002	9.915799	9.952909
Subtract.	9.030390	9.804708	0.134495	9.828418	9.864215	9.885865	9.899807	9.908957
$E - e$	8.216775	9.035149	9.364757	9.544795	9.665218	9.751867	9.815606	9.861866
$r \sin v$	0.484053	0.471635	0.450909	0.420431	0.378072	0.320547	0.242448	0.133859
$r \cos v$	9.999938	9.997169	9.986151	9.965244	9.932077	9.883095	9.881009	9.933598
v	8.216775	9.364757	9.861822	0.401800	0.160549	0.247155	0.310862	0.357099
ω	90°58'9''1	83°27'52''5	75°36'25''6	67°22'55''2	58°47'1''9	49°49'6''0	40°30'20''5	30°52'58''3
u	271°55'6''2	271°51'41''4	271°48'46''4	271°46'21''5	271°44'25''1	271°42'54''2	271°41'45''4	271°40'54''1
r	2°53'15''3	355°19'33''9	347°25'12''0	339°9'16''7	330°31'27''0	321°32'0''2	312°12'5''9	302°33'52''4
p	0.484115	0.474466	0.464758	0.455187	0.445995	0.437452	0.429853	0.423501
Add.	0.482864	0.482789	0.482725	0.482669	0.482625	0.482590	0.482564	0.482545
$r + p$	0.301655	0.296888	0.292139	0.287507	0.283101	0.279047	0.275474	0.272511
$\sin v$	0.784519	0.779677	0.774864	0.770176	0.765726	0.761637	0.758038	0.755056
$\cos v$	9.999938	9.997169	9.986151	9.965244	9.932077	9.883095	9.812595	9.710358
Add.	8.228270	9.056208	9.395448	9.584993	9.714554	9.809703	9.881009	9.933598
$\cos v + \cos E$	9.949329	0.148845	0.209259	0.240288	0.259953	0.273792	0.283983	0.291482
$\sin u$	9.135714	9.593556	9.812984	9.956665	0.060956	0.139794	0.199782	0.244391
$\cos u$	8.702228	8.911077	9.9338063	9.970600	9.939800	9.893745	9.827205	9.730984
$\lg \frac{1}{2}i$	8.284966	8.284955	8.284944	8.284944	8.284944	8.284933	8.284933	8.284933
$r \sin i$	9.186343	9.983543	9.980821	0.006450	0.138010	0.231283	0.299546	0.349218
$\sin i$	8.585834	8.585829	8.585818	8.585818	8.585812	8.585807	8.585807	8.585802
$-(p : \sin \varphi)$	1.252234	1.252348	1.252463	1.252575	1.252680	1.252772	1.252847	1.252902
$(p + r) \sin v$	0.784457	0.776846	0.761015	0.735420	0.697803	0.644732	0.570633	0.465414
$\lg \frac{1}{2}\varphi$	8.932775	8.932582	8.932401	8.932230	8.932079	8.931950	8.931848	8.931773
$\sin \varphi \sin v$	9.230568	9.227610	9.216413	9.195338	9.162022	9.112913	9.042312	8.940001
$-3kw : \frac{1}{2}a$	0.0666958	0.067001	0.067038	0.067071	0.067097	0.067119	0.067135	0.067146
$p : r$	9.998749	0.008323	0.017967	0.027482	0.036630	0.045138	0.052711	0.059044
$-p \lg \frac{1}{2}\varphi$	9.9415639	9.9415371	9.9415126	9.9414899	9.9414704	9.9414540	9.9414412	9.9414318
$-2 \cos \varphi$	0.294657	0.294662	0.294668	0.294672	0.294677	0.294681	0.294684	0.294686
$-2 \cos \varphi \cdot r$	0.778772	0.769128	0.759426	0.749859	0.740672	0.732133	0.724537	0.718187
$-p \lg \frac{1}{2}\varphi \cos v$	7.643909	8.471579	8.810574	8.999892	9.129258	9.224243	9.295421	9.347916
Add.	9.999681	0.002183	0.004859	0.007656	0.010498	0.013281	0.015875	0.018131
$\{i : H\}$	0.483563	0.473019	0.454205	0.425787	0.385795	0.331197	0.257058	0.154485
$\{\Omega : H\}$	0.600509	0.799714	1.217003	1.420632	1.552198	1.645476	1.713739	1.763416
$\{u : R\}$	9.297526	9.294611	9.283451	9.262409	9.229119	9.180032	9.109447	9.007147
$\{u : S\}$	0.065707	0.075324	0.085005	0.094553	0.103727	0.112257	0.119846	0.126100
$\{L : R\}$	0.778453	0.771311	0.764285	0.757515	0.751170	0.745414	0.740412	0.736318
$\{L : S\}$	9.717232	9.709428	9.693416	9.667650	9.629882	9.576682	9.502481	9.397187
$\{L : H\}$	7.471309	7.670498	8.087765	8.291394	8.422954	8.516216	8.584479	8.634151
$\{\pi : R\}$	9.480504	0.308505	0.647911	0.837568	0.967234	1.062475	1.133856	1.186500
$\{\pi : S\}$	1.553827	1.546405	1.530753	1.505326	1.467858	1.414914	1.340916	1.235771
$\{\varphi : R\}$	0.489175	0.486326	0.475238	0.454271	0.421055	0.372034	0.301505	0.199247
$\{\varphi : S\}$	9.624951	0.082713	0.302071	0.445692	0.549934	0.628733	0.688692	0.733280
$1/p$	0.241432	0.241394	0.241362	0.241334	0.241312	0.241295	0.241282	0.241272

1872				1871			
Mai 30	April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24
641"471 52°16'35"1 37°29'10"1 9°46'6"6 125°48'53"7 2°12'29"4	641"484 45°8'48"2 37°28'41"6 9°46'5"2 125°48'54"0 2°12'29"4	641"481 38°1'1"6 37°28'17"6 9°46'6"0 125°48'54"0 2°12'29"4	641"465 30°53'16"3 37°27'54"9 9°46'8"7 125°48'53"6 2°12'29"4	641"439 23°45'32"6 37°27'30"8 9°46'12"8 125°48'52"8 2°12'29"4	641"404 16°37'51"4 37°27'3"4 9°46'18"0 125°48'51"8 2°12'29"4	641"362 9°30'13"0 37°26'31"6 9°46'23"9 125°48'50"6 2°12'29"4	641"316 2°22'37"6 37°25'54"9 9°46'30"1 125°48'49"3 2°12'29"3
1°6'14"7 4°53'3"3 2.807177 0.742830 0.247610 0.495220	1°6'14"7 4°53'2"6 2.807186 0.742821 0.247607 0.495214	1°6'14"7 4°53'3"0 2.807184 0.742823 0.247608 0.495215	1°6'14"7 4°53'4"3 2.807173 0.742834 0.247611 0.495223	1°6'14"7 4°53'6"4 2.807155 0.742852 0.247617 0.495235	1°6'14"7 4°53'9"0 2.807132 0.742875 0.247625 0.495250	1°6'14"7 4°53'11"9 2.807103 0.742904 0.247635 0.495269	1°6'14"6 4°53'15"0 2.807072 0.742935 0.247645 0.495290
9.993657 9.229597 4.544024	9.993658 9.229582 4.544007	9.993658 9.229592 4.544017	9.993657 9.229625 4.544050	9.993655 9.229675 4.544100	9.993653 9.229739 4.544164	9.993651 9.229811 4.544236	9.993649 9.229886 4.544311
14°47'25"0 17°45'16"9 9.484218 0.488877	7°40'6"6 9°13'38"1 9.205070 0.488872	0°32'44"0 0°39'25"3 8.059451 0.488873	353°25'21"4 352°5'1"2 9.139019 0.488880	346°18'1"8 343°32'47"9 9.452147 0.488890	339°10'48"0 335°45'9"1 9.624595 0.488903	332°3'41"4 326°43'31"1 9.739298 0.488920	324°56'42"7 318°29'57"8 9.821270 0.488939
9.978806 9.914791 9.983597 9.973095 9.970139 0.388817 21°0'16"0 271°40'16"4 292°40'32"4	9.994344 9.918091 9.912435 9.93942 9.992032 0.407649 10°56'30"6 271°39'47"6 282°36'18"2	9.999971 9.919248 9.919219 8.548324 9.999960 0.414434 0°46'47"3 271°39'23"6 272°26'10"9	9.995841 9.918392 9.914233 9.9627899 9.994142 0.409456 350°36'36"9 271°39'1"3 262°15'38"2	9.981842 9.915430 9.892722 9.941037 9.974416 0.392507 340°31'32"4 271°38'38"0 252°10'10"4	9.957569 9.910015 9.867584 0.113498 9.940175 0.362834 330°36'42"2 271°38'11"6 242°14'53"8	9.922232 9.901437 9.823669 0.228218 9.890141 0.318938 320°56'28"4 271°37'41"0 232°34'9"4	9.874452 9.888353 9.762805 0.310209 9.873982 0.258095 311°34'14"0 271°37'5"6 223°11'19"6
0.418678 0.482534 0.270275 0.751809	0.415617 0.482530 0.268861 0.751391	0.414474 0.482531 0.268333 0.750864	0.415314 0.482537 0.268717 0.751257	0.418091 0.482545 0.269997 0.752542	0.422659 0.482556 0.272113 0.754669	0.428797 0.482571 0.274975 0.757546	0.436227 0.482588 0.278468 0.761056
9.554417 9.970139 0.296718 0.275524	9.278325 9.992032 0.299876 0.294220	8.133850 9.999960 0.301024 0.300995	9.212585 9.994142 0.300181 0.296022	9.522946 9.974416 0.297333 0.279175	9.690839 9.940175 0.292420 0.249989	9.799421 9.890141 0.285281 0.207513	9.873982 9.821868 0.275534 0.149986
9.965062 9.586040 8.284933 0.383740 8.585802	9.989404 9.338913 8.284933 0.405021 8.585802	9.999607 8.628489 8.284933 0.414081 8.585802	9.996025 9.129263 8.284933 0.411339 8.585802	9.946930 9.486006 8.284933 0.396713 8.585802	9.946930 9.668052 8.284933 0.369589 8.585802	9.899869 9.783762 8.284933 0.328666 8.585802	9.885313 9.862789 8.284922 0.271540 8.585796
1.252935 0.307226 8.931729 8.845016 0.067153 0.063856	1.252948 0.029716 8.931712 8.507007 0.067156 0.066913	1.252939 8.884714 8.931722 7.363442 0.067155 0.068057	1.252912 9.963839 8.931753 8.412210 0.067152 0.067223	1.252870 0.275488 8.931806 8.752621 0.067146 0.064454	1.252817 0.445508 8.931870 8.902578 0.067138 0.059897	1.252760 0.556967 8.931942 9.902922 0.067128 0.053774	1.252702 0.635038 8.932019 9.103868 0.067118 0.043661
9.414263 0.294688 0.713365 9.384402 0.019899	9.414242 0.294688 0.710305 9.406274 0.021047	9.414253 0.294688 0.709162 9.414213 0.021481	9.414290 0.294687 0.710001 9.408432 0.021164	9.414351 0.294685 0.712776 9.388767 0.020123	9.414426 0.294683 0.717342 9.354601 0.018441	9.414513 0.294681 0.723478 9.304654 0.016249	9.414607 0.294679 0.730906 9.236475 0.013693
0.004718 1.797938 8.851169 0.131009	9.754530 1.819219 8.575063 0.134069	9.042963 1.828279 7.430597 0.135212	9.544577 1.825537 8.509362 0.134357	9.904097 1.810911 8.819767 0.131600	9.902071 1.783787 8.987716 0.12035	9.212559 1.742864 9.096360 0.120902	9.299016 1.685744 9.170986 0.113479
0.733264 9.238955 8.668673	0.731352 8.961428 8.689954	0.730643 7.816436 8.699014	0.731165 8.895592 8.696272	0.732899 9.207294 8.681646	0.735783 9.377378 8.654522	0.739727 9.488909 8.613599	0.744599 9.567057 8.556462
1.223074 1.077627 0.043294 0.764401	1.244980 0.800134 9.767197 0.783092	1.252899 9.655122 8.622723 0.789868	1.247054 9.734214 9.701465 0.784902	1.227286 1.045813 0.011836 0.768065	1.192992 1.215769 0.719742 0.738892	1.142901 1.327156 0.288341 0.696433	1.074570 1.405152 0.362921 0.638925
0.241267	0.241265	0.241265	0.241268	0.241272	0.241278	0.241285	0.241294

Datum	1875		1874					
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	June 29	Mai 20
β_0'	+1°16'24"0	+1°17'16"7	+1°17'56"4	+1°18'23"1	+1°18'36"8	+1°18'37"5	+1°18'25"0	+1°17'59"4
λ_0'	202°47'52"5	199°46'32"6	196°45'19"1	193°44'9"0	190°42'59"1	187°41'46"3	184°40'27"3	181°38'59"2
Ω	125°41'47"3	125°42'21"3	125°42'57"0	125°43'39"9	125°44'23"2	125°45'7"6	125°45'51"5	125°46'33"0
$\lambda_0' - \Omega$	77°6'5"2	74°4'11"3	71°2'22"1	68°0'29"1	64°58'35"9	61°56'38"7	58°54'35"8	55°52'26"2
$\sin(\lambda_0' - \Omega)$	9.988901	9.982993	9.975773	9.967190	9.957193	9.945710	9.932655	9.917928
$\cos \beta_0'$	9.999893	9.999890	9.999888	9.999887	9.999886	9.999886	9.999887	9.999888
$\cos(\lambda_0' - \Omega)$	9.348744	9.438488	9.511772	9.573424	9.626327	9.672405	9.712974	9.748975
$\sin \beta_0'$	8.346784	8.351747	8.355449	8.357921	8.359185	8.359249	8.358097	8.355728
$\cos \beta_0' \sin(\lambda_0' - \Omega)$	9.999887	9.999881	9.999875	9.999869	9.999861	9.999854	9.999846	9.999837
Q	9.988794	9.982883	9.975661	9.967077	9.957079	9.945596	9.932542	9.917816
$Q - i$	1°18'22"6	1°20'21"8	1°22'24"6	1°24'32"0	1°26'45"2	1°29'5"4	1°31'33"9	1°34'12"3
$Q - i$	2°12'24"1	2°12'24"0	2°12'23"9	2°12'24"0	2°12'24"1	2°12'24"5	2°12'25"0	2°12'25"7
$Q - i$	-0°54'1"5	-0°52'2"2	-0°49'59"3	-0°47'52"0	-0°45'38"9	-0°43'19"1	-0°40'51"1	-0°38'13"4
$\sin(Q - i)$	8.196303	8.180019	8.162579	8.143745	8.123138	8.100387	8.074926	8.046046
q	9.988907	9.983002	9.975786	9.967208	9.957218	9.945742	9.932696	9.917979
$\cos(Q - i)$	9.999946	9.999950	9.999954	9.999958	9.999962	9.999965	9.999969	9.999973
$\cos B_1 \sin L_1$	9.988853	9.982952	9.975740	9.967166	9.957180	9.945707	9.932665	9.917952
$\cos B_1 \cos L_1$	9.988904	9.982998	9.975782	9.967203	9.957211	9.945734	9.932687	9.917971
L_1	9.348637	9.438378	9.511660	9.573311	9.626213	9.672291	9.712861	9.748863
$\cos B_1$	77°6'11"3	74°4'20"0	71°2'33"6	68°0'43"6	64°58'54"4	61°57'0"8	58°55'1"5	55°52'56"1
r_1	9.999949	9.999954	9.999958	9.999963	9.999969	9.999973	9.999978	9.999981
$\sin B_1$	0.736575	0.736732	0.736828	0.736862	0.736835	0.736747	0.736597	0.736386
$L_1 - u$	8.185210	8.163021	8.138365	8.110953	8.080356	8.046129	8.007622	7.964025
$\cos(L_1 - u)$	336°12'27"7	338°17'22"2	340°21'50"0	342°26'49"2	344°33'18"1	346°42'13"5	348°54'34"9	351°11'24"2
$r_1 \cos B_1$	9.961428	9.968046	9.973980	9.979293	9.984026	9.988200	9.991813	9.994846
$\sin(L_1 - u)$	0.736542	0.736686	0.736786	0.736825	0.736804	0.736720	0.736575	0.736367
ξ_1	9.605760	9.658104	9.726398	9.794114	9.842539	9.876170	9.894106	9.901813
r	0.697952	0.704732	0.710766	0.716118	0.720830	0.724920	0.728388	0.731213
Subtract.	0.564024	0.564810	0.564880	0.564233	0.562874	0.560804	0.558026	0.554544
$\xi_1 - r$	9.557770	9.579939	9.601214	9.621883	9.642120	9.662006	9.681550	9.700700
r_1	0.121794	0.144749	0.166094	0.186116	0.204994	0.222810	0.239576	0.255244
$q \cos \theta$	9.932870	9.915084	9.892648	9.864024	9.829831	9.790289	9.744455	9.692705
ζ_1	0.934284	0.904790	0.863184	0.812639	0.751621	0.680822	0.600681	0.511505
q	0.409414	0.389706	0.370536	0.352215	0.335163	0.319199	0.307131	0.297539
ζ_1	9.999770	9.999773	9.999778	9.999788	9.999800	9.999817	9.999838	9.999861
q^{-1}	8.021785	8.089975	8.187519	8.314781	8.481719	8.782876	9.244219	10.004411
q^{-3}	9.590356	9.610067	9.629242	9.647573	9.664637	9.679898	9.692707	9.702322
r_1^{-3}	8.771068	8.830201	8.887726	8.942719	8.993911	9.039694	9.078121	9.106966
Subtract.	7.790275	7.789804	7.789516	7.789414	7.789495	7.789599	7.790209	7.790842
K	9.952055	9.958508	9.963901	9.968362	9.971991	9.974860	9.977022	9.978503
$\xi_1 K$	8.723123	8.788709	8.851627	8.911081	8.965902	9.014554	9.055143	9.085469
$r: q^3$	9.421075	9.493411	9.562309	9.627199	9.686732	9.739474	9.783531	9.816682
Subtract.	9.335092	9.395041	9.452606	9.506952	9.556785	9.600498	9.636147	9.661510
R_0	9.340328	9.405486	9.458817	9.503800	9.542573	9.576496	9.606441	9.632923
R_0	8.675420	8.800497	8.911423	9.010752	9.099358	9.176994	9.242588	9.294433
S_0	9.065407	9.093499	9.114811	9.127320	9.128098	9.112976	9.075824	9.006974
W_0	7.644908	7.688462	7.726820	7.758896	7.783093	7.797430	7.799362	7.785880
$wk^m m_1: \sqrt{p}$	1.890757	1.890685	1.890609	1.890528	1.890447	1.890367	1.890292	1.890227
R	0.566177	0.691182	0.802032	0.901280	0.989805	1.067361	1.132880	1.184660
S	0.956164	0.984184	1.005420	1.018548	1.018545	1.003343	0.966616	0.897201
W	9.535665	9.579147	9.617429	9.649424	9.673540	9.687797	9.689654	9.676107
$\mathcal{J}i$	+ 0"238	+ 0"140	+ 0"018	+ 0"126	+ 0"287	+ 0"451	+ 0"605	+ 0"727
$\mathcal{J}\Omega$	- 32"083	- 35"994	- 39"516	- 42"350	- 44"138	- 44"515	- 43"164	- 39"924
$\mathcal{J}\mu_1$	+ 0"1052	+ 0"0524	+ 0"0358	+ 0"1994	+ 0"4166	+ 0"7007	+ 1"0456	+ 1"4309
$\mathcal{J}\mu_2$	+ 8"7345	+ 9"3017	+ 9"7685	+ 10"0695	+ 10"1198	+ 9"8208	+ 9"0740	+ 7"8065
$\mathcal{J}\mu$	+ 8"8397	+ 9"3541	+ 9"7227	+ 9"8701	+ 9"7032	+ 9"1201	+ 8"0284	+ 6"3756
$\mathcal{J}L_1$	- 25"612	- 34"211	- 44"169	- 55"445	- 1' 7"807	- 1'20"745	- 1'33"395	- 1'44"521
$\mathcal{J}L_2$	+ 0"747	+ 0"298	+ 0"212	+ 0"755	+ 1"287	+ 1"744	+ 2"047	+ 2"113
$\mathcal{J}L_3$	- 0"024	- 0"027	- 0"029	- 0"031	- 0"033	- 0"033	- 0"032	- 0"030
$\mathcal{J}L_4$	- 24"889	- 33"940	- 44"410	- 56"231	- 1' 9"127	- 1'22"522	- 1'35"474	- 1'46"664
$\mathcal{J}\pi_1$	+ 1' 3"631	+ 1'25"749	+ 1'50"990	+ 2'18"801	+ 2'42"998	+ 3'16"585	+ 3'41"668	+ 3'59"641
$\mathcal{J}\pi_2$	+ 49"034	+ 19"623	+ 13"999	+ 50"073	+ 1'25"680	+ 1'56"587	+ 2'17"405	+ 2'22"355
$\mathcal{J}\pi$	+ 1'52"641	+ 1'45"345	+ 1'36"962	+ 1'28"607	+ 1'22"285	+ 1'19"065	+ 1'24"231	+ 1'37"256
$\mathcal{J}q_1$	- 1"597	- 0"797	+ 0"698	+ 3"046	+ 6"380	+ 10"758	+ 16"090	+ 22"068
$\mathcal{J}q_2$	+ 55"029	+ 59"329	+ 1' 2"378	+ 1' 3"659	+ 1' 2"622	+ 5"778	+ 51"859	+ 42"006
$\mathcal{J}q$	+ 53"432	+ 58"532	+ 1' 3"076	+ 1' 6"705	+ 1' 9"002	+ 1' 9"536	+ 1' 7"949	+ 1' 4"074

1874			1873					
April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25
+1° 17' 20" 7	+1° 16' 29" 0	+1° 15' 24" 6	+1° 14' 7" 0	+1° 12' 36" 6	+1° 10' 53" 6	+1° 8' 58" 4	+1° 6' 50" 8	+1° 4' 31" 2
178° 37' 19" 2	175° 35' 24" 2	172° 33' 11" 4	169° 30' 37" 4	166° 27' 39" 3	163° 24' 14" 2	160° 20' 19" 1	157° 15' 51" 6	154° 10' 48" 3
125° 47' 10" 5	125° 47' 42" 1	125° 48' 7" 2	125° 48' 25" 2	125° 48' 37" 1	125° 48' 43" 6	125° 48' 46" 8	125° 48' 47" 8	125° 48' 47" 8
52° 50' 8" 7	49° 47' 42" 1	46° 45' 4" 2	43° 42' 12" 2	40° 39' 2" 2	37° 35' 30" 6	34° 31' 32" 3	31° 27' 3" 8	28° 22' 0" 5
9.901408	9.882946	9.862361	9.839431	9.813877	9.785353	9.753411	9.717479	9.676798
9.999890	9.999892	9.999896	9.999899	9.999903	9.999908	9.999913	9.999918	9.999924
9.781111	9.809913	9.835797	9.859094	9.880068	9.898932	9.915860	9.930993	9.944445
8.352122	8.347257	8.341121	8.333608	8.324690	8.314301	8.302378	8.288778	8.273395
9.999827	9.999816	9.999803	9.999788	9.999772	9.999752	9.999728	9.999699	9.999662
9.901298	9.882838	9.862257	9.839330	9.813780	9.785261	9.753324	9.717397	9.676722
1° 37' 2" 8	1° 40' 7" 9	1° 43' 30" 9	1° 47' 15" 2	1° 51' 26" 3	1° 56' 11" 1	2° 1' 39" 6	2° 8' 4" 3	2° 15' 44" 6
2° 12' 26" 5	2° 12' 27" 3	2° 12' 28" 0	2° 12' 28" 7	2° 12' 29" 3	2° 12' 29" 7	2° 12' 29" 9	2° 12' 30" 0	2° 12' 30" 0
-0° 35' 23" 7	-0° 32' 19" 4	-0° 28' 57" 1	-0° 25' 13" 5	-0° 21' 3" 0	-0° 16' 18" 6	-0° 10' 50" 3	-0° 4' 25" 7	+0° 3' 14" 6
8,012660	7,973236	7,925395	7,865553	7,786976	7,676178	7,498688	7,109967	6,974718
9.901471	9.883022	9.862454	9.839542	9.814008	9.785509	9.753596	9.717698	9.677060
9.999977	9.999981	9.999985	9.999988	9.999992	9.999995	9.999998	0.000000	0.000000
9.901448	9.883003	9.862439	9.839530	9.814000	9.785504	9.753594	9.717698	9.677060
9.901463	9.883014	9.862447	9.839530	9.814000	9.785504	9.753594	9.717698	9.677060
9.781001	9.809805	9.835693	9.858993	9.879971	9.898840	9.915773	9.930911	9.944369
52° 50' 43" 0	49° 48' 20" 7	46° 45' 47" 4	43° 42' 59" 8	40° 39' 53" 7	37° 36' 26" 4	34° 32' 32" 2	31° 28' 7" 4	28° 23' 7" 6
9.999985	9.999989	9.999992	9.999995	9.999997	9.999999	0.000000	0.000000	0.000000
0.736113	0.735780	0.735387	0.734934	0.734427	0.733864	0.733246	0.732574	0.731849
7,914131	7,883628	7,853849	7,825095	7,796094	7,766168	7,735284	7,703519	7,670626
353° 33' 44" 9	356° 2' 42" 2	358° 39' 26" 2	1° 25' 9" 0	4° 21' 7" 7	7° 28' 44" 2	10° 49' 22" 9	14° 24' 31" 8	18° 15' 39" 8
9.997253	9.998964	9.999881	9.999867	9.998746	9.996290	9.992205	9.986120	9.977558
0.736098	0.735769	0.735379	0.734929	0.734424	0.733863	0.733246	0.732574	0.731849
9,049682	8,836873	8,636824	8,393866	8,144844	7,891484	7,633640	7,369519	7,096026
0.733351	0.734733	0.735260	0.734796	0.733170	0.730153	0.725451	0.718694	0.709407
0.550361	0.545486	0.539926	0.533695	0.526815	0.519309	0.511223	0.502607	0.493537
9.719346	9.737300	9.754314	9.770054	9.784086	9.795855	9.804600	9.809359	9.808805
0.269707	0.282786	0.294240	0.303749	0.310901	0.315164	0.318823	0.311966	0.302342
9.977792	9.991837	9.999092	9.999032	9.991380	9.976068	9.953104	9.922394	9.883542
9,785780	9,574442	9,105203	9.128795	9.614587	9.848347	0.006886	0.128493	0.227875
0.291915	0.290949	0.295148	0.304717	0.319521	0.339096	0.362719	0.389572	0.418800
9.999887	9.999913	9.999937	9.999959	9.999978	9.999989	9.999996	0.000000	0.000000
8,650244	8,592038	8,523236	8,440029	8,335411	8,195551	7,985530	7,660239	7.383627
9.707972	9.708964	9.704790	9.695242	9.680456	9.660893	9.637277	9.610428	9.581200
9.123916	9.126892	9.114370	9.085726	9.041368	8.982679	8.911831	8.831284	8.743600
7.791661	7.792660	7.793839	7.795198	7.796719	7.798408	7.800262	7.802278	7.804453
9.979306	9.979402	9.978726	9.977164	9.974543	9.970615	9.965040	9.957349	9.946923
9.103222	9.106294	9.093096	9.062890	9.015911	8.953294	8.876871	8.788633	8.690523
9.836573	9.841027	9.828356	9.797686	9.749081	9.683447	9.602322	9.507327	9.399930
9.674277	9.672378	9.654296	9.619421	9.568183	9.501988	9.423054	9.333891	9.237137
9.656197	9.676250	9.692848	9.705459	9.713232	9.714879	9.708432	9.690955	9.657787
9.330474	9.348628	9.347144	9.324880	9.281415	9.216867	9.131486	9.024468	8.894924
8,889002	8,896073	8,810829	8.191685	8.630498	8.801641	8.883757	8.917126	8.918398
7,753466	7,698332	7,616332	7,502919	7,351322	7,148845	6,862401	6,348872	6.074150
1.890174	1.890136	1.890117	1.890117	1.890132	1.890161	1.890198	1.890241	1.890283
1.220648	1.238764	1.237261	1.214997	1.171547	1.107028	1.021684	0.915087	0.785207
0,779176	0,570872	0,088416	0.081802	0.020630	0.691802	0.773955	0.807367	0.808681
9,643640	9,588468	9,506449	9,393036	9,241454	9,039006	8,752599	8,239113	7.964433
- 0" 798	- 0" 805	- 0" 743	- 0" 625	- 0" 473	- 0" 313	- 0" 168	- 0" 053	+ 0" 028
- 34" 890	- 28" 504	- 21" 500	- 14" 556	- 9" 014	- 4" 711	- 1" 916	- 0" 420	+ 0" 131
- 1" 8197	- 2" 1616	- 2" 4031	- 2" 5032	- 2" 4463	- 2" 2468	- 1" 9416	- 1" 5773	- 1" 1983
+ 6" 0074	+ 3" 7611	+ 1" 2545	+ 1" 2534	+ 3" 4978	+ 5" 2778	+ 6" 4962	+ 7" 1557	+ 7" 3282
+ 4" 1877	+ 1" 5995	+ 1" 1486	+ 3" 7566	+ 5" 9441	+ 7" 5246	+ 8" 4378	+ 8" 7330	+ 8" 5265
- 1' 52" 645	- 1' 56" 356	- 1' 54" 736	- 1' 47" 728	- 1' 36" 226	- 1' 21" 797	- 1' 6" 218	- 51" 008	- 37" 220
- 1" 875	- 1" 315	- 0" 480	+ 0" 514	+ 1" 512	+ 2" 368	+ 2" 980	+ 3" 307	+ 3" 362
- 0" 026	- 0" 021	- 0" 016	- 0" 011	- 0" 007	- 0" 003	- 0" 001	0" 000	0" 000
- 1' 54" 546	- 1' 57" 692	- 1' 55" 232	- 1' 47" 225	- 1' 34" 221	- 1' 19" 432	- 1' 3" 239	- 47" 701	- 33" 858
+ 4' 6" 811	+ 4' 0" 474	+ 3' 40" 065	+ 3' 7" 790	+ 2' 28" 219	+ 1' 46" 958	+ 1' 9" 080	+ 38" 041	+ 15" 433
- 2' 6" 784	- 1' 29" 162	- 32" 615	+ 35" 027	+ 1' 43" 228	+ 2' 41" 871	+ 3' 23" 948	+ 3' 46" 578	+ 3' 50" 545
+ 2' 0" 001	+ 2' 31" 291	+ 3' 7" 434	+ 3' 42" 806	+ 4' 11" 440	+ 4' 28" 826	+ 4' 33" 027	+ 4' 24" 619	+ 4' 5" 977
+ 28" 120	+ 33" 459	+ 37" 248	+ 38" 839	+ 37" 984	+ 34" 903	+ 30" 171	+ 24" 515	+ 18" 627
+ 29" 953	+ 17" 056	+ 5" 059	- 4" 368	- 10" 136	- 12" 026	- 10" 618	- 6" 966	- 2" 232
+ 58" 073	+ 50" 515	+ 42" 307	+ 34" 471	+ 27" 848	+ 22" 877	+ 19" 553	+ 17" 549	+ 16" 395

Datum	1873			1872				
	April 15	März 6	Jan. 25	Dec. 16	Nov. 6	Sept. 27	Aug. 18	Juli 9
β_0'	+1° 2' 0"0	+0° 59' 17"4	+0° 56' 23"4	+0° 53' 18"8	+0° 50' 3"6	+0° 46' 38"4	+0° 43' 3"8	+0° 39' 20"1
λ_0	151° 5' 7"1	147° 58' 45"3	144° 51' 40"0	141° 43' 48"6	138° 35' 8"5	135° 25' 37"6	132° 15' 13"8	129° 3' 54"8
Ω	125° 48' 47"6	125° 48' 47"7	125° 48' 48"1	125° 48' 48"9	125° 48' 49"9	125° 48' 51"1	125° 48' 52"2	125° 48' 53"2
$\sin(\lambda_0' - \Omega)$	25° 16' 19"5	22° 9' 57"6	19° 2' 51"9	15° 54' 59"7	12° 46' 18"6	9° 36' 46"5	6° 26' 21"6	3° 15' 1"6
$\cos \beta_0'$	9.630344	9.576677	9.513692	9.438127	9.344528	9.222693	9.049804	8.753587
$\cos(\lambda_0' - \Omega)$	9.999929	9.999935	9.999942	9.999948	9.999954	9.999960	9.999966	9.999972
$\cos(\lambda_0' - \Omega)$	9.956308	9.966655	9.975545	9.983022	9.989120	9.993858	9.997252	9.999301
$\sin \beta_0'$	8.256094	8.236686	8.214909	8.190545	8.163201	8.132471	8.097822	8.058495
$\cos \beta_0' \sin(\lambda_0' - \Omega)$	9.999613	9.999547	9.999452	9.999307	9.999059	9.998572	9.997308	9.991331
Q	9.630273	9.576612	9.513634	9.438075	9.344482	9.222653	9.049770	8.753559
i	2° 25' 9"4	2° 37' 3"2	2° 52' 39"4	3° 14' 12"9	3° 46' 8"0	4° 38' 42"1	6° 22' 24"6	11° 24' 34"0
$Q - i$	2° 12' 30"0	2° 12' 29"9	2° 12' 29"7	2° 12' 29"7	2° 12' 29"6	2° 12' 29"5	2° 12' 29"5	2° 12' 29"4
$Q - i$	0° 12' 39"4	0° 24' 33"3	0° 40' 9"7	1° 1' 43"2	1° 33' 38"4	2° 26' 12"6	4° 9' 55"1	9° 12' 4"6
$\sin(Q - i)$	7.566044	7.853862	8.067528	8.254129	8.435134	8.628572	8.861142	9.203857
q	9.630660	9.577065	9.514182	9.438768	9.345423	9.224081	9.052462	8.762228
$\cos(Q - i)$	9.999997	9.999989	9.999970	9.999930	9.999839	9.999607	9.998851	9.994376
$\cos B_1 \sin L_1$	9.630657	9.577054	9.514152	9.438698	9.345262	9.223668	9.051313	8.756604
	9.956238	9.966592	9.975490	9.982975	9.989082	9.993830	9.997232	9.999291
$\cos B_1 \cos L_1$	9.956237	9.966590	9.975487	9.982970	9.989074	9.993818	9.997218	9.999273
L_1	23° 17' 30"0	22° 11' 11"0	19° 4' 7"9	15° 56' 17"9	12° 47' 38"5	9° 38' 7"6	6° 27' 43"4	3° 16' 23"7
$\cos B_1$	9.999999	9.999998	9.999997	9.999995	9.999992	9.999988	9.999986	9.999982
r_1	0.731074	0.730250	0.729380	0.728465	0.727507	0.726509	0.725473	0.724406
$\sin B_1$	7.196704	7.430927	7.581710	7.692897	7.780557	7.852653	7.913604	7.966085
$L_1 - u$	22° 24' 14"7	20° 51' 37"1	31° 38' 55"9	36° 47' 1"2	42° 16' 11"5	48° 6' 7"4	54° 15' 37"5	60° 42' 31"3
$\cos(L_1 - u)$	9.965919	9.950419	9.930072	9.903579	9.869223	9.824650	9.766488	9.689531
$r_1 \cos B_1$	0.731073	0.730248	0.729377	0.728460	0.727499	0.726497	0.725459	0.724388
$\sin(L_1 - u)$	9.581080	9.654962	9.719921	9.777278	9.827772	9.871769	9.909385	9.940588
ξ_1	0.696989	0.680667	0.659449	0.632039	0.596722	0.551147	0.491947	0.413919
r	0.484115	0.474466	0.464758	0.455187	0.445995	0.437452	0.429853	0.423501
Subtract.	9.801115	9.783679	9.752538	9.701248	9.617948	9.476043	9.186685	8.348455
$\xi_1 - r$	0.285230	0.258145	0.217296	0.156435	0.063943	9.913495	9.616538	8.762374
	9.862530	9.903853	9.935872	9.960379	9.978500	9.990920	9.998013	9.999966
r_1	0.312153	0.385210	0.449298	0.505738	0.555271	0.598266	0.634844	0.664976
$q \cos \theta$	0.449623	0.481357	0.513426	0.545359	0.576771	0.607346	0.636831	0.665010
	9.999998	9.999995	9.999992	9.999988	9.999984	9.999981	9.999978	9.999976
ξ_1	7.927778	8.161177	8.311090	8.421362	8.508064	8.579162	8.639077	8.690491
q^{-1}	9.550375	9.518638	9.486566	9.454629	9.423213	9.392635	9.363147	9.334966
q^{-3}	8.651125	8.555914	8.459648	8.363887	8.269639	8.177905	8.089441	8.004898
r_1^{-3}	7.806778	7.809250	7.811860	7.814605	7.817479	7.820473	7.823581	7.826782
Subtract	9.932928	9.914238	9.889308	9.855940	9.810868	9.753114	9.685559	9.605015
K	8.584053	8.470152	8.349006	8.219827	8.080507	7.926787	7.750140	7.531797
$\xi_1 K$	9.281042	9.150819	9.008455	8.851866	8.677229	8.477934	8.242027	7.945716
$r: q^3$	9.135240	9.030380	8.924456	8.819074	8.715634	8.615357	8.519294	8.428399
Subtract.	9.600918	9.504592	9.329167	8.894486	8.965950	9.570796	9.950990	9.826663
R_0	8.736158	8.534972	8.253623	7.713560	7.643179	8.048730	8.193077	8.255062
S_0	8.896206	8.855362	8.798304	8.725565	8.635778	8.525053	8.384984	8.196773
H_0	6.511831	6.631329	6.660096	6.641189	6.588571	6.505949	6.389217	6.222288
$w k'' m_1: \sqrt{p}$	1.890323	1.890361	1.890393	1.890421	1.890443	1.890460	1.890473	1.890483
R	0.626481	0.425333	0.144016	9.603981	9.533622	9.939190	0.083550	0.145545
S	0.786529	0.745723	0.688697	0.615986	0.526221	0.415513	0.275457	0.087256
W	8.402154	8.521690	8.550489	8.531610	8.479014	8.396409	8.279690	8.112771
$\mathcal{J}i$	+ 0"077	+ 0"099	+ 0"101	+ 0"091	+ 0"073	+ 0"053	+ 0"034	+ 0"019
$\mathcal{J}\Omega$	+ 0"101	+ 0"210	+ 0"585	+ 0"896	+ 1"075	+ 1"101	+ 0"985	+ 0"752
$\mathcal{J}\mu_1$	- 0"8395	- 0"5247	- 0"2676	- 0"0735	+ 0"0579	+ 0"1316	+ 0"1560	+ 0"1421
$\mathcal{J}\mu_2$	- 7"1160	- 6"6229	- 5"9388	- 5"1350	- 4"2653	- 3"3111	- 2"4849	- 1"6347
$\mathcal{J}\mu$	- 7"9555	- 7"1476	- 6"2064	- 5"2085	- 4"2074	- 3"2395	- 2"3289	- 1"4926
$\mathcal{J}L_1$	- 25"406	- 15"727	- 8"097	- 2"299	+ 1"927	+ 4"837	+ 6"667	+ 7"618
$\mathcal{J}L_2$	+ 3"190	+ 2"852	+ 2"411	+ 1"921	+ 1"433	+ 0"982	+ 0"600	+ 0"305
$\mathcal{J}L_3$	0"000	0"000	0"000	0"001	0"001	0"001	0"001	0"001
$\mathcal{J}L$	- 22"216	- 12"875	- 5"686	- 0"379	+ 3"359	+ 5"818	+ 7"266	+ 7"922
$\mathcal{J}\pi_1$	+ 1"279	+ 5"419	+ 6"193	+ 2"764	+ 3"169	+ 10"038	+ 16"497	+ 21"481
$\mathcal{J}\pi_2$	+ 3'38"955	+ 3'15"942	+ 2'45"749	+ 2'12"225	+ 1'38"646	+ 1'7"675	+ 1'1"340	+ 21"039
$\mathcal{J}\pi$	+ 3'40"234	+ 3'10"523	+ 2'39"556	+ 2'9"460	+ 1'41"814	+ 1'17"712	+ 57"836	+ 42"519
$\mathcal{J}q_1$	+ 13"051	+ 8"159	+ 4"162	+ 1"144	- 0"901	- 2"047	- 2"427	- 2"212
$\mathcal{J}q_2$	+ 2"579	+ 6"737	+ 9"790	+ 11"526	+ 11"917	+ 11"073	+ 9"208	+ 6"615
$\mathcal{J}q$	+ 15"630	+ 14"896	+ 13"952	+ 12"670	+ 11"016	+ 9"026	+ 6"781	+ 4"403

1872				1871			
Mai 30	April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24
+0° 35' 28" 0	+0° 31' 27" 8	+0° 27' 20" 5	+0° 23' 6" 7	+0° 18' 46" 7	+0° 14' 21" 8	+0° 9' 52" 5	+0° 5' 19" 6
125° 51' 38" 7	122° 38' 23" 2	119° 24' 6" 7	116° 8' 48" 0	112° 52' 25" 3	109° 34' 57" 4	106° 16' 23" 0	102° 56' 41" 4
125° 48' 53" 7	125° 48' 54" 0	125° 48' 54" 0	125° 48' 53" 6	125° 48' 52" 8	125° 48' 51" 8	125° 48' 50" 6	125° 48' 49" 3
0° 2' 45" 0	356° 49' 29" 2	353° 35' 12" 7	350° 19' 54" 4	34° 3' 32" 5	343° 46' 5" 6	340° 27' 32" 4	337° 7' 52" 1
6.903059	8.743429	9.048041	9.225161	9.350145	9.446419	9.524372	9.589529
9.999977	9.999982	9.999986	9.999990	9.999993	9.999996	9.999998	9.999999
0.000000	9.999333	9.997274	9.993787	9.988827	9.982334	9.974237	9.964447
8.013539	7.961525	7.900546	7.827554	7.737381	7.620980	7.458263	7.190181
9.998699	9.994151	9.998902	9.999653	9.999871	9.999952	9.999984	9.999997
6.903036	8.743411	9.048027	9.225151	9.350138	9.446415	9.524370	9.589528
85° 33' 59" 2	170° 37' 2" 1	175° 55' 37" 4	177° 42' 27" 3	178° 36' 9" 8	179° 8' 3" 1	179° 30' 28" 6	179° 46' 17" 6
2° 12' 29" 4	2° 12' 29" 4	2° 12' 29" 4	2° 12' 29" 4	2° 12' 29" 4	2° 12' 28" 4	2° 12' 29" 4	2° 12' 29" 3
83° 21' 29" 8	168° 24' 32" 7	173° 43' 8" 0	175° 29' 57" 9	176° 23' 40" 4	176° 56' 7" 7	177° 17' 59" 2	177° 33' 48" 3
9.997076	9.303033	9.039043	8.894700	8.798549	8.728034	8.673116	8.628528
8.014840	8.749260	9.049125	9.225498	9.350267	9.446463	9.524386	9.589531
9.063185	9.9991052	9.997385	9.998659	9.999140	9.999379	9.999518	9.999907
7.078025	8.740312	9.046510	9.224157	9.349407	9.445842	9.523904	9.589138
0.000000	9.999342	9.997293	9.993815	9.988863	9.982379	9.974289	9.964506
9.999977	9.999315	9.997260	9.993777	9.988820	9.982330	9.974235	9.964446
0° 4' 6" 9	356° 50' 50" 3	353° 36' 32" 5	350° 21' 12" 4	347° 4' 48" 2	343° 47' 18" 6	340° 28' 42" 2	337° 8' 58" 5
9.999977	9.999973	9.999967	9.999962	9.999957	9.999951	9.999946	9.999940
0.723358	0.722180	0.721028	0.719851	0.718657	0.717448	0.716231	0.715006
8.011916	8.052293	8.088168	8.120198	8.148816	8.174497	8.197502	8.218059
67° 23' 34" 5	74° 14' 32" 1	81° 10' 21" 6	88° 5' 34" 2	94° 54' 37" 8	101° 32' 24" 8	107° 54' 32" 8	113° 57' 38" 9
9.584794	9.433882	9.185987	8.522185	8.932471	9.301151	9.487856	9.608646
0.723285	0.722153	0.720995	0.719813	0.718614	0.717399	0.716177	0.714946
9.965278	9.983364	9.994826	9.999759	9.998403	9.991131	9.978429	9.960862
0.308079	0.156035	9.906982	9.241998	9.651085	0.018550	0.204033	0.323592
0.418678	0.415617	0.414474	0.415314	0.418091	0.422659	0.428797	0.436227
9.462439	9.912727	9.838333	9.969838	0.068556	0.144374	0.203029	0.248354
9.770518	0.068762	0.252807	0.385152	0.486647	0.567033	0.631826	0.684581
9.996856	9.988730	9.975668	9.957825	9.935454	9.908906	9.878614	9.858237
0.688563	0.705517	0.715821	0.719572	0.717017	0.708530	0.694606	0.675808
0.691707	0.716787	0.740153	0.761747	0.781563	0.799624	0.815992	0.830754
9.999973	9.999972	9.999970	9.999969	9.999968	9.999967	9.999966	9.999965
8.735224	8.774473	8.809196	8.840049	8.867473	8.891945	8.913733	8.933065
9.308266	9.283185	9.259817	9.238222	9.218405	9.200343	9.183974	9.169211
7.924798	7.849555	7.779451	7.714666	7.655215	7.601029	7.551922	7.507633
7.830076	7.833460	7.836916	7.840447	7.844029	7.847656	7.851307	7.854982
9.386889	8.576973	9.150667	9.526238	9.736071	9.883391	9.996704	0.088171
7.216965	6.410433	6.930118	7.240904	7.391286	7.448420	7.548626	7.595804
7.525044	6.566468	6.837100	6.8482902	7.042371	7.502970	7.752659	7.919396
8.343476	8.265172	8.193925	8.129980	8.073306	8.023688	7.980719	7.943860
9.928445	9.991221	0.018689	0.009679	9.957547	9.841169	9.839273	8.763033
8.271921	8.256393	8.212614	8.193659	8.030853	7.867857	7.551932	6.682429
7.905528	7.115950	7.645939	7.960476	8.108303	8.192950	8.243232	8.271612
5.952189	5.184906	5.739314	6.080953	6.258759	6.376365	6.462359	6.528869
1.890488	1.890490	1.890490	1.890487	1.890483	1.890477	1.890470	1.890461
0.162109	0.146883	0.103104	0.030146	9.921336	9.758334	9.482402	8.572890
9.796016	9.006440	9.536429	9.850963	9.998786	0.083427	0.133702	0.162073
7.842677	7.075396	7.629804	7.971440	8.149242	8.266842	8.352829	8.419330
+ 0" 007	+ 0" 001	+ 0" 000	+ 0" 003	+ 0" 011	+ 0" 023	+ 0" 037	+ 0" 052
- 0" 437	- 0" 078	+ 0" 287	+ 0" 627	+ 0" 912	+ 1" 124	+ 1" 247	+ 1" 274
+ 0" 1032	+ 0" 0527	+ 0" 0034	- 0" 0346	- 0" 0551	- 0" 0557	- 0" 0379	- 0" 0055
- 0" 8453	- 0" 1382	+ 0" 4695	+ 0" 9668	+ 1" 3502	+ 1" 6235	+ 1" 7972	+ 1" 8860
- 0" 7421	- 0" 0855	+ 0" 4729	+ 0" 9322	+ 1" 2951	+ 1" 5678	+ 1" 7593	+ 1" 8805
+ 7" 865	+ 7" 555	+ 6" 819	+ 5" 772	+ 4" 511	+ 3" 120	+ 1" 668	+ 0" 208
+ 0" 108	+ 0" 009	- 0" 002	+ 0" 056	+ 0" 161	+ 0" 289	+ 0" 419	+ 0" 536
0" 000	0" 000	0" 000	0" 000	+ 0" 001	+ 0" 001	+ 0" 001	+ 0" 001
+ 7" 973	+ 7" 564	+ 6" 817	+ 5" 828	+ 4" 673	+ 3" 410	+ 2" 088	+ 0" 745
+ 24" 293	+ 24" 653	+ 22" 699	+ 18" 932	+ 14" 081	+ 8" 940	+ 4" 220	+ 0" 444
+ 7" 476	+ 0" 641	- 0" 155	+ 3" 847	+ 11" 082	+ 19" 916	+ 28" 897	+ 36" 917
+ 31" 769	+ 25" 294	+ 22" 544	+ 22" 779	+ 25" 164	+ 28" 857	+ 33" 118	+ 37" 362
- 1" 606	- 0" 821	- 0" 053	+ 0" 539	+ 0" 857	+ 0" 867	+ 0" 590	+ 0" 086
+ 3" 634	+ 0" 616	- 2" 120	- 4" 324	- 5" 846	- 6" 642	- 6" 763	- 6" 324
+ 2" 028	- 0" 205	- 2" 173	- 3" 785	- 4" 989	- 5" 775	- 6" 173	- 6" 238

Datum	1875		1874					
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Jun. 29	Mai 20
β'_0	— 1° 2' 23"	— 0° 59' 26"	— 0° 56' 27"	— 0° 53' 27"	— 0° 50' 25"	— 0° 47' 23"	— 0° 44' 19"	— 0° 41' 19"
λ'_0	317° 15' 3"	316° 0' 27"	314° 45' 59"	313° 31' 39"	312° 17' 26"	311° 3' 21"	300° 49' 23"	308° 35' 32"
Ω	125° 41' 47"	125° 42' 21"	125° 42' 57"	125° 43' 40"	125° 44' 23"	125° 45' 8"	125° 45' 51"	125° 46' 33"
$\lambda'_0 - \Omega$	191° 53' 16"	190° 18' 6"	189° 3' 2"	187° 47' 59"	186° 33' 3"	185° 18' 13"	184° 3' 32"	182° 48' 59"
$\sin(\lambda'_0 - \Omega)$	9.930168	9.925244	9.919675	9.913261	9.905723	8.996583	8.984992	8.969140
$\cos \beta'_0$	9.999993	9.999993	9.999994	9.999995	9.999995	9.999996	9.999996	9.999997
$\cos(\lambda'_0 - \Omega)$	9.999111	9.999294	9.999456	9.999596	9.999716	9.999814	9.999891	9.999948
$\sin \beta'_0$	8.925877	8.923773	8.921537	8.919166	8.916628	8.913934	8.911028	8.907984
$\cos \beta'_0 \sin(\lambda'_0 - \Omega)$	9.999822	9.999798	9.999765	9.999717	9.999644	9.999523	9.999291	9.998738
Q	185° 10' 38"	185° 31' 21"	185° 57' 35"	186° 32' 11"	187° 19' 32"	188° 28' 54"	190° 19' 21"	193° 44' 42"
i	2° 12' 24"	2° 12' 24"	2° 12' 24"	2° 12' 24"	2° 12' 24"	2° 12' 24"	2° 12' 25"	2° 12' 26"
$Q - i$	182° 58' 14"	183° 18' 57"	183° 45' 11"	184° 19' 47"	185° 7' 8"	186° 16' 30"	188° 6' 56"	191° 32' 16"
$\sin(Q - i)$	8.971452	8.976223	8.981595	8.987792	8.995047	9.903862	9.914974	9.930106
q	9.30339	9.25439	9.19904	9.13539	9.06074	8.97056	8.85697	8.70399
$\cos(Q - i)$	9.999942	9.999927	9.999907	9.999876	9.999826	9.999739	9.999563	9.999113
$\cos B_1 \sin I_1$	9.930281	9.925366	9.919811	9.913415	9.905900	8.996795	8.985260	8.969512
$\cos B_1 \cos I_1$	9.999106	9.999290	9.999452	9.999593	9.999713	9.999812	9.999890	9.999947
I_1	9.999104	9.999287	9.999450	9.999591	9.999711	9.999810	9.999887	9.999945
	191° 35' 8"	190° 19' 54"	189° 4' 47"	187° 49' 41"	186° 34' 41"	185° 19' 47"	184° 5' 3"	182° 50' 27"
$\cos B_1$	9.999998	9.999997	9.999998	9.999998	9.999998	9.999998	9.999997	9.999998
r_1	0.99500	0.99537	0.99573	0.99608	0.99642	0.99676	0.99708	0.99740
$\sin B_1$	8.901791	8.901662	8.901499	8.901331	8.901121	8.900918	8.900671	8.900505
$L_1 - u$	90° 41' 24"	94° 32' 56"	98° 24' 3"	102° 15' 47"	106° 9' 5"	110° 5' 0"	114° 4' 36"	118° 8' 55"
$\cos(L_1 - u)$	8.908072	8.909933	9.916464	9.92715	9.944432	9.953578	9.961062	9.967372
$r_1 \cos B_1$	0.99498	0.99534	0.99571	0.99607	0.99640	0.99674	0.99705	0.99738
$\sin(L_1 - u)$	9.99997	9.99863	9.99532	9.98997	9.98251	9.97276	9.96047	9.94533
ξ_1	9.907570	9.908467	9.916035	9.932321	9.944072	9.953252	9.960767	9.967110
r	0.56402	0.56481	0.56488	0.56423	0.56287	0.56080	0.55803	0.55454
Subtract.	0.01426	0.08412	0.14426	0.19703	0.24424	0.28712	0.27692	0.24665
$\xi_1 - r$	9.957790	9.964893	9.970914	9.976126	9.980711	9.984792	9.988459	9.991775
	9.97031	9.95966	9.94758	9.93400	9.91882	9.90188	9.88291	9.86161
r_1	0.99495	0.99397	0.99103	0.98603	0.97891	0.96950	0.95752	0.94271
$q \cos \theta$	1.02464	1.03431	1.04345	1.05203	1.06009	1.06762	1.07461	1.08110
	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998
ξ_1	9.901291	9.901199	9.901072	9.900939	9.900763	9.900594	9.900379	9.900245
q^{-1}	8.97534	8.96567	8.95653	8.94795	8.93989	8.93236	8.92537	8.91888
q^{-3}	6.92602	6.89701	6.86959	6.84385	6.81967	6.79708	6.77611	6.75664
r_1^{-3}	7.01500	7.01389	7.01281	7.01176	7.01074	7.00972	7.00876	7.00780
Subtract.	9.35676	9.48970	9.59180	9.67395	9.74244	9.80051	9.85042	9.89378
K	6.928278	6.938671	6.946139	6.951780	6.956211	6.959759	6.962653	6.965042
$\xi_1 K$	5.35848	6.28138	6.62174	6.84101	7.02343	7.13011	7.23212	7.32152
$r: q^3$	7.49004	7.46182	7.43447	7.40808	7.38254	7.35788	7.33414	7.31118
Subtract.	9.99678	9.97035	9.92742	9.86274	9.74527	9.58356	9.41288	9.23819
R_0	7.948682	7.943217	7.936189	7.927082	7.914810	7.996867	7.964708	7.919310
S_0	7.927773	7.938068	7.945242	7.950383	7.954102	7.956709	7.958405	7.959313
W_0	5.29569	5.39870	5.47211	5.52719	5.56974	5.60353	5.63032	5.65287
$w k' m_1: \sqrt{p}$	1.36680	1.36673	1.36665	1.36657	1.36649	1.36641	1.36634	1.36627
R	8.985362	8.979890	8.972854	8.963739	8.951459	8.933508	8.901342	7.95937
S	8.964453	8.974741	8.981907	8.987040	8.990751	8.993350	8.995032	8.995940
W	6.66248	6.76543	6.83876	6.89376	6.93623	6.96994	6.99666	7.01914
$\mathcal{J}i$	0° 000	0° 000	0° 000	0° 000	0° 001	0° 001	0° 001	0° 002
$\mathcal{J}\Omega$	+ 0° 043	+ 0° 055	+ 0° 066	+ 0° 074	+ 0° 081	+ 0° 085	+ 0° 088	+ 0° 088
$\mathcal{J}\mu_1$	— 0° 0020	— 0° 0007	+ 0° 0004	+ 0° 0011	+ 0° 0014	+ 0° 0013	+ 0° 0008	— 0° 0001
$\mathcal{J}\mu_2$	+ 0° 0426	+ 0° 0539	+ 0° 0636	+ 0° 0717	+ 0° 0784	+ 0° 0836	+ 0° 0875	+ 0° 0901
$\mathcal{J}\mu$	+ 0° 0406	+ 0° 0532	+ 0° 0640	+ 0° 0728	+ 0° 0798	+ 0° 0849	+ 0° 0883	+ 0° 0900
$\mathcal{J}I_1$	+ 0° 496	+ 0° 438	+ 0° 373	+ 0° 302	+ 0° 227	+ 0° 150	+ 0° 071	— 0° 008
$\mathcal{J}I_2$	+ 0° 004	+ 0° 002	— 0° 001	— 0° 005	— 0° 010	— 0° 015	— 0° 020	— 0° 024
$\mathcal{J}I_3$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{J}I_4$	+ 0° 500	+ 0° 440	+ 0° 372	+ 0° 297	+ 0° 217	+ 0° 135	+ 0° 051	— 0° 032
$\mathcal{J}\pi_1$	— 1° 233	— 1° 099	— 0° 937	— 0° 756	— 0° 562	— 0° 364	— 0° 168	+ 0° 018
$\mathcal{J}\pi_2$	+ 0° 239	+ 0° 114	— 0° 091	— 0° 357	— 0° 664	— 0° 993	— 1° 325	— 1° 643
$\mathcal{J}\pi$	— 0° 994	— 0° 985	— 1° 028	— 1° 113	— 1° 226	— 1° 357	— 1° 493	— 1° 625
$\mathcal{J}q_1$	+ 0° 031	+ 0° 010	— 0° 006	— 0° 017	— 0° 021	— 0° 020	— 0° 012	+ 0° 002
$\mathcal{J}q_2$	+ 0° 268	+ 0° 344	+ 0° 406	+ 0° 453	+ 0° 485	+ 0° 500	+ 0° 500	+ 0° 485
$\mathcal{J}q$	+ 0° 299	+ 0° 354	+ 0° 400	+ 0° 436	+ 0° 464	+ 0° 480	+ 0° 488	+ 0° 487

1874			1873					
April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Jul. 4	Mai 25
— 0° 38' 9"	— 0° 35' 3"	— 0° 31' 56"	— 0° 28' 48"	— 0° 25' 40"	— 0° 22' 31"	— 0° 19' 22"	— 0° 16' 13"	— 0° 13' 3"
307° 21' 48"	306° 8' 10"	304° 54' 38"	303° 41' 12"	302° 27' 53"	301° 14' 39"	300° 1' 30"	298° 48' 27"	297° 35' 29"
125° 47' 10"	125° 47' 42"	125° 48' 7"	125° 48' 25"	125° 48' 37"	125° 48' 44"	125° 48' 47"	125° 48' 48"	125° 48' 48"
181° 34' 38"	180° 20' 28"	179° 6' 31"	177° 52' 47"	176° 39' 16"	175° 25' 55"	174° 12' 43"	172° 59' 39"	171° 46' 41"
8 _n 43972	7 _n 77477	8.19193	8.56817	8.76610	8.90115	9.00367	9.08626	9.15536
9.99997	9.99998	9.99998	9.99998	9.99999	9.99999	9.99999	0.00000	0.00000
9 _n 99984	9 _n 99999	9 _n 99995	9 _n 99970	9 _n 99926	9 _n 99862	9 _n 99778	9 _n 99675	9 _n 99551
8 _n 04521	8 _n 00841	7 _n 96796	7 _n 92311	7 _n 87309	7 _n 81623	7 _n 75078	7 _n 67369	7 _n 57934
9 _n 96729	9 _n 93630	9.93378	9.98914	9.99647	9.99854	9.99932	9.99968	9.99985
8 _n 43969	7 _n 77475	8.19191	8.56815	8.76609	8.90114	9.00366	9.08626	9.15536
201° 57' 33"	239° 43' 10"	329° 9' 30"	347° 14' 27"	352° 42' 34"	355° 17' 55"	356° 48' 9"	357° 47' 7"	358° 28' 46"
2° 12' 26"	2° 12' 27"	2° 12' 28"	2° 12' 29"	2° 12' 29"	2° 12' 30"	2° 12' 30"	2° 12' 30"	2° 12' 30"
199° 45' 7"	237° 30' 43"	326° 57' 2"	345° 1' 58"	350° 30' 5"	353° 5' 25"	354° 35' 39"	355° 34' 37"	356° 16' 16"
9 _n 52885	9 _n 92609	9 _n 73668	9 _n 41207	9 _n 21754	9 _n 08028	8 _n 97409	8 _n 88717	8 _n 81315
8.47240	8.07211	8.25813	8.57901	8.76962	8.90260	9.00434	9.08658	9.15551
9 _n 97366	9 _n 73007	9.92335	9.98501	9.99400	9.99683	9.99806	9.99871	9.99908
8 _n 44606	7 _n 80218	8.18148	8.56402	8.76362	8.89943	9.00240	9.08529	9.15459
9 _n 99983	9 _n 99999	9 _n 99995	9 _n 99971	9 _n 99863	9 _n 99779	9 _n 99676	9 _n 99553	9 _n 99551
9 _n 99981	9 _n 99997	9 _n 99993	9 _n 99968	9 _n 99925	9 _n 99801	9 _n 99777	9 _n 99675	9 _n 99551
181° 36' 2"	180° 21' 48"	179° 7' 47"	177° 53' 59"	176° 40' 24"	175° 26' 59"	174° 13' 43"	173° 0' 35"	171° 47' 33"
9.99998	9.99998	9.99998	9.99997	9.99998	9.99998	9.99998	9.99999	9.99998
0.99970	0.99800	0.99829	0.99857	0.99884	0.99909	0.99934	0.99958	0.99981
8 _n 00125	7 _n 99820	7 _n 99481	7 _n 99108	7 _n 98716	7 _n 98288	7 _n 97843	7 _n 97375	7 _n 96866
122° 19' 4"	126° 36' 9"	131° 1' 26"	135° 36' 8"	140° 21' 38"	145° 19' 17"	150° 30' 34"	155° 56' 59"	161° 40' 5"
9 _n 72804	9 _n 77544	9 _n 81715	9 _n 85401	9 _n 88654	9 _n 91506	9 _n 93973	9 _n 96056	9 _n 97738
0.99768	0.99798	0.99827	0.99854	0.99882	0.99907	0.99932	0.99957	0.99979
9.92691	9.90460	9.87762	9.84487	9.80479	9.75509	9.69221	9.61017	9.49765
0 _n 72572	0 _n 77342	0 _n 81542	0 _n 85255	0 _n 88536	0 _n 91413	0 _n 93905	0 _n 96013	0 _n 97717
0.55036	0.54549	0.53993	0.53369	0.52681	0.51931	0.51122	0.50261	0.49354
0.22214	0.20185	0.18477	0.17023	0.15775	0.14702	0.13780	0.12992	0.12332
0 _n 94786	0 _n 97527	1 _n 00019	1 _n 02278	1 _n 04311	1 _n 06115	1 _n 07685	1 _n 09005	1 _n 10049
9 _n 86081	9 _n 88280	9 _n 90286	9 _n 92115	9 _n 93776	9 _n 95272	9 _n 96599	9 _n 97744	9 _n 98689
0.92459	0.90258	0.87589	0.84341	0.80361	0.75416	0.69153	0.60974	0.49744
1.08705	1.09247	1.09733	1.10163	1.10535	1.10843	1.11086	1.11261	1.11360
9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999
8 _n 99895	8 _n 99620	8 _n 99310	8 _n 98965	8 _n 98600	8 _n 98197	8 _n 97777	8 _n 97333	8 _n 96847
8.91294	8.90752	8.90266	8.89836	8.89464	8.89136	8.88913	8.88738	8.88639
6.73882	6.72256	6.70798	6.69508	6.68392	6.67468	6.66739	6.66214	6.65917
7.00690	7.00600	7.00513	7.00429	7.00348	7.00273	7.00198	7.00126	7.00057
9.93139	9.96408	9.99220	0.01621	0.03630	0.05246	0.06471	0.07311	0.07730
6 _n 67021	6 _n 68664	6 _n 70018	6 _n 71129	6 _n 72022	6 _n 72714	6 _n 73210	6 _n 73525	6 _n 73647
7.39593	7.46006	7.51560	7.56384	7.60558	7.64127	7.67115	7.69538	7.71364
7.28918	7.26805	7.24791	7.22877	7.21073	7.19399	7.17861	7.16475	7.15271
9.44505	9.74507	9.93055	0.06561	0.17093	9.80818	9.83142	9.84838	9.86044
6.73423	7.01312	7.17846	7.29438	7.38166	7.44945	7.50257	7.54376	7.57408
7 _n 59480	7 _n 58922	7 _n 57607	7 _n 55470	7 _n 52383	7 _n 48130	7 _n 42363	7 _n 34499	7 _n 23391
5.66916	5.68284	5.69328	5.70094	5.70622	5.70911	5.70987	5.70858	5.70494
1.36622	1.36618	1.36616	1.36616	1.36616	1.36621	1.36624	1.36629	1.36633
8.10045	8.37930	8.54462	8.66054	8.74784	8.81566	8.86881	8.91005	8.94041
8 _n 96102	8 _n 95540	8 _n 94223	8 _n 92086	8 _n 89001	8 _n 84751	8 _n 78987	8 _n 71128	8 _n 60024
7.03538	7.04902	7.05944	7.06710	7.07240	7.07532	7.07611	7.07487	7.07127
+ 0° 002	+ 0° 002	+ 0° 003	+ 0° 003	+ 0° 003	+ 0° 003	+ 0° 004	+ 0° 004	+ 0° 004
+ 0° 086	+ 0° 082	+ 0° 077	+ 0° 070	+ 0° 061	+ 0° 051	+ 0° 040	+ 0° 029	+ 0° 017
— 0° 0014	— 0° 0030	— 0° 0049	— 0° 0070	— 0° 0092	— 0° 0115	— 0° 0137	— 0° 0156	— 0° 0171
+ 0° 0913	+ 0° 0912	+ 0° 0896	+ 0° 0865	+ 0° 0819	+ 0° 0755	+ 0° 0674	+ 0° 0574	+ 0° 0453
+ 0° 0899	+ 0° 0882	+ 0° 0847	+ 0° 0795	+ 0° 0727	+ 0° 0640	+ 0° 0537	+ 0° 0418	+ 0° 0282
— 0° 085	— 0° 161	— 0° 233	— 0° 301	— 0° 363	— 0° 418	— 0° 466	— 0° 504	— 0° 532
— 0° 029	— 0° 032	— 0° 034	— 0° 035	— 0° 035	— 0° 034	— 0° 031	— 0° 027	— 0° 021
— 0° 114	— 0° 193	— 0° 267	— 0° 336	— 0° 398	— 0° 452	— 0° 497	— 0° 531	— 0° 553
+ 0° 187	+ 0° 332	+ 0° 447	+ 0° 524	+ 0° 559	+ 0° 547	+ 0° 486	+ 0° 376	+ 0° 221
— 1° 027	— 2° 161	— 2° 329	— 2° 418	— 2° 416	— 2° 317	— 2° 116	— 1° 816	— 1° 427
— 1° 740	— 1° 828	— 1° 882	— 1° 894	— 1° 892	— 1° 770	— 1° 630	— 1° 440	— 1° 206
+ 0° 021	+ 0° 046	+ 0° 076	+ 0° 108	+ 0° 143	+ 0° 178	+ 0° 212	+ 0° 242	+ 0° 266
+ 0° 455	+ 0° 413	+ 0° 361	+ 0° 302	+ 0° 237	+ 0° 172	+ 0° 110	+ 0° 056	+ 0° 014
+ 0° 476	+ 0° 459	+ 0° 437	+ 0° 410	+ 0° 380	+ 0° 350	+ 0° 312	+ 0° 298	+ 0° 280

Datum	1873			1872				
	April 15	März 6	Jan. 25	Dec. 16	Nov. 6	Sept. 27	Aug. 18	Juli 9
λ_0'	— 0° 9'54"	— 0° 6'44"	— 0° 3'34"	— 0° 0'23"	+ 0° 2'45"	+ 0° 5'54"	+ 0° 9' 3"	+ 0° 12'11"
λ_0''	296° 22'36"	295° 9'47"	293° 57' 2"	292° 44'21"	291° 31'45"	290° 19'12"	289° 6'43"	287° 54'17"
Ω	125° 48'48"	125° 48'48"	125° 48'48"	125° 48'49"	125° 48'50"	125° 48'51"	125° 48'52"	125° 48'53"
$\lambda_0' - \Omega$	170° 33'48"	169° 20'59"	168° 8'14"	166° 55'32"	165° 42'55"	164° 30'21"	163° 17'51"	162° 5'24"
$\sin \lambda_0' - \Omega$	9.21473	9.26673	9.31296	9.35452	9.39224	9.42674	9.45849	9.48788
$\cos \lambda_0'$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\cos (\lambda_0' - \Omega)$	9.999408	9.999245	9.999062	9.998859	9.998636	9.998392	9.998128	9.997842
$\sin \lambda_0'$	7.945936	7.929196	7.915999	6.904730	6.90306	7.23458	7.42037	7.54949
$\cos \lambda_0' \sin \lambda_0' - \Omega$	9.99993	9.99998	9.99999	0.00000	0.00000	9.99999	9.99998	9.99997
Q	9.21473	9.26673	9.31296	9.35452	9.39224	9.42674	9.45849	9.48788
i	358° 59'37"	359° 23'34"	359° 42'39"	359° 58'18"	0° 11' 9"	0° 22' 5"	0° 31'29"	0° 39'37"
$Q - i$	2° 12'30"	2° 12'30"	2° 12'30"	2° 12'30"	2° 12'30"	2° 12'29"	2° 12'29"	2° 12'29"
$Q - i$	356° 47' 7"	357° 11' 4"	357° 30' 9"	357° 45'48"	357° 58'39"	358° 9'36"	358° 19' 0"	358° 27' 8"
$\sin (Q - i)$	8.974879	8.969127	8.963924	8.959137	8.954768	8.950662	8.946799	8.943153
q	9.21480	9.26675	9.31297	9.35452	9.39224	9.42675	9.45851	9.48791
$\cos (Q - i)$	9.99932	9.99948	9.99959	9.99967	9.99973	9.99978	9.99981	9.99984
$\cos B_1 \sin L_1$	9.21412	9.26623	9.31256	9.35419	9.39197	9.42653	9.45832	9.48775
$\cos B_1 \cos L_1$	9.999410	9.999247	9.999064	9.998861	9.998638	9.998394	9.998129	9.997844
L_1	9.999408	9.999245	9.999062	9.998859	9.998636	9.998392	9.998128	9.997842
$\cos B_1$	170° 34'35"	169° 21'42"	168° 8'52"	166° 56' 7"	165° 43'26"	164° 30'46"	163° 18'14"	162° 5'40"
r_1	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99998	9.99999	9.99998
$\sin B_1$	1.00003	1.00024	1.00044	1.00063	1.00081	1.00098	1.00114	1.00128
$L_1 - u$	7.996359	7.995802	7.995221	7.994589	7.993992	7.993337	7.992630	7.991944
$\cos L_1 - u$	169° 41'20"	174° 2' 8"	180° 43'40"	189° 46'50"	195° 11'59"	202° 58'46"	211° 6' 8"	219° 31'48"
$\cos L_1 - u$	9.998990	9.999764	9.999996	9.999598	9.998453	9.996409	9.993260	9.988722
$r_1 \cos B_1$	1.00001	1.00022	1.00042	1.00061	1.00079	1.00096	1.00113	1.00126
$\sin L_1 - u$	9.32883	9.01666	8.910386	9.913155	9.914860	9.915951	9.917312	9.918379
ξ_1	0.998991	0.999786	1.000038	0.999659	0.998532	0.996505	0.993373	0.988848
r	0.48411	0.47447	0.46476	0.45519	0.44599	0.43745	0.42985	0.42350
Subtract.	0.11794	0.11383	0.11104	0.10974	0.11020	0.11286	0.11840	0.12801
$\xi_1 - r$	1.910785	1.911169	1.911142	1.910633	1.909552	1.907791	1.905213	1.901649
r_1	9.999407	9.999860	9.999998	9.999757	9.999056	9.997794	9.995844	9.993043
φ_1	0.32884	0.01688	9.910428	0.913216	0.91939	0.929247	0.941425	0.950505
$q \cos \theta$	1.11378	1.11309	1.11144	1.10876	1.10496	1.09997	1.09369	1.08606
ξ_1	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999
φ_1	8.996362	8.995826	8.995265	8.994652	8.994073	8.993435	8.992764	8.992072
q^{-1}	8.88621	8.88690	8.88855	8.89123	8.89503	8.90002	8.90630	8.91393
q^{-3}	6.65863	6.66070	6.66565	6.67369	6.68509	6.70006	6.71890	6.74179
r_1^{-3}	6.99997	6.99928	6.99868	6.99811	6.99757	6.99706	6.99658	6.99616
Subtract.	0.07708	0.07211	0.06180	0.05558	0.05261	0.05190	0.05197	0.05106
K	6.973571	6.973281	6.972745	6.971927	6.970770	6.969196	6.967087	6.964285
$\xi_1 K$	7.72562	7.73067	7.72783	7.71586	7.69302	7.65701	7.60460	7.53133
$r : q^3$	7.14274	7.13517	7.13041	7.12888	7.13108	7.13751	7.14875	7.16529
Subtract.	9.86847	9.87285	9.87350	9.86992	9.86082	9.84364	9.81287	0.12154
R_0	7.59409	7.60352	7.60133	7.58578	7.55384	7.50065	7.41747	7.28683
S_0	7.906455	6.974969	5.83173	6.85143	7.12709	7.28443	7.38512	7.44790
W_0	5.69933	5.69107	5.68010	5.66579	5.64843	5.62631	5.59851	5.56357
$w l^2 m_1 : \frac{1}{p}$	1.36637	1.36641	1.36644	1.36647	1.36649	1.36651	1.36652	1.36653
R	8.96046	8.96993	8.96777	8.95225	8.92033	8.86716	8.78399	8.65336
S	8.943092	8.911610	7.19817	8.21790	8.49358	8.65094	8.75164	8.81443
W	7.06570	7.05748	7.04654	7.03226	7.01492	6.99282	6.96503	6.93010
$\mathcal{J} \dot{\Omega}$	+ 0''004	+ 0''003	+ 0''003	+ 0''003	+ 0''003	+ 0''002	+ 0''002	+ 0''001
$\mathcal{J} \dot{\lambda}_0'$	+ 0''005	+ 0''007	+ 0''018	+ 0''028	+ 0''037	+ 0''043	+ 0''048	+ 0''049
$\mathcal{J} \mu_1$	+ 0''0181	+ 0''0184	+ 0''0178	+ 0''0164	+ 0''0141	+ 0''0111	+ 0''0078	+ 0''0046
$\mathcal{J} \mu_2$	+ 0''0314	+ 0''0155	+ 0''0019	+ 0''0205	+ 0''0396	+ 0''0580	+ 0''0744	+ 0''0872
$\mathcal{J} \mu$	+ 0''0133	+ 0''0129	+ 0''0197	+ 0''0369	+ 0''0537	+ 0''0691	+ 0''0822	+ 0''0918
$\mathcal{J} L_1$	+ 0''548	+ 0''551	+ 0''540	+ 0''513	+ 0''469	+ 0''410	+ 0''335	+ 0''245
$\mathcal{J} L_2$	+ 0''014	+ 0''007	+ 0''001	+ 0''008	+ 0''013	+ 0''017	+ 0''018	+ 0''016
$\mathcal{J} L_3$	+ 0''562	+ 0''558	+ 0''539	+ 0''505	+ 0''456	+ 0''393	+ 0''317	+ 0''229
$\mathcal{J} \pi_1$	+ 0''028	+ 0''190	+ 0''413	+ 0''616	+ 0''772	+ 0''850	+ 0''828	+ 0''692
$\mathcal{J} \pi_2$	+ 0''065	+ 0''160	+ 0''054	+ 0''029	+ 0''0915	+ 1''164	+ 1''238	+ 1''123
$\mathcal{J} \pi$	+ 0''937	+ 0''650	+ 0''359	+ 0''087	+ 0''143	+ 0''314	+ 0''410	+ 0''431
$\mathcal{J} q_1$	+ 0''282	+ 0''286	+ 0''277	+ 0''255	+ 0''219	+ 0''173	+ 0''122	+ 0''071
$\mathcal{J} q_2$	+ 0''011	+ 0''016	+ 0''003	+ 0''046	+ 0''111	+ 0''190	+ 0''276	+ 0''353
$\mathcal{J} q$	+ 0''271	+ 0''270	+ 0''280	+ 0''301	+ 0''330	+ 0''363	+ 0''398	+ 0''424

b₄

1872				1871			
Mai 30	April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24
+ 0° 15' 19"	+ 0° 18' 27"	+ 0° 21' 34"	+ 0° 24' 40"	+ 0° 27' 46"	+ 0° 30' 50"	+ 0° 33' 54"	+ 0° 36' 57"
286° 41' 54"	285° 29' 34"	284° 17' 16"	283° 5' 0"	281° 52' 47"	280° 40' 35"	279° 28' 25"	278° 16' 15"
125° 48' 54"	125° 48' 54"	125° 48' 54"	125° 48' 54"	125° 48' 53"	125° 48' 52"	125° 48' 51"	125° 48' 49"
160° 53' 0"	159° 40' 40"	158° 28' 22"	157° 16' 6"	156° 3' 54"	154° 51' 43"	153° 39' 34"	152° 27' 28"
9.51520	9.54070	9.56460	9.58705	9.60820	9.62819	9.64709	9.66502
0.00000	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99998	9.99998	9.99997
9.97536	9.97209	9.96859	9.96489	9.96095	9.95678	9.95239	9.94776
7.64889	7.72972	7.79751	7.85583	7.90724	7.95274	7.99392	8.03133
9.99996	9.99995	9.99994	9.99993	9.99991	9.99990	9.99989	9.99988
9.51520	9.54069	9.56459	9.58704	9.60819	9.62817	9.64707	9.66499
0° 46' 46"	0° 53' 7"	0° 58' 46"	1° 3' 50"	1° 8' 26"	1° 12' 34"	1° 16' 24"	1° 19' 54"
2° 12' 29"	2° 12' 29"	2° 12' 29"	2° 12' 29"	2° 12' 29"	2° 12' 29"	2° 12' 29"	2° 12' 29"
358° 34' 17"	358° 40' 38"	358° 46' 17"	358° 51' 21"	358° 55' 57"	359° 0' 5"	359° 3' 55"	359° 7' 25"
8.99675	8.99333	8.99126	8.99034	8.98702	8.982125	8.976254	8.970456
9.51524	9.54074	9.56465	9.58711	9.60828	9.62827	9.64718	9.66511
9.99987	9.99988	9.99990	9.99991	9.99992	9.99993	9.99994	9.99995
9.51511	9.54062	9.56455	9.58702	9.60820	9.62820	9.64712	9.66506
9.97537	9.97210	9.96860	9.96489	9.96095	9.95678	9.95238	9.94774
9.97536	9.97208	9.96858	9.96488	9.96094	9.95676	9.95237	9.94773
160° 53' 13"	159° 40' 52"	158° 28' 27"	157° 16' 12"	156° 3' 53"	154° 51' 36"	153° 39' 25"	152° 27' 14"
9.99999	9.99998	9.99998	9.99999	9.99999	9.99998	9.99999	9.99999
1.00142	1.00155	1.00166	1.00177	1.00186	1.00195	1.00202	1.00208
7.99199	7.99047	7.98959	7.988745	7.98780	7.98692	7.985972	7.984967
228° 12' 41"	237° 4' 34"	246° 2' 16"	255° 0' 34"	263° 53' 43"	272° 36' 42"	281° 5' 16"	289° 15' 54"
9.982373	9.973522	9.960867	9.941273	9.92672	8.91864	9.28401	9.51843
1.00141	1.00153	1.00164	1.00176	1.00185	1.00193	1.00201	1.00207
9.987251	9.982396	9.976086	9.969496	9.962753	9.955955	9.949182	9.942498
0.982514	0.973675	0.961031	0.941449	0.92857	0.916057	0.904602	0.893205
0.41868	0.41562	0.41447	0.41531	0.41809	0.42266	0.42880	0.43623
0.14371	0.16949	0.21406	0.30062	0.14855	0.91753	0.59023	0.33071
0.96885	0.960624	0.952437	0.941593	0.93664	0.934019	0.9317625	0.929694
9.989180	9.985890	9.980774	9.974515	9.967225	9.959891	9.951874	9.943918
0.987392	0.982549	0.976250	0.968672	0.960938	1.000148	0.990383	0.97705
1.07705	1.06659	1.05476	1.04157	1.02713	1.01157	0.99509	0.97787
9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	9.99999
8.991341	8.990562	8.989757	8.988922	8.988036	8.987147	8.986174	8.985175
8.92294	8.93340	8.94523	8.95842	8.97286	8.98842	9.00490	9.02212
6.76882	6.80020	6.83569	6.87526	6.91858	6.96526	7.01470	7.06636
6.99574	6.99535	6.99502	6.99469	6.99442	6.99415	6.99394	6.99376
9.83648	9.75381	9.64661	9.50041	9.28059	8.83749	8.68987	8.55966
6.960530	6.955401	6.948230	6.937567	6.9219917	5.90275	5.68381	6.25372
7.43044	7.29076	7.09261	6.79017	6.22774	5.46332	5.96983	6.77422
7.18750	7.21582	7.25016	7.29057	7.33667	7.38792	7.44350	7.50259
9.87483	9.27494	9.64079	9.83510	9.96482	0.00514	9.98516	9.91014
7.06233	6.49076	6.73340	7.12567	7.30149	7.39306	7.42866	7.41273
7.47922	7.47950	7.44480	7.36239	7.19855	6.80423	6.67764	7.23077
5.51871	5.45963	5.37987	5.26489	5.07953	4.67422	4.54555	5.10547
1.36653	1.36653	1.36653	1.36653	1.36653	1.36652	1.36652	1.36651
8.42886	7.85729	8.09993	8.49220	8.66802	8.95958	8.79518	8.77924
8.84575	8.84603	8.81133	8.72892	8.56508	8.17075	8.04416	8.59728
6.88524	6.82616	6.74640	6.63142	6.44606	6.04074	5.91207	6.47198
+ 0° 001	0° 000	0° 000	0° 000	0° 000	0° 000	0° 000	0° 001
— 0° 048	— 0° 044	— 0° 038	— 0° 029	— 0° 018	— 0° 007	+ 0° 005	+ 0° 014
— 0° 0019	— 0° 0003	— 0° 0000	— 0° 0010	— 0° 0031	— 0° 0056	— 0° 0078	— 0° 0089
— 0° 0948	— 0° 0955	— 0° 0884	— 0° 0730	— 0° 0497	— 0° 0199	+ 0° 0146	— 0° 0514
— 0° 0967	— 0° 0958	— 0° 0884	— 0° 0740	— 0° 0528	— 0° 0255	+ 0° 0068	+ 0° 0425
— 0° 145	— 0° 039	+ 0° 068	+ 0° 167	+ 0° 252	+ 0° 313	+ 0° 343	+ 0° 334
+ 0° 012	+ 0° 006	0° 000	— 0° 004	— 0° 006	— 0° 004	+ 0° 003	+ 0° 015
— 0° 133	— 0° 033	+ 0° 068	+ 0° 163	+ 0° 246	+ 0° 309	+ 0° 346	+ 0° 349
— 0° 449	— 0° 127	+ 0° 225	+ 0° 549	+ 0° 786	+ 0° 897	+ 0° 867	+ 0° 714
+ 0° 838	+ 0° 443	+ 0° 029	+ 0° 290	— 0° 408	— 0° 244	+ 0° 235	+ 1° 006
+ 0° 389	+ 0° 316	+ 0° 254	+ 0° 259	+ 0° 378	+ 0° 653	+ 1° 102	+ 1° 720
+ 0° 030	+ 0° 004	— 0° 001	+ 0° 016	+ 0° 048	+ 0° 087	+ 0° 121	+ 0° 139
+ 0° 408	+ 0° 426	+ 0° 399	+ 0° 326	+ 0° 215	+ 0° 081	— 0° 055	— 0° 172
+ 0° 438	+ 0° 430	+ 0° 398	+ 0° 342	+ 0° 263	+ 0° 168	+ 0° 066	— 0° 033

Datum	f^v	f^{iv}	f^{iii}	f^{ii}	f^i	$w^2\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$	uf	$4\Delta u$	Δu	ΔL_2	(ΔL_1)	u_0t+L_0	L
1871 Aug. 24					-0.1569	+1.9230	+5.377157	+16.81	+0.420	+5.53"	+20.10"3	1.5633"6	2.0223"6
Oct. 3				669	+1.7535	+1.7535	+5.53"5462	+18.65	+0.466	+6.11"	+20.12"1	9.0349"5	9.03013"0
Nov. 12		14	93	762	-0.2238	+1.5423	+6.11"2997	+20.31	+0.508	+6.30"9	+20.15"2	16.011"53	16.03751"4
Dec. 22		24	79	841	-0.3000	+1.2423	+6.30"8193	+21.71	+0.543	+6.52"0	+20.19"5	23.01821"1	23.04532"6
1872 Jan. 31		30	55	896	-0.3841	+1.0882	+6.51"8812	+22.77	+0.569	+7.14"3	+20.25"0	30.02537"0	30.05316"3
März 11		29	25	921	-0.473-	+0.3845	+7.14"1854	+23.40	+0.585	+7.37"4	+20.31"4	37.03252"8	38.011"6
April 20		32	4	917	-0.5658	-0.1813	+7.37"34-8	+23.51	+0.588	+8.0"9	+20.38"6	44.040"87-	45.0848"2
Mai 30	-1	34	36	881	-0.65-5	-0.8388	+8.0"8947	+23.00	+0.575	+8.24"2	+20.46"4	51.04724"5	52.01635"1
Juli 9	+22	33	70	811	-0.7456	-1.5844	+8.46"871	+21.80	+0.545	+8.46"6	+20.54"2	58.05440"4	59.02421"2
Aug. 18	+19	35	103	708	-0.8267	-2.4111	+9.0"295	+19.82	+0.495	+9.7"5	+21.1"6	66.0156"2	66.032"53
Sept. 27	+48	74	232	550	-0.8975	-3.3086	+9.26"2608	+16.95	+0.424	+9.26"0	+21.7"8	73.0912"0	73.03945"8
Nov. 6	+51	122	354	318	-0.9525	-4.2611	+9.41"4835	+13.17	+0.329	+9.41"1	+21.12"1	80.01627"9	80.04721"1
Dec. 16	+64	173	527	36	-0.9843	-5.2454	+9.52"4451	+8.42	+0.210	+9.52"0	+21.13"2	87.02343"7	87.05478"9
1873 Jan. 25	+28	237	764	563	-0.9807	-6.2261	+9.58"1613	+2.68	+0.067	+9.57"6	+21.9"8	94.03059"6	95.027"0
März 6	+18	265	1029	1327	-0.9244	-7.1505	+9.57"6514	-4.02	-0.100	+9.57"1	+21.0"1	101.03815"4	102.0912"6
April 15	-155	247	1276	2356	-0.7917	-7.9422	+9.49"9910	-11.57	-0.289	+9.49"3	+20.42"2	108.04531"2	109.01612"7
Mai 25	-296	92	1368	3632	-0.5561	-8.4983	+9.34"3884	-19.81	-0.495	+9.33"7	+20.13"7	115.05247"1	116.02234"5
Juli 4	-467	204	1164	5000	-0.1929	-8.6912	+9.10"2875	-28.44	-0.711	+9.9"6	+19.32"6	123.029"9	123.02845"1
Aug. 13	-428	671	493	6164	+0.3071	-8.3841	+8.37"4954	-37.03	-0.926	+8.36"8	+18.36"8	130.0718"8	130.03432"4
Sept. 22	-157	1099	606	6657	+0.9235	-7.4606	+7.56"3192	-45.01	-1.125	+7.55"7	+17.25"0	137.01434"6	137.03955"3
Nov. 1	+313	1256	1862	6051	+1.5892	-5.8714	+7.7"6824	-51.74	-1.293	+7.7"2	+15.57"3	144.02150"5	144.04455"0
Dec. 11	+747	943	2805	4189	+2.1943	-3.6771	+6.13"1742	-56.56	-1.414	+6.13"0	+14.15"6	151.029"63	151.04934"9
1874 Jan. 20	+795	196	3001	1384	+2.6132	-1.0639	+5.14"9889	-58.95	-1.474	+5.14"9	+12.23"5	158.03622"1	158.054"05
März 1	+453	599	2402	1617	+2.5899	+1.6877	+4.15"397	-58.63	-1.466	+4.15"9	+10.26"5	165.04338"0	165.05820"4
April 10	+39	1091	1350	4019	+2.1880	+4.2776	+3.18"182	-55.62	-1.390	+3.18"5	+8.29"8	172.05053"8	173.0242"1
Mai 20	-307	784	259	5369	+2.1880	+6.4656	+2.24"8943	-50.20	-1.255	+2.25"4	+6.38"8	179.058"97	180.0713"9
Jun. 29	-387	397	525	5628	+1.6511	+8.1167	+1.38"0760	-42.85	-1.071	+1.38"8	+4.57"5	187.0525"5	188.012"18
Aug. 8	-299	98	922	5103	+0.5780	+9.2050	+9.3744	-34.17	-0.854	+1.0"1	+3.28"5	194.01241"4	194.01710"0
Sept. 17	-189	91	1020	4181	+0.1599	+9.7830	+29.8778	-24.64	-0.616	+30"7	+2.12"9	201.0195"2	201.02240"8
Oct. 27	-82	173	756	1476	-0.1562	+9.7867	+9.7707					208.02713"0	
Dec. 6					-0.3794	+9.4073	+0.0160					215.03728"9	
1875 Jan. 15					-0.5270	+8.8803	+9.4233					222.04144"7-	
Feb. 24							+9.8328					229.049"06	

Datum	f^v	f^{iv}	f^{iii}	f^{ii}	f^i	$w \left(\frac{dL}{dt} \right)$	if	LL_1	f^v	f^{iv}	f^{iii}	f^{ii}	f^i	$w \left(\frac{d\pi}{dt} \right)$	if	$\Delta\pi$
1871 Aug. 24						1"094	+20' 9"873	+20' 10"3						+39"082	-1° 1'42"960	-1° 1'23"0
Oct. 3						2"434	+20' 10"967	+20' 12"1						+34"220	-1° 1' 3"8-8	-1° 0'46"3
Nov. 12						3"719	+20' 13"401	+20' 15"2						+29"510	-1° 0'29"638	-1° 0'14"5
Dec. 22						4"919	+20' 17"120	+20' 19"5						+25"542	-1° 0' 0'148	-59'47"1
1872 Jan. 31						5"991	+20' 22"039	+20' 25"0						+23"038	-59'34"606	-59'23"0
März 11						6"885	+20' 28"030	+20' 31"4						+22"798	-59'11"568	-59' 0"3
April 20						7"531	+20' 34"915	+20' 38"6						+25"610	-58'48"7-0	-58'36"3
Mai 30						7"840	+20' 42"446	+20' 46"4						+32"158	-58'23"160	-58' 7"8
Juli 9						7"693	+20' 50"286	+20' 54"2						+42"950	-57'51"002	-57'30"6
Aug 18						6"949	+20' 57"979	+21' 1"6						+15"296	-57' 8"032	-56'40"3
Sept. 27						5"425	+21' 4"928	+21' 7"8						+19"780	-56' 9"806	-55'32"6
Nov. 6						2"903	+21' 10"353	+21' 12"1						+11"18"026	-54'51"780	-54' 2"9
Dec. 16						0"884	+21' 13"256	+21' 13"2						+2' 9"373	-53' 9"823	-52' 7"5
1873 Jan. 25						6"225	+21' 12"3-2	+21' 9"8						+2' 39"197	-51' 0"450	-49'43"4
März 6						13"433	+21' 6"147	+21' 0"1						+3' 9"873	-48'21"253	-46'48"8
April 15						22"7-8	+20' 52"714	+20' 42"2						+3' 39"297	-45'11"380	-43'24"1
Mai 25						34"411	+20' 29"936	+20' 13"-						+4' 4"772	-41'32"083	-39'31"7
Juli 4						48"232	+19' 55"525	+19' 32"6						+4' 23"179	-37'27"311	-35'17"1
Aug 13						1' 3"736	+19' 7"293	+18' 36"8						+33' 4"132	-28'32"735	-26'18"2
Sept. 22						1'19"884	+18' 3"55-	+17' 25"0						+4' 27"056	-24' 5"679	-21'58"-
Nov. 1						1'35"119	+16'43"673	+15'57"3						+4' 9"583	-19'56"096	-18' 2"8
Dec. 11						1'47"561	+15' 8"554	+14'15"6						+3'40"912	-16'15"184	-14'39"3
1874 Jan. 20						1'55"499	+13'20"993	+12'23"5						+3' 5"552	-13' 9"632	-11'52"1
März 1						2"386	+11'25"494	+10'26"5						+2'29"462	-10'40"170	-9'38"9
April 10						3"225	+9'27"609	+8'29"8						+31"201	-8'41"909	-7'52"8
Mai 20						4' 739	+7'32"949	+6'38"8						+22"630	-7' 6"2-8	-6'24"3
Juni 29						5' 552	+5'46"253	+4'57"5						+12"893	-5'43"540	-5' 4"2
Aug. 8						6' 636	+4'10"830	+3'28"5						+4'130	-4'24"932	-3'44"6
Sept. 17						7' 910	+2'48"443	+2'12"9						+2'451	-3' 3"8-3	-
Oct. 27						8' 934	+1'39"533							+1'27"584	-1'36"289	-
Dec. 6						9' 938	+43"599							+1'35"934	-0"355	-
1875 Jan. 15						10' 538	+44"038							+1'44"360	-1'44"005	-
Febr. 24						11' 427	+35"939							+1'51"647	-	-

Datum	η										ζ									
	f^{iv}	f^{iii}	f^{ii}	f^i	$w\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$	$\Delta\eta$	$\Delta\zeta$	f^{iv}	f^{iii}	f^{ii}	f^i	$w\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)$	$\Delta\Omega$	f^{iv}	f^{iii}	f^{ii}	f^i	$w\left(\frac{d\dot{\iota}}{dt}\right)$	$\Delta\dot{\iota}$	$\dot{\iota}$
1871 Aug. 24					6"2-1	-12'41"6-7-8	-12'44"8					+1"288	+6' 8"982					+5"586	+5"4	
Oct. 3					6"107	-12'47"949	-12'51"0					+1.552	+6'10"270					+5"439	+5"5	
Nov. 12		45			5"607	-12'54"056	-12'56"9					+1.117	+6'11"322					+5"4-6	+5"5	
Dec. 22	24	21			4"726	-12'59"663	-13' 2"1					+0.894	+6'12"659					+5"499	+5"5	
1872 Jan. 31	38	17			3"443	-13' 4"389	-13' 6"2					+0.598	+6'13"333					+5"510	+5"5	
März 11	36	53			1"7-5	-13' 7"832	-13' 8"9					+0.249	+6'14"131					+5"513	+5"5	
April 20	38	91			0"225	-13' 9"607	-13' 9"7					+0.122	+6'14"380					+5"513	+5"5	
Mai 30	30	121			2"466	-13' 9"382	-13' 8"3					+0.485	+6'14"258					+5"514	+5"5	
Juli 9	8	129			2"361	-13' 6"916	-13' 4"-					+0.316	+6'13"773					+5"522	+5"5	
Aug. 18	4	133			4"827	-13' 2"089	-12'58"7					+0.801	+6'12"972					+5"538	+5"6	
Sept. 27	22	111			7"179	-12'54"910	-12'50"4					+1.033	+6'11"339					+5"533	+5"6	
Nov. 6	32	79			9"389	-12'45"521	-12'40"0					+1.144	+6'10"795					+5"509	+5"7	
Dec. 16	47	32			11"346	-12'34"175	-12'27"8					+0.924	+6' 8"759					+5"803	+5"8	
1873 Jan. 25	69	37			12"971	-12'21"204	-12'14"1					+0.603	+6' 8"156					+5"90-	+5"8	
März 6	91	128			14"232	-12' 6"972	-11'59"4					+0.217	+6' 7"939					+5"90-	+6"0	
April 15	110	238			15"166	-11'51"806	-11'43"9					+0.106	+6' 8"045					+5"909	+6"1	
Mai 25	121	359			15"901	-11'35"905	-11'27"6					+0.148	+6' 8"193					+5"909	+6"1	
Juli 4	99	458			16"6-5	-11'19"230	-11'10"4					+0.391	+6' 7"802					+5"909	+6"0	
Aug. 13	10	468			17"847	-11' 1"383	-10'51"7					+1.876	+6' 5"926					+5"909	+5"8	
Sept. 22	443	325			19"875	-10'41"508	-10'30"3					+4.660	+5'57"4					+5"909	+5"4	
Nov. 1	322	3			23"227	-10'18"281	-10' 4"7					+8.953	+5'52"313					+5"909	+5"4	
Dec. 11	401	442			28"228	-9'50"053	-9'33"3					+4.686	+5'52"627					+5"909	+5"4	
1874 Jan. 20	179	843			34"881	-9'15"172	-8'54"5					+21.423	+5'52"704					+5"909	+5"4	
März 1	114	1022			42"744	-8'32"428	-8' 7"6					+28.422	+5'16"204					+5"909	+5"4	
April 10	335	908			50"974	-7'41"454	-7'12"8					+34.804	+4'42"9-8					+5"909	+5"4	
Mai 20	412	573			58"549	-6'42"905	-6'11"0					+39.836	+3'33"142					+5"909	+5"4	
Juni 29	329	161			1' 4"561	-5'38"344	-5' 4"3					+43.076	+2'50"066					+5"909	+5"4	
Aug. 8	186	168			1' 8"437	-4'29"907	-3'54"9					+44.430	+2' 5"636					+5"909	+5"4	
Sept. 17	81	354			1'10"016	-3'19"891	-2'45"1					+44.057	+1'21"579					+5"909	+5"4	
Oct. 27	20	435			1' 9"466	-2'10"425	-1' 3"284					+42.276	+39"303					+5"909	+5"4	
Dec. 6	55	415			1' 7"141	-1' 3"284	-0"192					+39.450	-0"147					+5"909	+5"4	
1875 Jan. 15		360			1' 3"476	+0"192	+59"078					+35.939	-36"086					+5"909	+5"4	
Febr. 24					58"886	+53"731						+32.040						+5"909	+5"4	

D. Allgemeine Uebersicht der Methoden zur strengen Berechnung der speciellen Störungen.

Ueberblickt man die für jede der drei vorangehend entwickelten Methoden nöthigen numerischen Operationen, so wird man leicht wahrnehmen, dass die Encke'sche Methode am wenigsten Arbeit bedingt; etwas mehr Mühe erfordert die Hansen-Pietjen'sche Methode, die meiste Arbeit verursacht die Methode der Variation der Constanten, ohne dass übrigens dieser Arbeitszuwachs ein allzu bedeutender zu nennen ist. Diese Bemerkungen verlieren jedoch ihre Gültigkeit, wenn die Störungsrechnungen durch längere Zeit fortgesetzt werden und die Störungen anzuwachsen beginnen; dann drehen sich die Verhältnisse völlig um; bei Encke's Methode wird zuerst die Nothwendigkeit auftreten, auf osculirende Elemente überzugehen, und diese Arbeit ist als eine nicht ganz geringe anzusehen, um so mehr, da beif. Beginn der Rechnung an der neuen Osculationsepoche die Integration von Neuem zu beginnen ist. Bei Hansen-Pietjen's Methode kann dieser Uebergang sehr lange hinausgeschoben werden, doch wird derselbe endlich nöthig; denn, wenn die Störungen sehr bedeutend anwachsen, so wird der Gang der zu ermittelnden Differentialquotienten ein sehr unregelmässiger; die Principien der mechanischen Quadratur fordern aber, dass sich die vorgelegte Function innerhalb der Störungsintervalle nach Potenzen der Argumente entwickeln lässt, dass also die Differenzwerthe an Grösse verhältnissmässig rasch abnehmen. Man sieht, wenn man dieses Erforderniss zusammenhält mit der Thatsache, dass bei der Bestimmung der Coordinatenstörungen selbst bei mässigen Störungen endlich stets der Zeitpunkt eintritt wo der Gang der Differenzen ein sehr unregelmässiger wird, dass die Methode der Variation der Constanten sich den Forderungen der mechanischen Quadratur am besten anschliesst. Ich stehe daher nicht an, zu behaupten, dass, wenn es sich darum handelt, für ein sehr langes Zeitintervall die Störungen zu bestimmen, man das genaueste und sicherste Resultat nach dieser Methode erhalten wird, denn der sonst als das radikalste Mittel empfohlene Uebergang auf osculirende Elemente ist ein Nothbehelf, der leicht so viel Mehrarbeit verursacht, als durch die frühere kürzere Rechnung gewonnen wurde; andererseits kann die Discontinuität in der Rechnung leicht die Quelle eines Rechnungsfehlers werden, während bei der Variation der Constanten der regelmässige Gang der Differenzwerthe für immer vor constanten Fehlern schützen wird. Beachtet man überdies, da wohl kaum ein Rechner behaupten darf, dass er niemals fehle, dass die Ausmerzung der Fehler bei der Methode der Coordinatenstörungen viel schwieriger ist, indem kleine, das Resultat merkbar schädigende Fehler erst nach einigen Intervallen entdeckt werden und ein grosser Theil der Rechnung von der Stelle des Fehlers an corrigirt werden muss, so wird man sich wohl der von mir auf Grundlage vielfältiger Erfahrungen aufgestellten Behauptung anschliessen, dass die Variation der Constanten in der numerischen Anwendung ebenso, wie in der Analyse

ihren Vorrang behauptet. Nur in jenen Fällen, wo die Bahnen sehr excentrisch sind, wird die Folge des Umstandes, dass die Constanten bei verhältnissmässig geringen Störungen starke Variationen erfahren, die Hansen-Tietjen'sche Methode den Vorrang behaupten.

Hat man aber die Störungen nur für einen sehr beschränkten Zeitraum zu ermitteln, etwa für die Erscheinung eines Kometen oder für einen Planeten für die Zeit einer Opposition, dann wird Encke's Methode unstreitig den Vorzug verdienen. Als ein Vorthail der Methode der Coordinatenstörungen muss auch die Bequemlichkeit betrachtet werden, mit welcher die Störungen an die ungestörten Coordinaten angebracht werden können.

Bei den kleinen Planeten wird man in der Regel zuerst mit sehr rohen Elementen die Störungsrechnung beginnen können; es wird daher wohl stets nothwendig werden, dieser genäherten Störungsrechnung eine zweite nachfolgen zu lassen, die aber auf den Zeitpunkt zu verschieben sein wird, bis das vorhandene Beobachtungsmaterial in Verbindung mit den genäherten Störungswerthen die Ermittlung hinreichend sicherer Elemente zur Bestimmung der definitiven Störungswerthe gestattet. Zur Berechnung dieser provisorischen Störungen kann, wenn man die Variation der Constanten zur Ermittlung derselben benützt, in Anbetracht der Ungenauigkeit der zu Grunde gelegten Elemente, durch längere Zeit ein und dasselbe Elementensystem zur Auswerthung der Differentialquotienten verwendet werden, und ebenso können bei Anwendung der Methode der Coordinatenstörungen alle Glieder, die zweiter Ordnung sind, fortgelassen werden: ich lege aber auf solche Abkürzungen keinen besonderen Werth, indem nicht allzuviel Arbeit erspart wird. Will man sich aber mit Resultaten begnügen, die blos die ersten Potenzen der Massen berücksichtigen, so wird man sich mit Vorthail der im folgenden Abschnitte auseinandergesetzten Methoden bedienen können, die den Vorthail gewähren, dass dieselben die Kürze und Genauigkeit der Coordinatenstörungen gewähren, jedoch die den letzteren anhaftenden Uebelstände, die durch die Einführung der indirecten Glieder entstehen, ganz beseitigen.

Schliesslich ist noch auf einen Umstand aufmerksam zu machen, der bei der Methode der Störungsrechnung nach der Variation der Coordinaten möglicher Weise in Betracht kommt. Es wird sich nämlich häufig genug Veranlassung finden, nachdem man längere Zeit die Störungen mit nahe richtigen Elementen fortgeführt hat, die zu Grunde gelegten Elemente nach neueren Beobachtungen zu verbessern; die Fortsetzung der Störungsrechnung wird dann offenbar an der Stelle, wo man den Wechsel in den Elementen hat eintreten lassen, einen mehr minder hervortretenden Sprung in den Differenzwerthen der Störungscomponenten zeigen, der um so auffälliger sein wird, je grösser die in den Elementen vorgenommenen Verbesserungen sind. Dieser Sprung erklärt sich einfach genug aus den vernachlässigten Producten der Incremente der Elemente in die Störungswerthe. Hierbei wird man aber die auffällige Bemerkung machen, dass eine nach der Variation der Constanten durchgeführte Rechnung diesen Sprung kaum merklich hervortreten lässt, während

bei der Variation der Coordinaten in Folge der grossen indirecten Glieder derselbe viel auffälliger hervortritt; man wird daher voraussichtlich der Wahrheit näher kommen und bessere Resultate erlangen, wenn man [die Störungsrechnung nach der Variation der Coordinaten durchgeführt vorausgesetzt] an der Stelle, von wo ab die Störungsrechnung mit den verbesserten Werthen der Elemente fortgeführt werden soll, auf osculirende Elemente übergeht, und hierbei zur Ermittlung der ungestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten die der bisherigen Störungsrechnung zu Grunde gelegten Elemente benützt. Man findet so jene Incremente, welche die Störungen von der Osculationsepoche an den Elementen hinzugefügt haben, und erhält somit ein mit der Variation der Constanten identisches Resultat. Diese so bestimmten Incremente wird man an die verbesserten Ausgangselemente anbringen und mit diesen Werthen die Störungsrechnung von der neuen Osculationsepoche ab nach der Variation der Coordinaten fortsetzen.

Mit Rücksicht auf die oben gemachten Einschränkungen möchte ich als Resultat der hier gemachten Betrachtungen den Satz hinstellen, dass von den in diesem Werke entwickelten Methoden der strengen Störungsrechnung die Methode der Variation der Constanten in der Anwendung den unbedingten Vorzug verdient.

E. Ermittlung der Störungswerthe mit Rücksicht auf die ersten Potenzen derselben.

Es kann unter Umständen eine blos genäherte Kenntniss der Störungswerthe erwünscht sein, in welchem Falle man sich auf die Glieder erster Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte beschränken darf: da sich unter dieser Voraussetzung für die Rechnung wesentlich bequemere Vorschriften angeben lassen, als dies bei den vorstehenden Methoden möglich ist, so werde ich hier auf dieselben eingehen, um so mehr, da mir nicht bekannt ist, dass von den hier zur Entwicklung gelangenden (Laplace'schen) Integrationsmethoden zur Ermittlung der speciellen Störungswerthe irgendwo Gebrauch gemacht ist. Ich werde die Methode auf die Hansen-Tietjen'sche Form der Störung der polaren Coordinaten anwenden, wodurch sich Formen ergeben werden, welche die Vortheile der Coordinatenstörungen mit jenen der Variation der Constanten verbinden, indem jede indirecte Rechnung vermieden ist, ohne dass die Glieder zweiter Ordnung, die bei der Variation der Constanten sehr bald merklich hervortreten, einen allzu nachtheiligen Einfluss äussern. Es lassen sich allerdings noch wesentlich veränderte und bequemere Integrationsmethoden angeben, auf welche ich jedoch vorerst hier nicht eingehe.

Die Differentialgleichungen, welche in der Hansen-Tietjen'schen Methode die indirecte Rechnung bedingen, haben die Form (vergl. pag. 149):

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}\xi = A. \quad 1)$$

Verbindet man diesen Ausdruck mit den beiden für die ungestörte Bewegung geltenden Differentialgleichungen (I pag. 42):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} x_0 &= 0 \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} y_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

so erhält man zunächst, wenn man x_0 mit r identificirt, was gestattet ist, ohne mehr als Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen zu vernachlässigen, weil $\frac{1}{r^3}$ mit einem Störungswerte ξ selbst multiplicirt erscheint, durch die Elimination von $\frac{1}{r^3}$ aus der ersten Gleichung 2) und der Gleichung 1):

$$x_0 \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \xi \frac{d^2 x_0}{dt^2} = x_0 A,$$

und ebenso aus der zweiten Gleichung in 2):

$$y_0 \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \xi \frac{d^2 y_0}{dt^2} = y_0 A;$$

die Integration dieser Ausdrücke gibt zufolge der Relation:

$$\frac{d}{dt} \left\{ x_0 \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{dx_0}{dt} \right\} = x_0 \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \xi \frac{d^2 x_0}{dt^2},$$

sofort die Formen:

$$\left. \begin{aligned} x_0 \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{dx_0}{dt} &= \int A x_0 dt + C' \\ y_0 \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{dy_0}{dt} &= \int A y_0 dt + C'' \end{aligned} \right\} \quad 3)$$

Knüpft man an diese Integrale die Bedingung, dass dieselben für die Osculations-epoche der Null gleich werden, so resultirt daraus, dass die Integrations-Constanten ebenfalls der Null gleich zu setzen sind; diese Bestimmung wird in der Folge festgehalten werden. Multiplicirt man nun die erste der Gleichungen 3) mit $+y_0$, die zweite mit $-x_0$ und addirt die Resultate, so erhält man sofort:

$$\xi \left\{ x_0 \frac{dy_0}{dt} - y_0 \frac{dx_0}{dt} \right\} = y_0 \int A x_0 dt - x_0 \int A y_0 dt. \quad 4)$$

Betrachtet man als die xy -Ebene die ungestörte Bahnebene, so ist der in der Klammer stehende Ausdruck nichts anderes, als das doppelte Sectordifferential (vergl. I pag. 42 und 45); man kann daher schreiben:

$$x_0 \frac{dy_0}{dt} - y_0 \frac{dx_0}{dt} = r^2 \frac{dr}{dt} = k V \overline{\rho_0 (1 + m)}; \quad 5)$$

vernachlässigt man, wie dies schon oben geschehen ist, die zweiten und höheren Potenzen der Massen, und lässt überall den Nullindex weg, so erhält man:

$$\xi = \frac{y}{k V p} \int A x dt - \frac{x}{k V p} \int A y dt. \quad 6)$$

in welchem Ausdrücke der Parameter und die auftretenden Coordinaten der ungestörten Bewegung entlehnt werden dürfen, ohne die gesetzte Genauigkeitsgrenze zu überschreiten.

Durch die Gleichung 6) ist demnach eine directe Integration der vorgelegten Differentialgleichung ermöglicht, welche bis auf Grössen von der zweiten Ordnung der Massen richtig ist. Man könnte das eben angezeigte Verfahren ohne allzugrosse Schwierigkeiten auf strenge Formen hinführen, doch würden in diesem Falle vielfache Complicationen auftreten, so dass die früher entwickelten strengen Störungsmethoden für die Anwendung bequemer erscheinen. Uebrigens bietet diese Methode noch die Möglichkeit, jene Correctionen der Störungswerthe zu ermitteln, die aus einer Abänderung der zu Grunde gelegten Elemente entstehen; doch gehe ich auf diese Entwicklungen hier nicht näher ein.

Bei der Gleichung 6) wurde vorerst über die Wahl des Coordinatensystemes für x und y nichts weiter festgesetzt, ausser dass die xy -Ebene mit der ungestörten Bahnebene zusammenfällt, was durch die Einführung der Gleichung 5) geschah. Legt man die positive x -Achse in das Perihel, so wird

$$\begin{aligned}x &= r \cos v \\y &= r \sin v ;\end{aligned}$$

da aber bei der gewöhnlich üblichen Einheit in r durch die Multiplication mit x und y bei der Anwendung dieser Methode auf die kleinen Planeten eine Vergrösserung der numerischen Werthe eintreten würde, so setze ich:

$$\begin{aligned}x &= \cos E - e \\y &= \sin E \cos \varphi ,\end{aligned}$$

wo E die excentrische Anomalie vorstellt, also die Grösse a (die halbe grosse Achse) als Einheit eingeführt erscheint; die hier auftretenden Grössen sind übrigens durch die vorbereitenden Rechnungen bereits bekannt.

Das Resultat der bisherigen Untersuchungen lässt sich also dahin aussprechen, dass ein bis auf Grössen zweiter Ordnung richtiger Werth aus der Integration der Differentialgleichung 1) hervorgeht durch:

$$\xi = \frac{a^2}{k\sqrt{p}} \left\{ \sin E \cos \varphi \int A (\cos E - e) dt - (\cos E - e) \int A \sin E \cos \varphi dt \right\} . \quad 7)$$

Es soll nun diese Form, die einer sehr allgemeinen Anwendung fähig ist, für die Hansen-Tietjen'sche Wahl der polaren Coordinaten verwendet werden. Die Anwendung der ursprünglichen Hansen'schen Form wäre zwar in diesem Falle zweckmässiger, doch wird es unter der Voraussetzung, dass einer nach der vorliegenden Methode geführten vorläufigen Störungsrechnung seiner Zeit eine strenge Berechnung der Störungen etwa nach der Hansen-Tietjen'schen Methode nachfolgen soll, angemessener und bequemer sein, diese Form bereits in Rechnung gezogen zu haben.

Nimmt man nur auf die ersten Potenzen der Massen Rücksicht, so lassen sich die bei der Entwicklung der Hansen-Tietjen'schen Methode gegebenen Differentialgleichungen (pag. 148) in der Form schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{k^2 v}{r^3} &= \Sigma (R - w_1) + 2 \frac{k \sqrt{p}}{r^4} \int \Sigma (U) dt \\ \frac{d \mathcal{M}}{dt} &= - 2 \mu v \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2 z}{r^3} &= \Sigma (W_1) \\ \frac{d \mathcal{W}}{dt} &= \frac{1}{r^2} \int \Sigma (U) dt, \end{aligned} \right\} \quad 8)$$

wobei die Bedeutung der in diesen Formeln vorkommenden Grössen leicht aus den dortigen Entwicklungen klar gelegt werden kann. In diesen Ausdrücken wollen wir einige unwesentliche Abänderungen vornehmen, um die Anwendung des Integrales 7) zu erleichtern; dadurch werden die Buchstaben in den obigen Formeln eine etwas geänderte Bedeutung gegen früher erlangen. Setzt man nämlich, um nicht nachträglich die Multiplication mit a^2 ausführen zu müssen:

$$z = \frac{a^2}{\sqrt{p}} m_1 (wk) 10^7$$

und

$$\begin{aligned} U &= z K r \eta' \\ R &= z \left\{ \frac{K \xi'}{r} - \frac{1}{q^3} \right\} \\ W &= z K \zeta' . \end{aligned}$$

welche Grössen für jeden einzelnen störenden Planeten gerechnet werden müssen, und bezeichnet durch ein vorgesetztes Summenzeichen die Summen der so ermittelten störenden Kräfte für die verschiedenen in Betracht gezogenen Planeten, so wird man zunächst in den Formeln 8) zu setzen haben:

$$\left. \begin{aligned} \langle U \rangle &= \int \Sigma (U) dt \\ \langle R \rangle &= \Sigma (R) + \frac{2 (wk) \sqrt{p}}{r^4} \langle U \rangle, \end{aligned} \right\} \quad 9)$$

und die erforderlichen einfachen Integrale sind dann:

$$\left. \begin{aligned} Z_s &= \int \Sigma (W \cdot \{\cos E - e\}) dt \\ Z_c &= \int \Sigma (W) \sin E \cos \varphi dt \\ N_s &= \int \langle R \rangle \{\cos E - e\} dt \\ N_c &= \int \langle R \rangle \sin E \cos \varphi dt . \end{aligned} \right\} \quad 10)$$

sobald diese mit Hilfe der mechanischen Quadratur ermittelt sind, ergeben sich die Integrale der in 8) auftretenden Störungsgrössen durch die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} r &= N_s \sin E \cos \varphi - N_c (\cos E - e) \\ \mathcal{M} &= - \frac{2 w \mu}{10^7} \int r dt \end{aligned} \right\} \quad 11)$$

$$\left. \begin{aligned} I\omega &= \frac{wk_j \sqrt{p}}{a^2 10^7 \sin 1''} \int \frac{U}{r^2} dt \\ z &= Z_s \sin E \cos \varphi - Z_c (\cos E - e) \end{aligned} \right\} \quad \text{II.}$$

wobei zu beachten ist, dass die drei letzten Integrale aus den einfach summirten Werthen nur für jene bestimmten Zeitepochen berechnet zu werden brauchen, für welche deren Kenntniss, etwa zum Zwecke des Vergleichens der Rechnung mit den Beobachtungen, erforderlich ist.

Wie man sieht, ist jede indirecte Rechnung vermieden, und man ist in der Lage, die Störungsrechnung durchaus ephemeridenartig für das ganze vorgelegte Zeitintervall zu erledigen, und so alle in der Rechnung auftretenden und im weiteren Verlaufe derselben nöthigen Grössen vor ihrer Verwendung durch Bildung der Differenzwerthe streng auf ihre Richtigkeit prüfen zu können.

Vergleicht man die nöthigen Rechnungsoperationen bei den strengen Methoden mit den hier erforderlichen, so wird man eine sehr wesentliche Abkürzung nicht wahrnehmen, doch verursacht die zuletzt erwähnte Anlage und Durchführung der Rechnung eine solche Erleichterung bei der thatsächlichen Anwendung, dass über die Vortheile der eben entwickelten Methode kein Zweifel bestehen kann.

Trägt man nun alle für die Rechnung nöthigen Formeln zusammen, so wird man zunächst die gegenseitige Bahnlage des gestörten und des störenden Planeten zu berechnen haben nach:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Phi + \Phi') &= \sin \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \sin \frac{1}{2} (i' + i) \\ \sin \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Phi + \Phi') &= \cos \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \sin \frac{1}{2} (i' - i) \\ \cos \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Phi - \Phi') &= \sin \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \cos \frac{1}{2} (i' + i) \\ \cos \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Phi - \Phi') &= \cos \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \cos \frac{1}{2} (i' - i) \end{aligned} \right\} \quad \text{I.}$$

Ich finde so, indem ich für Erato die bei den vorhergehenden Störungsrechnungen (pag. 173) benützten Elemente verwende und für Jupiter und Saturn annehme:

$$\begin{aligned} \Omega'_{\text{A}} &= 99^\circ 0' 36'' & \Omega'_{\text{B}} &= 112^\circ 31' 36'' \\ i'_{\text{A}} &= 1^\circ 18' 46'' & i'_{\text{B}} &= 2^\circ 12' 24'' \end{aligned}$$

nach I):

$$\begin{aligned} J_{\text{A}} &= 1^\circ 11' 30'' & J_{\text{B}} &= 0^\circ 36' 22'' \\ (\Omega' + \Phi')_{\text{A}} &= 335^\circ 17' 50'' & (\Omega' + \Phi')_{\text{B}} &= 56^\circ 25' 26'' \\ (\Phi - \omega)_{\text{A}} &= -63^\circ 8' 48'' & (\Phi - \omega)_{\text{B}} &= 17^\circ 58' 48'' \end{aligned}$$

Ist L' die aus den astronomischen Ephemeriden zu entnehmende Länge in der Bahn, so wird für jeden störenden Planeten zu setzen sein:

$$\left. \begin{aligned} u' &= L' - (\Omega' + \Phi') \\ \tan u &= \tan u' \cos J \\ \sin B_1 &= \sin u' \sin J \\ L_1' &= u + \Phi - \omega \end{aligned} \right\} \quad \text{II.}$$

Im vorliegenden Falle wurde aber von der Kleinheit der Neigung Vorthail gezogen, indem unmittelbar u aus u' abgeleitet wurde (vergl. pag. 160, mittelst der Formel:

$$u = u' - \frac{\tan \frac{1}{2} J^2}{\sin i''} \sin 2 u'$$

welche Rechnung durch eine kleine Tafel, die mit dem Argumente u' den Correctionswerth gab, erleichtert wurde.

Die ungestörten wahren Anomalien und Radienvectoren für Erato wurden der Rechnung entlehnt, welche bei der Encke'schen Methode als Beispiel gedient hat, und ebenso die Logarithmen der Grössen $(\cos E - e)$ und $\sin E \cos q$; dieselben stehen auf dem mit (62) bezeichneten Bogen (pag. 266 ff.).

Man hat nun für jeden einzelnen störenden Planeten, indem dessen Radiusvector r_1 aus den Ephemeriden entlehnt wird, weiter zu berechnen:

$$\left. \begin{aligned} q \cos \vartheta \cos \Theta &= r_1 \cos B_1 \cos (L'_1 - v) - r = \xi' - r \\ q \cos \vartheta \sin \Theta &= r_1 \cos B_1 \sin (L'_1 - v) = \eta' \\ q \sin \vartheta &= r_1 \sin B_1 = \zeta' \\ \frac{1}{q^3} - \frac{1}{r_1^3} &= K \\ (wk) 10^7 m_1 \frac{a^2}{\sqrt{p}} &= z \\ \log (wk) 10^7 m_2 &= 3.81733 \quad \left. \begin{array}{l} \} \text{ 40 tägiges} \\ \} \text{ Intervall.} \end{array} \right\} \text{ III) } \\ \log (wk) 10^7 m_3 &= 3.2934 \\ U &= z K r \eta' \\ R &= \frac{z K \xi'}{r} - \frac{z}{q^3} \\ W &= z K \zeta' ; \end{aligned} \right\}$$

Dann bildet man:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(U) &= U_4 + U_5 + \dots \\ \Sigma(R) &= R_4 + R_5 + \dots \\ \Sigma(W) &= W_4 + W_5 + \dots \end{aligned} \right\} \text{ IV)}$$

Die hierfür nöthigen Rechnungen habe ich im Umfange der früher ausgeführten Beispiele berechnet und für Jupiter durchaus fünfstellig durchgeführt, um später (pag. 264) die Fehler der Methode mit Sicherheit nachweisen zu können; sonst würde im Allgemeinen eine vierstellige Rechnung genügen. Die Rechnung selbst ist auf dem mit 4 und 5 bezeichneten Bogen (pag. 268 ff.) durchgeführt, und zwar steht oben die Rechnung für Jupiter, unten jene für Saturn.

Nun schreitet man zur Bildung des Integrales von $\Sigma(U)$; man wird für dieses und die folgenden Integrale nach der mechanischen Quadratur die oben entwickelten Formeln (pag. 35) anzuwenden haben, und zwar:

Für die Bildung der Anfangsconstanten hat man die Formel:

$$f(a - \frac{1}{2}w) = -\frac{1}{24}f''(a - \frac{1}{2}w) + \frac{17}{5760}f'''(a - \frac{1}{2}w) - \dots$$

Für die Bildung des Integrales die Formel:

$$\int_{a-iw}^{a+iw} f(x) dx = f(a+iw) - \frac{1}{12}f''(a+iw) + \frac{11}{720}f'''(a+iw) - \dots$$

V)

In dem letzteren Ausdrücke sind die angesetzten Functionswerte arithmetische Mittel. Ausserdem bildet man die Integrale Z_s und Z_c ; man hat also:

$$\left. \begin{aligned} (U) &= \int \Sigma (U) dt \\ Z_s &= \int \Sigma (W) (\cos E - e) dt \\ Z_c &= \int \Sigma (W) \sin E \cos \varphi dt \\ *z &= Z_s \sin E \cos \varphi - Z_c (\cos E - e) . \end{aligned} \right\} \text{VI)}$$

Hat man diese Integralwerthe für die Epochen der Rechnung mittelst der Formeln V) hergestellt, so hat die Bildung der folgenden Grössen keine Schwierigkeit:

$$\left. \begin{aligned} (R) &= \Sigma (R) + \frac{2wkY\bar{p}}{r^4} (U) \\ \log 2 (wk) &= 0.13867 \text{ (40tägiges Intervall)} \\ *Aw &= \frac{wkY\bar{p}}{a^2 10^7 \sin^2 i} \int_{r^2}^1 (U) dt \\ N_s &= \int (R) \{ \cos E - e \} dt \\ N_c &= \int (R) \sin E \cos \varphi dt . \end{aligned} \right\} \text{VII)}$$

Aus diesen letzteren Grössen, welche ebenfalls ohne Schwierigkeit nach V) hergestellt werden können, bildet man schliesslich:

$$\left. \begin{aligned} r &= N_s \sin E \cos \varphi - N_c (\cos E - e) \\ *AM &= -\frac{2w\mu}{10^7} \int r dt \\ \log \left\{ -\frac{2w}{10^7} \right\} &= 4.90309 \text{ (40tägiges Intervall)} . \end{aligned} \right\} \text{VIII)}$$

Die in VII) und VIII) auftretenden constanten Factoren der Integrale wird man bei der Rechnung sogleich unter das Integralzeichen bringen und beachten, dass die in den Formelsystemen VI), VII) und VIII) mit * bezeichneten Integrale aus den summirten Reihen nur an jenen Stellen abzuleiten sind, wo die Kenntniss der Störungswerthe aus anderen Gründen nöthig ist.

Nach diesen Bemerkungen wird das nachfolgende Beispiel wohl leicht verständlich sein. Ich habe das Resultat dieser genäherten Störungsrechnung mit den früher streng ermittelten Werthen von 120 zu 120 Tagen verglichen und erhalte

die nachstehenden Unterschiede im Sinne: strenge — genäherte Rechnung; es sind also die aus der Vernachlässigung der höheren Potenzen entstehenden Correctionen angesetzt, wobei die Fehler von z und r in Einheiten der siebenten Stelle verstanden werden:

		dz	dr	dMM	dAw
1875	Febr. 24	0	0	0"0	0"0
1874	Oetbr. 27	0	0	0.0	0.0
1874	Juni 29	0	0	0.0	0.0
1874	März 1	0	+ 2	0.0	0.0
1873	Nov. 1	0	+ 13	— 0.2	+ 0.1
1873	Juli 4	— 1	+ 32	— 0.8	+ 0.5
1873	März 6	— 3	+ 66	— 2.5	+ 1.4
1872	Nov. 6	— 10	+ 137	— 5.0	+ 2.7
1872	Juli 9	— 19	+ 257	— 7.1	+ 4.5
1872	März 11	— 31	+ 390	— 6.5	+ 6.6
1871	Nov. 12	— 38	+ 415	— 2.7	+ 8.7
1870	Juli 15	— 36	+ 259	+ 2.1	+ 10.5

Betrachtet man die in der vorstehenden Zusammenstellung enthaltenen Werthe, so wird man den hohen Grad der Annäherung, der durch das eben entwickelte Verfahren erreicht wurde, sofort erkennen. In dem vorgelegten Beispiele sind mit Absicht sehr ungünstige Verhältnisse gewählt worden (Jupiternähe); in der Regel werden sich die Annäherungen noch weit günstiger gestalten. Ausserdem ist die Rechnung weiter fortgeführt worden, als man dies in ähnlichen Fällen thun wird, was bei der ausserordentlichen Grösse der Störungen (Encke's strenge Methode wird am Schlusse kaum mehr mit Sicherheit anwendbar) bedeutende Differenzen hervorbringen muss; man wird von dieser Methode in der Regel Gebrauch machen, wenn etwa nicht mehr als drei oder vier Oppositionen zur Bahnbestimmung vorliegen; legt man dann die Osculationsepoche nahe in die Mitte, so werden selbst bei noch ungünstigeren Verhältnissen, als sie im vorliegenden Beispiele auftreten, die obigen Formeln nahezu strenge Werthe liefern. Bestimmt man nun mit Hilfe dieser genäherten Störungswerthe die Elemente nach den vorhandenen Beobachtungen, so wird man vom Zeitpunkte der gewählten Osculationsepoche an, nach einer der oben entwickelten Methoden die strengen Störungswerthe neu zu berechnen haben. Die Ermittlung der Störungen von der Osculationsepoche nach rückwärts wird wohl in der Regel unterbleiben können, da meist in den hier in Betracht kommenden Fällen eine Rückrechnung auf entferntere Epochen nicht nöthig sein wird und für den naheliegenden Zeitraum die vorhandenen Näherungswerthe selbst strengen Anforderungen genügen werden.

Schliesslich mache ich darauf aufmerksam, dass ich im LXII Bande (November-Heft) der Sitzungsberichte der kais. Academie der Wissenschaften zu Wien eine

Methode der Störungsrechnung publicirt habe, die ebenfalls nur die ersten Potenzen der Massen berücksichtigt und ganz ausserordentliche Vorthelle und Abkürzungen liefert, wenn es sich darum handelt, die Störungwerthe für mehrere Revolutionen eines periodischen Kometen zu berechnen. Da aber diese Forderung selten eintreten wird, so gehe ich hier nicht näher auf diese Methode ein und begnüge mich mit dem eben angeführten Hinweis.

(62)₁

Datum	1875		1874					
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Juni 29	Mai 20
r	188° 8' 16"	183° 2' 2"	177° 56' 23"	172° 50' 20"	167° 42' 51"	162° 32' 54"	157° 19' 26"	152° 1' 21"
r	0.56402	0.56481	0.56488	0.56423	0.56285	0.56076	0.55795	0.55442
$\cos E - e$	0.06415	0.06872	0.06912	0.06535	0.05731	0.04482	0.02753	0.00496
$\sin E \cos q$	9.21947	8.79299	8.62511	9.16448	9.39533	9.54226	9.64852	9.73023
$\Sigma (H)$	— 162.9	— 180.0	— 196.7	— 211.8	— 223.9	— 231.5	— 232.4	— 225.2
$\log \Sigma (H)$	2.21192	2.25527	2.29380	2.32593	2.35005	2.36455	2.36624	2.35257
$2(wk) \sqrt{p} (U)$	4.77666	4.31281	4.32372	4.80867	5.03454	5.18003	5.28286	5.35697
r^4	2.25608	2.25924	2.25952	2.25692	2.25140	2.24304	2.23180	2.21768
ΣR	— 331.6	— 113.1	+ 115.9	+ 356.2	+ 606.9	+ 864.9	+ 1124.8	+ 1378.1
ΣR	+ 467.8	+ 627.0	+ 812.9	+ 1026.3	+ 1265.0	+ 1521.8	+ 1782.6	+ 2025.8
$\log R$	2.13418	2.71088	2.96792	3.14067	3.27229	3.37780	3.46351	3.53198
$wk'' \sqrt{p} (U)$	1.79910	1.33525	1.34616	1.83111	2.05698	2.20247	2.30530	2.37941
$\frac{10^7}{a^2} r^2$	1.12804	1.12962	1.12996	1.12846	1.12570	1.12152	1.11590	1.10884
N_c	1.64444	1.02119	0.84510	2.07737	2.64777	3.03523	3.33047	3.56790
N_s	2.86617	2.55654	2.68305	3.26203	3.56819	3.78491	3.95293	4.08828
$-r_2$	+ 51	+ 12	+ 8	+ 139	+ 507	+ 1202	+ 2280	+ 3740
$+r_1$	+ 122	+ 22	+ 20	+ 267	+ 919	+ 2124	+ 3994	+ 6584
$\log r$	1.85126	1.00000	1.07918	2.10721	2.61490	2.96473	3.23401	3.45393

(62)₂

Datum	1874			1873				
	April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4
v	146° 37' 30"	141° 6' 43"	135° 27' 43"	129° 39' 11"	123° 39' 43"	117° 27' 49"	111° 1' 59"	104° 20' 37"
r	0.55016	0.54520	0.53952	0.53315	0.52611	0.51842	0.51013	0.50129
$\cos E - e$	9.97642	9.94091	9.89700	9.84259	9.77437	9.68682	9.56963	9.39980
$\sin E \cos q$	9.79514	9.84754	9.89000	9.92412	9.95092	9.97101	9.98470	9.99205
$\Sigma (H)$	— 208.9	— 183.9	— 152.2	— 117.0	— 82.4	— 51.6	— 26.6	— 8.1
$\log \Sigma (H)$	2.31994	2.26458	2.18241	2.06819	1.91593	1.71265	1.42488	0.90849
$2(wk) \sqrt{p} (U)$	5.40871	5.44142	5.45719	5.45770	5.44467	5.41996	5.38560	5.34375
r^4	2.20064	2.18080	2.15808	2.13260	2.10444	2.07368	2.04052	2.00516
ΣR	+ 1614.6	+ 1822.3	+ 1991.2	+ 2114.0	+ 2188.9	+ 2219.6	+ 2213.5	+ 2180.6
ΣR	+ 2222.7	+ 2343.8	+ 2365.9	+ 2280.6	+ 2096.5	+ 1839.2	+ 1540.3	+ 1230.6
$\log R$	3.58402	3.61973	3.63920	3.64292	3.63199	3.60840	3.57447	3.53291
$wk'' \sqrt{p} (U)$	2.43115	2.46386	2.47963	2.48014	2.46711	2.44240	2.40804	2.36619
$\frac{10^7}{a^2} r^2$	1.10032	1.09040	1.07904	1.06630	1.05222	1.03684	1.02026	1.00258
N_c	3.76408	3.92825	4.06611	4.18167	4.27801	4.35779	4.42346	4.47721
N_s	4.19886	4.28912	4.36197	4.41952	4.46367	4.49623	4.51893	4.53341
$-r_2$	+ 5502	+ 7399	+ 9186	+ 10575	+ 11282	+ 11082	+ 9842	+ 7534
$+r_1$	+ 9863	+ 13698	+ 17864	+ 22062	+ 25977	+ 29325	+ 31888	+ 33532
$\log r$	3.63959	3.79927	3.93842	4.06021	4.16717	4.26109	4.34333	4.41494

(62)₃

1873				1872				
Mai 25	April 15	März 6	Jan. 25	Dec. 16	Nov. 6	Sept. 27	Aug. 18	Juli 9
97°22' 5"	90° 4' 52"	82°27' 29"	74°28' 44"	66° 7' 44"	57°24' 10"	48°18' 27"	38°51' 54"	29° 6' 56"
0.49198	0.48232	0.47244	0.46251	0.45276	0.44342	0.43480	0.42720	0.42094
9.10454	7.13793	9.09506	9.39451	9.56439	9.67931	9.76223	9.82305	9.86680
9.99290	9.98684	9.97319	9.95090	9.91844	9.87350	9.81248	9.72933	9.61261
+ 4.5	+ 11.9	+ 15.7	+ 16.7	+ 16.0	+ 14.2	+ 11.8	+ 8.9	+ 6.1
0.65321	1.07559	1.19590	1.22272	1.20412	1.15229	1.07188	0.94939	0.78533
5.29656	5.24616	5.19464	5.14402	5.09623	5.05313	5.01627	4.98685	4.96561
1.96792	1.92928	1.88976	1.85004	1.81104	1.77368	1.73920	1.70880	1.68376
+ 2131.3	+ 2074.3	+ 2017.8	+ 1967.8	+ 1928.4	+ 1903.0	+ 1892.7	+ 1896.9	+ 1913.6
+ 933.4	+ 664.1	+ 429.8	+ 233.2	+ 73.7	— 51.2	— 143.9	— 207.6	— 244.7
3.48639	3.43749	3.38874	3.34262	3.30148	3.26759	3.24274	3.22771	3.22243
2.31900	2.26860	2.21708	2.16646	2.11867	2.07557	2.03871	2.00929	1.98805
0.98396	0.96464	0.94488	0.92502	0.90552	0.88684	0.86960	0.85440	0.84188
4.52103	4.55664	4.58553	4.60892	4.62785	4.64312	4.65537	4.66505	4.67245
4.54117	4.54354	4.54160	4.53619	4.52798	4.51739	4.50468	4.48991	4.47305
+ 4222	+ 49	— 493	— 10079	— 15568	— 21010	— 26158	— 30768	— 34614
+ 34203	+ 33914	+ 32718	+ 30696	+ 27952	+ 24597	+ 20757	+ 16567	+ 12180
4.47685	4.52975	4.57416	4.61039	4.63869	4.65903	4.67131	4.67518	4.67019

(62)₄

1872				1871				
Mai 30	April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24	Juli 15
19° 7' 3"	8°56' 48"	358°41' 33"	348°27' 3"	338°18' 58"	328°22' 29"	318°41' 55"	309°20' 29"	300°20' 20"
0.41631	0.41354	0.41277	0.41406	0.41732	0.42239	0.42902	0.43691	0.44574
9.89620	9.91274	9.91718	9.90970	9.88997	9.85710	9.80933	9.74348	9.65365
9.43605	9.10984	8.27553	9.22006	9.48944	9.64655	9.75310	9.82983	9.88630
+ 3.3	+ 0.5	— 2.0	— 4.5	— 6.8	— 9.0	— 11.0	— 12.8	— 14.5
0.51851	9.69897	0.30103	0.65321	0.83251	0.95424	1.04139	1.10721	1.16137
4.95263	4.94746	4.94923	4.95679	4.96886	4.98423	5.00186	5.02082	5.04044
1.66524	1.65416	1.65108	1.65624	1.66928	1.68956	1.71608	1.74764	1.78296
+ 1938.2	+ 1964.7	+ 1986.8	+ 1997.8	+ 1993.3	+ 1970.9	+ 1931.0	+ 1875.8	+ 1809.2
— 258.5	— 252.2	— 229.6	— 194.9	— 151.8	— 104.2	— 55.3	— 7.7	+ 37.4
3.22523	3.23363	3.24482	3.25598	3.26517	3.27107	3.27316	3.27141	3.26637
1.97507	1.96990	1.97167	1.97923	1.99130	2.00667	2.02430	2.04326	2.06288
0.83262	0.82708	0.82554	0.82812	0.83464	0.84478	0.85804	0.87382	0.89148
4.67770	4.68080	4.68165	4.68015	4.67620	4.66976	4.66086	4.64967	4.63640
4.45398	4.43265	4.40911	4.38362	4.35675	4.32934	4.30249	4.27743	4.25544
— 37488	— 39223	— 39704	— 38891	— 36827	— 33640	— 29525	— 24726	— 19501
+ 7763	+ 3487	— 484	— 4015	— 7018	— 9460	— 11366	— 12801	— 13859
4.65563	4.63053	4.59351	4.54253	4.47435	4.38346	4.25910	4.07646	3.75143

(4 u. 1)₁

Datum	1875		1874					
	Febr. 24	Jan. 15	Dec. 6	Oct. 27	Sept. 17	Aug. 8	Jun. 29	Mai 20
u'	227°29'50"	224°28'33"	221°27'22"	218°26'15"	215°25'7"	212°23'58"	209°22'41"	206°21'16"
$\angle u$	— 22	— 22	— 22	— 21	— 21	— 20	— 19	— 17
$\sin u'$	9 _n 86761	9 _n 84548	9 _n 82089	9 _n 79355	9 _n 76309	9 _n 72901	9 _n 69070	9 _n 64730
$\sin B_1$	8 _n 18561	8 _n 16348	8 _n 13889	8 _n 11155	8 _n 08109	8 _n 04701	8 _n 00870	7 _n 96530
r_1	0.73657	0.73673	0.73683	0.73686	0.73683	0.73675	0.73660	0.73639
$\cos B_1$	9.99995	9.99995	9.99996	9.99996	9.99997	9.99997	9.99998	9.99998
L_1	164°20'40"	161°19'23"	158°18'12"	155°17'6"	152°15'58"	149°14'50"	146°13'34"	143°12'11"
$L_1 - v$	336°12'24"	338°17'21"	340°21'49"	342°26'46"	344°33'7"	346°41'56"	348°54'8"	351°10'50"
$\cos(L_1 - v)$	9.96142	9.96804	9.97398	9.97929	9.98402	9.98819	9.99180	9.99483
$r_1 \cos B_1$	0.73652	0.73668	0.73679	0.73682	0.73680	0.73672	0.73665	0.73657
$\sin(L_1 - v)$	9 _n 60578	9 _n 56811	9 _n 52641	9 _n 47944	9 _n 42547	9 _n 36186	9 _n 28439	9 _n 18560
ξ'	0.69794	0.70472	0.71077	0.71611	0.72082	0.72491	0.72838	0.73120
r	0.56402	0.56481	0.56488	0.56423	0.56285	0.56076	0.55795	0.55442
Subtr.	9.55774	9.57990	9.60123	9.62187	9.64217	9.66211	9.68176	9.70103
$\xi' - r$	0.12176	0.14471	0.16611	0.18610	0.20502	0.22287	0.23971	0.25545
	9 _n 93289	9 _n 91509	9 _n 89265	9 _n 86404	9.86981	9.90286	9.93241	9.95766
η'	0 _n 34230	0 _n 30479	0 _n 26320	0 _n 21626	0 _n 16227	0 _n 09858	0 _n 02097	9 _n 92197
$\varrho \cos \vartheta$	0.40941	0.38970	0.37055	0.35222	0.33521	0.32001	0.30730	0.29779
	9.99977	9.99977	9.99978	9.99979	9.99980	9.99982	9.99984	9.99986
ζ'	8 _n 92218	8 _n 90021	8 _n 87572	8 _n 84841	8 _n 81792	8 _n 78376	8 _n 74530	8 _n 70169
ϱ^{-1}	9.59036	9.61007	9.62923	9.64757	9.66459	9.67981	9.69254	9.70207
ϱ^{-3}	8.77108	8.83021	8.88769	8.94271	8.99377	9.03943	9.07762	9.10621
r_1^{-3}	7.79029	7.78981	7.78951	7.78942	7.78951	7.78975	7.79020	7.79083
Subtr.	9.95205	9.95851	9.96390	9.96836	9.97198	9.97484	9.97700	9.97847
K	8.72313	8.78872	8.85159	8.91107	8.96575	9.01427	9.05462	9.08468
$\xi' : r$	0.13392	0.13991	0.14589	0.15188	0.15797	0.16415	0.17043	0.17678
$x K$	3.29031	3.35590	3.41877	3.47825	3.53293	3.58145	3.62180	3.65186
$\eta' r$	0 _n 90632	0 _n 86960	0 _n 82808	0 _n 78049	0 _n 72512	0 _n 65934	0 _n 57892	0 _n 47639
$x K \xi' : r$	3.42423	3.49581	3.56466	3.63013	3.69090	3.74560	3.79223	3.82864
$x : \varrho^3$	3.33826	3.39739	3.45487	3.50989	3.56095	3.60661	3.64480	3.67339
Subtr.	9.34026	9.40544	9.45883	9.50377	9.54258	9.57654	9.60660	9.63318
R	+ 477.0	+ 635.1	+ 819.8	+ 1031.9	+ 1269.2	+ 1524.6	+ 1784.0	+ 2025.7
U	— 15726	— 16807	— 17654	— 18144	— 18115	— 17410	— 15875	— 13435
W	— 163.1	— 180.3	— 197.0	— 212.2	— 224.3	— 231.9	— 232.9	— 225.7
u'	260°50'8	259°36'2	258°21'7	257°7'3	255°53'0	254°38'9	253°24'9	252°11'0
$\angle u$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	— 0.1	— 0.1	— 0.1
$\sin u'$	9 _n 9944	9 _n 9928	9 _n 9910	9 _n 9889	9 _n 9867	9 _n 9843	9 _n 9815	9 _n 9786
$\sin B_1$	8 _n 0188	8 _n 0172	8 _n 0154	8 _n 0133	8 _n 0111	8 _n 0087	8 _n 0059	8 _n 0030
r_1	0.9950	0.9954	0.9957	0.9961	0.9964	0.9968	0.9971	0.9974
$\cos B_1$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
L_1	278°49'6	277°35'0	276°20'5	275°6'1	273°51'8	272°37'6	271°23'6	270°9'7
$L_1 - v$	90°41'3	94°33'0	98°24'1	102°15'8	106°9'0	110°4'7	114°4'2	118°8'4
$\cos(L_1 - v)$	8 _n 0797	8 _n 8994	9 _n 1647	9 _n 3279	9 _n 4443	9 _n 5357	9 _n 6105	9 _n 6736
$r_1 \cos B_1$	0.9950	0.9954	0.9957	0.9961	0.9964	0.9968	0.9971	0.9974
$\sin(L_1 - v)$	0.0000	0.9986	9.9953	9.9900	9.9825	9.9728	9.9605	9.9454
ξ'	9 _n 0747	9 _n 8948	9 _n 1604	9 _n 3233	9 _n 4407	9 _n 5325	9 _n 6076	9 _n 6710
r	0.5640	0.5648	0.5649	0.5642	0.5628	0.5608	0.5579	0.5544
Subtr.	0.0139	0.0841	0.1443	0.1971	0.2443	0.2871	0.3269	0.3666
$\xi' - r$	9 _n 5779	9 _n 6489	9 _n 7092	9 _n 7613	9 _n 8071	9 _n 8479	9 _n 8845	9 _n 9176
	9.9703	9.9597	9.9476	9.9340	9.9188	9.9019	9.8830	9.8617
η'	0.9950	0.9940	0.9910	0.9861	0.9789	0.9696	0.9576	0.9428
$\varrho \cos \vartheta$	1.0247	1.0343	1.0434	1.0521	1.0601	1.0677	1.0746	1.0811
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
ζ'	9 _n 0138	9 _n 0126	9 _n 0111	9 _n 0094	9 _n 0075	9 _n 0055	9 _n 0030	9 _n 0004
ϱ^{-1}	8.9753	8.9657	8.9566	8.9479	8.9399	8.9323	8.9254	8.9189
ϱ^{-3}	6.9259	6.8971	6.8698	6.8437	6.8197	6.7969	6.7762	6.7567
r_1^{-3}	7.0150	7.0139	7.0128	7.0118	7.0107	7.0097	7.0088	7.0078
Subtr.	9.3574	9.4894	9.5910	9.6745	9.7422	9.8009	9.8503	9.8936
K	6 _n 2833	6 _n 2865	6 _n 2868	6 _n 2871	6 _n 2874	6 _n 2877	6 _n 2880	6 _n 2883
$\xi' : r$	8 _n 5107	9 _n 3300	9 _n 5955	9 _n 7591	9 _n 8779	9 _n 9717	9 _n 0497	9 _n 1166
$x K$	0 _n 3265	0 _n 4297	0 _n 5040	0 _n 5614	0 _n 6051	0 _n 6410	0 _n 6697	0 _n 6935
$\eta' r$	1.5590	1.5588	1.5559	1.5503	1.5417	1.5304	1.5155	1.4972
$x K \xi' : r$	8.8372	9.7597	0.0995	0.3205	0.4830	0.6127	0.7194	0.8101
$x : \varrho^3$	0.9691	0.9403	0.9130	0.8869	0.8629	0.8401	0.8194	0.7999
Subtr.	9.9968	9.9704	9.9276	9.8625	0.1456	9.8377	9.4132	8.3759
R	— 9.2	— 8.1	— 6.9	— 5.6	— 4.2	— 2.8	— 1.4	— 0.1
U	— 77	— 97	— 115	— 129	— 140	— 148	— 153	— 155
W	+ 0.2	+ 0.3	+ 0.3	+ 0.4	+ 0.4	+ 0.4	+ 0.5	+ 0.5

(A. u. b.)₂

1874			1873					
April 10	März 1	Jan. 20	Dec. 11	Nov. 1	Sept. 22	Aug. 13	Juli 4	Mai 25
203°19'39"	200°17'46"	197°15'36"	194°13' 5"	191°10' 9"	188° 6'45"	185° 2'52"	181°58'26"	178°53'24"
— 16	— 14	— 12	— 10	— 9	— 6	— 4	— 2	+ 1
9 _n 59768	9 _n 54017	9 _n 47233	9 _n 39025	9 _n 28714	9 _n 14958	8 _n 94442	8 _n 53711	8.28717
7 _n 91568	7 _n 85817	7 _n 79033	7 _n 70825	7 _n 60514	7 _n 46758	7 _n 26242	6 _n 85511	6.60517
0.73611	0.73578	0.73539	0.73493	0.73443	0.73386	0.73325	0.73257	0.73185
9.99999	9.99999	9.99999	9.99999	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
140°10'35"	137° 8'44"	134° 6'36"	131° 4' 7"	128° 1'12"	124°57'51"	121°34' 0"	118°49'36"	115°44'37"
353°33' 5"	356° 2' 1"	358°38'53"	1°24'56"	4°21'29"	7°30' 2"	10°52' 1"	14°28'59"	18°22'32"
9.99724	9.99896	9.99988	9.99987	9.99874	9.99627	9.99214	9.98597	9.97727
0.73610	0.73577	0.73538	0.73492	0.73443	0.73386	0.73325	0.73257	0.73185
9 _n 05042	8 _n 83993	8 _n 37279	8.39276	8.88075	9.11573	9.27538	9.39810	9.49864
0.73334	0.73473	0.73526	0.73479	0.73317	0.73013	0.72539	0.71854	0.70912
0.55016	0.54520	0.53952	0.53315	0.52611	0.51842	0.51013	0.50129	1.49198
9.71990	9.73810	9.75544	9.77151	9.78595	9.79810	9.80725	9.81232	9.81204
0.27006	0.28330	0.29496	0.30466	0.31206	0.31652	0.31738	0.31361	0.30402
9.97775	9.99181	9.99908	9.99904	9.99140	9.97608	9.95306	9.92223	9.88316
9 _n 78652	9 _n 57570	9 _n 10817	9.12768	9.61518	9.84959	0.00863	0.13067	0.23049
0.29231	0.29149	0.29588	0.30562	0.32066	0.34044	0.36432	0.39138	0.42086
9.99989	9.99991	9.99994	9.99996	9.99998	9.99999	0.00000	0.00000	0.00000
8 _n 65179	8 _n 59395	8 _n 52572	8 _n 44318	8 _n 33957	8 _n 20144	7 _n 99567	7 _n 58768	7.33702
9.70758	9.70842	9.70406	9.69434	9.67932	9.65955	9.63568	9.60862	9.57914
9.12274	9.12526	9.12118	9.08302	9.03796	8.97865	8.90704	8.82586	8.73742
7.79167	7.79266	7.79383	7.79521	7.79671	7.79842	7.80025	7.80229	7.80445
9.97925	9.97932	9.97862	9.97702	9.97434	9.97033	9.96464	9.95678	9.94611
9.10199	9.10458	9.09080	9.06004	9.01230	8.94898	8.87168	8.78264	8.68353
0.18318	0.18953	0.19574	0.20164	0.20706	0.21171	0.21526	0.21725	0.21714
3.66917	3.67176	3.65798	3.62722	3.57948	3.51616	3.43886	3.34982	3.25071
0 _n 33668	0 _n 12090	0 _n 64769	9.66083	0.14129	0.36801	0.51876	0.63196	0.72247
3.85235	3.86129	3.85372	3.82886	3.78654	3.72787	3.65412	3.56707	3.46785
3.68992	3.69244	3.67936	3.65020	3.60514	3.54583	3.47422	3.39304	3.30460
9.65663	9.67688	9.69375	9.70663	9.71471	9.71658	9.71030	9.69276	9.65925
+ 2221.0	+ 2340.6	+ 2361.1	+ 2274.2	+ 2088.6	+ 1829.8	+ 1529.4	+ 1218.4	+ 920.1
— 10136	— 6204	— 2021	+ 1941	+ 5257	+ 7659	+ 9070	+ 9589	+ 9401
— 209.4	— 184.4	— 152.7	— 117.6	— 83.0	— 52.2	— 27.2	— 8.7	+ 3.9
250°57'2	249°43'5	248°29'9	247°16'4	246° 3'0	244°49'7	243°3'65	242°23'4	241°10'3
— 0.1	— 0.1	— 0.1	— 0.1	— 0.1	— 0.1	— 0.1	— 0.1	— 0.1
9 _n 9756	9 _n 9722	9 _n 9687	9 _n 9649	9 _n 9609	9 _n 9567	9 _n 9522	9 _n 9475	9 _n 9425
8 _n 0000	7 _n 9966	7 _n 9931	7 _n 9893	7 _n 9853	7 _n 9811	7 _n 9766	7 _n 9719	7 _n 9669
0.9977	0.9980	0.9983	0.9986	0.9988	0.9991	0.9993	0.9996	0.9998
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
268°55'9	267°42'2	266°28'6	265°15'1	264° 1'7	262°48'4	261°35'2	260°22'1	259° 9'0
122°18'4	126°35'5	131° 0'9	135°35'9	140°22'0	145°20'6	150°33'2	156° 1'5	161°46'9
9 _n 7279	9 _n 7753	9 _n 8170	9 _n 8540	9 _n 8866	9 _n 9152	9 _n 9399	9 _n 9608	9 _n 9777
0.9977	0.9980	0.9983	0.9986	0.9988	0.9991	0.9993	0.9996	0.9998
9.9269	9.9047	9.8777	9.8449	9.8047	9.7549	9.6916	9.6089	9.4951
0 _n 7256	0 _n 7733	0 _n 8153	0 _n 8526	0 _n 8854	0 _n 9143	0 _n 9392	0 _n 9604	0 _n 9775
0.5502	0.5452	0.5395	0.5331	0.5261	0.5184	0.5101	0.5013	0.4920
0.2221	0.2018	0.1847	0.1700	0.1575	0.1467	0.1375	0.1295	0.1229
9 _n 9477	9 _n 9751	1 _n 0000	1 _n 0226	1 _n 0429	1 _n 0610	1 _n 0767	1 _n 0899	1 _n 1004
9 _n 8607	9 _n 8827	9 _n 9027	9 _n 9211	9 _n 9377	9 _n 9527	9 _n 9660	9 _n 9776	9 _n 9870
0.9246	0.9027	0.8760	0.8435	0.8035	0.7540	0.6909	0.6085	0.4949
1.0870	1.0924	1.0973	1.1015	1.1052	1.1083	1.1107	1.1123	1.1134
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8 _n 9977	8 _n 9946	8 _n 9914	8 _n 9879	8 _n 9841	8 _n 9802	8 _n 9759	8 _n 9715	8 _n 9667
8.9130	8.9076	8.9027	8.8985	8.8948	8.8917	8.8893	8.8877	8.8866
6.7390	6.7228	6.7081	6.6955	6.6844	6.6751	6.6679	6.6631	6.6598
7.0069	7.0060	7.0051	7.0043	7.0035	7.0027	7.0020	7.0013	7.0006
9.9310	9.9636	9.9919	0.0155	0.0354	0.0516	0.0638	0.0714	0.0762
6 _n 6700	6 _n 6864	6 _n 7000	6 _n 7110	6 _n 7198	6 _n 7267	6 _n 7317	6 _n 7345	6 _n 7360
0 _n 1754	0 _n 2281	0 _n 2758	0 _n 3195	0 _n 3593	0 _n 3959	0 _n 4291	0 _n 4591	0 _n 4855
0 _n 7132	0 _n 7296	0 _n 7432	0 _n 7542	0 _n 7630	0 _n 7699	0 _n 7749	0 _n 7777	0 _n 7792
1.4748	1.4479	1.4155	1.3766	1.3296	1.2724	1.2010	1.1098	0.9869
0.8886	0.9577	1.0190	1.0737	1.1223	1.1658	1.2040	1.2368	1.2647
0.7822	0.7660	0.7513	0.7387	0.7276	0.7183	0.7111	0.7063	0.7030
9.4434	9.7442	9.9306	0.0655	0.1707	9.8083	9.8316	9.8483	9.8607
+ 1.7	+ 3.2	+ 4.8	+ 6.4	+ 7.9	+ 9.4	+ 10.9	+ 12.2	+ 13.3
— 154	— 150	— 144	— 135	— 124	— 110	— 95	— 77	— 58
+ 0.5	+ 0.5	+ 0.5	+ 0.6	+ 0.6	+ 0.6	+ 0.6	+ 0.6	+ 0.6

+	0.5
---	-----

(9 u. b)₄

1872				1871				
Mai 30	April 20	März 11	Jan. 31	Dec. 22	Nov. 12	Oct. 3	Aug. 24	Juli 15
150°34'10"	147°20'53"	144° 6'34"	140°51'13"	137°34'48"	134°17'17"	130°58'40"	127°38'55"	124°18' 2"
+ 19	+ 20	+ 21	+ 22	+ 22	+ 22	+ 22	+ 21	+ 20
9.69141	9.73202	9.76808	9.80024	9.82902	9.85482	9.87793	9.89860	9.91703
8.00941	8.05002	8.08608	8.11824	8.14702	8.17282	8.19593	8.21660	8.23503
0.72331	0.72218	0.72103	0.71985	0.71866	0.71745	0.71623	0.71501	0.71378
9.99998	9.99997	9.99997	9.99996	9.99996	9.99995	9.99995	9.99994	9.99994
87°25'41"	84°12'25"	80°58' 7"	77°42'47"	74°26'22"	71° 8'51"	67°50'14"	64°30'28"	61° 9'34"
68°18'38"	75°15'37"	82°16'34"	89°15'44"	96°17'24"	102°46'22"	109° 8'19"	115° 9'59"	120°49'14"
9.56770	9.40556	9.12840	8.10979	9.02804	9.34456	9.51568	9.62864	9.70957
0.72329	0.72215	0.72100	0.71981	0.71862	0.71740	0.71618	0.71495	0.71372
9.96811	9.98547	9.99604	9.99996	9.99752	9.98912	9.97531	9.95668	9.93388
0.29099	0.12771	9.84940	8.82960	9.74666	0.06196	0.23186	0.34359	0.42329
0.41631	0.41354	0.41277	0.41406	0.41732	0.42239	0.42902	0.43691	0.44574
9.52440	9.96905	9.86136	9.98854	0.08403	0.15718	0.21354	0.25687	0.28995
9.81539	0.09676	0.27413	0.40260	0.50135	0.57957	0.64256	0.69378	0.73569
9.99619	9.98734	9.97345	9.95468	9.93134	9.90381	9.87257	9.83602	9.78910
0.69140	0.70762	0.71704	0.71977	0.71614	0.70652	0.69149	0.67163	0.64760
0.69521	0.72028	0.74359	0.76509	0.78480	0.80271	0.81892	0.83350	0.84659
9.99997	9.99997	9.99997	9.99997	9.99997	9.99997	9.99997	9.99997	9.99997
8.73272	8.77220	8.80711	8.83809	8.86568	8.89027	8.91216	8.93161	8.94881
9.30476	9.27969	9.25638	9.23488	9.21517	9.19726	9.18105	9.16647	9.15338
7.91428	7.83907	7.76914	7.70464	7.64551	7.59178	7.54315	7.49941	7.46014
7.83007	7.83346	7.83691	7.84045	7.84402	7.84765	7.85131	7.85497	7.85866
9.33037	8.11400	9.22757	9.56482	9.76303	9.90443	0.01415	0.10297	0.17706
7.16044	5.94746	6.99671	7.26946	7.40854	7.49621	7.55730	7.60238	7.63720
9.87468	9.71417	9.43663	8.41554	9.32934	9.63957	9.80284	9.90668	9.97755
1.72762	0.51464	1.56389	1.83664	1.97572	2.06339	2.12448	2.16956	2.20438
1.10771	1.12116	1.12981	1.13383	1.13346	1.12891	1.12051	1.10854	1.09334
1.60230	0.22881	1.00052	0.25218	1.30506	1.70296	1.92732	2.07624	2.18193
2.48146	2.40625	2.33632	2.27182	2.21269	2.15896	2.11033	2.06659	2.02732
9.93848	9.99710	0.01960	0.00413	9.94265	9.81295	9.71940	8.55159	9.63105
— 263.0	— 253.1	— 226.9	— 188.8	— 143.0	— 93.7	— 44.3	— 2.6	— 35.5
+ 684	+ 43	— 494	— 934	— 1286	— 1557	— 1758	— 1897	— 1985
+ 2.9	+ 0.2	— 2.3	— 4.7	— 6.9	— 9.0	— 10.9	— 12.6	— 14.2
230°16'1	229° 3'7	227°51'4	226°39'0	225°26'7	224°14'5	223° 2'3	221°50'1	220°37'9
— 0.1	— 0.1	— 0.1	— 0.1	— 0.1	— 0.1	— 0.1	— 0.1	— 0.1
9.88660	9.87882	9.8701	9.8617	9.8528	9.8437	9.8341	9.8241	9.8137
7.9104	7.9026	7.8945	7.8861	7.8772	7.8681	7.8585	7.8485	7.8381
1.1014	1.0015	1.0017	1.0018	1.0019	1.0019	1.0020	1.0021	1.0021
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
248°14'8	247° 2'4	245°50'1	244°37'7	243°25'4	242°13'2	241° 1'0	239°48'8	238°36'6
229° 7'8	238° 5'6	247° 8'6	256°10'7	265° 6'4	273°50'7	282°19'1	290°28'3	298°16'3
9.8158	9.7231	9.5893	9.3782	8.9309	8.8264	9.3291	9.5437	9.6754
1.0014	1.0015	1.0017	1.0018	1.0019	1.0019	1.0020	1.0021	1.0021
9.8787	9.9288	9.9645	9.9872	9.9984	9.9990	9.9989	9.9977	9.9949
0.8172	0.7246	0.5910	0.3800	9.9328	9.8283	0.3311	0.5458	0.6775
0.4163	0.4135	0.4128	0.4141	0.4173	0.4224	0.4290	0.4369	0.4457
0.1453	0.1728	0.2210	0.2843	0.1231	9.8724	9.4029	9.4548	9.8484
0.9625	0.8974	0.8120	0.6984	0.5404	0.2948	9.7340	9.8917	0.2941
9.8868	9.8653	9.9132	9.9494	9.9753	9.9917	9.9993	9.9985	9.9895
0.8801	0.9303	0.9662	0.9890	1.0003	1.0009	0.9919	0.9738	0.9470
1.0757	1.0650	1.0530	1.0396	1.0250	1.0092	0.9926	0.9753	0.9575
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8.9118	8.9041	8.8962	8.8879	8.8791	8.8700	8.8605	8.8506	8.8402
8.9243	8.9350	8.9470	8.9604	8.9750	8.9908	9.0074	9.0247	9.0425
6.7729	6.8050	6.8410	6.8812	6.9250	6.9724	7.0222	7.0741	7.1275
6.9957	6.9953	6.9950	6.9947	6.9944	6.9941	6.9939	6.9938	6.9938
9.8263	9.7403	9.6290	9.4752	9.2387	8.7096	8.8282	9.3077	9.5569
6.5992	6.5453	6.4700	6.3564	6.1637	5.6820	5.8221	6.3015	6.5507
0.4009	0.3111	0.1782	9.9659	9.5155	9.4059	9.9021	0.1089	0.2318
0.6424	0.5885	0.5132	0.3996	0.2069	9.7252	9.8653	0.3447	0.5939
1.2964	1.3438	1.3790	1.4031	1.4176	1.4233	1.4209	1.4107	1.3927
1.0433	0.8996	0.6914	0.3655	9.7224	9.1311	9.7674	0.4536	0.8257
0.8161	0.8482	0.8842	0.9244	0.9682	1.0156	1.0654	1.1173	1.1707
9.8372	9.0991	9.7473	9.8597	9.9746	0.0063	9.9776	9.8938	0.0839
+ 4.5	+ 0.9	— 2.7	— 6.1	— 8.8	— 10.5	— 11.0	— 10.3	— 8.1
+ 87	+ 86	+ 78	+ 63	+ 42	+ 14	— 19	— 57	— 97
+ 0.4	+ 0.3	+ 0.3	+ 0.2	+ 0.1	— 0.0	— 0.1	— 0.2	— 0.3

Datum			f'''	f''	f'	$\Sigma U dt$	f	$\langle U \rangle$	$\log \langle U \rangle$
1871	Juli	15				— 2082	+ 46828	+ 45778	4.66066
	Aug.	24			+ 128	— 1954	+ 44746	+ 43756	4.64104
	Oct.	3	+ 8	+ 49	+ 177	— 1777	+ 42792	+ 41887	4.62208
	Nov.	12	+ 8	+ 57	+ 234	— 1543	+ 41015	+ 40221	4.60445
	Dec.	22	+ 9	+ 65	+ 299	— 1244	+ 39472	+ 38822	4.58908
1872	Jan.	31	+ 8	+ 74	+ 373	— 1244	+ 38228	+ 37758	4.57701
	März	11	+ 8	+ 82	+ 455	— 871	+ 37357	+ 37107	4.56945
	April	20	+ 7	+ 90	+ 545	— 416	+ 36941	+ 36956	4.56768
	Mai	30	+ 6	+ 97	+ 642	+ 129	+ 37070	+ 37398	4.57285
	Juli	9	+ 3	+ 103	+ 745	+ 771	+ 37841	+ 38533	4.58583
	Aug.	18	— 4	+ 106	+ 851	+ 1516	+ 39357	+ 38533	4.58583
	Sept.	27	— 10	+ 102	+ 953	+ 2367	+ 41724	+ 40464	4.60707
	Nov.	6	— 21	+ 92	+ 1045	+ 3320	+ 45044	+ 43300	4.63649
	Dec.	16	— 43	+ 71	+ 1116	+ 4365	+ 49409	+ 47136	4.67335
	Jan.	25	— 69	+ 28	+ 1144	+ 5481	+ 54890	+ 52054	4.71645
1873	März	6	— 105	— 41	+ 1103	+ 6625	+ 61515	+ 58108	4.76424
	April	15	— 153	— 146	+ 957	+ 7728	+ 69243	+ 65291	4.81486
	Mai	25	— 190	— 299	+ 658	+ 8685	+ 77928	+ 73516	4.86638
	Juli	4	— 217	— 489	+ 169	+ 9343	+ 87271	+ 82562	4.91678
	Aug.	13	— 183	— 706	— 537	+ 9512	+ 96783	+ 92039	4.96397
	Sept.	22	— 101	— 889	— 1426	+ 8975	+ 105758	+ 101350	5.00582
	Nov.	1	+ 79	— 990	— 2416	+ 7549	+ 113307	+ 109692	5.04018
	Dec.	11	+ 267	— 911	— 3327	+ 5133	+ 118440	+ 116115	5.06489
	Jan.	20	+ 426	— 644	— 3971	+ 1806	+ 120246	+ 119652	5.07792
	März	1	+ 471	— 218	— 4189	— 2165	+ 118081	+ 119510	5.07741
1874	April	10	+ 383	+ 253	— 3936	— 6354	+ 111727	+ 115249	5.06164
	Mai	20	+ 226	+ 636	— 3300	— 10290	+ 101437	+ 106888	5.02893
	Juni	29	+ 46	+ 862	— 2438	— 13590	+ 87847	+ 94883	4.97719
	Aug.	8	— 75	+ 908	— 1530	— 16028	+ 71819	+ 79998	4.90308
	Sept.	17	— 154	+ 833	— 697	— 17558	+ 54261	+ 63131	4.80025
	Oct.	27	— 157	+ 679	— 18	— 18255	+ 36006	+ 45161	4.65476
	Dec.	6	— 161	+ 522	+ 504	— 18273	+ 17733	+ 26847	4.42889
	Jan.	15	— 125	+ 361	+ 865	— 17769	— 36	+ 8789	3.94394
	Febr.	24		+ 236	+ 1101	— 16904	— 16940	— 8571	3.93303
						— 15803	— 32743	— 24939	4.39688

Datum	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$d(Z_s)$	if	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$d(Z_e)$	if
1871 Juli 15				— 6.5	— 2110.0					+ 912.5
Aug. 24			— 0.6	— 7.1	— 2116.5			— 2.5	+ 11.2	+ 923.7
Oct. 3			0.0	— 7.1	— 2123.6			— 2.5	+ 8.7	+ 932.4
Nov. 12			+ 0.6	— 6.5	— 2130.7			— 2.2	+ 6.2	+ 938.6
Dec. 22			+ 1.2	— 5.3	— 2137.2			— 1.9	+ 4.0	+ 942.6
1872 Jan. 31			+ 1.6	— 3.7	— 2142.5			— 1.4	+ 2.1	+ 944.7
März 11			+ 2.0	— 1.7	— 2146.2		+ 0.7	— 0.7	+ 0.7	+ 945.4
April 20			+ 2.1	+ 0.4	— 2147.9		+ 0.8	+ 0.1	0.0	+ 945.4
Mai 30			+ 2.2	+ 2.6	— 2147.5		+ 0.7	+ 0.8	+ 0.1	+ 945.5
Juli 9		— 0.5	+ 1.9	+ 4.5	— 2144.9		+ 0.8	+ 1.6	+ 0.9	+ 946.4
Aug. 18		— 0.5	+ 1.4	+ 5.9	— 2140.4		+ 0.7	+ 2.3	+ 2.5	+ 948.9
Sept. 27		— 0.9	+ 0.9	+ 6.8	— 2134.5		+ 0.6	+ 2.9	+ 4.8	+ 953.7
Nov. 6		— 0.9	0.0	+ 6.8	— 2127.7		0.0	+ 2.9	+ 7.7	+ 961.4
Dec. 16		— 0.9	— 0.9	+ 5.9	— 2120.9		— 0.2	+ 2.7	+ 10.6	+ 972.0
1873 Jan. 25		— 0.3	— 1.8	+ 4.1	— 2115.0	— 0.6	— 1.1	+ 1.6	+ 13.3	+ 985.3
März 6	+ 0.4	+ 0.1	— 2.1	+ 2.0	— 2110.9	— 1.5	— 1.7	— 0.1	+ 14.9	+ 1000.2
April 15	+ 1.3	+ 1.4	0.0	0.0	— 2108.9	— 0.6	— 3.2	— 3.3	+ 14.8	+ 1015.0
Mai 25	+ 1.8	+ 3.2	— 0.6	— 0.6	— 2108.9	— 1.5	— 3.8	— 7.1	+ 11.5	+ 1026.5
Juli 4	+ 2.1	+ 5.3	+ 2.6	+ 2.0	— 2109.5	0.0	— 5.3	— 12.4	+ 4.4	+ 1030.9
Aug. 13	+ 2.0	+ 7.3	+ 7.9	+ 9.9	— 2107.5	+ 0.4	— 5.3	— 17.7	— 8.0	+ 1022.9
Sept. 22	+ 1.4	+ 8.7	+ 15.2	+ 25.1	— 2097.6	+ 1.8	— 4.9	— 22.6	— 25.7	+ 997.2
Nov. 1	— 0.2	+ 8.5	+ 23.9	+ 49.0	— 2072.5	+ 3.4	— 2.7	— 25.3	— 48.3	+ 948.9
Dec. 11	— 2.2	+ 6.3	+ 32.4	+ 81.4	— 2023.5	+ 4.0	+ 0.7	— 24.6	— 73.6	+ 875.3
1874 Jan. 20	— 4.6	+ 38.7	+ 120.1	— 1942.1	+ 3.8	+ 4.7	— 19.9	— 98.2	— 118.1	+ 777.1
März 1	— 4.7	+ 40.4	+ 160.5	— 1822.0	+ 2.1	+ 8.5	— 11.4	— 129.5	+ 659.0	+ 529.5
April 10	— 4.5	+ 37.4	+ 197.9	— 1661.5	— 0.5	+ 10.6	— 0.8	— 130.3	+ 399.2	+ 278.2
Mai 20	— 3.6	+ 29.9	+ 227.8	— 1463.6	— 1.9	+ 10.1	+ 9.3	— 121.0	+ 174.7	+ 94.0
Juni 29	— 0.6	+ 19.8	+ 247.6	— 1235.8	— 2.9	+ 8.2	+ 17.5	— 103.5	+ 38.4	— 0.8
Aug. 8	+ 0.4	+ 9.1	+ 256.7	— 988.2	— 3.0	+ 5.3	+ 22.8	— 80.7	+ 10.4	+ 27.0
Sept. 17	+ 2.2	— 1.2	+ 255.5	— 731.5	— 2.7	+ 2.3	+ 25.1	— 55.6	+ 27.0	+ 37.4
Oct. 27	+ 1.8	— 9.3	+ 246.2	— 476.0	— 1.7	— 0.4	+ 24.7	— 30.9	+ 10.4	+ 37.4
Dec. 6	+ 2.2	— 15.6	+ 230.6	— 229.8	— 1.0	+ 22.6	— 8.3	— 0.8	+ 10.4	+ 37.4
1875 Jan. 15	+ 1.7	— 19.7	+ 210.9	+ 211.7	+ 0.8	— 0.6	+ 19.5	+ 11.2	+ 10.4	+ 37.4
Febr. 24		— 22.1	+ 188.8	+ 400.5			+ 15.8			

Datum	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$d(N_s)$	if	N_s	f^{IV}	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$d(N_c)$	if	N_c
1871 Juli 15				+ 831.8	+17608.9	+18007.0					-1421.3	-42566.8	-43290.6
Aug. 24	-11.4	-28.8	+203.1	+1034.9	+18440.7	+18942.2			+41.4	+158.8	-1262.5	-43988.1	-44634.3
Oct. 3	-7.8	-40.2	+174.3	+1209.2	+19475.6	+20067.2	-6.5		+34.9	+200.2	-1062.3	-45250.6	-45799.9
Nov. 12	-3.0	-48.0	+134.1	+1343.3	+20684.8	+21347.3	-11.1		+23.8	+235.1	-827.2	-46312.9	-46747.3
Dec. 22	+3.5	-51.0	+86.1	+1429.4	+22028.1	+22737.8	-13.7		+10.1	+258.9	-568.3	-47140.1	-47446.4
1872 Jan. 31	+8.6	-47.5	+35.1	+1464.5	+23457.5	+24188.9	-12.9		-2.8	+269.0	-299.3	-47708.4	-48007.7
Marz 11	+12.0	-38.9	-12.4	+1452.1	+24922.0	+25650.9	-9.8		-12.6	+266.2	-33.1	-48040.8	-48046.0
April 20	+10.6	-26.9	-51.3	+1400.8	+26374.1	+27080.1	-3.1		-15.7	+253.6	+220.5	-47820.3	-47951.0
Mai 30	+6.7	-16.3	-78.2	+1322.6	+27774.9	+28443.6	+3.4		-12.3	+237.9	+458.4	-47361.9	-47610.3
Juli 9	+1.3	-9.6	-94.5	+1228.1	+29097.5	+29719.9	+8.5		-3.8	+225.6	+684.0	-46677.9	-47038.4
Aug. 18	-6.0	-8.3	-104.1	+1124.0	+30325.6	+30896.6	+1.4		+8.0	+221.8	+905.8	-45772.1	-46243.7
Sept. 27	-9.6	-14.3	-112.4	+1011.6	+31449.6	+31965.3	-1.5		+18.4	+229.8	+1135.6	-44636.5	-45224.1
Nov. 6	-13.9	-23.9	-126.7	+884.9	+32461.2	+32915.0	+5.3		+27.3	+248.2	+1383.8	-43252.7	-43966.3
Dec. 16	-15.1	-37.8	-150.6	+734.3	+33346.1	+33727.1	-5.5		+30.9	+275.5	+1659.3	-41593.4	-42447.3
1873 Jan. 25	-14.2	-52.9	-188.4	+545.9	+34080.4	+34371.0	-7.0		+29.0	+306.4	+1965.7	-39627.7	-40637.4
Marz 6	-10.6	-67.1	-241.3	+304.6	+34626.3	+34801.3	-8.3		+20.1	+335.4	+2301.1	-37326.6	-38506.1
April 15	-2.8	-77.7	-386.1	-3.8	+34930.9	+34957.8	-9.8		+2.9	+355.5	+2656.6	-34670.0	-36028.4
Mai 25	+10.1	-80.5	-466.6	-389.9	+34927.1	+34767.7	-8.7		-24.1	+334.3	+3015.0	-31655.0	-33191.9
Juli 4	+27.5	-70.4	-537.0	-856.5	+34537.2	+34151.2	-6.1		-59.8	+274.5	+3349.3	-28305.7	-30006.3
Aug. 13	+47.3	-42.9	-579.9	-1393.5	+33680.7	+33031.2	+1.3		-101.6	+172.9	+3623.8	-24681.9	-26513.1
Sept. 22	+61.5	+4.4	-575.5	-1973.4	+32287.2	+31349.5	+14.4		-142.1	+30.8	+3796.7	-20885.2	-22792.5
Nov. 1	+65.0	+65.9	-509.6	-2548.9	+30313.8	+29085.5	+23.8		-168.2	-137.4	+3827.5	-17057.7	-18967.2
Dec. 11	+48.8	+130.9	-378.7	-3058.5	+27764.9	+26273.5	+31.2		-170.5	-307.9	+3690.1	-13367.6	-15193.9
1874 Jan. 20	+21.0	+179.7	-199.0	-3437.2	+24706.4	+23012.4	+23.7		-141.6	-449.5	+3382.2	-9985.4	-11644.3
März 1	-10.9	+200.7	+1.7	-3636.2	+21269.2	+19459.2	-9.7		-89.0	-538.5	+2932.7	-7052.7	-8477.1
April 10	-35.9	+189.8	+191.5	-3443.0	+17633.0	+15807.4	+5.1		-26.7	-565.2	+2394.2	-4658.5	-5808.7
Mai 20	-47.9	+153.9	+345.4	-3097.6	+13998.5	+12254.0	-15.4		+30.5	-534.7	+1829.0	-2820.5	-3697.4
Juni 29	-47.2	+106.0	+451.4	-3097.6	+10555.5	+8972.8	-18.4		+72.3	-462.4	+1294.3	-1535.2	-2140.3
Aug. 8	-40.0	+58.8	+510.2	-2646.2	+7457.9	+6094.1	-15.7		+95.7	-366.7	+831.9	-703.3	-1084.5
Sept. 17	-29.8	+18.8	+529.0	-2136.0	+4811.7	+3699.9	-10.5		+103.4	-263.3	+465.2	-238.1	-444.4
Oct. 27	-20.0	-11.0	+518.0	-1607.0	+2675.7	+1828.2	-6.2		+100.6	-162.7	+201.9	-36.2	-119.5
Dec. 6	-11.9	-31.0	+487.0	-1089.0	+1068.7	+482.0	-2.2		+91.6	-71.1	+39.2	+3.0	-7.0
1875 Jan. 15		-42.9	+444.1	-602.0	-20.3	-360.2	-11.2		+80.4	+9.3	-31.9	-28.9	-10.5
Febr. 24				-157.9	-622.3	-734.8					-22.6	-51.5	-44.1

Datum	f^{III}	f^{II}	f^{I}	$d(M)$	f	f^{II}	f^{I}	$d(W)$	f
1871 Juli 15				— 28"93	+ 1° 3'23"95				— 8'58"16
Aug. 24		+0"24	—32"21	— 1' 1"14	+ 1° 2'55"02		—0"07	+14"84	— 8'43"32
Oct. 3	+0"86	+1.10	—31.97	— 1'33"11	+ 1° 1'53"88		—0.11	+14.66	— 8'28"55
Nov. 12	+0.91	+2.01	—30.87	— 2' 3"98	+ 1° 0'20"77		—0.14	+14.52	— 8'13"89
Dec. 22	+0.87	+2.88	—28.86	— 2'32"84	+ 58'16"79		—0.18	+14.34	— 7'59"37
1872 Jan. 31	+0.83	+3.71	—25.98	— 2'58"82	+ 55'43"95		—0.18	+14.16	— 7'45"03
März 11	+0.67	+4.38	—22.27	— 3'21"09	+ 52'45"13	+0"05	—0.16	+14.00	— 7'30"87
April 20	+0.48	+4.86	—17.89	— 3'38"98	+ 49'24"04	+0.10	—0.11	+13.89	— 7'16"87
Mai 30	+0.26	+5.12	—13.03	— 3'52"01	+ 45'45"06	+0.13	—0.01	+13.88	— 7' 2"98
Juli 9	+0.02	+5.14	— 7.91	— 3'59"92	+ 41'53"05	+0.17	+0.12	+14.00	— 6'49"10
Aug. 18	—0.22	+4.92	— 2.77	— 4' 2"69	+ 37'53"13	+0.18	+0.29	+14.29	— 6'35"10
Sept. 27	—0.37	+4.55	+ 2.15	— 4' 0"54	+ 33'50"44	+0.21	+0.47	+14.76	— 6'20"81
Nov. 6	—0.55	+4.00	+ 6.70	— 3'53"84	+ 29'49"90	+0.22	+0.68	+15.44	— 6' 6"05
Dec. 16	—0.62	+3.38	+10.70	— 3'43"14	+ 25'56"06	+0.20	+0.90	+16.34	— 5'50"61
1873 Jan. 25	—0.73	+2.65	+14.08	— 3'29"06	+ 22'12"92	+0.18	+1.10	+17.44	— 5'34"27
März 6	—0.68	+1.97	+16.73	— 3'12"33	+ 18'43"86	+0.14	+1.28	+18.72	— 5'16"83
April 15	—0.76	+1.21	+18.70	— 2'53"63	+ 15'31"53	+0.07	+1.42	+20.14	— 4'58"11
Mai 25	—0.70	+0.51	+19.91	— 2'33"72	+ 12'37"90	—0.01	+1.49	+21.63	— 4'37"97
Juli 4	—0.66	—0.15	+20.42	— 2'13"30	+ 10' 4"18	—0.17	+1.48	+23.10	— 4'16"34
Aug. 13	—0.62	—0.77	+20.27	— 1'53"03	+ 7'50"88	—0.29	+1.31	+24.42	— 3'53"24
Sept. 22	—0.54	—1.31	+19.50	— 1'33"53	+ 5'57"85	—0.47	+1.02	+25.44	— 3'28"82
Nov. 1	—0.44	—1.75	+18.19	— 1'15"34	+ 4'24"32	—0.61	+0.55	+25.99	— 3' 3"38
Dec. 11	—0.28	—2.03	+16.44	— 58"90	+ 3' 8"98	—0.72	—0.06	+25.93	— 2'37"39
1874 Jan. 20	—0.19	—2.22	+14.41	— 44"49	+ 2'10"08	—0.74	—0.78	+25.15	— 2'11"46
März 1	—0.03	—2.25	+12.19	— 32"30	+ 1'25"59	—0.69	—1.52	+23.63	— 1'46"31
April 10	+0.09	+ 9.94	+ 9.94	— 22"36	+ 53"29	—0.56	—2.21	+21.42	— 1'22"68
Mai 20	+0.17	+ 7.78	+ 7.78	— 14"58	+ 30"93	—0.42	—2.77	+18.65	— 1' 1"26
Juni 29	+0.26	+ 5.79	+ 5.79	— 8"79	+ 16"35	—0.22	—3.19	+15.47	— 42"61
Aug. 8	+0.29	+ 4.06	+ 4.06	— 4"73	+ 7"56	—0.10	—3.41	+12.05	— 27"14
Sept. 17	+0.27	+ 2.62	+ 2.62	— 2"11	+ 2"83	+0.01	—3.51	+ 8.54	— 15"09
Oct. 27	+0.32	+ 1.45	+ 1.45	— 0"66	+ 0"72	+0.10	—3.50	+ 5.04	— 6"55
Dec. 6	+0.26	+ 0.60	+ 0.60	— 0"06	+ 0"06	+0.15	—3.40	+ 1.65	— 1"51
1875 Jan. 15	+0.27	+ 0.01	+ 0.01	— 0"05	0	+0.17	—3.25	+ 0"14	— 0"14
Febr. 24		— 0.31	— 0.31	— 0"36	— 0"05		—3.08	— 4.69	— 1"47
					— 0"41				— 6"16

Methoden der kleinsten Quadrate.

A. Theoretische Grundlage der Methode der kleinsten Quadrate und deren Anwendung auf die einfachsten Fälle.

§. 1. Allgemeine Betrachtungen.

Alle Bestimmungen, die sich auf Beobachtungen gründen, sind von begrenzter Genauigkeit; hat man daher mehrere Beobachtungen einer und derselben Grösse, so werden jene im Allgemeinen nahe identische Resultate geben; die Abweichungen selbst untereinander werden aber ganz wesentlich von der Güte der angewandten Instrumente, der Geschicklichkeit des Beobachters und den bei der Beobachtung stattfindenden Umständen abhängig sein. Liegen nun mehrere solche directe Bestimmungen einer und derselben Grösse vor, denen man Allen a priori dieselbe Genauigkeit zuschreiben darf, so wird das arithmetische Mittel der einzelnen Beobachtungsergebnisse wohl als der wahrscheinlichste Werth betrachtet werden dürfen; dieser Satz soll gleichsam als Axiom ohne Beweis hingestellt werden, da derselbe so viel Wahrscheinlichkeit für sich in Anspruch nimmt, dass man die Annahme als evident anzunehmen sich erlauben kann.

Als Grundlage für die Methode der kleinsten Quadrate wird man dem entsprechend den folgenden Satz anzusehen haben: »Ist eine Grösse durch eine Reihe unmittelbarer Bestimmungen von gleicher Verlässlichkeit bestimmt worden, so ist das aus diesen Beobachtungen gezogene arithmetische Mittel der wahrscheinlichste Werth«, d. h. der Werth, der voraussichtlich der Wahrheit am nächsten kommt.

Bezeichnet man die durch die directe Beobachtung erhaltenen Werthe der Unbekannten mit $M_1, M_2, M_3, \dots, M_m$, das arithmetische Mittel mit x , so ist, wenn die Anzahl der Einzelbeobachtungen durch m bezeichnet wird, der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten bestimmt durch

$$x = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_m}{m},$$

oder auch

$$mx = M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_m.$$

Bildet man nun die Differenzen zwischen den einzelnen Beobachtungen und dem wahrscheinlichsten Werth, so werden diese Differenzen der Hauptsache nach als

Beobachtungsfehler angesehen werden können, und bildet man die Summe derselben, so wird sein:

$$(M_1 - x) + (M_2 - x) + \dots + (M_m - x) = M_1 + M_2 + \dots + M_m - mx = 0. \quad 1)$$

Es ist also die Summe der Beobachtungsfehler oder genauer ausgedrückt, die Summe der Differenzen zwischen den Beobachtungsergebnissen und dem arithmetischen Mittel der Null gleich, eine Relation, die übrigens unmittelbar aus der Idee des arithmetischen Mittels resultirt. Diese Relation kann aber auch in einer anderen Weise gefasst werden, die für die folgenden Untersuchungen von besonderen Nutzen ist und deren Gültigkeit weiter unten auf einem anderen Wege nachgewiesen werden wird. Sucht man nämlich für die Funktion:

$$(M_1 - x)^2 + (M_2 - x)^2 + \dots + (M_m - x)^2$$

die Bedingung des Minimums, so erhält man durch Differentiation dieses Ausdruckes nach x und durch die nachträgliche Nullsetzung der Derivation ebenfalls einen mit der Relation 1) identischen Ausdruck; es findet sich nämlich nach Ausführung der angezeigten Operationen:

$$(M_1 - x) + (M_2 - x) + \dots + (M_m - x) = 0.$$

Bedenkt man, dass diese Ableitung auch für das Maximum gilt, dass aber die Funktion in der hier auftretenden Form kein geschlossenes Maximum besitzt, da mit unendlich wachsendem x der Werth der Summe der Quadrate unendlich gross wird, so wird man ebenfalls das oben hingestellte Axiom umformen können in das folgende: »der wahrscheinlichste Werth einer Unbekannten, die durch mehrere gleich verlässliche Beobachtungen bestimmt ist, ist derjenige, welcher die Summe der Quadrate der Differenzen, die zwischen der Beobachtung und Rechnung auftreten, zu einem Minimum macht.« In dieser Form hingestellt hat das Axiom des arithmetischen Mittels der Methode den Namen gegeben.

Es dürfte aber angemessen sein, den Nachweis zu liefern, dass keine andere Funktion dieser Minimumbedingung genügt. Es sei F eine Funktion des Beobachtungsfehlers $(M - x)$, welche Differenz der Kürze halber mit J bezeichnet werden soll; das Axiom des arithmetischen Mittels sagt aber aus:

$$J_1 + J_2 + \dots + J_m = 0.$$

Es wird also zu untersuchen sein, welche Formen der Funktion der Bedingung

$$F(J_1) + F(J_2) + \dots + F(J_m) = \text{Minimum}$$

in Verbindung mit der ersteren Relation genügen können. Für die Bedingung des Minimums kann aber gesetzt werden:

$$\frac{dF(J_1)}{dJ_1} + \frac{dF(J_2)}{dJ_2} + \dots + \frac{dF(J_m)}{dJ_m} = 0. \quad 2)$$

Um nun aus dieser Funktionalgleichung die Form der Funktion selbst zu bestimmen, wird man diese Gleichung nochmals differentiiiren mit Rücksicht auf die Bedingung des arithmetischen Mittels. Man wird dieser letzteren Bedingung einfach dadurch genügen, dass man für J_m den Werth

$$J_m = -J_1 - J_2 - \dots - J_{m-1} \quad 3)$$

einführt, wodurch die übrigen Unterschiede $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \dots \mathcal{A}_{m-1}$ von einander völlig unabhängig erscheinen. Beachtet man, dass ist:

$$\frac{d(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_{m-1})}{d\mathcal{A}_1} = 1$$

$$\frac{d(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_{m-1})}{d\mathcal{A}_2} = 1$$

u. s. f.

und schreibt der Kürze halber für

$$\frac{dF(\mathcal{A})}{d\mathcal{A}} = F'(\mathcal{A}) ,$$

so erhält man durch Differentiation des Ausdruckes 2) nach \mathcal{A}_1 , wenn man der Relation 3) entsprechend das Differential des letzten Gliedes, welches nebst dem ersten bei der Differentiation nach \mathcal{A}_1 nicht verschwindet:

$$\frac{dF'(\mathcal{A}_1)}{d\mathcal{A}_1} = \frac{dF'(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_{m-1})}{d(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_{m-1})}$$

ähnlich erhält man durch die Differentiation von 2) nach $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ u. s. w.:

$$\frac{dF'(\mathcal{A}_2)}{d\mathcal{A}_2} = \frac{dF'(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_{m-1})}{d(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_{m-1})}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\frac{dF'(\mathcal{A}_{m-1})}{d\mathcal{A}_{m-1}} = \frac{dF'(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_{m-1})}{d(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_{m-1})} .$$

Da also nun $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \dots \mathcal{A}_{m-1}$ völlig von einander unabhängig erscheinen, so kann die Gleichheit dieser Differentialquotienten nur dann bestehen, wenn diese selbst einer Constanten gleich sind. Es resultirt demnach für die vorgelegte Funktion die Relation:

$$\frac{dF'(\mathcal{A})}{d\mathcal{A}} = c_0 .$$

Die Integration ergibt, wenn man wieder für $F'(\mathcal{A})$ die ursprüngliche Form restituiert:

$$\frac{dF(\mathcal{A})}{d\mathcal{A}} = c_0 \mathcal{A} + c_1 . \quad 4)$$

Es lässt sich jedoch leicht erweisen, dass die Constante c_1 der Null gleich gesetzt werden muss, denn führt man diese eben gewonnene Relation in die Gleichung 2) ein, so erhält man:

$$c_0(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_m) + mc_1 = 0 .$$

Da aber der Coefficient von c_0 nach der Idee des arithmetischen Mittels der Null gleich ist, so muss ebenfalls c_1 der Null gleich sein; man kann also statt 4) schreiben:

$$\frac{dF(\mathcal{A})}{d\mathcal{A}} = c_0 \mathcal{A} .$$

Integriert man nun diese Gleichung nochmals, so erhält man:

$$F(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} c_0 \mathcal{A}^2 + c_2 ,$$

woraus unmittelbar resultirt, dass die einzige Funktion, die der gestellten Bedingung

genügt, diejenige ist, die die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht: die willkürliche Constante kommt natürlich hier nicht weiter in Betracht, da dieselbe die Bedingung des Minimums nicht afficirt.

Indem so die oben aufgestellten Axiome als völlig identisch angesehen werden können, sieht man sofort ein, dass der Lösung des Problems in dem einfachen, hier in Betracht gezogenen Falle keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr entgegenstehen; doch complicirt sich die Sache sofort, wenn es sich um die Bestimmung von mehreren Unbekannten aus vielen Beobachtungen handelt; es wird sich aber in der Folge zeigen, dass man mit dem aufgestellten Principe ausreichen und durch consequente Anwendung desselben die complicirtesten Fälle der Rechnung unterwerfen kann.

Es wurde bisher vorausgesetzt, dass die zum wahrscheinlichsten Resultate zusammenzufassenden Beobachtungen oder Theilresultate von gleicher Verlässlichkeit sind; ist nun dies nicht der Fall, so muss auf diesen Umstand gehörig Rücksicht genommen werden. Bei der Lösung der vorgelegten Aufgabe wird im weiteren Verlaufe der Entwicklungen ein grosser Vorzug der Methode der kleinsten Quadrate sich herausstellen, indem man durch dieselbe in den Stand gesetzt wird, die wahrscheinliche Unsicherheit des Resultates nach den übrigbleibenden Differenzen zwischen den Beobachtungen und der Rechnung zu bestimmen, also die Vertrauenswürdigkeit des Resultates auf ein numerisches Maass zurückzuführen. So wünschenswerth es ist, Methoden zu besitzen, welche die Ermittlung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten gestatten, so wenig befriedigend wären dieselben für sich allein, wenn man nicht durch dieselben ein nach bestimmten Principien bestimmtes Maass für die Genauigkeit der gewonnenen Resultate erhalten würde: die durch die Methode der kleinsten Quadrate gebotene Möglichkeit, dieser Forderung zu genügen, muss zu einem nicht immer gehörig gewürdigten Hauptvorteil derselben gezählt werden.

Sollen Beobachtungen oder Theilresultate von differenter Genauigkeit mit einander verbunden werden, so muss man sich vor Allem die Ursachen klar machen, welche diese Verschiedenheit bedingen; der einfachste Fall ist etwa der, wo man die einzelnen Beobachtungsdaten als Resultate verschiedener Beobachtungsreihen aufzufassen in der Lage ist, so dass also das Resultat einer Beobachtungsreihe als eine Beobachtung hingestellt wird und die Einzelbeobachtungen innerhalb dieser verschiedenen Reihen von gleicher Genauigkeit angesehen werden dürfen. Die Anzahl der zum Theilresultate vereinigten Einzelbeobachtungen wird offenbar als ein Maassstab für die Genauigkeit desselben angesehen werden, und es soll die denselben ausdrückende Zahl den Namen »Gewicht« erhalten. Es sei der Werth der Unbekannten x bestimmt worden durch eine Reihe von m' Beobachtungen, die einzelnen Beobachtungen sind von gleicher Vertrauenswürdigkeit, haben also das gleiche Gewicht, diese Einzelbeobachtungen seien: $M_1', M_2', \dots M_{m'}'$. Man erhält den wahrscheinlichsten Werth x' aus dieser Reihe für die Unbekannte nach dem Obigen:

$$x' = \frac{M_1' + M_2' + \dots + M_{m'}'}{m'}$$

Eine zweite Beobachtungsreihe ähnlich behandelt ergäbe:

$$x'' = \frac{M_1'' + M_2'' + \dots + M_{m''}''}{m''}$$

eine dritte:

$$x''' = \frac{M_1''' + M_2''' + \dots + M_{m'''}'''}{m'''} \text{ u. s. f.}$$

Hält man hierbei die gemachte Voraussetzung fest, dass allen Beobachtungen in jeder dieser Beobachtungsreihen eine gleiche Genauigkeit a priori zugeschrieben wird, so kann man auch den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten x aus der Gesamtheit dieser Beobachtungen nach dem Satze des arithmetischen Mittels finden:

$$x = \frac{M_1' + M_2' + \dots + M_1'' + M_2'' + \dots + M_1''' + M_2''' + \dots}{m' + m'' + m''' + \dots},$$

welche Gleichung mit Rücksicht auf die oben aufgestellten Theilresultate geschrieben werden kann:

$$x = \frac{m'x' + m''x'' + m'''x''' + \dots}{m' + m'' + m''' + \dots}, \quad 5)$$

welcher Ausdruck sofort zu dem folgenden Satze führt: Wenn aus Beobachtungsergebnissen, denen verschiedene aber bekannte Gewichtszahlen zugeschrieben werden, der wahrscheinlichste Werth gefunden werden soll, so erhält man denselben, wenn man die Beobachtungsergebnisse mit dem zugehörigen Gewichte multiplicirt und die Summe dieser Producte durch die Summe der Gewichte dividirt. Das Gewicht dieser Bestimmung selbst ist offenbar der Summe der Gewichte gleich.

Weiter resultirt, dass nothwendig sein muss:

$$m'(x' - x) + m''(x'' - x) + \dots = 0. \quad 6)$$

An dem Ausdrucke 5) wird seinem Werthe nach nichts geändert, wenn man den Zähler und Nenner mit einem beliebigen Factor a multiplicirt, also setzt:

$$x = \frac{am'x' + am''x'' + am'''x''' + \dots}{am' + am'' + am''' + \dots},$$

woraus man sofort schliessen kann, dass die Gewichte nur Relativzahlen sind und keineswegs ganze Zahlen zu sein brauchen. Eine Beobachtung mit dem Gewichte »Null« ist verfehlt, und wird gleichsam nicht mitgezählt, wird verworfen. ein negatives Gewicht hat aber nach der Idee desselben keine Bedeutung. Bezeichnet man mit p das Gewicht, so wird man sich stets vor Augen halten müssen, dass p einen positiven Werth hat; es würde sich daher einigermaßen aus diesem und anderen später hervortretenden Gründen empfehlen für das Gewicht das Symbol pp einzuführen; da dies aber nicht üblich ist, so bleibe ich bei der gewählten Bezeichnung.

Man kann sich die oben angeführten Theilresultate x' , x'' , x''' ... auf die verschiedenartigste Weise entstanden denken, so z. B. sei x' mit Hilfe eines genaueren Instrumentes erhalten worden als x'' , x''' wäre durch einen anderen Beobachter von geringerer Geschicklichkeit geliefert u. s. w.. so sind dies Umstände,

die den Theilresultaten verschiedenes Gewicht ertheilen; die Discussion einer jeden dieser Beobachtungsreihen wird, geleitet durch die Principien, die in der Folge entwickelt werden, aus den Beobachtungen selbst eine Gewichtsbestimmung ermöglichen, eine Bestimmung, die bisher stillschweigend als vollzogen betrachtet wurde; es wird nämlich offenbar jenen Beobachtungen der einzelnen Reihen, die innerhalb derselben kleinere Differenzen zwischen den Beobachtungen und der Rechnung übrig lassen, ein grösseres Gewicht zuzuschreiben sein und damit das Gewicht gewissermassen a posteriori bestimmt. Man wird aber hierbei zu bemerken haben, dass offenbar nur dann eine einigermassen sichere Bestimmung des Gewichtes der Beobachtungen in den verschiedenen Reihen a posteriori erlangt werden kann, wenn die Beobachtungen einer jeden Reihe zahlreich sind, weil ja nur in diesem Falle auf eine Ausgleichung der zufälligen Fehlerquellen, die die einzelne Beobachtung betreffen, mit einiger Sicherheit gerechnet werden darf, ein Umstand, der nicht immer gehörig berücksichtigt wird.

§ 2. Die gesetzmässige Vertheilung der Beobachtungsfehler.

Nach den vorausgehenden allgemein orientirenden Bemerkungen wird es angemessen erscheinen, vorerst die Gesetze zu finden, nach denen die Beobachtungsfehler trotz ihrer scheinbaren Regellosigkeit sich halten und anordnen; hierbei werden aber nur die rein zufälligen Fehler in Betracht gezogen werden, da die Methode der kleinsten Quadrate kein Mittel an die Hand geben kann, eine die Beobachtungen in constanter Weise entstellende Fehlerquelle zu finden und ihrer Grösse nach zu bestimmen. Es ist in diesem Falle die Aufgabe des Beobachters, die Anordnung und die Reduction der Beobachtungen so zu treffen, dass solche constante Fehler möglichst wenig in den Vordergrund treten; hierüber lassen sich aber offenbar keine allgemeinen Vorschriften geben, doch wird man beachten, dass es nur in den seltensten Fällen gelingen wird, trotz aller darauf aufgewendeten Mühen, die Beobachtungen völlig von diesen constanten Fehlerquellen zu befreien; es wird daher im Allgemeinen die durch die Methode der kleinsten Quadrate gefundene Unsicherheit des Resultates, die sich nur auf die zufällig auftretenden Fehler gründet, zu klein gefunden werden und die thatsächliche grösser sein, entsprechend dem begangenen, seiner Grösse nach aber unbekannten constanten Fehler. Diese Betrachtung, welche durch die Erfahrung allseitig bestätigt wird, muss man sich stets bei der Beurtheilung der theoretisch bestimmten Unsicherheit des Resultates aus der Uebereinstimmung der Beobachtungen vor Augen halten, und würde man dies stets gethan haben, so würden manche Vorwürfe, die man der Methode in ungerechtfertigter Weise zugeschoben hat, nicht gemacht worden sein.

Dass die zufälligen Fehler in der That eine gewisse Anordnung in Bezug auf ihre Grösse zeigen müssen, lässt sich leicht in den allgemeinsten Zügen nachweisen;

so wird z. B. der Fadenantritt eines Aequator-Sternes an einem grösseren Meridian-instrumente im Durchschnitt auf etwa 0.07 Zeitsecunden für einen mässig geübten Beobachter genau aufzufassen sein; ein Fehler von einer halben Secunde wird daher äusserst selten auftreten, Fehler von 0.1 aber sehr häufig. Diese Betrachtung berechtigt also zu dem Schlusse, dass die Wahrscheinlichkeit des Eintretens einer gewissen Fehlergrösse selbst eine Funktion der letzteren ist.

Man wird daher behaupten können,

$$\varphi (\mathcal{A})$$

wird die Wahrscheinlichkeit des Eintretens einer gewissen Fehlergrösse \mathcal{A} darstellen, wobei vorläufig die Form der Funktion φ selbst unbekannt ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler \mathcal{A}' eintritt, wird also durch $\varphi (\mathcal{A}')$ ausgedrückt werden können. Lässt man nun die Werthe $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'' \dots$ der Reihe nach alle Werthe annehmen zwischen den Grenzen $-c$ und $+c$, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler sich innerhalb dieser Grössen findet, offenbar gleich sein der Summe der Wahrscheinlichkeiten der innerhalb dieser Grenzen befindlichen Fehler, und sei diese Summe durch P bezeichnet, so ist:

$$P = \sum_{\mathcal{A} = -c}^{\mathcal{A} = +c} \varphi (\mathcal{A}) ;$$

bei einer grossen Beobachtungsreihe kann man aber wohl annehmen, dass die Fehler selbst ihrer Grösse nach nahe continuirlich in einander übergehen. Erlaubt man sich diese allerdings nur theilweise gerechtfertigte Annahme, so wird man diese Summe durch ein Integral ersetzen dürfen und die Form erhalten:

$$P = \int_{-c}^{+c} \varphi (\mathcal{A}) d\mathcal{A}. \quad 1)$$

Dieser für die weitere Behandlung nothwendige Uebergang von einer Summe auf ein Integral wird uns zur Vorsicht mahnen, wenn Resultate aus einer geringen Zahl von Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet werden sollen; die Methode fordert, dass mindestens in einer gewissen Annäherung die Summe durch das Integral ersetzt werden darf; diese Voraussetzung wird um so fehlerhafter sein, je geringer die Anzahl der Beobachtungen ist. Dieser hier hervorgehobene Umstand tritt nicht nur bei der eben angestellten Betrachtung nachtheilig hervor, sondern auch bei den weiter unten folgenden Betrachtungen.

In dem Ausdruck 1) wird nothwendig P stets kleiner als die Einheit sein müssen, denn die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines gewissen Falles drückt das Verhältniss desselben zu allen möglichen aus; dieses Verhältniss kann daher nur dann der Einheit gleich gesetzt werden, wenn die Fehlergrenzen so weit gezogen werden, dass dieselben alle möglichen Fälle in sich schliessen, denn dann geht die Wahrscheinlichkeit in die Gewissheit $= 1$ über.

Durch diese Betrachtungen ist man in der Lage, das obige bestimmte Integral für einen bestimmten Grenzwertb seinem numerischen Werthe nach anzugeben,

eine Auswerthung, die seiner Zeit von besonderem Nutzen sein wird zur Bestimmung einer Integrationsconstante. Die Gewissheit, dass der Fehler innerhalb der gesteckten Grenzen liegt, wird man nur dann haben, wenn man die Fehlergrenzen unendlich weit steckt, also für $c = \pm \infty$ substituirt, es wird dann $P = 1$ und es besteht daher die für die Folge wichtige Relation:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(A) dA . \quad 2)$$

Diese Betrachtungen selbst führen aber nicht zur Kenntniss der Form der Function; zu diesem Ende muss man das Problem von einer anderen Seite fassen. Mag man die Unbekannte x , die durch die Beobachtung bestimmt wird, wie immer wählen, so werden, sobald eine bestimmte Annahme über dieselbe gemacht wird, ganz bestimmte Differenzen auftreten zwischen dieser Annahme und den beobachteten Werthen, die durch \mathcal{A}' , \mathcal{A}'' , $\mathcal{A}''' \dots$ dargestellt werden sollen. Die Wahrscheinlichkeiten eines jeden dieser einzelnen Fehler ist aber bestimmt durch $\varphi(\mathcal{A}')$, $\varphi(\mathcal{A}'')$, $\varphi(\mathcal{A}''') \dots$, die Wahrscheinlichkeit aber, dass diese bestimmten Fehler \mathcal{A}' , \mathcal{A}'' , $\mathcal{A}''' \dots$ gleichzeitig vorhanden sind, also mit einer bestimmten Annahme über die Unbekannte eintreten, wird gleich sein dem Producte dieser Wahrscheinlichkeiten, nämlich der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit. Bezeichnet man diese letztere mit W , so wird man haben:

$$W = \varphi(\mathcal{A}') \cdot \varphi(\mathcal{A}'') \cdot \varphi(\mathcal{A}''') \dots \quad 3)$$

Diese Productform rechtfertigt sich durch die folgende Betrachtung aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Tritt unter y Fällen das geforderte Ereigniss nur l mal ein, so ist die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens bestimmt durch: $\frac{l}{y}$; sind etwa in einer Urne 10 Kugeln, von denen 6 weiss und 4 schwarz sind, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass man mit einem Zuge eine weisse Kugel zieht, sein: $\frac{6}{10}$. Nimmt man weiter eine Urne mit z Kugeln, von denen n weiss sind, so wird die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weissen Kugel sein $\frac{n}{z}$; will man nun die Wahrscheinlichkeit kennen, welche sich darbietet, dass bei gleichzeitigen Zügen aus beiden Urnen zwei weisse Kugeln gehoben werden, so bedenke man, dass im Ganzen yz verschiedene Fälle möglich sind, weil jede Kugel aus der ersten Urne gleichzeitig mit einer jeden Kugel der zweiten Urne gezogen werden kann. Da nun in der ersten Urne l weisse, in der zweiten n vorhanden sind, so ist die Anzahl der möglichen Züge, bei der gleichzeitig weisse Kugeln zum Vorschein kommen, nach demselben Principe ln ; also ist das Verhältniss zwischen den günstigen Fällen (ln) zu den möglichen Fällen (yz) die Wahrscheinlichkeit des Eintretens, somit wird die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit sein: $\frac{l \cdot n}{y \cdot z}$. Die Betrachtungen könnten beliebig fortgesetzt werden und führen zu dem Resultate, dass die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit gleich ist dem Producte der einfachen Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. Es ist klar, dass hierbei die völlige

Unabhängigkeit der einzelnen Ereignisse von einander gesichert sein muss. Hiermit erscheint die obige Productform 3) gerechtfertigt.

Es muss nun hervorgehoben werden, dass derjenige Werth der Unbekannten der wahrscheinlichste ist, der W zu einem Maximum macht, da derselbe zu der wahrscheinlichsten Fehlercombination führt. Ist, wie oben, x die Unbekannte, so wird jede Aenderung in x , da dadurch die Fehler \mathcal{A}' , \mathcal{A}'' , $\mathcal{A}''' \dots$ geändert werden, auch den Werth von W beeinflussen; für die Bedingung des Maximums wird man daher haben:

$$\frac{dW}{dx} = 0. \quad 4)$$

Geht man auf die Entstehung der Grössen \mathcal{A}' , \mathcal{A}'' , $\mathcal{A}''' \dots$ zurück, wonach ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= M' - x \\ \mathcal{A}'' &= M'' - x \\ \mathcal{A}''' &= M''' - x, \\ &\dots \end{aligned}$$

so wird, da die beobachteten Werthe M' , M'' , $M''' \dots$ in einem gegebenen Falle Constante sind, sein:

$$d\mathcal{A}' = d\mathcal{A}'' = d\mathcal{A}''' = -dx,$$

oder:

$$\frac{d\mathcal{A}'}{dx} = \frac{d\mathcal{A}''}{dx} = \frac{d\mathcal{A}'''}{dx} = \dots = -1. \quad 5)$$

Differentiirt man also 3) nach x , so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= \{ \varphi(\mathcal{A}'') \cdot \varphi(\mathcal{A}''') \dots \} \frac{d\varphi(\mathcal{A}')}{dx} + \{ \varphi(\mathcal{A}') \cdot \varphi(\mathcal{A}''') \dots \} \frac{d\varphi(\mathcal{A}'')}{dx} + \\ &\quad + \{ \varphi(\mathcal{A}') \cdot \varphi(\mathcal{A}'') \dots \} \frac{d\varphi(\mathcal{A}''')}{dx} + \dots \end{aligned}$$

oder auch mit Rücksicht auf die Bedingung des Maximum 4) nach einer offenkundigen Transformation:

$$0 = \frac{W}{\varphi(\mathcal{A}')} \frac{d\varphi(\mathcal{A}')}{dx} + \frac{W}{\varphi(\mathcal{A}'')} \frac{d\varphi(\mathcal{A}'')}{dx} + \dots \quad 6)$$

Führt man nun zur Abkürzung für die erste Derivation der Funktion φ das Symbol φ' ein, so wird sein:

$$\frac{d\varphi(\mathcal{A}')}{d\mathcal{A}'} = \varphi'(\mathcal{A}'), \quad \frac{d\varphi(\mathcal{A}'')}{d\mathcal{A}''} = \varphi'(\mathcal{A}''), \quad \dots$$

und die Gleichung 6) kann geschrieben werden, wenn man den gemeinsamen Factor W wegen der links vom Gleichheitszeichen stehenden Null weglässt:

$$\frac{\varphi'(\mathcal{A}')}{\varphi(\mathcal{A}')} \left(\frac{d\mathcal{A}'}{dx} \right) + \frac{\varphi'(\mathcal{A}'')}{\varphi(\mathcal{A}'')} \left(\frac{d\mathcal{A}''}{dx} \right) + \dots = 0,$$

oder mit Rücksicht auf 5):

$$\frac{\varphi'(\mathcal{A}')}{\varphi(\mathcal{A}')} + \frac{\varphi'(\mathcal{A}'')}{\varphi(\mathcal{A}'')} + \frac{\varphi'(\mathcal{A}''')}{\varphi(\mathcal{A}''')} + \dots + \frac{\varphi'(\mathcal{A}^m)}{\varphi(\mathcal{A}^m)} = 0. \quad 7)$$

Der Satz des arithmetischen Mittels ergab:

$$\mathcal{A}' + \mathcal{A}'' + \mathcal{A}''' + \dots + \mathcal{A}^m = 0, \quad 8)$$

welche Relation mit 7) gleichzeitig der Voraussetzung nach bestehen muss. Man könnte geneigt sein, da vorerst die Fehler \mathcal{J}' , \mathcal{J}'' , $\mathcal{J}''' \dots$ von einander unabhängig sind, die einzelnen Glieder der beiden Gleichungen 7) und 8) zu identificiren, nachdem man eine derselben mit dem unbestimmten Factor k multiplicirt hat; letzteres ist nothwendig, da in Folge der Form der Gleichungen (beiderseits steht rechts die Null) constante Factoren verschwunden sein können, wie es auch in der That der Fall ist; man würde durch dieses Verfahren auch richtige Formen erhalten, doch erscheint es strenger zum Nachweise den folgenden Weg einzuschlagen. Aus der Gleichung 8) folgt:

$$\mathcal{J}^m = - (\mathcal{J}' + \mathcal{J}'' + \mathcal{J}''' + \dots + \mathcal{J}^{m-1}) ,$$

substituirt man diesen Werth in die Gleichung 7, so resultirt:

$$\frac{\varphi'(\mathcal{J}')}{\varphi(\mathcal{J}')} + \frac{\varphi'(\mathcal{J}'')}{\varphi(\mathcal{J}'')} + \dots + \frac{\varphi'(\mathcal{J}^{m-1})}{\varphi(\mathcal{J}^{m-1})} + \frac{\varphi'(-\mathcal{J}' - \mathcal{J}'' \dots - \mathcal{J}^{m-1})}{\varphi(-\mathcal{J}' - \mathcal{J}'' \dots - \mathcal{J}^{m-1})} = 0 .$$

Differentirt man diesen Ausdruck nach \mathcal{J}' , \mathcal{J}'' , \mathcal{J}''' u. s. w., und schreibt man der Kürze halber:

$$f(\mathcal{J}) = \frac{\varphi'(\mathcal{J})}{\varphi(\mathcal{J})} ,$$

so ist, weil

$$\frac{d(-\mathcal{J}' - \mathcal{J}'' \dots - \mathcal{J}^{m-1})}{d\mathcal{J}'} = -1 ,$$

da

$$\frac{df(\mathcal{J}')}{d\mathcal{J}'} = \frac{df(-\mathcal{J}' - \mathcal{J}'' \dots - \mathcal{J}^{m-1})}{d(-\mathcal{J}' - \mathcal{J}'' \dots - \mathcal{J}^{m-1})} ,$$

$$\frac{df(\mathcal{J}'')}{d\mathcal{J}''} = \frac{df(-\mathcal{J}' - \mathcal{J}'' \dots - \mathcal{J}^{m-1})}{d(-\mathcal{J}' - \mathcal{J}'' \dots - \mathcal{J}^{m-1})} ,$$

u. s. f.

also:

$$\frac{df(\mathcal{J}')}{d\mathcal{J}'} = \frac{df(\mathcal{J}'')}{d\mathcal{J}''} = \frac{df(\mathcal{J}''')}{d\mathcal{J}'''} = \dots$$

Da aber nuncmehr \mathcal{J}' , \mathcal{J}'' , $\mathcal{J}''' \dots$ völlig unabhängig sind, so kann diese Gleichheit der Differentialquotienten nur bestehen, wenn dieselben einer Constante gleich sind, und man hat also:

$$\frac{df(\mathcal{J})}{d\mathcal{J}} = k .$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$f(\mathcal{J}) = \frac{\varphi'(\mathcal{J})}{\varphi(\mathcal{J})} = k\mathcal{J} + c .$$

Die Integrationsconstante c ist aber der Null gleich, wie man sich leicht überzeugt, wenn man das Resultat dieser Gleichung in die Gleichung 7) substituirt und mit der Bedingung 8) vergleicht. Man hat also:

$$\frac{\varphi'(\mathcal{J})}{\varphi(\mathcal{J})} = k\mathcal{J} . \quad 9)$$

Es ist hiermit eine Relation erlangt, die zwischen der Function φ und ihrer ersten Derivation besteht, und es wird dadurch die Möglichkeit geboten, die Form

der Funktion zu eruiiren. Setzt man nun in 9) die früher als Abkürzung eingeführte Relation:

$$\varphi'(\Delta) = \frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta}$$

ein, so findet sich

$$\frac{d\varphi(\Delta)}{\varphi(\Delta)} = k \Delta d\Delta,$$

und die Integration lässt finden, wenn man die Integrationsconstante durch log. nat. z darstellt:

$$\log. \text{ nat. } \{\varphi(\Delta)\} = \frac{1}{2} k \Delta^2 + \log. \text{ nat. } z,$$

oder:

$$\log. \text{ nat. } \frac{\varphi(\Delta)}{z} = \frac{1}{2} k \Delta^2,$$

und schliesslich:

$$\varphi(\Delta) = z e^{\frac{1}{2} k \Delta^2}, \quad (10)$$

wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen vorstellt.

Ueber das Zeichen von z und k lässt sich aber sofort eine Entscheidung treffen. Da die Wahrscheinlichkeit eine positive Grösse sein muss, so wird zunächst z nothwendig positiv sein müssen, und da weiter z , e und $\frac{1}{2} k$ Constante sind, so wird, wenn Δ vergrößert und k positiv vorausgesetzt wird, der Werth links vom Gleichheitszeichen ein grösserer, und es tritt der der Erfahrung widersprechende Fall ein, dass die Wahrscheinlichkeit grösserer Fehler grösser ist, als die kleinerer, während gerade das Gegentheil stattfindet; ist aber k negativ, so tritt sofort die erwünschte Uebereinstimmung mit der Erfahrung hervor; um dies anzuzeigen, soll in der Folge gesetzt werden:

$$\frac{1}{2} k = -h^2,$$

und man hat also:

$$\varphi(\Delta) = z e^{-h h \Delta \Delta} \quad (11)$$

welche Gleichung nun φ der Form nach vollkommen bestimmt. Die Constanten z und h bedürfen aber noch einer näheren Bestimmung, und es soll zunächst die Bestimmung von z vorgenommen werden. Es ist oben (pag. 283) die Gleichung gefunden worden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) d\Delta = 1,$$

hervorgegangen aus der Betrachtung, dass man mit Gewissheit voraussetzen darf, dass die Fehler innerhalb der Grenzen $\pm \infty$ eingeschlossen sind; ersetzt man nun die Funktion φ durch ihre jetzt bekannte Form, so hat man:

$$z \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h h \Delta \Delta} d\Delta = 1, \quad (12)$$

woraus sofort resultirt, dass eine Bestimmung der Constante z durch diese Relation möglich ist, sobald der Werth des vorliegenden bestimmten Integrales, welches ein

Euler'sches Integral (Gammafunktion) ist, bekannt ist. Um dasselbe zu entwickeln, setze man:

$$\begin{aligned} h \mathcal{A} &= t \\ d \mathcal{A} &= \frac{dt}{h} \end{aligned}$$

und man hat die Form:

$$\frac{x}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} dt = 1. \quad (13)$$

Es ist aber:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} dt,$$

und vermöge der Form der Funktion (t erscheint nur in quadratischer Form):

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = J. \quad (14)$$

Da nun der Werth eines bestimmten Integrales nicht geändert werden kann, wenn man statt der Variablen eine andere Bezeichnung einführt, so wird man haben:

$$\int_0^{\infty} e^{-vv} dv = J. \quad (15)$$

Multipliziert man die beiden Gleichungen 14) und 15) und beachtet, dass die Integrationsordnung beliebig ist, so erhält man:

$$J^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u+vv)} dt dv.$$

Setzt man nun:

$$v = tu; \quad \text{also} \quad dv = t du,$$

so wird auch:

$$J^2 = \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} t e^{-t(1+uu)} dt.$$

Führt man zuerst die Integration nach t aus, so muss u als Constante angesehen werden, man hat also setzend:

$$t^2 (1 + u^2) = x,$$

auch:

$$t dt = \frac{dx}{2(1+u^2)},$$

und es wird:

$$\int_0^{\infty} t e^{-t(1+uu)} dt = \frac{1}{2(1+u^2)} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \left[-\frac{e^{-x}}{2(1+u^2)} \right]_{x=0}^{x=\infty}.$$

Für die obere Grenze verschwindet der Werth des Integrales, für die untere wird er aber:

$$-\frac{1}{2(1+u^2)},$$

man hat also:

$$J^2 = \int_0^{\infty} \frac{du}{2(1+u^2)} = \left[\frac{1}{2} \arctan u \right]_{u=0}^{u=\infty}.$$

Für die obere Grenze wird aber der Werth des Integrales $\frac{\pi}{4}$, für die untere verschwindet er; man hat demnach:

$$J^2 = \frac{\pi}{4}.$$

oder:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \quad (16)$$

Setzt man also diesen Werth des bestimmten Integrales in die Gleichung 13), so resultirt:

$$\frac{z}{h} \sqrt{\pi} = 1$$

oder

$$z = \frac{h}{\sqrt{\pi}}.$$

und die Gleichung 11) erhält die Form:

$$\varphi(A) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 A^2} \quad (17)$$

welche Gleichung nur mehr die Constante h enthält, auf welche weiter unten näher eingegangen werden soll; hier sei nur vorläufig bemerkt, dass dieselbe ganz wesentlich mit der Güte der Beobachtungen im Zusammenhang steht und daher den Namen »Maass der Präcision« erhalten hat.

Mit der Gleichung 17) ist die Eingangs dieses Paragraphen vorgelegte Frage beantwortet, indem dieselbe die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Fehlers A als Funktion von A darstellt. Die Form selbst ist symmetrisch, erreicht ihr Maximum für $A = 0$, und wird erst der Null gleich für $A = \infty$.

§ 3. Das Maass der Präcision.

Die Gleichung 17) des vorausgehenden Paragraphen enthält die Constante h , deren Bedeutung noch klar zu legen ist. $\varphi(A)$ drückt die Wahrscheinlichkeit aus des Eintretens eines Fehlers von der Grösse A ; je genauer eine Beobachtungsreihe ist, um so kleiner werden die zu erwartenden Fehler sein, während die Wahrscheinlichkeit als das Verhältniss der günstigen zu allen möglichen Fällen

offenbar nicht von der Genauigkeit der Beobachtungsreihe abhängig sein kann; es hat demnach die Constante h die Aufgabe, die geforderte Ausglei chung vorzunehmen. Bevor aber weiter vorgegangen werden kann, muss der Inhalt des Begriffes, welchen man durch das Wort Genauigkeit ausdrückt, näher def inirt werden. Vorerst wird man sofort erkennen, dass die Genauigkeit eine Relativzahl sein muss, die das Verhältniss der Güte der Beobachtungen gegen einander bestimmt; wenn nun die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler irgend einer Beobachtung oder irgend eines Resultates aus Beobachtungen zwischen den Grenzen $-\gamma$ und $+\gamma$ liegt, der Wahrscheinlichkeit gleich ist, dass der Fehler irgend einer anderen Beobachtung oder eines Beobachtungsergebnisses zwischen den Grenzen $-\delta$ und $+\delta$ liegt, so wollen wir die Voraussetzung machen, dass sich die Genauigkeit des ersten Resultates zum zweiten, wie δ zu γ verhält; oder in Worten: die Genauigkeiten verhalten sich umgekehrt zu einander, wie die den Resultaten zuzuschreibenden Fehler. Es ist somit der Begriff »Genauigkeit«, wie derselbe in der Folge genommen werden soll, def inirt.

Die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Fehler beziehungsweise zwischen den Grenzen $-\gamma$ und $+\gamma$ und $-\delta$ und $+\delta$, enthalten ist, ist aber (vergl. I pag. 282) bestimmt durch:

$$\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hhJJ} dJ, \quad \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-HHJJ} dJ,$$

wobei sofort für die Constante h in beiden Systemen verschiedene Buchstaben gewählt wurden, da man schon aus den diesen Paragraphen einleitenden Betrachtungen weiss, dass die Constante h eine Funktion der Genauigkeit sein wird. Sollen aber die obigen Fehlergrenzen für die beiden Systeme dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, so wird sein müssen:

$$\int_{-\gamma}^{+\gamma} h e^{-hhJJ} dJ = \int_{-\delta}^{+\delta} H e^{-HHJJ} dJ.$$

Setzt man nun

$$hJ = x, \quad HJ = y,$$

so wird die Einführung der neuen Variabeln in die obigen Integrale mit Rücksicht auf die Aenderung der Grenzen ergeben:

$$\int_{-\gamma h}^{+\gamma h} e^{-xx} dx = \int_{-\delta H}^{+\delta H} e^{-yy} dy.$$

Da bei den bestimmten Integralen der Unterschied der Buchstaben x und y ohne Bedeutung ist, so können diese beiden Integrale im Allgemeinen einander nur gleich werden, wenn ist:

$$\gamma h = \delta H,$$

oder auch:

$$h : H = \delta : \gamma,$$

d. h. die verschiedenen Werthe der Grösse h verhalten sich zu einander, wie umgekehrt die den Resultaten mit gleicher Wahrscheinlichkeit zuzuschreibenden Fehler. Hält man dieses Resultat mit der obigen Definition über die Genauigkeit zusammen, so resultirt der Satz, dass sich die verschiedenen h zu einander verhalten, wie die Genauigkeiten; deshalb nennt Gauss die Constante h »das Maass der Präcision«, wobei aber wohl zu beachten ist, dass das Maass der Präcision von dem Ausdrucke Gewicht, der oben (pag. 279) näher erläutert wurde, streng zu trennen ist. Auf die Relation, die jedoch zwischen diesen beiden Begriffen zweifellos besteht, wird später zurückgekommen werden.

Da nun die Bedeutung der Constante h erkannt ist, wird es möglich sein, den oben (pag. 277) auf ganz anderem Wege bewiesenen Satz, dass der wahrscheinlichste Werth, der durch das arithmetische Mittel defnirt wird, auch dadurch bestimmt ist, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum ist, in einfacher Weise zu verificiren.

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlersystemes W ist oben (pag. 283) dargestellt worden durch:

$$W = \varphi(\mathcal{A}') \cdot \varphi(\mathcal{A}'') \cdot \varphi(\mathcal{A}''') \dots$$

Sind nun der Zahl nach m Beobachtungen von gleicher Präcision vorhanden, so würde sich nach Gleichung 17) pag. 288 hierfür schreiben lassen:

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^m e^{-hh(\mathcal{A}'\mathcal{A}' + \mathcal{A}''\mathcal{A}'' + \dots + \mathcal{A}^m\mathcal{A}^m)};$$

num ist aber für W das Maximum zu suchen, da der wahrscheinlichste Werth verlangt wird; es wird aber, da π und e an sich Constante sind und h es ebenfalls ist für einen bestimmten Fall, dies nur dann erreicht werden können, wenn man den Exponenten von e zu einem Minimum macht, welche Bedingung sofort den Schluss gestattet, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum sein muss.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Grösse h kann man das eben erhaltene Princip auf Beobachtungen von verschiedener Präcision ausdehnen; wären die Präcisionen der verschiedenen Beobachtungen beziehungsweise h' , h'' , h''' u. s. f., so wird für die Wahrscheinlichkeit eines Systemes von m Fehlern sich ähnlich wie oben ergeben:

$$W = \frac{h' \cdot h'' \dots h^m}{\sqrt{\pi^m}} e^{-(h' h' \mathcal{A}' \mathcal{A}' + h'' h'' \mathcal{A}'' \mathcal{A}'' + \dots + h^m h^m \mathcal{A}^m \mathcal{A}^m)}.$$

Nun ist aber in einem concreten Falle das Product $h' \cdot h'' \dots h^m$ eine Constante, demnach wird W ein Maximum, wenn

$$h' h' \mathcal{A}' \mathcal{A}' + h'' h'' \mathcal{A}'' \mathcal{A}'' + \dots + h^m h^m \mathcal{A}^m \mathcal{A}^m$$

ein Minimum ist. Bei Beobachtungen verschiedener Genauigkeit bestimmt sich daher der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten dadurch, dass man die Summe der Quadrate aus dem Producte der Fehler in die Präcisionen zu einem Minimum macht.

Differentiirt man den eben erhaltenen Ausdruck nach \mathcal{A}' , $\mathcal{A}'' \dots \mathcal{A}^m$ und setzt das Resultat der Null gleich, so ist der Bedingung des Minimums, mit Rücksicht dass in einem gegebenen Falle $d\mathcal{A}' = d\mathcal{A}'' = d\mathcal{A}''' \dots$ ist, genügt durch:

$$h' h' \mathcal{A}' + h'' h'' \mathcal{A}'' + \dots + h^m h^m \mathcal{A}^m = 0.$$

Vergleicht man mit diesem Resultate die Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthes einer Unbekannten (Gleichung 6) pag. 280) aus Beobachtungen mit verschiedenem Gewichte und schreibt in der citirten Gleichung statt m' und $(x' - x)$ die Buchstaben p' und \mathcal{A}' und analog die übrigen Grössen, so wird man zufolge dieser Gleichung haben:

$$p' \mathcal{A}' + p'' \mathcal{A}'' + \dots + p^m \mathcal{A}^m = 0,$$

und daraus unmittelbar den Schluss ziehen dürfen, unbeschadet dass die beiden Gleichungen mit willkürlichen constanten Factoren durchmultiplicirt sein können, dass die Quadrate der Präcisionen sich zu einander verhalten, wie die Gewichte oder die Präcisionen sich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln der Gewichte. Dieser wichtige Satz wird sich später wieder auf einem ganz anderen Wege beweisen lassen.

§ 4. Der wahrscheinliche Fehler.

Ein mit dem Maasse der Präcision sehr nahe verwandter Ausdruck ist in der Methode der kleinsten Quadrate der Begriff des wahrscheinlichen Fehlers. Es soll unter dem Ausdrucke wahrscheinlicher Fehler jener Fehler definirt erscheinen, der die Eigenschaft hat, dass in einem gegebenen Falle der Wahrscheinlichkeit nach, sowohl ebenso viele Fehler grösser als auch kleiner gefunden werden wie er selbst ist, so dass er, wenn man die Fehler ihrer absoluten Grösse nach geordnet hinschreibt, in die Mitte derselben zu stehen kommt.

Mit Rücksicht auf die bisherigen Entwicklungen hat man:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-hh \mathcal{A} \mathcal{A}} d\mathcal{A} = 1.$$

Es sei durch r der wahrscheinliche Fehler bezeichnet; zerfällt man das oben hingeschriebene Integral dieser Grenze entsprechend, so hat man auch:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-hh \mathcal{A} \mathcal{A}} d\mathcal{A} + \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_r^{\infty} e^{-hh \mathcal{A} \mathcal{A}} d\mathcal{A} = 1.$$

Da diese Integrale die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens der Fehler zwischen den bezüglichen Grenzen darstellen, so muss der Definition nach für den wahrscheinlichen Fehler sein:

$$\int_0^r e^{-hh \mathcal{A} \mathcal{A}} d\mathcal{A} = \int_r^{\infty} e^{-hh \mathcal{A} \mathcal{A}} d\mathcal{A},$$

oder mit Rücksicht auf die erstere Relation:

$$\frac{2}{V\pi} \int_0^r e^{-hh \mathcal{A}} d\mathcal{A} = \frac{1}{2}; \quad 1)$$

setzt man, um die weiteren Entwicklungen bequemer zu gestalten:

$$t = h \mathcal{A} \\ dt = h d\mathcal{A},$$

so wird für die Grenze $\mathcal{A} = r$ zu setzen sein: $t = hr$; da aber dieser Werth von t in einem gegebenen Falle ein völlig bestimmter ist, so soll für denselben der Buchstabe T eingeführt werden; man hat also:

$$T = hr \quad \text{oder} \quad r = \frac{T}{h}.$$

Man erhält demnach mit Rücksicht auf 1) für die Bestimmung der Grenze T die Gleichung:

$$\int_0^T e^{-t} dt = \frac{V\pi}{4}. \quad 2)$$

Es ist sofort klar, dass diese Gleichung nur durch Versuche gelöst werden kann, etwa in der Weise, dass man sich eine Integraltafel für das vorliegende Integral mit dem Argumente »obere Grenze« entwirft und jenen Werth des Argumentes durch Interpolation zu finden sucht, der der Relation 2) genügt. Es stellt sich daher vorerst die Aufgabe, das vorgelegte Integral numerisch auszuwerthen. Es lassen sich hierzu sehr verschiedene analytische Methoden angeben, die aber alle sehr beschwerlich in der Ausführung werden, wenn T nahe der Einheit gleich ist; ich will hier nur einige dieser Methoden kurz anführen.

Ist T klein, so kann man mit Vortheil die Integration durch Theilung anwenden; man erhält sofort:

$$\int e^{-t} dt = t e^{-t} + 2 \int t^2 e^{-t} dt.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, so findet sich:

$$\int e^{-t} dt = t e^{-t} + \frac{2}{3} t^3 e^{-t} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \int t^4 e^{-t} dt,$$

und man erhält schliesslich die Reihe:

$$\int e^{-t} dt = t e^{-t} \left\{ 1 + \frac{(2 t^2)^1}{3} + \frac{(2 t^2)^2}{3 \cdot 5} + \frac{(2 t^2)^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right\}$$

und durch Einführung der Grenzen:

$$\int_0^T e^{-t} dt = T e^{-T} \left\{ 1 + \frac{2 T^2}{3} + \frac{(2 T^2)^2}{3 \cdot 5} + \frac{(2 T^2)^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right\},$$

welche Reihe jedoch nur mit Vortheil angewendet wird, so lange $T < 1$ ist, wiewohl dieselbe theoretisch für jeden endlichen Werth von T convergirt.

Ist aber $T > 1$, so empfiehlt sich die folgende von Laplace ausgeführte Verwandlung des obigen Integrales in einen Kettenbruch. Setzt man:

$$e^u \int e^{-u} dt = u_0,$$

so ist:

$$\frac{du_0}{dt} = 2t e^u \int e^{-u} dt + 1 = 2t u_0 + 1 = u_1$$

$$\frac{d^2 u_0}{dt^2} = \frac{du_1}{dt} = 2u_1 t + 2u_0 = u_2$$

$$\frac{d^3 u_0}{dt^3} = \frac{du_2}{dt} = 2u_2 t + 4u_1 = u_3$$

$$\frac{d^4 u_0}{dt^4} = \frac{du_3}{dt} = 2u_3 t + 6u_2 = u_4,$$

oder allgemein:

$$u_{n+1} = 2u_n t + 2n u_{n-1},$$

in welchem Ausdruck n der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3 ... annehmen kann. Dividirt man nun diesen Ausdruck beiderseits mit u_n , um das Verhältniss von zwei auf einander folgenden Differentialquotienten zu kennen, so wird:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2t + 2n \frac{u_{n-1}}{u_n},$$

woraus folgt:

$$\frac{\frac{u_{n+1}}{u_n} - 2t}{2n} = \frac{u_{n-1}}{u_n},$$

und es wird dann sein:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = - \frac{2n}{2t - \frac{u_{n+1}}{u_n}} = - \frac{\frac{2n}{2t}}{1 - \frac{1}{2t} \frac{u_{n+1}}{u_n}},$$

schreibt man also:

$$k = \frac{1}{2t^2},$$

so erhält man auch:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = - \frac{2n \sqrt{\frac{k}{2}}}{1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt{\frac{k}{2}}}, \quad 3)$$

wodurch das Verhältniss zweier auf einander folgender Differentialquotienten durch das Verhältniss des höheren derselben gegen den nächst höheren ausgedrückt erscheint unter dem Vorbehalte, dass nicht $n = 0$ ist, indem in diesem Falle die obige allgemeine Formel ihre Gültigkeit verliert. Es soll nun das Verhältniss in diesem speciellen Falle untersucht werden, also u_0 durch $\frac{u_1}{u_0}$ ausgedrückt werden. Es war aber oben die Relation gefunden worden:

$$u_1 = 2u_0 t + 1,$$

also ist:

$$\frac{u_1}{u_0} = 2t + \frac{1}{u_0}, \quad \frac{1}{u_0} = \frac{u_1}{u_0} - 2t,$$

wonach nun geschrieben werden kann:

$$e^u \int e^{-u} dt = u_0 = - \frac{1}{2t - \frac{u_1}{u_0}};$$

multipliziert man linker Hand mit $2t$ und dividirt den Nenner rechter Hand durch $2t$ und ersetzt diese letztere Grösse durch k , so findet sich sofort:

$$2t \cdot e^u \int e^{-u} dt = - \frac{1}{1 - \frac{u_1}{u_0} \sqrt{\frac{k}{2}}} \quad 4)$$

welche Relation die Bestimmung des Integrales von der Kenntniss des Werthes $\frac{u_1}{u_0}$ abhängig macht, es ist aber nach 3) (pag. 293):

$$\frac{u_1}{u_0} = - \frac{2 \sqrt{\frac{k}{2}}}{1 - \frac{u_2}{u_1} \sqrt{\frac{k}{2}}}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = - \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{k}{2}}}{1 - \frac{u_3}{u_2} \sqrt{\frac{k}{2}}}$$

$$\frac{u_3}{u_2} = - \frac{2 \cdot 3 \sqrt{\frac{k}{2}}}{1 - \frac{u_4}{u_3} \sqrt{\frac{k}{2}}}$$

u. s. w.

Substituiert man successive diese Werthe in 4), so findet sich leicht der folgende Kettenbruch:

$$2te^u \int e^{-u} dt = - \frac{1}{1 + \frac{k}{1 + \frac{2k}{1 + \frac{3k}{1 + \frac{4k}{\dots}}}}}$$

dessen Bildungsgesetz klar ist. Führt man nun in diesem Ausdrucke die Grenze $0 = T$ ein, so wird der Ausdruck die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ erhalten; nun ist aber (vergl. 16) pag. 288):

$$\int_0^\infty e^{-u} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

also ist auch:

$$\int_0^T e^{-u} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \int_T^\infty e^{-u} dt.$$

Man erhält demnach durch Einsetzung der Grenzen T und ∞ in dem Kettenbruche unter Berücksichtigung der Bedeutung von k :

$$\int_0^T e^{-t} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \frac{e^{-TT}}{2T} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{2T^2}} - \frac{1}{1 + \frac{2}{2T^2}} + \frac{1}{1 + \frac{3}{2T^2}} - \dots \right\}.$$

Viel rascher als nach irgend einer Methode erhält man den numerischen Werth, wenn man auf das vorgelegte Integral die mechanische Quadratur anwendet, welches Beispiel ausführlich pag. 36 u. ff. behandelt ist. Es soll nun mit Hilfe der daselbst gefundenen Zahlen der numerische Werth von T bestimmt werden, der der Gleichung 2) (pag. 292) genügt; es ist bekanntlich:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0.443\ 1134\ 627.$$

Vergleicht man diesen Werth mit der Integraltafel Tafel X., so sieht man sofort, dass die gesuchte Grenze zwischen die Argumentwerthe 0.47 und 0.48 fällt; interpolirt man das betreffende Intervall in engere Grenzen, so erhält man die folgende Specialtafel:

	J			f'	f''	f'''
0.475	0.441	5697	030	+ 7976 381		
0.476	0.442	3673	411	+ 7968 791	— 7590	
0.477	0.443	1642	202	+ 7961 192	— 7599	— 9
0.478	0.443	9603	394	+ 7953 585	— 7607	— 8
0.479	0.444	7556	979			

Der zu suchende Werth liegt daher sehr nahe dem Argumente 0.477.

Stellt man daher mit Hilfe der Differenzwerthe vom Argumente 0.477 ausgehend die Funktion nach Potenzen von n , dem Abstände vom nächsten Argumente in Einheiten des Intervalles, dar, so erhält man als Bestimmungsgleichung für n

$$0.443\ 1134\ 627 = 0.443\ 1642\ 202 + 0.000\ 7964\ 993\ n - 0.000\ 0003\ 799\ n^2,$$

woraus folgt:

$$n = - 0.0637\ 239,$$

es ist mithin der gesuchte Werth von T , der als Specialwerth mit q bezeichnet werden soll:

$$q = 0.476\ 9362\ 761.$$

der nur um wenige Einheiten der zehnten Decimale unrichtig sein kann. Es ist also, wenn wie oben (pag. 292) mit r der wahrscheinliche Fehler, mit h das Maass der Präcision bezeichnet wird,

$$q = hr., \quad h = \frac{q}{r}, \quad r = \frac{q}{h}.$$

wobei durch die numerische Bestimmung von q erreicht wird, dass man der durch die Gleichung 1) (pag. 292) ausgedrückten Bedingung genügt.

Das Maass der Präcision ist demnach umgekehrt proportional dem wahrscheinlichen Fehler und kann bestimmt werden, sobald der wahrscheinliche Fehler r bekannt ist. Indem es sofort klar ist, dass eine Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers möglich sein wird, wenn man sich nur vergegenwärtigt, dass nach der Definition für denselben aus einer grösseren Beobachtungsreihe schon ein Näherungswerth erlangt werden muss, wenn man die Beobachtungsfehler ihrer Grösse nach ordnet und den Fehler der bei dieser Anordnung in die Mitte fallenden Beobachtung (ungerade Anzahl der Beobachtungen) oder das Mittel der Fehler der beiden mittleren Beobachtungen (gerade Anzahl) als Werth für r annimmt. Wiewohl später schärfere Methoden angegeben werden zur Erlangung des Werthes von r , so genügt doch dieser Hinweis, dass die Möglichkeit geboten ist, im gegebenen Falle das Maass der Präcision h numerisch festzustellen und hiermit erscheint das Integral

$$\int_a^b \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh \mathcal{A}\mathcal{A}} d\mathcal{A} , \quad 6)$$

welches die Wahrscheinlichkeit angibt für das Auftreten eines bestimmten Fehlers innerhalb der willkürlichen Grenzen a und b , vollständig bestimmt.

Wenn man die bisherigen Entwicklungen überblickt, so sieht man, dass aus dem Axiom des arithmetischen Mittels allein die Herstellung des eben hingeschriebenen Integrales möglich war; die gemachten Schlussfolgerungen erscheinen aber nur dann völlig streng, wenn eine unendliche Anzahl von Beobachtungen, die frei von constanten Fehlern sind, vorliegt; man wird demnach, da in einem speciellen Falle doch nur eine endliche Anzahl von Beobachtungen vorliegen kann, mit einem halbwegs annehmbaren Grade von Sicherheit den Resultaten dieser Formel nur dann Vertrauen schenken dürfen, wenn die Beobachtungen zahlreich sind; sind sie es aber nicht, so werden die nach diesen Principien abgeleiteten Resultate zwar im grossen Durchschnitte den thatsächlichen Verhältnissen entsprechen, können aber im speciellen Falle trügerisch sein.

Die Formel 6) wird eine zweckmässige Gelegenheit bieten, die theoretisch gefundene Form durch die Beobachtungen selbst zu prüfen; setzt man vorerst voraus, dass r in irgend einer Weise für eine specielle Beobachtungsreihe bestimmt vorliege, also h bestimmbar ist nach 5) (pag. 295) (die Zahl der Beobachtungen sei m) so wird, wenn man, da das Auftreten negativer und positiver Fehler nach der quadratischen Form von 6) gleiche Wahrscheinlichkeit hat, die Fehler ihrer absoluten Grösse nach in Rechnung zieht, die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines bestimmten Fehlers innerhalb der Grenzen $\pm \mathcal{A}_1$ bestimmt sein durch:

$$m \int_{-\mathcal{A}_1}^{+\mathcal{A}_1} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh \mathcal{A}\mathcal{A}} d\mathcal{A} ,$$

wobei sich die Multiplication mit m daraus erklärt, dass das vorgelegte Integral der Bestimmung der Constanten gemäss für die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ der Einheit (Gewissheit) gleich wird. Um nun dieses Integral in eine Tafel bringen zu können, wollen wir die schon mehrfach ausgeführte Substitution

$$h J = t$$

anwenden und erhalten hierfür:

$$m \int_{-h J_1}^{+h J_1} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} dt = m \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h J_1} e^{-t^2} dt.$$

Das zuletzt angeführte Integral ist bereits numerisch durch die Tafel X gegeben; zur bequemen Anwendung habe ich aber aus dieser Tafel durch Multiplication mit $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ eine kleinere Tafel (Tafel XIV) abgeleitet, die auf 5 Decimalen, was für die vorliegenden Zwecke mehr als ausreichend ist, den Werth des bestimmten Integrales

$$J_{h J} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h J} e^{-t^2} dt$$

mit dem Argumente »obere Grenze = $h J$ « angibt; es wird also die Anzahl der Fehler J_1 sein, die der Wahrscheinlichkeit gemäss ihrer absoluten Grösse nach zwischen den Grenzen 0 und J_1 liegen für eine Beobachtungsreihe von m Beobachtungen, deren Maass der Präcision h ist:

$$A_1 = m J_{h J_1},$$

für die Fehlergrenze J_2 erhält man ähnlich:

$$A_2 = m J_{h J_2},$$

u. s. f., es wird daher die Anzahl der Fehler ${}_1A_2$ zwischen den Grenzen J_1 und J_2 bestimmt sein, wenn man sich vorstellt, dass $J_2 > J_1$ ist, durch:

$${}_1A_2 = m \{ J_{h J_2} - J_{h J_1} \}. \quad 7)$$

Theilt man demnach für eine gegebene Beobachtungsreihe die Fehler entsprechend ihrer Grösse in Gruppen, so erhält man empirisch das Gesetz der Fehlervertheilung; vergleicht man diese Erfahrungsergebnisse mit der Formel 7), so erhält man ein Bild, in wie weit die theoretisch gefundenen Grundlagen mit der Erfahrung stimmen. Indem weiter unten ein ausführliches Beispiel für die Behandlung einer Beobachtungsreihe nach den hier dargelegten Methoden vorgenommen werden wird, schalte ich hier nur die Bemerkung ein, dass die Erfahrung in der That das Resultat der Formel 7) bestätigt, wenn nur den allgemein nothwendigen Forderungen genügt wird; es zeigt sich nur im Allgemeinen die Abweichung, dass grosse Fehler in der Praxis etwas häufiger vorkommen, als es die Theorie gestattet, was wohl darin seine Erklärung findet, dass selbst bei den sorgfältigst angestellten Beobachtungsreihen eine oder die andere Beobachtung durch ein zufälliges Versehen im höheren Maasse entstellt wird, eine Discontinuität, die den Forderungen der Methode entgegen ist.

§ 5. Der Durchschnittsfehler und der mittlere Fehler.

Zieht man aus allen Beobachtungsfehlern das Mittel ohne Rücksicht auf das Vorzeichen derselben, also ihrem absoluten numerischen Werthe nach, so soll das so gewonnene Resultat mit dem Namen »Durchschnittsfehler« bezeichnet und für denselben der Buchstabe η gesetzt werden; man bezeichnet wohl auch diesen so bestimmten Fehler als »Mittel der Fehler«. Bildet man aber das arithmetische Mittel aus den Fehlerquadraten und zieht aus diesem Mittel die Quadratwurzel, so erhält man den »mittleren Fehler«, der mit dem Buchstaben ε bezeichnet werden soll. Man wird zu beachten haben, dass beide Definitionen völlig willkürlich sind, durch dieselben aber ganz bestimmte Begriffe bezeichnet werden. Sind also (\mathcal{A}') , (\mathcal{A}'') , ... (\mathcal{A}^m) die wahren Beobachtungsfehler ohne Rücksicht auf das Vorzeichen ihrer absoluten Grösse nach, und m die Zahl der Beobachtungen, so bestehen den obigen Definitionen gemäss die Relationen:

$$\begin{aligned} \text{Durchschnittsfehler} &= \eta = \frac{1}{m} \{ (\mathcal{A}') + (\mathcal{A}'') + \dots + (\mathcal{A}^m) \} \\ \text{mittlerer Fehler} &= \varepsilon = \sqrt{\frac{\mathcal{A}'^2 + \mathcal{A}''^2 + \dots + \mathcal{A}^{m2}}{m}}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Relationen wird man in der Lage sein, das Verhältniss der eben hingeschriebenen Fehler zu dem wahrscheinlichen Fehler zu bestimmen. Es ist bekannt, dass durch $\varphi(\mathcal{A})$, wo die Form der Funktion nunmehr durch die vorstehenden Untersuchungen völlig festgestellt ist, die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Fehlers von der Grösse \mathcal{A} dargestellt wird; ist m die Anzahl der Beobachtungen, so werden $m \varphi(\mathcal{A})$ Fehler von der Grösse \mathcal{A} auftreten; man wird also, wenn man die Summe der Fehler ihrem absoluten Werthe nach bildet, demnach für diese Summe erhalten aus jenen Fehlern die die Grösse \mathcal{A}_1 haben: $\mathcal{A}_1 m \varphi(\mathcal{A}_1)$, aus jenen Fehlern von der Grösse \mathcal{A}_2 wird sich die Summe bilden $\mathcal{A}_2 m \varphi(\mathcal{A}_2)$ u. s. f.; es ist demnach:

$$(\mathcal{A}') + (\mathcal{A}'') + \dots + (\mathcal{A}^m) = m \{ \mathcal{A}_1 \varphi(\mathcal{A}_1) + \mathcal{A}_2 \varphi(\mathcal{A}_2) + \mathcal{A}_3 \varphi(\mathcal{A}_3) + \dots \},$$

oder auch:

$$\eta = \Sigma \mathcal{A} \varphi(\mathcal{A}).$$

Setzt man nun wieder eine grosse Beobachtungsreihe voraus, so ist es erlaubt sich die obige Summe näherungsweise durch ein Integral ersetzt zu denken und man erhält mit Rücksicht auf die bisherigen Entwicklungen:

$$\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A} \varphi(\mathcal{A}) d\mathcal{A} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} h \mathcal{A} e^{-h^2 \mathcal{A}^2} d\mathcal{A}.$$

Um nun das eben aufgestellte Integral auszuwerthen, setze man $h \mathcal{A} = t$, es wird demnach:

$$\eta = \frac{1}{h \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} 2 t e^{-t^2} dt = \left(-\frac{e^{-t^2}}{h \sqrt{\pi}} \right)_0^{\infty},$$

nach Einführung der Grenzen resultirt:

$$\eta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} ,$$

man war oben (pag. 295) gefunden worden

$$h = \frac{q}{r} ,$$

wobei q eine Constante ($q = 0.47694$) vorstellt und r der wahrscheinliche Fehler ist. Substituirt man diesen Werth für h in dem Ausdruck für η , so erhält man die folgende lineare Relation, die zwischen dem Durchschnittsfehler η und dem wahrscheinlichen Fehler r besteht:

$$\eta = \frac{r}{q\sqrt{\pi}} = 1.1829 r ,$$

oder:

$$r = q\sqrt{\pi} \cdot \eta = 0.8453 \eta . \quad 1)$$

In ganz ähnlicher Weise wird sich die Relation zwischen dem mittleren Fehler ϵ und dem wahrscheinlichen r herstellen lassen. Sind wieder m Beobachtungen vorhanden, so werden Fehler von der Grösse \mathcal{A}_1 vorhanden sein $m q(\mathcal{A}_1)$, also der Beitrag zur Summe der Fehlerquadrate $m \mathcal{A}_1^2 q(\mathcal{A}_1)$, ebenso erhält man als den Beitrag für die Summe der Fehlerquadrate aus den Fehlern von der Grösse \mathcal{A}_2 den Werth $m \mathcal{A}_2^2 q(\mathcal{A}_2)$, es ist also, ähnlich wie früher:

$$\epsilon^2 = \sum \mathcal{A}^2 q(\mathcal{A}) .$$

Ersetzt man wieder, eine grosse Beobachtungsreihe voraussetzend, die Summe durch ein Integral, führt für $q(\mathcal{A})$ die bereits bekannte Form ein und dehnt die Grenzen, um alle Fehler zu umfassen, bis auf ∞ aus, so wird:

$$\epsilon^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}^2 e^{-h^2 \mathcal{A}^2} d\mathcal{A} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \mathcal{A}^2 e^{-h^2 \mathcal{A}^2} d\mathcal{A} .$$

Zur Auswerthung dieses bestimmten Integrales setze man $h\mathcal{A} = t$, so erhält man zunächst:

$$\epsilon^2 = \frac{1}{h^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} 2 t t e^{-t^2} dt ;$$

dieses Integral lässt sich aber leicht auf bekannte Formen zurückführen. Wendet man darauf die theilweise Integration an, so ist, wenn man setzt:

$$y = e^{-t^2} , \quad dx = dt$$

$$\int_0^{\infty} 2 t t e^{-t^2} dt = \left(- t e^{-t^2} \right)_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt .$$

Das erste Glied wird durch Einsetzung der Grenzen der Null gleich, das zweite Glied ist aber bereits oben (pag. 288) entwickelt und gleich $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, es ist also:

$$\epsilon^2 = \frac{1}{h^2 \sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2 h^2} .$$

daher:

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}} ,$$

ersetzt man wieder h durch $\frac{q}{r}$, so wird:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{r}{q\sqrt{2}} = 1.4826 r \\ r &= q\sqrt{2} \cdot \varepsilon = 0.6745 \varepsilon . \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{r}{q\sqrt{2}} \\ r &= q\sqrt{2} \cdot \varepsilon \end{aligned}} \right\} \quad 2)$$

Der Zusammenhang zwischen ε und r ist demnach wieder ein linearer und der Factor von ε nahezu gleich $\frac{2}{3}$. Vergleicht man nun die beiden gewonnenen Relationen 1) und 2), so resultirt noch eine Relation zwischen η und ε , es wird sein:

$$\eta = \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\pi}} , \quad \varepsilon = \eta \sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

§. 6. Das Verhältniss der Genauigkeit des arithmetischen Mittels zu der einer Einzelbeobachtung.

Sei x der wahre Werth der Unbekannten, die durch die Beobachtungen M' , M'' , M''' , ... bestimmt werden soll, so sind die Beobachtungsfehler selbst offenbar:

$$\mathcal{A}' = M' - x , \mathcal{A}'' = M'' - x , \mathcal{A}''' = M''' - x \text{ u. s. f.},$$

oder

$$x = M' - \mathcal{A}' , x = M'' - \mathcal{A}'' , x = M''' - \mathcal{A}''' \text{ u. s. f.},$$

zieht man aus diesen m Gleichungen das Mittel, so erhält man:

$$x = \frac{1}{m} (M' + M'' + M''' + \dots) - \frac{1}{m} (\mathcal{A}' + \mathcal{A}'' + \mathcal{A}''' + \dots) .$$

Das erste Glied stellt demnach das arithmetische Mittel selbst, also den wahrscheinlichsten Werth dar, das zweite Glied den Fehler desselben; bezeichnet man mit E den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels, so ist in diesem Falle das Quadrat des mittleren Fehlers bestimmt durch:

$$E^2 = \frac{1}{m^2} \{ \mathcal{A}' + \mathcal{A}'' + \mathcal{A}''' + \dots \}^2 ,$$

oder:

$$m^2 E^2 = (\mathcal{A}'^2 + \mathcal{A}''^2 + \mathcal{A}'''^2 + \dots) + 2 (\mathcal{A}' \mathcal{A}'' + \mathcal{A}' \mathcal{A}''' + \dots + \mathcal{A}'' \mathcal{A}''' + \dots)$$

Das zweite Glied dieses Ausdruckes enthält die Summe der Producte aus den Amben ohne Wiederholung, die sich aus den Beobachtungsfehlern bilden lassen; da nun positive und negative Fehler mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu erwarten sind, so wird man bei einer grösseren Beobachtungsreihe wohl die Behauptung aufstellen dürfen, dass sich diese Producte in der Summe grossentheils aufheben, oder dass mindestens diese Summe gegen das erste aus nothwendig positiven Grössen sich summirende Glied sehr klein wird. Es wird also genähert gesetzt werden dürfen:

$$m^2 E^2 = \Sigma (\mathcal{A} \mathcal{A}) .$$

Da in der Folge häufig die Summenzeichen vorkommen, so werde ich hierfür die bequeme Gauss'sche Bezeichnung einführen, indem man statt des Summenzeichens die zu summirende Funktion in eckige Klammer setzt, es ist also:

$$\Sigma (\mathcal{A}) = [\mathcal{A}] = m^2 E^2.$$

Ist nun ε der mittlere Fehler einer Beobachtung, so ist nach der Definition des mittleren Fehlers:

$$m \varepsilon^2 = [\mathcal{A}],$$

und es besteht demnach die Relation:

$$E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad 1)$$

da aber die mittleren, wahrscheinlichen und Durchschnitts-Fehler in linearer Relation zu einander stehen, so ist auch:

$$E : \varepsilon = R : r = H : \eta = 1 : \sqrt{m}, \quad 2)$$

d. h. der mittlere, wahrscheinliche und Durchschnitts-Fehler des arithmetischen Mittels verhält sich zum mittleren, wahrscheinlichen und Durchschnitts-Fehler einer einzelnen Beobachtung, wie sich umgekehrt die Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen zur Einheit verhält. Bezeichnet man aber durch H das Maass der Präcision des arithmetischen Mittels, mit h das der einzelnen Beobachtung, so resultirt auch:

$$1 : \sqrt{m} = h : (H), \quad 3)$$

d. h. die Genauigkeit nimmt im Verhältniss der Quadratwurzeln aus der Anzahl der Beobachtungen zu; hält man diess mit der oben (pag. 279) gegebenen Definition des Gewichtes p zusammen, wonach dasselbe der Anzahl der Beobachtungen proportional wächst und bezeichnet mit P das Gewicht des arithmetischen Mittels, so erhält man eine bereits anderweitig (pag. 291) erwiesene Relation:

$$h : (H) = \sqrt{p} : \sqrt{P}. \quad 4)$$

d. h. die Quadrate der Präcisionen verhalten sich zu einander wie die Gewichte, und die Präcisionen verhalten sich zu einander, wie die Quadratwurzeln der Gewichte; daraus resultirt auch:

$$\left. \begin{aligned} E : \varepsilon &= \sqrt{p} : \sqrt{P} \\ R : r &= \sqrt{p} : \sqrt{P} \\ H : \eta &= \sqrt{p} : \sqrt{P} \end{aligned} \right\} \quad 5)$$

d. h. die Quadrate der Präcisionen verhalten sich umgekehrt zu einander wie die mittleren, wahrscheinlichen und Durchschnitts-Fehler.

§ 7. Bestimmung des mittleren und des Durchschnitts-Fehlers aus gleichwerthigen Beobachtungen.

Es war bisher immer vorausgesetzt worden, dass die wahren Beobachtungsfehler \mathcal{A}' , \mathcal{A}'' ... bekannt seien, und aus diesen wurden die verschiedenen Fehlerarten hergeleitet. Nun sind aber die wahren Beobachtungsfehler niemals in voller

Strenge bekannt und es stellt sich daher die Aufgabe, aus den nur nahe richtig zu bestimmenden Beobachtungsfehlern (Beobachteter Werth — arithmetisches Mittel) nach dem Principe der Wahrscheinlichkeit die verschiedenen Fehlerarten zu bestimmen.

Sind M' , M'' , $M''' \dots$ die beobachteten Grössen und M der Werth des arithmetischen Mittels, und werden die durch die Rechnung gefundenen Fehler (Beob. Werth — arithm. Mittel) durch v bezeichnet, so ist:

$$v' = M' - M, \quad v'' = M'' - M, \quad v''' = M''' - M, \dots$$

welche Werthe mit den wahren Beobachtungsfehlern identisch wären, wenn M dem wahren Werthe der Unbekannten x entsprechen würde, welche Voraussetzung nur dann statthaft ist, wenn eine sehr grosse Anzahl von Beobachtungen vorliegt. Sei nun der Fehler des arithmetischen Mittels durch δ bezeichnet, so ist:

$$M - x = \delta$$

und offenbar:

$$\mathcal{A}' = M' - x, \quad \mathcal{A}'' = M'' - x, \quad \mathcal{A}''' = M''' - x \dots$$

oder

$$\mathcal{A}' = v' + \delta, \quad \mathcal{A}'' = v'' + \delta, \quad \mathcal{A}''' = v''' + \delta \dots$$

Sind nun m derartige Beobachtungen vorhanden, so wird die Summe der Fehlerquadrate bestimmt sein durch:

$$[\mathcal{A}\mathcal{A}] = [vv] + 2[v]\delta + m\delta^2.$$

Nun ist aber nach der Bestimmung des arithmetischen Mittels M nothwendig:

$$[v] = 0,$$

also besteht auch die wichtige Relation:

$$[\mathcal{A}\mathcal{A}] = [vv] + m\delta^2, \tag{1}$$

in welcher aber δ unbekannt ist und den Unterschied zwischen dem wahren Werth und dem arithmetischen Mittel angibt; es wird aber das Quadrat dieses Unterschiedes mit dem Quadrate des mittleren Fehlers des Resultates im Durchschnitte übereinkommen. Ist also ε der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung, so ist auch nach Gleichung 2) des vorausgehenden Paragraphen (pag. 301):

$$\delta^2 = \frac{\varepsilon^2}{m};$$

andererseits ist aber nach der Definition des mittleren Fehlers:

$$m\varepsilon^2 = [\mathcal{A}\mathcal{A}],$$

daher schreibt sich statt 1):

$$m\varepsilon^2 = [vv] + \varepsilon^2,$$

oder:

$$\varepsilon^2 = \frac{[vv]}{m-1}, \quad \varepsilon = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{m-1}}, \tag{2}$$

nach welcher Formel der mittlere Fehler zu bestimmen ist, aus den zwischen den Beobachtungen und dem arithmetischen Mittel auftretenden Differenzen v .

Geht man sofort auf die Relationen über, die den mittleren Fehler mit dem wahrscheinlichen Fehler verbinden, so erhält man:

$$r = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{[v v]}{m-1}}, \quad 3)$$

und die bezüglichen Fehler der arithmetischen Mittel werden:

$$E = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{m(m-1)}}, \quad R = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{[v v]}{m(m-1)}}. \quad 4)$$

Hiermit ist die Möglichkeit geboten aus den Beobachtungen selbst r und demnach auch h zu bestimmen und so die Bedeutung von q (f) völlig festzustellen; man ist also jetzt in der Lage, an jeder gegebenen Beobachtungsreihe die theoretisch gewonnenen Resultate über die Fehlervertheilung zu prüfen. Ehe ich aber daran gehe, will ich noch zeigen, wie man zur Kenntniss des Werthes r auch durch die Summe der Unterschiede zwischen den Beobachtungen und dem arithmetischen Mittel genommen im absoluten Sinne $[+v]$ gelangen kann, ein Verfahren, welches bei gleichwerthigen Beobachtungen auf eine bequemere Rechnung führt. Setzt man vorerst eine sehr umfassende Beobachtungsreihe voraus, so wird sehr nahe sein:

$$m \eta = [+v], \quad m \varepsilon^2 = [v v],$$

und mit Rücksicht auf die Relation (pag. 300):

$$\eta = \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

wird im grossen Durchschnitte sein:

$$[+v] = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{m [v v]} \quad \text{oder} \quad \sqrt{[v v]} = \pm \frac{[+v]}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

womit also jene Relation hergestellt ist, die im Allgemeinen zwischen $[v v]$ und $[+v]$ bestehen wird; setzt man dieselbe in die Gleichung 2), 3) und 4) ein, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \pm 1.2533 \frac{[+v]}{\sqrt{m(m-1)}}, & E &= \pm 1.2533 \frac{[+v]}{m \sqrt{(m-1)}} \\ r &= \pm 0.8453 \frac{[+v]}{\sqrt{m(m-1)}}, & R &= \pm 0.8453 \frac{[+v]}{m \sqrt{(m-1)}} \end{aligned} \right\} \quad 5)$$

§ 8. Erläuterung und Prüfung der vorstehenden Methoden durch die Beobachtungen.

Es soll nun zur Erläuterung und Prüfung der vorstehenden Methoden ein Beispiel vorgenommen werden, welches allerdings nicht ganz die genügende Ausdehnung hat, doch würde ein grösseres Beispiel zu viel Raum in Anspruch nehmen. Es wurde mit Hilfe einer Mikrometerschraube ein Intervall von 600" 40mal gemessen

um den Gangfehler der Schraube zu bestimmen; ich setze neben eine jede Beobachtung sofort den Unterschied zwischen dem angenommenen Mittel und derselben im Sinne: Beobachtung-Rechnung, und ausserdem das Quadrat dieses Unterschiedes an; man erhält so:

	M'	r	$v v$		M'	v	$v v$		M'	v	$v v$
1	600"0	— 2"2	4"84	15	601"4	— 0"8	0"64	28	600"9	— 1"3	1"69
2	599.7	— 2.5	6.25	16	601.4	— 0.8	0.64	29	601.4	— 0.8	0.64
3	599.5	— 2.7	7.29	17	603.4	+ 1.2	1.44	30	600.8	— 1.4	1.96
4	604.6	+ 2.4	5.76	18	603.1	+ 0.9	0.81	31	600.0	— 2.2	4.84
5	603.9	+ 1.7	2.89	19	601.8	— 0.4	0.16	32	600.7	— 1.5	2.25
6	604.8	+ 2.6	6.76	20	600.6	— 1.6	2.56	33	601.4	— 0.8	0.64
7	606.1	+ 3.9	15.21	21	602.0	— 0.2	0.04	34	602.9	+ 0.7	0.49
8	604.7	+ 2.5	6.25	22	602.7	+ 0.5	0.25	35	602.9	+ 0.7	0.49
9	602.1	— 0.1	0.01	23	603.7	+ 1.5	2.25	36	602.4	+ 0.2	0.04
10	602.2	0.0	0.00	24	602.1	— 0.1	0.01	37	602.4	+ 0.2	0.04
11	600.7	— 1.5	2.25	25	602.3	+ 0.1	0.01	38	602.1	— 0.1	0.01
12	602.4	+ 0.2	0.04	26	602.6	+ 0.4	0.16	39	603.6	+ 1.4	1.96
13	601.6	— 0.6	0.36	27	602.7	+ 0.5	0.25	40	603.6	+ 1.4	1.96
14	601.7	— 0.5	0.25								

Da allen Beobachtungen das gleiche Gewicht zuerkannt ist, so ist der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten gleich dem arithmetischen Mittel, es ist also:

$$M = 602''2 ,$$

und die Unterschiede dieses Mittelwerthes gegen die Beobachtungen finden sich in der mit v überschriebenen Columnne; bildet man überdies die Quadrate dieser Fehler, so hat man sich vorerst die nöthigen Hilfsgrössen verschafft, um den wahrscheinlichen Fehler r zu bestimmen; man erhält zunächst:

$$[+v] = 45.1 \quad [v v] = 84.39 .$$

Zur Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers kann man beide Werthe benutzen; es ist klar, dass eine völlige Uebereinstimmung beider Zahlen nicht hervortreten wird, indem ja die Identität nur bei einer unendlichen Anzahl der Beobachtungen hervortreten könnte: man hat nach § 7 Gleichung 3) und 5) (pag. 303) hierfür die Relationen, wenn man sofort die auftretenden Coëfficienten logarithmisch ansetzt und zu den Formeln das aus den obigen Zahlen gewonnene Resultat hinzufügt:

$$r = \pm \overline{[9.8290]} \sqrt{\frac{[v v]}{m-1}} = \pm 0''992$$

$$r = \pm \overline{[9.9270]} \frac{[+v]}{\sqrt{m(m-1)}} = \pm 0''962 .$$

Man sieht, dass beide Resultate in sehr befriedigender Weise stimmen; da aber in der Regel die mit Hilfe des mittleren Fehlers berechneten Werthe von r der Wahrheit näher kommen, als die aus dem Durchschnittsfehler erhaltenen, so soll für die

folgenden Rechnungen der erstere Werth ($r = \pm 0''992$) beibehalten werden, wie- wohl es klar ist, dass man keine wesentlich anderen Resultate erhalten würde, wenn man den zweiten allein benützen würde. Berechnet man nun den wahr- scheinlichen Fehler des arithmetischen Mittels (vergl. 2) pag. 301), so findet sich:

$$R = \frac{r}{\sqrt{m}} = \pm 0''157 .$$

Das Maass der Präcision findet sich nach § 4 (pag. 295):

$$h = \frac{[9.6785]}{r} = 0.481 .$$

Um nun die Theorie mit der Erfahrung durch die Formel § 4 Gleichung 7) (pag. 297) vergleichen zu können, ordne ich die obigen Fehler ihrer Grösse nach. Man findet so, wenn man jeden Fehler mit der Nummer der Beobachtung versehen ansetzt:

$+v$	$+v$	$+v$	$+v$
10 0''0	26 0''4	33 0''8	20 1''6
9 0.1	14 0.5	18 0.9	5 1.7
24 0.1	22 0.5	17 1.2	1 2.2
25 0.1	27 0.5	28 1.3	31 2.2
38 0.1	13 0.6	30 1.4	4 2.4
12 0.2	34 0.7	39 1.4	2 2.5
21 0.2	35 0.7	40 1.4	8 2.5
36 0.2	15 0.8	11 1.5	6 2.6
37 0.2	16 0.8	23 1.5	3 2.7
19 0.4	29 0.8	32 1.5	7 3.9

Fasst man nun die Fehler in Gruppen zusammen, die zwischen den Grenzen 0.0—0.5, 0.5—1.0, 1.0—1.5, 1.5—2.0, 2.0—2.5 und 2.5— ∞ liegen, und zählt die Hälfte jener Fehler, die genau an der Grenze liegen, zur Hälfte zur voran- gehenden und zur Hälfte zur nachfolgenden Gruppe, so erhält man als Resultat jene Zahlen, die ich weiter unten in der mit »beobachtet« überschriebenen Columnne aufgenommen habe. Bildet man nun die Argumente hJ für die Integraltafel XIV (vergl. § 4 pag. 297), so erhält man mit Hilfe derselben:

J	hJ	J_{Jh}	$J_{hJ_2} - J_{hJ_1}$
0.0	0.000	0.000	0.266
0.5	0.240	0.266	0.238
1.0	0.481	0.504	0.188
1.5	0.721	0.692	0.134
2.0	0.962	0.826	0.085
2.5	1.202	0.911	0.089
∞	∞	1.000	

Multiplieirt man nun die in der letzten Columnne als erste Differenzwerthe an-
gesetzten Zahlen mit der Anzahl der Beobachtungen (vergl. § 4 pag. 297), so findet
man die nach der Theorie innerhalb der gegebenen Grenzen sich vorfindende Fehler-
anzahl; dieselbe steht in der Columnne »berechnet«.

Grenzen	beobachtet	berechnet
0.0—0.5	12.5	10.6
0.5—1.0	9.5	9.5
1.0—1.5	6.5	7.5
1.5—2.0	3.5	5.4
2.0—2.5	4.0	3.4
2.5—∞	4.0	3.6

Die Vergleichung zeigt also, dass in der That die Theorie mit der Erfahrung
in sehr befriedigender Weise stimmt.

§ 9. Bestimmung des mittleren Fehlers aus ungleichwerthigen Beobachtungen.

Es ist bei den letzten Entwicklungen stets der einfachste Fall in Betracht
gezogen worden, wo eine Unbekannte aus einer bestimmten Anzahl directer Be-
obachtungen von gleichem Gewichte abgeleitet wurde; es soll nun die Aufgabe ge-
löst werden, aus Beobachtungen von verschiedenen Gewichten den mittleren und den
wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung mit der Gewichtseinheit zu ermitteln.
Die Resultate der Beobachtungen wären M', M'', M''', \dots , diesen Resultaten wären
beziehungsweise die Gewichte $p', p'', p''' \dots$ zugetheilt, dann ist der durch das
arithmetische Mittel bestimmte wahrscheinlichste Werth der Unbekannten (vergl.
pag. 280) M bestimmt durch:

$$M = \frac{p' M' + p'' M'' + p''' M''' + \dots}{p' + p'' + p''' + \dots} = \frac{[p M]}{[p]}, \quad 1)$$

in welchem Ausdrücke die Gewichtseinheit offenbar willkürlich ist. Einigt man
sich aber über eine Einheit und sei dann ε der mittlere Fehler einer Beobachtung,
die das Gewicht 1 erhält, so ist offenbar der mittlere Fehler des Endresultates be-
stimmt durch:

$$E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}}.$$

Bezeichnet man ähnlich wie früher mit x den wahren Werth der Unbekannten
und setzt wieder:

$$M - x = \delta,$$

so wird die Relation zwischen den wirklichen Beobachtungsfehlern \mathcal{A}' , \mathcal{A}'' , $\mathcal{A}''' \dots$ und den Differenzen zwischen den beobachteten Werthen und dem angenommenen Mittelwerthe bestimmt sein durch:

$$\mathcal{A}' = v' + \delta, \quad \mathcal{A}'' = v'' + \delta, \quad \mathcal{A}''' = v''' + \delta, \dots$$

der Fehler \mathcal{A}' wird zur Beobachtung M' gehören, die das Gewicht p' erhält und ähnlich für die übrigen. Statt aber einer Beobachtung das Gewicht p' zuzuschreiben, kann man sich vorstellen, dass dieselbe das Resultat ist von p' Einzelbeobachtungen mit der Gewichtseinheit, es wird also in dieser der Fehler \mathcal{A}' , p' mal vorkommen, ebenso der Fehler \mathcal{A}'' , p'' mal u. s. f.; es wird demnach sein:

$$[p \mathcal{A} \mathcal{A}] = [p v v] + 2 [p v] \delta + [p] \delta^2.$$

Hier ist aber der Bildung der Grösse M gemäss streng:

$$[p v] = 0,$$

demnach hat man auch:

$$[p \mathcal{A} \mathcal{A}] = [p v v] + [p] \delta^2.$$

Für δ^2 wird aber, wie oben, das Quadrat des mittleren Fehlers des Gesamtresultates zu setzen sein, also da ist:

$$\delta^2 = E^2 = \frac{\varepsilon^2}{[p]},$$

so wird man haben:

$$[p \mathcal{A} \mathcal{A}] = [p v v] + \varepsilon^2. \quad 2)$$

Es erübrigt nur noch die Grösse $[p \mathcal{A} \mathcal{A}]$ durch ε auszudrücken. Es ist aber im Durchschnitte für die wahrscheinlichen Fehlerquadrate anzunehmen:

$$\mathcal{A}' \mathcal{A}' = \frac{\varepsilon^2}{p'}, \quad \mathcal{A}'' \mathcal{A}'' = \frac{\varepsilon^2}{p''}, \quad \mathcal{A}''' \mathcal{A}''' = \frac{\varepsilon^2}{p'''} \dots$$

also:

$$[p \mathcal{A} \mathcal{A}] = m \varepsilon^2,$$

wenn m die Anzahl der Beobachtungen, die verschiedenes Gewicht haben, vorstellt, welche Zahl jedoch nicht mit der Summe der Gewichte verwechselt werden darf. Führt man nun diese Relation in Gleichung 1) ein, so findet sich sofort:

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{m-1}}, \quad E = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{[p](m-1)}}, \quad 3)$$

und für die wahrscheinlichen Fehler:

$$r = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{[p v v]}{m-1}}, \quad R = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{[p v v]}{[p](m-1)}}. \quad 4)$$

Man wird beachten, dass man ganz dasselbe Resultat für ε und r erhalten würde, wenn man jede einzelne Beobachtung mit der Quadratwurzel des Gewichtes (also mit der Präcision) multipliciren würde und dann die gefundenen Zahlen so behandelt hätte, wie Beobachtungen mit gleichem Gewichte. Es wird sich später herausstellen, dass auch in complicirteren Fällen dieses Verhältniss hervortritt und man hat demnach ein sehr einfaches und radicales Hilfsmittel gewonnen, um Beobachtungsresultate von verschiedenem Gewichte nach jenen Methoden behandeln zu können, die für gleichwerthige Beobachtungen gelten.

Schliesslich kann noch bemerkt werden, dass man für die Rechnung des wahrscheinlichen Fehlers auch die absoluten Fehler verwerthen kann; mit Hilfe der zuletzt gemachten Bemerkung wird man aber statt der Relation:

$$V[\overline{v v}] = \pm \frac{[+v]}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

die pag. 303 gefunden wurde, zu schreiben haben:

$$V[p \overline{v v}] = \pm \frac{[+v \sqrt{p}]}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

und erhalten:

$$r = \pm 0.8453 \frac{[+v \sqrt{p}]}{\sqrt{m(m-1)}}, \quad R = \pm 0.8453 \frac{[+v \sqrt{p}]}{\sqrt{[p]m(m-1)}}, \quad 5)$$

doch bieten diese Formeln im vorliegenden Falle geringere practische Vortheile als oben.

Es sollen nun die vorstehenden Formeln durch ein Beispiel erläutert werden; ich werde das früher gewählte Beispiel wieder vornehmen, aber dasselbe durch eine willkürliche Zusammenfassung der Einzelbeobachtungen in Resultate von verschiedenen Gewicht verwandeln; ich erhalte so:

	<i>M</i>	Gewicht	<i>v</i>	<i>vv</i>	<i>p v v</i>
1—5	601"5	5	— 0"7	0.49	2.45
6—8	605"2	3	+ 3.0	9.00	27.00
9	602.1	1	— 0.1	0.01	0.01
10—12	601.8	3	— 0.4	0.16	0.48
13—17	601.9	5	— 0.3	0.09	0.45
18	603.1	1	+ 0.9	0.81	0.81
19—20	601.2	2	— 1.0	1.00	2.00
21—30	602.1	10	— 0.1	0.01	0.10
31—34	601.2	4	— 1.0	1.00	4.00
35—40	602.8	6	+ 0.6	0.36	2.16

daneben habe ich in die Columnen *v* und *vv* die Unterschiede der Beobachtung gegen die mit Rücksicht auf Gewicht abgeleiteten Mittelwerthe und die Quadrate derselben gesetzt. In der Columnen *p v v* finden sich die letztgenannten Fehlerquadrate mit ihrem Gewichte multiplicirt; für *M* findet sich nach Gleichung 1) pag. 306:

$$M = 602"2; \quad \text{und weiter } [p v v] = 39.46,$$

se wird also nach Gleichung 3) und 4) pag. 307:

$$r = \pm 1"_{41}$$

$$R = \pm 0"_{22}.$$

Vergleicht man diese Zahl mit der oben (pag. 305) für *R* gefundenen $\pm 0"_{16}$, so findet man allerdings keine ganz genügende Uebereinstimmung, wie dies zu erwarten ist, da in dem letzteren Falle die Anzahl der Beobachtungen, die man den Principien der Wahrscheinlichkeit unterworfen hat, nur gleich 10 ist; man wird daher bei einer so geringen Zahl nicht erwarten dürfen, dass sich alle Zufälligkeiten völlig

eliminiren können, und dies als erneuten Hinweis betrachten dürfen, dass die Methode der kleinsten Quadrate nur dann, und hier auch nur unter gewissen oben erwähnten Vorbehalten, verlässliche Resultate liefern kann, wenn eine grosse Anzahl von Beobachtungen vorliegt. Da bei der Durchführung des obigen Beispiels aber nur die Absicht vorlag, die Rechnung nach den Formeln klar zu legen, so mag dasselbe für diesen nächsten Zweck genügen.

§ 10. Ermittlung des mittleren Fehlers eines Resultates aus der Summe und Differenz directer Beobachtungen.

Indem durch die vorstehenden Entwicklungen die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf den Fall directer Beobachtungen der Unbekannten erledigt erscheint, soll der durch die Ueberschrift bezeichnete Specialfall anhangsweise hier näher vorgenommen werden, hauptsächlich aus dem Grunde, weil derselbe in einer völlig unabhängigen Art eine bereits in zweifacher Weise erwiesene theoretische Grundlage der Methode bestätigt. — Die bisherigen Betrachtungen waren bislang den Fällen angepasst worden, wo unmittelbar die zu bestimmende Grösse beobachtet wurde, in der Anwendung wird man aber meist mit complicirteren Fällen zu thun haben, welche sich jedoch meist ohne Schwierigkeit auf die bisher in Betracht gezogenen einfachen Fälle reduciren lassen; bevor jedoch an die Lösung dieser allgemeinen Aufgabe geschritten wird, soll hier noch der verhältnissmässig einfache Fall in Betracht gezogen werden, wo eine Grösse durch die Summe und Differenz unmittelbar beobachteter Werthe bestimmt wird, wobei jedoch die beobachteten Werthe als völlig von einander unabhängig gedacht werden. Es ist also x bestimmt durch die Relation:

$$x = y_1 \pm y_2,$$

wobei durch y_1 und y_2 die wahren Werthe der Funktionen vorgestellt werden, die durch ihre Summe oder Differenz den wahren Werth von x finden lassen. Die Beobachtungen selbst werden aber den wahren Werth von y_1 und y_2 nicht genau wiedergeben und der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen einer jeden solchen Beobachtungsreihe sei beziehungsweise ε_1 und ε_2 . Die Beobachtungen werden hier:

für y_1 die Fehler $\mathcal{A}_1', \mathcal{A}_1'', \mathcal{A}_1''' \dots$

» y_2 » » $\mathcal{A}_2', \mathcal{A}_2'', \mathcal{A}_2''' \dots$

ergeben, demnach wird der Fehler von x sein, der sich aus Combination der ersten Beobachtungen ergibt, je nachdem man die Summen und Differenzen zu nehmen hat

$$(\mathcal{A}_1' \pm \mathcal{A}_2').$$

und ähnlich erhält man aus der Combination der zweiten und folgenden Beobachtungen:

$$(\mathcal{A}_1'' \pm \mathcal{A}_2'', \quad \mathcal{A}_1''' \pm \mathcal{A}_2''') \dots$$

Bildet man nun die Summe der Fehlerquadrate und nennt ε_0 den mittleren Fehler einer Bestimmung von x und setzt voraus, dass sowohl y_1 als auch y_2 , m mal

beobachtet wurde, so dass m Bestimmungen von x vorliegen, so muss nach der Definition des mittleren Fehlers sein:

$$m \varepsilon_0^2 = [\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1] \pm 2 [\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2] + [\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_2] .$$

Ist aber die Anzahl der Beobachtungen gross, so wird bald das mittlere Glied, welches aus der Summe von Gliedern mit verschiedenen Zeichen gebildet wird, gegen die äusseren Glieder, die sich aus Quadraten summiren, verhältnissmässig klein werden und man wird mit einem gewissen Grade der Annäherung schreiben dürfen:

$$m \varepsilon_0^2 = [\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1] + [\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_2] .$$

Bedenkt man aber, das ist:

$$[\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1] = m \varepsilon_1^2 , \quad [\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_2] = m \varepsilon_2^2 ,$$

so erhält man unmittelbar:

$$\varepsilon_0 = \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} , \quad 1)$$

d. h. der mittlere Fehler einer solchen combinirten Beobachtung ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der mittleren Fehler der directen Beobachtungen.

Wie man sieht, könnte man leicht diese Betrachtungen auf solche Beobachtungen ausdehnen, die sich aus mehreren directen Beobachtungen additiv und subtractiv combiniren, man würde den mittleren Fehler der Bestimmung von x_1 dann erhalten aus:

$$\varepsilon_0 = \pm \sqrt{[\varepsilon \varepsilon]} ,$$

wobei gesetzt ist:

$$[\varepsilon \varepsilon] = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \dots , \quad 2)$$

und sich die verschiedenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$ auf die Resultate der directen Messung beziehen: natürlich gilt auch dieselbe Relation für den wahrscheinlichen Fehler, man hat daher:

$$r_0 = \pm \sqrt{[r r]} .$$

Wollte man das Gewicht einer solchen Bestimmung von x bestimmen, so hat man nur zu beachten, dass nach dem obigen (vergl. pag. 301) sich die Gewichte direct wie die Quadrate der Präcisionen oder umgekehrt wie die Quadrate der wahrscheinlichen Fehler verhalten; seien nun die Gewichte der einzelnen Bestimmungen $p_1, p_2, p_3 \dots$, so wird sein:

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{p_1} , \quad \varepsilon_2^2 = \frac{1}{p_2} , \quad \varepsilon_3^2 = \frac{1}{p_3} \dots ,$$

und man hat:

$$p = \frac{p_1 p_2 p_3 \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots} . \quad 3)$$

Hätte man die Unbekannte durch die Summation von m gleich genauen Beobachtungen, deren mittlerer Fehler ε sei, bestimmt, so ist der mittlere Fehler dieser Summe ε_0 nach den eben angestellten Betrachtungen bestimmt durch:

$$\varepsilon_0^2 = m \varepsilon^2 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_0 = \pm \varepsilon \sqrt{m} .$$

dividirt man nun beiderseits durch m , so erhält man eine schon früher auf eine ganz andere Weise (pag. 301) bewiesene Relation, nämlich:

$$\frac{\varepsilon_0}{m} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

wobei man zu beachten hat, dass $\frac{\varepsilon_0}{m}$ der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels ist. Es nimmt also der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels im umgekehrten Verhältniss zur Quadratwurzel der Anzahl der zum Mittel vereinigten Beobachtungen ab. Der früher betrachtete Fall der Ermittlung des mittleren Fehlers eines Resultates aus der Summe und Differenz directer Beobachtungen ist einer Erweiterung fähig, die häufig genug in der Anwendung vorkommt; es seien nämlich die einzelnen Summenwerthe y_1, y_2, y_3, \dots bevor dieselben zum Resultate zusammenzufassen sind, mit den constanten, aber bekannt vorausgesetzten Factoren beziehungsweise $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ zu multipliciren, dann hat die vorgelegte Funktion die Form:

$$x = \pm \alpha_1 y_1 \pm \alpha_2 y_2 \pm \alpha_3 y_3 \pm \dots$$

Sind nun die bezüglichen mittleren Fehler der Beobachtungsergebnisse $y_1, y_2, y_3 \dots$ ausgedrückt durch $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots$, so ist sofort klar, dass die α Factoren bedingen werden, dass der mittlere Fehler des ersten Productes $\alpha_1 \varepsilon_1$ sein wird, der zweite $\alpha_2 \varepsilon_2$ u. s. f., daraus kann man unmittelbar den Schluss ziehen mit Rücksicht auf die für den einfacheren Fall gemachten Betrachtungen, dass der mittlere Fehler des Resultates x , der wieder durch ε_0 bezeichnet wird, sich darstellt durch:

$$\varepsilon_0 = \pm 1 \sqrt{\alpha_1^2 \varepsilon_1^2 + \alpha_2^2 \varepsilon_2^2 + \alpha_3^2 \varepsilon_3^2 + \dots} = \pm 1 \sqrt{\alpha^2 \varepsilon^2}; \quad 4)$$

sind die wahrscheinlichen Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots$ alle gleich, so erhält man:

$$\varepsilon_0 = \pm \varepsilon 1 \sqrt{\alpha \alpha} \quad 5$$

B. Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Bestimmung einer oder mehrer unabhängiger Unbekannten aus Beobachtungen.

§ 1. Allgemeines.

Es kann nun daran gegangen werden, die Lösung der allgemeinen Aufgabe durchzuführen, nämlich die Ermittlung der wahrscheinlichsten Werthe einer beliebigen Anzahl von Unbekannten, welche Funktionen der beobachteten Grössen sind; die oben betrachteten speciellen Fälle der directen Beobachtung sind natürlich in dieser allgemeinen Auflösung mit inbegriffen.

Dieses allgemeine Problem umfasst zwei Klassen von Aufgaben, welche von einander abgetrennt werden müssen. In der ersten Klasse sind die Unbekannten

unabhängig (independent) von einander, sind also keinen weiteren Bedingungen unterworfen als den Beobachtungen möglichst zu genügen, so dass vor Anstellung der Beobachtungen jedes beliebige System von Werthen dieselbe Wahrscheinlichkeit für sich in Anspruch nimmt; in der zweiten Klasse sind schon a priori gewisse Bedingungen vorhanden, die streng erfüllt sein müssen, und ausserdem muss der möglichst gute Anschluss an die Beobachtungen erzielt werden. Dieser letztere Fall spielt insbesondere bei den geodätischen Ausgleichsrechnungen eine wichtige Rolle, kann aber für den Zweck des vorliegenden Werkes übergangen werden, da in den wenigen hier in Betracht kommenden Fällen leicht der richtige Weg mit Hilfe der Methoden der ersten Klasse gefunden werden kann; es wird daher in der Folge nur auf die Bestimmung von einander unabhängiger Unbekannten Rücksicht genommen. Wiewohl dadurch die Aufgabe schon wesentlich eingeschränkt ist, so muss noch eine weitere Einschränkung vorgenommen werden, die daraus resultirt, dass die folgenden Betrachtungen einen linearen Zusammenhang der Unbekannten mit den Beobachtungen fordern, ein Fall, der selten genug bei der Anwendung hervortreten wird; ist also das Verhältniss, wie es in der Regel der Fall, kein lineares, so wird man sich von Fall zu Fall dadurch helfen können, dass man die lineare Form herstellt, indem man sich in irgend einer durch das Problem bestimmten Weise sehr genäherte Werthe für die Unbekannten verschafft und die Verbesserungen dieser Näherungen sucht; betrachtet man diese als Grössen erster Ordnung, so wird der Zusammenhang zwischen den Incrementen der Unbekannten zu der dadurch bedingten Aenderung in der Beobachtung durch den diesbezüglichen Differentialquotienten in linearer Weise ausgedrückt sein. Es kann unter Umständen die Ermittlung der genäherten Werthe der Unbekannten und die Entwicklung der Differentialquotienten Schwierigkeiten machen, für diese Lösung lassen sich aber keine allgemeinen Regeln geben, da dieselben von der Natur des vorgelegten Problem es abhängig sind. Es wird in der Folge vorausgesetzt, dass für die gestellte Aufgabe den eben ausgesprochenen Forderungen genügt ist.

Es ist demnach die vorgelegte Aufgabe dadurch wesentlich erleichtert, dass die Form der Abhängigkeit der Unbekannten von den Beobachtungen eine lineare ist. Ist also M der beobachtete Werth, $x, y, z \dots$ die Unbekannten, $a, b, c \dots$ die durch das Problem bestimmten Coëfficienten, so ist die allgemeine Form der Relation zwischen der Beobachtung und den Unbekannten dargestellt durch:

$$ax + by + cz + \dots + l = M.$$

Eine solche Gleichung allein gibt nur eine Relation zwischen den Unbekannten, ist aber nicht zur Bestimmung derselben ausreichend; es müssen nothwendig mindestens ebensoviele essential verschiedene Gleichungen vorhanden sein, als Unbekannte zu bestimmen sind; in dem letzteren Falle ist die Bestimmung derselben eben möglich, soll aber die Methode der kleinsten Quadrate angewendet werden, so ist es klar, dass mehr Gleichungen als Unbekannte vorhanden sein müssen. Sind nun $M_1, M_2, M_3 \dots$ die beobachteten Werthe, so wird man als Bedingungsgleichungen haben:

wird der mittlere Fehler einer Beobachtung sein mit dem Gewichte p_1 offenbar $\frac{\varepsilon}{\sqrt{p_1}}$, mit dem Gewichte p_2 aber $\frac{\varepsilon}{\sqrt{p_2}}$ u. s. w. Würde man jeder der eben hingestellten Gleichungen die Gewichtseinheit zutheilen, so würde der mittlere Fehler von v_1 , v_2 , v_3 u. s. w. im Allgemeinen gleich werden ε ; es sollen aber entsprechend den angenommenen Gewichten die Fehler $\frac{\varepsilon}{\sqrt{p_1}}$, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{p_2}}$... gefunden werden, dies wird man aber erreichen können, wenn man die oben hingeschriebenen Gleichungen mit $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$ u. s. w. durchmultiplicirt; man hat dann:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{p_1} a_1 x + \sqrt{p_1} b_1 y + \sqrt{p_1} c_1 z + \dots + \sqrt{p_1} v_1 &= \sqrt{p_1} n_1 \\ \sqrt{p_2} a_2 x + \sqrt{p_2} b_2 y + \sqrt{p_2} c_2 z + \dots + \sqrt{p_2} v_2 &= \sqrt{p_2} n_2 \\ \sqrt{p_3} a_3 x + \sqrt{p_3} b_3 y + \sqrt{p_3} c_3 z + \dots + \sqrt{p_3} v_3 &= \sqrt{p_3} n_3 \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

Behandelt man nun diese Gleichungen unter Annahme gleicher Gewichte für dieselben, so wird jede Gleichung als mittleren Fehler ε geben; es wird also sein:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{p_1} v_1 \quad \text{oder} \quad v_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_1}} \\ \varepsilon &= \sqrt{p_2} v_2 \quad \text{oder} \quad v_2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_2}} \end{aligned}$$

und die mittleren Fehler von v_1 , v_2 ... sind entsprechend den ihnen zugetheilten Gewichten bestimmt. Man leitet daraus die Regel ab, dass Beobachtungen mit verschiedenen Gewichten ebenso behandelt werden können, wie Beobachtungen von gleichen Gewichten, wenn man alle Bedingungsgleichungen vorher mit der Quadratwurzel des Gewichtes oder mit der Präcision durchmultiplicirt.

Die vorausgehenden Betrachtungen haben also gezeigt, dass man unter allen Bedingungen das Problem reduciren kann auf den einfachsten Fall, nämlich auf lineare Gleichungen mit gleichem Gewichte.

§ 2. Bildung der Normalgleichungen.

Den im vorstehenden Paragraphen aufgestellten Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots - n_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots - n_2 &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \dots - n_3 &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

kann im Allgemeinen in den hier in Betracht kommenden Fällen nicht völlig genügt werden; es werden Unterschiede übrig bleiben, wenn für x , y , z bestimmte

Werthe eingesetzt werden, die, im Sinne: Beobachtung-Rechnung genommen, durch $v_1, v_2, v_3 \dots$ bezeichnet werden sollen; man wird also haben:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots - n_1 &= -v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots - n_2 &= -v_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \dots - n_3 &= -v_3 \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

Die Unbekannten $x, y, z \dots$ sind aber so zu bestimmen, dass die Fehler v auf das geringste Maass herabgedrückt werden; das wahrscheinlichste System wird aber nach den bisherigen theoretischen Betrachtungen dasjenige sein, welches die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht; man wird also der Relation genügen müssen:

$$[v v] = v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3 + \dots = \text{Minimum.} \quad 3)$$

Da aber $x, y, z \dots$ völlig von einander unabhängig vorausgesetzt werden, so muss die Bedingung des Minimum für jede dieser Unbekannten erfüllt sein; und es ist daher nothwendig:

$$\frac{d[v v]}{dx} = 0, \quad \frac{d[v v]}{dy} = 0, \quad \frac{d[v v]}{dz} = 0 \dots \quad 4)$$

Diese Differentialrelation gilt auch für das Maximum, doch schliesst sich das letztere sofort hier nach der Gestalt der Gleichungen aus, indem dasselbe nur für unendliche Werthe der Unbekannten eintritt.

Den durch die Gleichungen 4) aufgestellten Bedingungen allein und keinen weiteren, ist die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten unterworfen, gelingt es also, wie es in der That der Fall ist, mit Hilfe dieser Relationen ohne weitere Voraussetzungen die Unbekannten zu bestimmen, so ist das vorgesteckte Ziel erreicht.

Führt man in Gleichung 4) die angezeigten Operationen mit Hilfe der Gleichung 3) aus, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} v_1 \frac{dv_1}{dx} + v_2 \frac{dv_2}{dx} + v_3 \frac{dv_3}{dx} + \dots &= 0 \\ v_1 \frac{dv_1}{dy} + v_2 \frac{dv_2}{dy} + v_3 \frac{dv_3}{dy} + \dots &= 0 \\ v_1 \frac{dv_1}{dz} + v_2 \frac{dv_2}{dz} + v_3 \frac{dv_3}{dz} + \dots &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad 5)$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist gleich der in der Gleichung 4) aufgestellten Anzahl der Bedingungen, die aber wieder nur von der Anzahl der Unbekannten bestimmt ist; es sind in Gleichung 5) also so viel Gleichungen von verschiedener Zusammensetzung enthalten als Unbekannte vorhanden sind, und es erübrigt daher nichts zur Bestimmung der Unbekannten als die Coëfficienten der Gleichungen 5) auf bekannte Werthe zu reduciren. Vorerst werden sich die Differentialquotienten von v nach Gleichung 2) sehr leicht bestimmen; man erhält aus diesen letzteren Gleichungen sofort durch Differentiation:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\frac{dv_1}{dx}, \quad b_1 = -\frac{dv_1}{dy}, \quad c_1 = -\frac{dv_1}{dz}, \quad \dots \\ a_2 &= -\frac{dv_2}{dx}, \quad b_2 = -\frac{dv_2}{dy}, \quad c_2 = -\frac{dv_2}{dz}, \quad \dots \\ a_3 &= -\frac{dv_3}{dx}, \quad b_3 = -\frac{dv_3}{dy}, \quad c_3 = -\frac{dv_3}{dz}, \quad \dots \end{aligned} \right\} \quad 6)$$

Man kann daher statt Gleichung 5) auch schreiben:

$$\left. \begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \dots &= 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \dots &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad 7)$$

Ersetzt man nun den Werth von $v_1, v_2, v_3 \dots$ durch die Relationen in der Gleichung 2) (pag. 315), so verwandelt sich die erste Gleichung 7) in:

$$\left. \begin{aligned} a_1 a_1 x + a_1 b_1 y + a_1 c_1 z + \dots - a_1 n_1 \\ + a_2 a_2 x + a_2 b_2 y + a_2 c_2 z + \dots - a_2 n_2 \\ + a_3 a_3 x + a_3 b_3 y + a_3 c_3 z + \dots - a_3 n_3 \\ \dots \end{aligned} \right\} = 0,$$

ähnlich wird die zweite Gleichung 7) sich schreiben lassen:

$$\left. \begin{aligned} a_1 b_1 x + b_1 b_1 y + b_1 c_1 z + \dots - b_1 n_1 \\ + a_2 b_2 x + b_2 b_2 y + b_2 c_2 z + \dots - b_2 n_2 \\ + a_3 b_3 x + b_3 b_3 y + b_3 c_3 z + \dots - b_3 n_3 \\ \dots \end{aligned} \right\} = 0$$

u. s. f. — Führt man nun die abkürzende Gauss'sche Summenbezeichnung (pag. 301) ein, so wird man statt der Gleichungen 7) schreiben können die folgenden, in welchen die Coëfficienten völlig bekannte Grössen sind:

$$\left. \begin{aligned} [a a] x + [a b] y + [a c] z + \dots &= [a n] \\ [a b] x + [b b] y + [b c] z + \dots &= [b n] \\ [a c] x + [b c] y + [c c] z + \dots &= [c n] \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad 8)$$

Die Anzahl dieser Gleichungen kommt gleich der Anzahl der Unbekannten, die Auflösung dieser Gleichungen bestimmt die Unbekannten nach dem Axiome, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum ist; man nennt diese Gleichungen die Normalgleichungen, weil dieselben für die Bestimmung der Unbekannten maassgebend (normirend) sind.

Die Bildung und Herstellung der Normalgleichungen ist nunmehr theoretisch völlig bestimmt, nur wird die thatsächliche Durchführung der zahlreichen Multiplicationen und Additionen, besonders wenn die Anzahl der Unbekannten und der Bedingungsgleichungen anwächst, das Bedürfniss fühlbar machen, die nothwendigen Rechnungsoperationen möglichst übersichtlich zu gestalten, so dass nicht leicht ein

Product übergangen werden kann, und geeignete Prüfungsmittel für die Richtigkeit der Rechnung herbeizuschaffen.

Letzteres Verlangen kann leicht durch Bildung einiger Hilfsgrössen befriedigt werden. Bildet man nämlich die Summe aller zu einer Bedingungsgleichung gehöriger Coëfficienten und bezeichnet dieselbe durch s mit einem entsprechenden Index, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} a_1 + b_1 + c_1 + \dots + n_1 &= s_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + \dots + n_2 &= s_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 + \dots + n_3 &= s_3 \\ . & \\ . & \end{aligned} \right\} \quad 9)$$

und man wird sofort zur Prüfung der Coëfficienten der Normalgleichungen, wenn man sich die Bedeutung des Gauss'schen Summenzeichens klar macht, haben:

$$\left. \begin{aligned} [a\ a] + [a\ b] + [a\ c] + \dots [a\ n] &= [a\ s] \\ [a\ b] + [b\ b] + [b\ c] + \dots [b\ n] &= [b\ s] \\ [a\ c] + [b\ c] + [c\ c] + \dots [c\ n] &= [c\ s] \\ . & \\ [a\ n] + [b\ n] + [c\ n] + \dots [n\ n] &= [n\ s] \end{aligned} \right\} \quad 10)$$

welchen Relationen innerhalb der Unsicherheit der Rechnungsoperationen genügt werden muss. Hierbei könnte aber eine beträchtliche Unsicherheit dadurch entstehen, dass die Coëfficienten der verschiedenen Unbekannten sehr different in Bezug auf ihre Grösse sind. Es muss nämlich die Rechnung, um dieselbe nicht allzu weitläufig zu gestalten, auf eine gewisse Anzahl von Decimalen beschränkt bleiben; bei den Producten der grossen Zahlen wird aber die Unsicherheit der Rechnung schon Stellen beeinflussen, die bei den Producten der kleinen Zahlen noch ganz sicher erscheinen und es muss gewiss ganz erwünscht sein, sich auch der Richtigkeit dieser kleinen Producte zu versichern; hierbei ist natürlich vorausgesetzt, dass die kleinen Coëfficienten sich mit derselben Unbekannten verbinden, denn es ist klar, dass ein kleiner oder mehrere kleine Coëfficienten bei einer Unbekannten, wenn nur ein grosser Coëfficient derselben vorhanden ist, einer derartigen Prüfung nicht bedürfen. Man kann nun leicht dieser Forderung genügen, wenn man für die Unbekannten andere Grössen einführt, welche die zugehörigen Coëfficienten für die verschiedenen Unbekannten nahe gleichwerthig machen, und es wird sich stets lohnen, diese kleine Mühe nicht zu scheuen und stets die auftretenden Factoren möglichst homogen der Rechnung zu Grunde zu legen. Es ist mir stets am bequemsten und sichersten erschienen, den grössten Coëfficienten, mit dem die Unbekannte multiplicirt erscheint, herauszuheben und mit demselben alle Coëfficienten dieser Unbekannten zu dividiren. Seien der Reihe nach $\alpha, \beta, \gamma \dots$ die grössten Coëfficienten von x, y, z, \dots und sei ν der grösste Werth in der Reihe der Werthe $n_1\ n_2\ n_3 \dots$ so erhalten die Bedingungsgleichungen nunmehr die Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1}{\alpha} (\alpha x) + \frac{b_1}{\beta} (\beta y) + \frac{c_1}{\gamma} (\gamma z) \dots &= \frac{n_1}{\nu} \\ \frac{a_2}{\alpha} (\alpha x) + \frac{b_2}{\beta} (\beta y) + \frac{c_2}{\gamma} (\gamma z) \dots &= \frac{n_2}{\nu} \\ \frac{a_3}{\alpha} (\alpha x) + \frac{b_3}{\beta} (\beta y) + \frac{c_3}{\gamma} (\gamma z) \dots &= \frac{n_3}{\nu} \\ . & \end{aligned} \right\} \quad 11)$$

aus welchen nun die Unbekannten (αx) , (βy) , (γz) . . . mit Hilfe der Normalgleichungen in Einheiten von ν erhalten werden. Man wird demnach vor Beginn der Rechnungsoperationen zur Ermittlung der Normalgleichungen den eben gemachten Vorschriften gemäss die Coëfficienten erst homogen gestalten, und mit diesen dann die Operationen beginnen; es ist klar, dass, um von der in 10) angedeuteten Summenprüfung möglichst bequiem Vorthail zu ziehen, die Summen s nach 9) erst mit dem homogen gemachten Coëfficienten berechnet werden. Es mögen vielleicht einem in diesen Gebiete der Rechnung wenig erfahrenen Rechner die hier angegebenen Vorschriften auf den ersten Blick die Rechnung zu erschweren scheinen, die häufigere Anwendung aber wird denselben bald lehren, dass sie ganz wesentlich zur Sicherung und Bequemlichkeit der Rechnung beitragen.

Ich werde nun zeigen, wie man die weitere Rechnung zur Bildung der Normalgleichungen und zur Lösung derselben übersichtlich anlegen kann und setze die ursprüngliche Form der Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots &= n_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots &= n_2 \\ . & \end{aligned}$$

voraus, wobei jedoch nunmehr die Coëfficienten und die Unbekannten der Bedingung der Homogenität unterworfen sind. Die Bildung der Produkte kann nun leicht entweder mit Hilfe der gewöhnlichen Logarithmentafeln oder nach Bessel's Vorschlag mit Hilfe von Quadrattafeln vorgenommen werden; ich werde zuerst das erstere Verfahren auseinandersetzen.

Man wird sich zunächst auf einen mit Horizontallinien überzogenen Bogen so viel Verticalcolumnen vorbereiten, als Bedingungsgleichungen vorhanden sind; in die erste Horizontalzeile setzt man nun die logarithmischen Coëfficienten der Unbekannten x , in die zweite die von y u. s. f.; in die vorletzte Zeile kommen die Logarithmen von n , in die letzte die von s , nachdem man sich vorerst auf einem Nebenblatte nach den Gleichungen 9) dieselben durch Summation verschafft hat. Man hat also zwei Horizontalzeilen mehr anzufüllen, als Unbekannte vorhanden sind; das Schema gestaltet sich also wie folgt, wobei die Ziffern in den Köpfen der Columnen den Hinweis auf die Nummer der Bedingungsgleichung vorstellen sollen.

Nummer der Bedingungsgleichung	1	2	3
Coëfficient von x	$\log a_1$	$\log a_2$	$\log a_3$
» » y	$\log b_1$	$\log b_2$	$\log b_3$
» » z	$\log c_1$	$\log c_2$	$\log c_3$
⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮	
Fehler	$\log n_1$	$\log n_2$	$\log n_3$
Summe	$\log s_1$	$\log s_2$	$\log s_3$

Auf demselben Folioblatte wird man nun, wenn die Bedingungsgleichungen und die Unbekannten nicht zu zahlreich sind, Platz für die gebildeten Producte finden; man wird sich zu diesem Ende, wenn man durch μ die Anzahl der Unbekannten bezeichnet:

$$\frac{(\mu + 2)(\mu + 3)}{1 \cdot 2} - 1 \quad 12)$$

Verticalcolumnen bilden, die um zwei Horizontalzeilen mehr enthalten als Bedingungsgleichungen vorhanden sind. In die erste Zeile jeder dieser Verticalcolumnen setzt man als Aufschrift das bezeichnende Product, also $aa, ab, ac \dots bb, bc \dots nn, ns$, in die letzte Zeile wird dann die Summe der Producte der Verticalcolumnen eingesetzt. Sollte die Anzahl der Bedingungsgleichungen gross sein, so wird man die Zahl der Horizontallinien um einige vermehren und zwar nach einer bestimmten Anzahl von Bedingungsgleichungen die Summen der Producte bilden, um durch die später zu erwähnenden Prüfungsgleichungen den Ort eines eventuellen Fehlers zu bestimmen. Nun schreibt man auf den unteren Rand eines Papiere die Logarithmen von $a_1, a_2, a_3 \dots$ und hält dieselben über die a Reihe zum Zwecke der Addition; hierbei wird man wohl ohne Mühe die Addition der Logarithmen von links nach rechts führend, sofort die zugehörige Zahl aus den Logarithmentafeln hinschreiben können; man erlangt so der Reihe nach die Producte $a_1 a_1, a_2 a_2, a_3 a_3 \dots$ die man in die Columnne aa sofort einsetzt; hierauf rückt man den Papierstreifen über die nächste Horizontalreihe, und erhält durch die analogen Operationen $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3 \dots$ und so rückt man bis zur s Reihe herab und findet schliesslich $a_1 s_1, a_2 s_2, a_3 s_3 \dots$; sind so die Partialproducte gebildet, so addirt man die Zahlen einer jeden Verticalcolumnne und sieht nach, ob der Relation (vgl. Gleichung 10) pag. 317)

$$[aa] + [ab] + [ac] \dots + [an] = [as]$$

genügt wird. Zeigt sich eine Differenz und ist man sonst geübt in der Ausführung numerischer Rechnungen, so wird man vorerst den Fehler auf sich beruhen lassen können, da die weiteren Prüfungsgleichungen, wenn man sonst keinen merklichen Fehler begeht, den Ort des Fehlers näher bezeichnen werden; hat man aber nicht die nöthige Sicherheit, so wird es wohl angemessen sein, die einzelnen Horizontalzeilen durch die Relationen

$$\begin{aligned} a_1 a_1 + a_1 b_1 + a_1 c_1 + \dots + a_1 n_1 &= a_1 s_1 \\ a_2 a_2 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + \dots + a_2 n_2 &= a_2 s_2 \\ \dots & \end{aligned}$$

zu prüfen und den Fehler zu ermitteln; ist so die genügende Uebereinstimmung hergestellt, so schreibt man sich auf den unteren Rand eines Papieres die b Coefficienten und hält dieselben vorerst über die Reihe der b Coefficienten, man erhält so der Reihe nach die Producte $b_1 b_1, b_2 b_2$, die sofort in die entsprechende Columnne $b b$ eingetragen werden; nun rückt man den Papierstreifen über die c Coefficienten und erhält so $b_1 c_1, b_2 c_2 \dots$ und rückt so vorwärts, bis man die Reihen der $b s$ Coefficienten berechnet hat, und kann wieder die zweite Gleichung in 10) zur Probe heranziehen; dann behandelt man ähnlich die c Coefficienten und setzt das Verfahren so lange fort, bis man die nn und die ns Reihe gebildet hat, womit die Bildung der Producte vollständig erledigt ist. Die letzteren zwei Productsummen sind zwar für die Bildung der Normalgleichungen nicht erforderlich, sie werden aber später von Nutzen sein.

Verschiebt man die Bildung der Prüfungsrechnung 10) bis zum Schluss der Rechnung, ein Verfahren, welches nur einem sehr geübten Rechner empfohlen werden kann, so wird sich leicht der Ort des Fehlers entdecken lassen; denn jede Summe ist, mit Ausnahme der quadratischen Summen, in den Prüfungsgleichungen zweimal vertreten, stimmen alle zwei Summenprüfungen nicht, so ist der Fehler in der beiden Prüfungsgleichungen gemeinsamen Summe enthalten; stimmt nur eine Gleichung nicht, so ist der Fehler in der quadratischen Summe dieser Prüfungsgleichung enthalten.

Es dürfte angemessen sein, das obige Verfahren durch ein ausführliches Beispiel zu erläutern, und ich entlehne das Beispiel der in diesem Buche durchgeführten Ermittlung der Erato-Elemente, für welche neun Normalorte als Grundlage gewählt haben. Es werden die Verbesserungen der Elemente $L', \mu, \Phi, \Psi, \Omega'$ und i' gesucht; die Ausgangs-Elemente selbst lassen die in der ersten Verticalcolumnne aufgeführten Fehler übrig; die Bedingungsgleichungen, deren Entstehung in dem Abschnitte über Bahnverbesserung ausführlich erläutert wird, stellen sich wie folgt, wobei die ersten neun Gleichungen den Rectascensionen, die letzteren neun Gleichungen den Declinationen angehören (die Coefficienten der Unbekannten sind logarithmisch angesetzt):

1) $-37''.05 = 0.30905 \delta L' + 4.02489 \delta \mu + 0.55422 \delta \Phi + 9.84755 \delta \Psi + 9.49648 \sin i' \delta \Omega' + 7.52654 \delta i'$					
2) $-12.73 = 0.19343$	3.86719	0.06517	0.45225	9.26378	9.41113
3) $+10.29 = 9.98284$	3.61616	0.33255	9.07498	9.42941	8.56894
4) $-9.87 = 0.29157$	3.36846	0.55121	8.23311	9.47252	9.02028
5) $-0.05 = 0.24141$	3.09724	9.89428	0.50920	9.39733	9.16190
6) $+22.28 = 9.99830$	2.43954	0.34646	8.80219	9.43667	8.22679
7) $+27.09 = 9.99289$	2.14609	0.04135	0.29030	8.82060	9.42796
8) $+17.07 = 0.16524$	2.92722	0.27582	0.35475	9.20162	9.40554
9) $+1.69 = 0.33893$	3.36051	0.39441	0.47186	7.90340	9.53201

10)	— 13.43 = 9.91933 $\delta L'$	+ 3 _n 63584 $\delta \mu$	+ 0 _n 16726 $\delta \phi$	+ 9.40052 $\delta \psi$	+ 0 _n 20387 $\sin i' \delta \varpi'$	+ 7 _n 91601 $\delta i'$
11)	+ 3.39 = 9 _n 47080	3.14361	9 _n 37231	9 _n 72809	9.73292	0 12685
12)	— 5.19 = 9 _n 59488	3.22932	9 _n 94427	8.48426	0.13569	8 _n 95724
13)	— 7.56 = 9.89620	2 _n 97590	0 _n 15707	8 _n 41814	0 _n 19554	9 _n 41379
14)	— 0.64 = 9 _n 24551	2.09786	8 _n 92589	9 _n 51281	9.67384	0.15635
15)	— 8.24 = 9 _n 61165	2.06824	9 _n 95831	8 _n 63121	0.14366	8 61533
16)	— 7.35 = 9 _n 38470	1 _n 48233	9 _n 45701	9.67595	9 93704	0 _n 03399
17)	+ 4.13 = 9.45671	2.22118	9 _n 57067	9 _n 64269	9 _n 84854	0 _n 11500
18)	— 1.30 = 9.80366	2.82036	9 _n 87793	9.92280	0 _n 03453	0.06537

Vor Allem hat man nun die Gleichungen gleichwerthig zu machen und hat dieselben zu diesem Ende (vergl. § 1 pag. 314 mit den Quadratwurzeln der Gewichte durchzumultipliciren; in diesem Falle kann aber das sonst nöthige Hinschreiben der gleichwerthigen Gleichungen umgangen werden, da alle Normalorte das Gewicht 1 erhalten mit Ausnahme des dritten Ortes, dem das Gewicht $\frac{1}{12}$ zugeschrieben werden soll; ich denke mir daher die Gleichungen 3) und 12) mit $\frac{1}{12}$ durchmultiplicirt. Dem Gleichungssystem 11) (pag. 318) entsprechend setze ich, um die Coëfficienten möglichst homogen zu machen (die Coëfficienten logarithmisch):

$$\begin{aligned} x &= 0.33893 \delta L' \\ y &= 4.02489 \delta \mu \\ z &= 0.55422 \delta \phi \\ t &= 0.50920 \delta \psi \\ u &= 0.20387 \delta \varpi' \sin i' \\ v &= 0.15635 \delta i' \\ r &= 37''05 . \end{aligned}$$

und erhalte so (vergl. pag. 319) das folgende Werthtableau, in welchem alle Werthe logarithmisch auf vier Stellen, was genügend ist, angesetzt sind und wobei s durch die Summation aller Coëfficienten derselben Verticalreihe 9) (pag. 317) erhalten wurde:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
log Coëff. v. x	9.9701	9.8515	9.4934	9.9526	9.9024	9.6594	9.6540	9.8263	0.0000
» » » y	0 _n 0000	9 _n 8423	9 _n 4408	9 _n 3436	9 _n 0723	8 _n 4146	8.1212	8.9023	9.3356
» » » z	0 _n 0000	9.5109	9.6278	9 _n 9970	9.3400	9.7922	9.4871	9 _n 7216	9 _n 8402
» » » t	9.3383	9.9430	8 _n 4153	7.7239	0.0000	8.2930	9 _n 7811	9 _n 8455	9.9627
» » » u	9.2926	9 _n 0599	9.0750	9.2686	9 _n 1935	9.2328	8 _n 6167	8 _n 9977	7 _n 6995
» » » v	7.3702	9.2548	8 _n 2621	8.8639	9.0055	8.0704	9 _n 2716	9.2492	9 _n 3757
log n	0 _n 0000	9 _n 5360	9.2931	9 _n 4255	7 _n 1302	9.7791	9.8640	9.6634	8.6717
log s	0 _n 2176	9.9743	9.8638	9 _n 5046	0.2656	0.2681	9.8260	8.7889	0.0957

	10	11	12	13	14	15	16	17	18
log Coëff. v. x	9.5804	9 _n 1319	9 _n 1054	9.5573	8 _n 9066	9 _n 2727	9 _n 0458	9.1178	9.4617
" " y	9 _n 6109	9.1187	9.0539	8 _n 9510	8.0730	8.0433	7 _n 4574	8.1963	8.7955
" " z	9 _n 6130	8 _n 8181	9 _n 2395	9 _n 6028	8 _n 3717	9 _n 4041	8 _n 9028	9 _n 0164	9 _n 3237
" " t	8.8913	9 _n 2189	7.8246	7 _n 9089	9 _n 0036	8 _n 1220	9.1667	9 _n 1335	9.1136
" " u	0 _n 0000	9.5290	9.7813	9 _n 9917	9.4700	9.9398	9.7332	9 _n 6447	9 _n 8307
" " w	7 _n 7597	9.9705	8 _n 6504	9 _n 2574	0.0000	8.4590	9 _n 8776	9 _n 9586	9.9090
log n	9 _n 5593	8.9614	8 _n 9959	9 _n 3097	8 _n 2374	9 _n 3471	9 _n 2975	9.0471	8 _n 5451
log s	0 _n 2375	0.0526	9.4462	0 _n 1770	0.0353	9.3688	9 _n 6617	0 _n 1245	9.6999

Es wurden nun 12 pag. 319 entsprechend 35 Verticalcolumnen vorbereitet; da aber die Anzahl der Gleichungen eine bedeutende, wurde die Summe der ersten und letzten neun Horizontalzeilen gebildet und diese stets der Prüfungsgleichung unterzogen, man hatte dann:

	aa	ab	ac	ad	ae	af	an	as	bb	bc	bd	be
1	+0.8714	-0.9335	-0.9335	+0.2034	+0.1831	+0.0022	0.9335	-1.5407	+1.0000	+1.0000	-0.2179	-0.1961
2	+0.5117	-0.4975	+0.2319	+0.6273	-0.0821	+0.1287	-0.2458	+0.6742	+0.4838	-0.2255	-0.6100	+0.0798
3	+0.0970	-0.0859	+0.1322	-0.0081	+0.0370	-0.0057	+0.0612	+0.2276	+0.0761	-0.1171	+0.0072	-0.0328
4	+0.8038	-0.1978	0.8904	+0.0047	+0.1664	+0.0655	-0.2388	-0.2865	+0.0487	+0.2191	-0.0012	0.0409
5	+0.6380	-0.0943	+0.1748	+0.7988	-0.1247	+0.0809	-0.0011	+1.4723	+0.0140	-0.0258	-0.1181	+0.0184
6	+0.2083	-0.0119	+0.2829	+0.0090	+0.0780	+0.0054	+0.2745	+0.8462	+0.0007	-0.0161	-0.0005	-0.0044
7	+0.2032	+0.0060	+0.1384	-0.2723	+0.0187	+0.0843	+0.3296	+0.3020	+0.0002	+0.0041	-0.0080	-0.0005
8	+0.4494	+0.0535	-0.3531	-0.4697	-0.0667	+0.1190	+0.3088	+0.0412	+0.0064	-0.0421	-0.0559	-0.0079
9	+1.0000	+0.2165	-0.6922	+0.9178	-0.0050	-0.2375	+0.0470	+1.2466	+0.0469	-0.1499	+0.1987	-0.0011
Σ	+4.7828	-1.5449	-1.9090	+1.8109	+0.1673	+0.0742	-0.3981	+2.9829	+1.6768	+0.6467	-0.8057	-0.1855
10	+0.1448	-0.1554	-0.1561	+0.0296	-0.3805	-0.0022	-0.1379	-0.6575	+0.1667	+0.1675	-0.0318	+0.4082
11	+0.0184	-0.0178	+0.0089	+0.0224	-0.0458	-0.1266	-0.0124	-0.1529	+0.0173	-0.0086	-0.0218	-0.0444
12	+0.0162	-0.0144	+0.0221	-0.0009	-0.0770	+0.0057	+0.0126	-0.0356	+0.0128	-0.0196	+0.0008	+0.0684
13	+0.1302	-0.0322	-0.1446	-0.0029	-0.3540	-0.0653	-0.0736	-0.5424	+0.0080	+0.0358	+0.0007	+0.0876
14	+0.0065	-0.0010	+0.0019	+0.0081	-0.0238	-0.0806	+0.0014	-0.0875	+0.0001	-0.0003	-0.0012	+0.0035
15	+0.0351	-0.0021	+0.0475	+0.0025	-0.1631	-0.0054	+0.0417	-0.0438	+0.0001	-0.0028	-0.0001	+0.0096
16	+0.0123	+0.0003	+0.0089	-0.0163	-0.0601	+0.0838	+0.0220	+0.0510	0.0000	+0.0002	-0.0004	-0.0016
17	+0.0172	+0.0021	-0.0136	-0.0178	-0.0579	-0.1192	+0.0146	-0.1747	+0.0002	-0.0016	-0.0021	-0.0069
18	+0.0850	+0.0182	-0.0614	+0.0756	-0.1974	+0.2364	-0.0102	+0.1461	+0.0039	-0.0132	+0.0162	-0.0423
Σ	+0.4657	-0.2023	-0.2864	+0.1003	-1.3596	-0.0734	-0.1418	-1.4973	+0.2091	+0.1574	-0.0397	+0.5709
	bf	bn	bs	ce	cd	ce	cf	cn	cs	dd	de	df
1	-0.0023	+1.0000	+1.6504	+1.0000	-0.2179	-0.1961	-0.0023	+1.0000	+1.6504	+0.0475	+0.0427	+0.0005
2	-0.1251	+0.2389	-0.6556	+0.1051	+0.2844	-0.0372	-0.0583	-0.1115	+0.3056	+0.7692	-0.1007	+0.1577
3	+0.0050	-0.0542	-0.2016	+0.1801	-0.0110	-0.0504	-0.0078	+0.0833	+0.3101	+0.0007	-0.0031	+0.0005
4	-0.0161	+0.0588	+0.0705	+0.9862	-0.0053	-0.1843	-0.0726	+0.2646	+0.3174	0.0000	+0.0010	+0.0004
5	0.0120	+0.0002	-0.2177	+0.0479	+0.2188	-0.0342	+0.0222	-0.0003	+0.4033	+1.0000	-0.1561	+0.1013
6	0.0003	-0.0156	-0.0482	+0.3841	+0.0122	+0.1059	+0.0073	+0.3727	+1.1489	+0.0004	+0.0034	+0.0002
7	-0.0025	+0.0097	+0.0089	+0.0942	0.1854	-0.0127	-0.0574	+0.2244	+0.2056	+0.3649	+0.0250	+0.1129
8	+0.0142	+0.0368	+0.0049	-0.2775	+0.3691	+0.0524	-0.0935	-0.2427	-0.0324	+0.4909	+0.0697	-0.1244
9	-0.0514	+0.0102	+0.2099	+0.4791	-0.6351	+0.0035	+0.1644	-0.0325	-0.8628	+0.8422	-0.0046	-0.2178
Σ	-0.1905	+1.2818	+0.8815	+3.5542	-0.1702	-0.2523	+0.0186	+1.5580	+3.4461	+3.5158	-0.1227	+0.0313
10	+0.0023	+0.1480	+0.7053	+0.1683	-0.0319	+0.4102	+0.0024	+0.1487	+0.7088	+0.0061	-0.0779	-0.0004
11	+0.1228	+0.0120	+0.1183	+0.0043	+0.0109	-0.0222	-0.0615	-0.0060	-0.0742	+0.0274	-0.0560	-0.1547
12	-0.0051	-0.0112	+0.0316	+0.0371	-0.0012	-0.1049	+0.0078	+0.0172	-0.0485	0.0000	+0.0040	-0.0003
13	+0.0162	-0.0182	+0.1343	+0.1006	+0.0032	+0.3931	+0.0725	+0.0817	+0.6023	+0.0001	+0.0080	+0.0015
14	+0.0118	-0.0002	+0.0128	-0.0006	+0.0024	0.0069	-0.0235	+0.0004	-0.0255	+0.0102	-0.0298	-0.1008
15	+0.0003	-0.0025	+0.0026	+0.0643	+0.0034	-0.2207	-0.0073	+0.0564	-0.0593	+0.0002	-0.0115	-0.0004
16	+0.0022	+0.0006	+0.0013	+0.0064	-0.0117	-0.0432	+0.0603	+0.0159	+0.0367	+0.0215	+0.0794	-0.1107
17	-0.0143	+0.0018	-0.0209	+0.0108	+0.0141	+0.0458	-0.0944	-0.0116	+0.1383	+0.0185	+0.0600	+0.1236
18	+0.0506	-0.0022	+0.0313	+0.0444	-0.0546	+0.1427	-0.1709	+0.0074	-0.1056	+0.0672	-0.1755	+0.2102
Σ	+0.1868	+0.1645	+1.0466	+0.4898	-0.0654	+0.5939	-0.0258	+0.3101	+1.1730	+0.1512	-0.1993	-0.0320

	dn	ds	ce	cf	en	es	ff	fn	fs	nn	ns
1	-0.2179	-0.3597	+0.0385	+0.0005	-0.1961	-0.3238	0.0000	-0.0023	-0.0039	+1.0000	+1.6504
2	-0.3013	+0.8266	+0.0132	-0.0206	+0.0394	-0.1082	+0.0323	-0.0618	+0.1695	+0.1180	-0.3238
3	-0.0051	-0.0190	+0.0141	-0.0022	+0.0233	+0.0869	+0.0003	-0.0036	-0.0134	+0.0386	+0.1435
4	-0.0014	-0.0017	+0.0344	+0.0136	-0.0494	-0.0593	+0.0053	-0.0195	-0.0234	+0.0710	+0.0851
5	-0.0013	+1.8433	+0.0244	-0.0158	+0.0002	-0.2878	+0.0103	-0.0001	+0.1867	0.0000	-0.0025
6	+0.0118	+0.0364	+0.0292	+0.0020	+0.1028	+0.3169	+0.0001	+0.0071	+0.0218	+0.3616	+1.1149
7	-0.4417	-0.4046	+0.0017	+0.0077	-0.0302	-0.0277	+0.0349	-0.1367	-0.1252	+0.5346	+0.4898
8	-0.3228	-0.0431	+0.0099	-0.0177	-0.0458	-0.0061	+0.0315	+0.0818	+0.0109	+0.2122	+0.0283
9	+0.0431	+1.1439	0.0000	+0.0012	-0.0002	-0.0062	+0.0564	-0.0112	-0.2961	+0.0022	+0.0585
Σ	-1.2366	+3.0221	+0.1654	-0.0313	-0.1560	-0.4153	+0.1711	-0.1463	-0.0731	+2.3382	+3.2442
10	-0.0282	-0.1345	+1.0000	+0.0057	+0.3625	+1.7280	0.0000	+0.0021	+0.0099	+0.1314	+0.6263
11	-0.0151	-0.1869	+0.1143	+0.3159	+0.0309	+0.3816	+0.8730	+0.0855	+1.0546	+0.0084	+0.1033
12	-0.0007	+0.0019	+0.3652	-0.0270	-0.0599	+0.1688	+0.0020	+0.0044	-0.0125	+0.0098	-0.0277
13	+0.0017	+0.0122	+0.9625	+0.1775	+0.2002	+1.4747	+0.0327	+0.0369	+0.2719	+0.0416	+0.3067
14	+0.0017	-0.1094	+0.0871	+0.2951	-0.0051	+0.3201	+1.0000	-0.0173	+1.0847	+0.0003	-0.0187
15	+0.0029	-0.0031	+0.7578	+0.0250	-0.1936	+0.2035	+0.0008	-0.0064	+0.0067	+0.0495	-0.0520
16	-0.0291	-0.0674	+0.2927	-0.4081	-0.1073	-0.2482	+0.5691	+0.1497	+0.3462	+0.0394	+0.0910
17	-0.0152	+0.1811	+0.1947	+0.4012	-0.0492	+0.5877	-0.8264	-0.1013	+1.2108	+0.0124	-0.1484
18	-0.0091	+0.1299	+0.4586	-0.5491	+0.0238	-0.3393	+0.6577	-0.0285	+0.4064	+0.0012	-0.0176
Σ	-0.0911	-0.1762	+4.2329	+0.2362	+0.2023	+4.2769	+3.9617	+0.1251	+4.3787	+0.2940	+0.8629

Bildet man nun, den Prüfungsgleichungen 10) (pag. 317) gemäss, die Proben, so erhält man:

	1—9		10—18	
	Summe	direct. Werth	Summe	direct. Werth
$[as]$	+ 2.9832	+ 2.9820	- 1.4975	- 1.4973
$[bs]$	+ 0.8817	+ 0.8815	+ 1.0467	+ 1.0460
$[cs]$	+ 3.4460	+ 3.4461	+ 1.1736	+ 1.1730
$[ds]$	+ 3.0228	+ 3.0221	- 0.1760	- 0.1762
$[es]$	- 0.4151	- 0.4153	+ 4.2773	+ 4.2760
$[fs]$	- 0.0729	- 0.0731	+ 1.3786	+ 1.3787
$[ns]$	+ 3.2440	+ 3.2442	+ 0.8631	+ 0.8620

so dass eine für die vierstellige Rechnung völlig befriedigende Uebereinstimmung zu Tage tritt: vereinigt man die zwei zusammengehörigen Partialsummen, so erhält man für die Normalgleichungen die folgenden Coefficienten:

$$\begin{aligned}
 [aa] &= +5.2485, [bb] = +1.8859, [cc] = +4.0410, [dd] = +3.6670, [ee] = +4.3983 \\
 [ab] &= -1.7472, [bc] = +0.8041, [cd] = -0.2356, [de] = -0.3220, [ef] = +0.2049 \\
 [ac] &= -2.1954, [bd] = -0.8454, [ce] = +0.3416, [df] = -0.0007, [en] = +0.0463 \\
 [ad] &= +1.9112, [be] = +0.3854, [cf] = -0.0072, [dn] = -1.3277, [ff] = +4.1328 \\
 [ae] &= -1.1923, [bf] = -0.0037, [cn] = +1.8681, [fn] = -0.0212 \\
 [af] &= +0.0008, [bn] = +1.4493, \\
 [an] &= -0.5399.
 \end{aligned}$$

und überdiess ist die Summe der auftretenden Fehlerquadrate:

$$[nn] = +2.6322.$$

von welcher Summe später Gebrauch gemacht wird.

Etwas abgeändert wird man die Bildung der Normalgleichungen vornehmen müssen, wenn man nach Bessel's Vorgange Quadrattafeln zur Herstellung derselben anwenden will; die Anwendung dieser letzteren bietet nach meinen eigenen Erfahrungen über diesen Gegenstand so wesentliche Vorzüge vor dem zuerst auseinandergesetzten Verfahren, dass ich nicht anstehe, dasselbe als besonders zweckmässig zu empfehlen; einer der wesentlichsten Vortheile ist darin zu suchen, dass das Zeichen der Producte nicht in Betracht kommt, sondern durchaus positive Werthe in das Product-Schema einzutragen sind; es ist hierdurch eine wesentliche Fehlerquelle vermieden, die selbst dem geübtesten Rechner gefährlich ist, nämlich die Zeichenfehler; ausserdem ist die Anzahl der zu bildenden Verticalcolumnen wesentlich vermindert; die Verminderung beträgt μ Columnen, wenn μ die Anzahl der Unbekannten vorstellt. Um aber das Bessel'sche Verfahren mit Vortheil anwenden zu können, ist es erwünscht, bequem eingerichtete Quadrattafeln zu besitzen; ich habe deshalb als Tafel XV eine solche Tafel eingefügt, die innerhalb der Grenzen 0—2 die Quadrate für jeden Hunderttheil des Argumentes auf vier Stellen angibt, eine für die vorliegenden Zwecke meist ausreichende Genauigkeitsgrenze.

Die Grenzen dieser Tafel werden niemals bei der Bildung der Producte der Coëfficienten überschritten werden, wenn man nur die Coëfficienten durch entsprechende Abänderung der Unbekannten nach den in diesem Abschnitte bereits empfohlenen Regeln homogen macht; nur die Prüfungscoefficienten s , (von denen man für die folgenden Prüfungsgleichungen nur die Quadrate benützt) können hiervon eine Ausnahme machen; man wird sich aber hierbei erinnern, dass identisch ist:

$$s^2 = 2as - a^2 + (s - a)^2,$$

wo für α jene ganze Zahl zu wählen sein wird, die $s - \alpha$ kleiner als 2 macht und wobei natürlich das Zeichen von s stets positiv gedacht wird. Mit dieser Formel wird man leicht die die Grenzen dieser Quadrattafel ausnahmsweise überschreitenden Coefficienten berechnen können.

Um mit Hilfe einer Quadrattafel ein Product zu berechnen, erinnere man sich dass offenbar ist:

$$a \ b = \frac{1}{2} \{ (a + b)^2 - a^2 - b^2 \} ;$$

es ist also:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \ b_1 &= \frac{1}{2} \{ (a_1 + b_1)^2 - a_1^2 - b_1^2 \} \\ a_2 \ b_2 &= \frac{1}{2} \{ (a_2 + b_2)^2 - a_2^2 - b_2^2 \} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad 13$$

demnach auch mit Benutzung des symbolischen Summenzeichen:

$$|ab| = \frac{1}{2} \{ [(a+b)^2] - |aa| - |bb| \}.$$

Man bedarf daher, wenn man die in den Normalgleichungen auftretenden Coefficienten und ausserdem $[n\ n]$ bilden will, der folgenden Quadratsummen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 aa & , & [(a+b)^2] & , & [(a+c)^2] & , & \dots [(a+n)^2] \\
 & & [bb] & , & [(b+c)^2] & , & \dots [(b+n)^2] \\
 & & & & [cc] & & \dots [(c+n)^2] \\
 & & & & & & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & & & & & & [nn]
 \end{array}$$

und es stellt sich die Aufgabe, dieselben in zweckmässiger Weise zu bilden und das Resultat der Rechnung zu prüfen. Vor Allem wird man wieder vor Beginn der Rechnung jede der Bedingungsgleichungen mit der Quadratwurzel des zugehörigen Gewichtes durchmultiplizieren und die Coëfficienten der Unbekannten möglichst homogen machen (vergl. pag. 318); ich setze deshalb voraus, dass die Unbekannten und die Fehlereinheit so gewählt sind, dass der grösste auftretende Coëfficient einer jeden der Unbekannten und der grösste Fehler der Einheit gleich ist. Hiermit bildet man ähnlich wie oben die Summen:

$$\left. \begin{array}{l}
 s_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \dots + n_1 \\
 s_2 = a_2 + b_2 + c_2 + \dots + n_2 \\
 s_3 = a_3 + b_3 + c_3 + \dots + n_3 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array} \right\} \quad 14$$

und stellt sich das folgende dem früher benützten analoge Schema zusammen, in welchem aber statt der Logarithmen die Zahlen selbst Aufnahme finden:

Nummer der Bedingungsgleichung	1	2	3	...
Coëfficient von x	a_1	a_2	a_3	...
» » y	b_1	b_2	b_3	...
» » z	c_1	c_2	c_3	...
» » »
Fehler	n_1	n_2	n_3	...
Summe	s_1	s_2	s_3	...

Hierauf bilde man sich wieder ein Schema mit

$$\frac{\mu+1}{1} \frac{(\mu+2)}{2} + 1$$

Verticalcolumnen, wobei μ die Anzahl der Unbekannten vorstellt; jede Verticalcolumnne erhält drei Zeilen mehr als die Anzahl der Unbekannten ist; die erste Zeile dient zur bezeichnenden Ueberschrift, die vorletzte für die Summe der Werthe, in die letzte Zeile wird bei den nicht quadratischen Gliedern, die Summe der Quadrate der Einzelglieder angesetzt, also unter $[(a+b)^2]$ kommt $[aa] + [bb]$, unter $[(a+c)^2]$ die Summe $[aa] + [cc]$ u. s. w., welcher Zusatz sich leicht erklärt, wenn man die Bildung der Productsummen $[ab]$, $[ac]$ u. s. w. sich vergegenwärtigt. Vorerst bildet man die Quadrate aller Coëfficienten, dann schreibt man sich die a Coëfficienten auf den unteren Rand eines Papiers, hält dieselben über die b Reihe,

und indem man beide Coëfficienten mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen addirt, erhält man das nunmehr vom Zeichen unabhängige Argument für die Quadrattafel und bildet so die $(a+b)^2$ Reihe; nun rückt man um eine Zeile tiefer und erhält die $(a+c)^2$ Reihe u. s. f. bis zum Schlusse, dann beginnt man mit den b Coëfficienten dieselbe Operation, indem man zuerst die $(b+c)^2$ Reihe ableitet u. s. f. Das sich so bildende Schema wird also das folgende sein:

	aa	bb	cc	ss	$(a+b)^2$	$(a+c)^2$	$(a+n)^2$	$(b+c)^2$
1	$a_1 a_1$	$b_1 b_1$	$c_1 c_1$	$s_1 s_1$	$(a_1+b_1)^2$	$(a_1+c_1)^2$	$(a_1+n_1)^2$	$(b_1+c_1)^2$
2	$a_2 a_2$	$b_2 b_2$	$c_2 c_2$	$s_2 s_2$	$(a_2+b_2)^2$	$(a_2+c_2)^2$	$(a_2+n_2)^2$	$(b_2+c_2)^2$
3	$a_3 a_3$	$b_3 b_3$	$c_3 c_3$	$s_3 s_3$	$(a_3+b_3)^2$	$(a_3+c_3)^2$	$(a_3+n_3)^2$	$(b_3+c_3)^2$
.
.
aa						$(a+b)^2$	$(a+c)^2$	$(a+n)^2$	$(b+c)^2$
						$aa+bb$	$aa+cc$	$aa+nn$	$bb+cc$

Um sich von der Richtigkeit der Rechnung zu überzeugen, quadriert man die Gleichungen 14) (pag. 325.) addirt dieselben und denkt sich die Producte nach 13) (pag. 324) zerlegt, so resultiren leicht die folgenden Prüfungsgleichungen, in welchen wieder durch μ die Anzahl der Unbekannten dargestellt wird:

$$\left. \begin{aligned}
 [ss] + (\mu-1) \{ [aa] + [bb] + [cc] + \dots + [\mu n] = \\
 = [(a+b)^2 + [(a+c)^2 + [(a+d)^2 + \dots + [(a+n)^2 \\
 + [(b+c)^2 + [(b+d)^2 + \dots + [(b+n)^2 \\
 + [(c+d)^2 + \dots + [(c+n)^2] \\
 + \dots \\
 + \dots
 \end{aligned} \right\} \quad 15)$$

d. h. die Summe ss vermindert um die $(\mu-1)$ fache Summe der Quadrate der quadratischen Coëfficienten ist gleich der Summe der Quadrate der übrigen Coëfficienten. Lässt diese Prüfung Fehler vermuthen, so wird die Anwendung dieser Formel auf die einzelnen Glieder den Ort des Fehlers entdecken lassen, denn es ist ja allgemein:

$$\begin{aligned}
 s_i s_i + (\mu-1) \{ a_i a_i + b_i b_i + c_i c_i + \dots + n_i n_i \} = \\
 = (a_i+b_i)^2 + (a_i+c_i)^2 + (a_i+d_i)^2 + \dots + (a_i+n_i)^2 \\
 + (b_i+c_i)^2 + (b_i+d_i)^2 + \dots + (b_i+n_i)^2 \\
 + (c_i+d_i)^2 + \dots + (c_i+n_i)^2 \\
 + \dots
 \end{aligned}$$

Hat man sich so eine sichere Prüfung der Richtigkeit der berechneten Grössen verschafft, so bildet man die für die Normalgleichungen nöthigen Formen durch

$$[\alpha \beta] = \frac{1}{2} \{ [(a+\beta)^2] - [a\alpha] - [\beta\beta] \} \quad 16.$$

es wird also z. B. sein:

$$[ab] = \frac{1}{2} \{ (a+b)^2 - [aa] - [bb] \}$$

$$[ac] = \frac{1}{2} \{ (a+c)^2 - [aa] - [cc] \}$$

u. s. w. .

welche Operation durch die Angaben in der letzten Zeile einer jeden Verticalcolumnne sehr sicher durchgeführt wird, und man erhält so leicht alle die für die Normalgleichungen nöthigen Coëfficienten; dass man sich in dieser letzteren Operation keinen Fehler hat zu Schulden kommen lassen, prüft man leicht durch die folgende, ohne Schwierigkeit zu verificirende Relation; es ist nämlich, wenn man setzt:

$$\left. \begin{aligned} S = \{ & [ab] + [ac] + [ad] + \dots + [an] \\ & + [bc] + [bd] + \dots + [bn] \\ & + [cd] + \dots + [cn] \\ & \dots \dots \dots \} \end{aligned} \right\} 17$$

$$2 S = ss - \{ [aa] + [bb] + [cc] + \dots + [nn] \}$$

womit demnach der letzte Schritt in der Bildung der Normalgleichungen geprüft erscheint.

Die für den Kometen I 1866 im Beispiele des letzten Abschnittes gebildeten homogen gemachten Differentialquotienten finden sich nach dem obigen Schema (pag. 326) zusammengestellt, wenn man die Summe der Coëfficienten mit s bezeichnet, wie folgt:

Rectascensionen.

	1	2	3	4	5	6	7
a	+ 1.0000	+ 0.7834	+ 0.3711	+ 0.2530	+ 0.1661	+ 0.1014	+ 0.0239
b	+ 0.9856	+ 0.5986	+ 0.3210	+ 0.2509	+ 0.2012	+ 0.1650	+ 0.1228
c	+ 0.5987	+ 0.1417	0.0226	— 0.0530	— 0.0721	— 0.0847	— 0.0982
d	+ 1.0000	+ 0.5704	+ 0.2754	+ 0.2077	+ 0.1648	+ 0.1390	+ 0.1188
e	— 0.3398	— 0.0237	+ 0.0485	+ 0.0573	+ 0.0615	+ 0.0631	+ 0.0620
f	— 0.0868	+ 0.0716	+ 0.0265	+ 0.0066	— 0.0095	— 0.0220	— 0.0357
n	— 0.4440	+ 1.0000	— 0.0505	— 0.2242	— 0.1275	— 0.4748	+ 0.1407
s	+ 2.7137	+ 3.1420	+ 0.9694	+ 0.4983	+ 0.3845	— 0.1130	+ 0.3343

Declinationen.

	8	9	10	11	12	13	14
a	— 0.0313	— 0.8942	— 0.5136	— 0.3819	— 0.2546	— 0.1567	— 0.0371
b	— 0.8798	— 1.0000	— 0.6679	— 0.5697	— 0.5000	— 0.4499	— 0.3927
c	— 1.0000	— 0.5280	— 0.1953	— 0.1407	— 0.1108	— 0.0942	— 0.0805
d	— 0.0815	+ 0.0451	+ 0.0970	+ 0.0907	+ 0.0827	+ 0.0763	+ 0.0703
e	+ 1.0000	+ 0.5371	+ 0.1997	+ 0.1388	+ 0.1032	+ 0.0815	+ 0.0603
f	+ 1.0000	+ 0.4154	+ 0.0721	+ 0.0146	— 0.0179	— 0.0369	— 0.0530
n	+ 0.1670	+ 0.4989	— 0.1846	+ 0.3077	— 0.4483	— 0.0132	+ 0.1275
s	+ 0.1744	— 0.9257	— 1.2226	— 0.5405	— 1.1457	— 0.5931	— 0.3052

Die Bildung der Quadrate nach dem auf pag. 326 gegebenen Schema unter Benutzung der Tafel XV ergibt:

Nr.	aa	bb	cc	dd	ee	ff	nn	ss	$(a+b)^2$	$(a+c)^2$	$a+d^2$	$a+e^2$	$(a+f)^2$	$(a+n)^2$	$(b+c)^2$
1	1.0000	0.9714	0.3584	1.0000	0.1155	0.0076	0.1971	7.3642	3.9426	2.5558	4.0000	0.4359	0.8340	0.3091	2.5100
1	0.6137	0.3583	0.0201	0.3253	0.0006	0.0051	1.0000	9.8722	1.9099	0.8558	1.8328	0.5771	0.7310	3.1805	0.5480
3	0.1377	0.1030	0.0005	0.0758	0.0023	0.0007	0.0025	0.9398	0.4790	0.1214	0.4179	0.1761	0.1581	0.1028	0.0890
4	0.0640	0.0629	0.0028	0.0431	0.0033	0.0000	0.0503	0.2483	0.2539	0.0400	0.2122	0.0963	0.0674	0.0008	0.0392
5	0.0276	0.0405	0.0052	0.0271	0.0037	0.0001	0.0162	0.1478	0.1349	0.0088	0.1095	0.0518	0.0245	0.0015	0.0166
6	0.0103	0.0272	0.0072	0.0193	0.0040	0.0005	0.2254	0.0128	0.0710	0.0003	0.0578	0.0270	0.0063	0.1394	0.0065
7	0.0006	0.0151	0.0096	0.0141	0.0038	0.0013	0.0198	0.1118	0.0215	0.0055	0.0203	0.0074	0.0001	0.0271	0.0006
8	0.0010	0.7740	1.0000	0.0066	1.0000	1.0000	0.0279	0.0304	0.8301	1.0636	0.0127	0.9384	0.9384	0.0184	3.5336
6	0.7996	1.0000	0.2788	0.0020	0.2885	0.1726	0.2489	0.8569	3.5880	2.0227	0.7210	0.1275	0.2292	0.1562	2.3348
10	0.2955	0.4461	0.0381	0.0094	0.0399	0.0052	0.0341	1.4947	1.4677	0.5459	0.1994	0.1182	0.2223	0.5303	0.7451
11	0.1458	0.3246	0.0198	0.0082	0.0192	0.0002	0.0947	0.2921	0.9055	0.2731	0.0848	0.0590	0.1349	0.0055	0.5047
12	0.0648	0.2500	0.0123	0.0068	0.0106	0.0003	0.2010	1.3126	0.5694	0.1335	0.0296	0.0229	0.0742	0.4941	0.3731
13	0.0245	0.2024	0.0088	0.0058	0.0066	0.0014	0.0002	0.3517	0.3679	0.0629	0.0065	0.0056	0.0374	0.0289	0.2960
14	0.0014	0.1542	0.0065	0.0049	0.0036	0.0028	0.0162	0.0931	0.1847	0.0138	0.0011	0.0005	0.0081	0.0082	0.2239
	3.1865	4.7297	1.7681	1.5484	1.5016	1.1978	2.1343	23.1284	14.7261	7.7031	7.7056	2.6437	3.4659	5.0028	11.2211
									7.9162	4.9546	4.7349	4.6881	4.3843	5.3208	6.4978

Nr.	$b+d^2$	$(b+e)^2$	$(b+f)^2$	$(b+n)^2$	$c+d^2$	$(c+e)^2$	$(c+f)^2$	$(c+n)^2$	$(d+e)^2$	$d+f^2$	$d+n^2$	$(e+f)^2$	$(e+n)^2$	$(f+n)^2$
1	3.9426	0.4170	0.8078	0.2934	2.5558	0.0670	0.2620	0.0239	0.4359	0.8340	0.3091	0.1820	0.6144	0.2818
2	1.3666	0.3305	0.4492	2.5555	0.5070	0.0139	0.0455	1.3035	0.2989	0.4122	2.4661	0.0023	0.9532	1.1483
3	0.3557	0.1365	0.1207	0.0731	0.0639	0.0007	0.0000	0.0053	0.1049	0.0911	0.0506	0.0056	0.0000	0.0006
4	0.2103	0.0950	0.0663	0.0007	0.0239	0.0000	0.0021	0.0768	0.0702	0.0459	0.0003	0.0041	0.0279	0.0473
5	0.1340	0.0690	0.0368	0.0054	0.0086	0.0001	0.0067	0.0398	0.0512	0.0241	0.0014	0.0027	0.0044	0.0188
6	0.0924	0.0520	0.0204	0.0960	0.0029	0.0005	0.0113	0.3130	0.0408	0.0137	0.1128	0.0017	0.1695	0.2468
7	0.0584	0.0341	0.0076	0.0694	0.0004	0.0013	0.0180	0.0018	0.0327	0.0069	0.0673	0.0007	0.0411	0.0110
8	0.9241	0.0144	0.0144	0.5081	1.1696	0.0000	0.0000	0.6939	0.8436	0.8436	0.0073	4.0000	1.3619	1.3619
9	0.9118	0.2143	0.3418	0.2511	0.2332	0.0001	0.0127	0.0008	0.3389	0.2120	0.2959	0.9072	1.0733	0.8359
10	0.3259	0.2192	0.3550	0.7267	0.0097	0.0000	0.0152	0.1443	0.0880	0.0286	0.0077	0.0739	0.0002	0.0126
11	0.2294	0.1857	0.3081	0.0686	0.0025	0.0000	0.0159	0.0279	0.0526	0.0111	0.1587	0.0235	0.1939	0.1039
12	0.1741	0.1574	0.2682	0.8993	0.0008	0.0001	0.0165	0.3126	0.0346	0.0042	0.1337	0.0073	0.1191	0.2174
13	0.1396	0.1357	0.2370	0.2145	0.0003	0.0002	0.0172	0.0115	0.0249	0.0015	0.0040	0.0020	0.0047	0.0025
14	0.1039	0.1105	0.1986	0.0703	0.0001	0.0004	0.0178	0.0022	0.0171	0.0003	0.0391	0.0000	0.0352	0.0055
	8.9688	2.1713	3.2319	5.8321	4.5787	0.0843	0.4409	2.9573	2.4343	2.5292	3.6540	5.2130	4.6042	4.2943
	6.2781	6.2313	5.9275	6.8640	3.3165	3.2697	2.9659	3.9024	3.0500	2.7462	3.6827	2.6994	3.6359	3.3321

Die Probegleichung 15) (pag. 326) ergibt das folgende befriedigende Resultat:

$$16.0664 (\mu - 1) = 80.3320$$

$$ss = 23.1284$$

$$\text{Summe} = 103.4604$$

$$\text{Summe der nichtquadrat. Gl.} = 103.4626.$$

Aus der Verbindung der Zahlen der beiden letzten Zeilen findet sich nach

16) (pag. 326) für die übrigen Coëfficienten der Normalgleichungen:

$$[ab] = + 3.4049, [bc] = + 2.3616, [cd] = + 0.6311, [de] = - 0.3078$$

$$[ac] = + 1.3742, [bd] = + 1.3453, [ce] = - 1.5927, [df] = - 0.1085$$

$$[ad] = + 1.4853, [be] = - 2.0300, [cf] = - 1.2625, [dn] = - 0.0143$$

$$[ae] = - 1.0222, [bf] = - 1.3478, [cn] = - 0.4725, [ef] = + 1.2568$$

$$[af] = - 0.4592, [bn] = - 0.5159, [en] = + 0.4841$$

$$[an] = - 0.1590, [fn] = + 0.4811$$

Die Summe dieser Coëfficienten ist nach 17] (pag. 327) gleich S ; setzt man für ss jenen Werth ein, der sich ergeben würde, wenn die Probegleichung 15] (pag. 326) völlig stimmen würde, so hätte man zu setzen $ss = 23.1306$ (pag. 328). es ist also:

$$\begin{aligned} ss &= 23.1306 \\ \text{Summe der Quadrate} &= 16.0664 \\ \text{Differenz} = 2\ S &= 7.0642 \\ S &= 3.5321 \\ \text{die Summe der Coëff. } S &= 3.5320 \end{aligned}$$

was eine gute Uebereinstimmung ist; um diese stets zu erhalten, wird es immer gut sein, von der wie oben corrigirten Summe ss Gebrauch zu machen.

§ 3. Bestimmung der Eliminationsgleichungen.

Die Auflösung der Normalgleichungen wird am zweckmässigsten ebenfalls in geordneter und übersichtlicher Form durchgeführt, um einerseits die Auflösung möglichst vor Rechenfehlern zu sichern, und anderseits die Bestimmung der Unbekannten so genau als thunlich zu erhalten. Die Ordnung in der man die Unbekannten ansetzt, ist an sich gleichgültig, doch wird es sich später als vorthellhaft erweisen, falls die Bestimmung einer oder mehrer Unbekannten sehr unsicher ausfällt, dieselben als die letzten anzusehen; auf diesen Fall einer besonderen Unsicherheit in der Auflösung der Normalgleichungen werde ich am Schlusse dieses Abschnittes, der die Methode der kleinsten Quadrate behandelt, ausführlich eingehen, da er in der Anwendung der vorliegenden Methode auf Bahnbestimmungen ziemlich häufig auftritt. Ich werde, um hier die Anordnung der Rechnung anschaulich zu machen, annehmen, dass sechs Unbekannte zur Bestimmung vorliegen, es ist dies der bei astronomischen Untersuchungen überwiegend häufig eintretende Specialfall und es wird ein leichtes sein, von Fall zu Fall das vorliegende Schema zu verengern oder zu erweitern. Es sind also die Normalgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t + [ae]u + [af]w &= [an] \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + [bd]t + [be]u + [bf]w &= [bn] \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + [cd]t + [ce]u + [cf]w &= [cn] \\ [ad]x + [bd]y + [cd]z + [dd]t + [de]u + [df]w &= [dn] \\ [ae]x + [be]y + [ce]z + [de]t + [ee]u + [ef]w &= [en] \\ [af]x + [bf]y + [cf]z + [df]t + [ef]u + [ff]w &= [fn] \end{aligned} \right\} \quad A)$$

Man kann nun die Auflösung dieser Gleichungen so einrichten, dass man durch die entsprechende Elimination einer Unbekannten vorerst auf fünf Gleichungen hingeführt wird, die ebenso symmetrisch construiert sind, wie die sechs ursprünglichen Normalgleichungen. Die Unbekannte x wird sich nothwendig am sichersten aus

der ersten Gleichung bestimmen, da in dieser die zu x gehörigen Factoren in der quadratischen Form mit einander summiert erscheinen. Man hat daher zur Bestimmung von x aus der ersten Gleichung in A :

$$x = \frac{[a n]}{[a a]} y - \frac{[a b]}{[a a]} z - \frac{[a c]}{[a a]} t - \frac{[a d]}{[a a]} u - \frac{[a e]}{[a a]} v - \frac{[a f]}{[a a]} w ; \quad 1)$$

welcher Werth in die folgenden Gleichungen zum Zwecke der Elimination einzusetzen wäre. Durch die Substitution wird jeder der neu entstehenden Coëfficienten ein Binom, für welche eine weitere symbolische Bezeichnung eingeführt werden soll; man wird also schreiben für die in der zweiten Gleichung auftretenden Binome:

$$\begin{aligned} [b b] - \frac{[a b]}{[a a]} [a b] &= [b b 1] , & [b c] - \frac{[a b]}{[a a]} [a c] &= [b c 1] \\ [b c] - \frac{[a b]}{[a a]} [a c] &= [b c 1] , & [b f] - \frac{[a b]}{[a a]} [a f] &= [b f 1] \\ [b d] - \frac{[a b]}{[a a]} [a d] &= [b d 1] , & [b n] - \frac{[a b]}{[a a]} [a n] &= [b n 1] , \end{aligned}$$

in der dritten Gleichung werden auftreten:

$$\begin{aligned} [c c] - \frac{[a c]}{[a a]} [a c] &= [c c 1] , & [c f] - \frac{[a c]}{[a a]} [a f] &= [c f 1] \\ [c d] - \frac{[a c]}{[a a]} [a d] &= [c d 1] , & [c n] - \frac{[a c]}{[a a]} [a n] &= [c n 1] \\ [c e] - \frac{[a c]}{[a a]} [a e] &= [c e 1] , \end{aligned}$$

die vierte:

$$\begin{aligned} [d d] - \frac{[a d]}{[a a]} [a d] &= [d d 1] , & [d f] - \frac{[a d]}{[a a]} [a f] &= [d f 1] \\ [d e] - \frac{[a d]}{[a a]} [a e] &= [d e 1] , & [d n] - \frac{[a d]}{[a a]} [a n] &= [d n 1] \end{aligned}$$

die fünfte:

$$\begin{aligned} [e e] - \frac{[a e]}{[a a]} [a e] &= [e e 1] , & [e n] - \frac{[a e]}{[a a]} [a n] &= [e n 1] \\ [e f] - \frac{[a e]}{[a a]} [a f] &= [e f 1] , \end{aligned}$$

und endlich die sechste Gleichung fordert die Berechnung von:

$$[f f] - \frac{[a f]}{[a a]} [a f] = [f f 1] , \quad [f n] - \frac{[a f]}{[a a]} [a n] = [f n 1] .$$

Hat man nun die vorstehend eingeführten Hilfsgrössen berechnet, so reducirt sich das System der sechs Gleichungen in A) auf das folgende ebenfalls symmetrisch angeordnete System von fünf Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} [b b 1] y + [b c 1] z + [b d 1] t + [b e 1] u + [b f 1] v &= [b n 1] \\ [b c 1] y + [c c 1] z + [c d 1] t + [c e 1] u + [c f 1] v &= [c n 1] \\ [b d 1] y + [c d 1] z + [d d 1] t + [d e 1] u + [d f 1] v &= [d n 1] \\ [b e 1] y + [c e 1] z + [d e 1] t + [e e 1] u + [e f 1] v &= [e n 1] \\ [b f 1] y + [c f 1] z + [d f 1] t + [e f 1] u + [f f 1] v &= [f n 1] \end{aligned} \right\} \quad B$$

Ehe ich weiter gehe, will ich noch eine Frage erörtern, die für die Folge von Wichtigkeit ist, nämlich ob die neu eingeführten Symbole $[bb_1]$, $[bc_1]$, $[bd_1]$... in analoger Weise wie die Symbole $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$... aus Productsummen von gleicher Verbindung entstanden gedacht werden können, etwa in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned}[bb_1] &= (b_1 1) (b_1 1) + (b_2 1) (b_2 1) + (b_3 1) (b_3 1) + \dots \\ [bc_1] &= (b_1 1) (c_1 1) + (b_2 1) (c_2 1) + (b_3 1) (c_3 1) + \dots \\ &\text{u. s. f.}\end{aligned}$$

Diese Frage kann den folgenden Betrachtungen zu Folge bejaht werden. Die allgemeine Form dieser neuen und auch in der Folge einzuführenden Symbole ist, wenn man auf die Entstehung und Entwicklung der Hilfsgrössen zurückgeht:

$$[pr_1] = (p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 + \dots) = \frac{(q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3 + \dots)(q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 + \dots)}{q_1 q_1 + q_2 q_2 + q_3 q_3 + \dots}$$

wobei $p_1, p_2, \dots, r_1, r_2, \dots$ die Coefficienten zweier beliebiger Unbekannten darstellen, während durch q_1, q_2, \dots die Factoren der zu eliminirenden Unbekannten bezeichnet werden. Multiplicirt man beiderseits mit dem Nenner, für welchen auch das Symbol $[qq]$ geschrieben werden kann und beachtet, dass sich nach der Ausführung der Multiplicationen die Glieder, in denen alle 4 Indices gleich werden, rechts vom Gleichheitszeichen aufheben, so erhält man vorerst die Form:

$$[qq][pr_1] = \begin{pmatrix} p_1 r_1 (q_2 q_2 + q_3 q_3 + \dots) - q_1 p_1 q_2 r_2 - q_2 p_2 q_1 r_1 - \dots \\ + p_2 r_2 (q_1 q_1 + q_3 q_3 + \dots) - q_1 p_1 q_3 r_3 - q_2 p_2 q_3 r_3 - \dots \\ + p_3 r_3 (q_1 q_1 + q_2 q_2 + \dots) - q_1 p_1 q_4 r_4 - q_2 p_2 q_4 r_1 - \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{pmatrix}$$

für welche auch geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}[qq][pr_1] &= (p_1 q_2 - q_1 p_2) (r_1 q_2 - q_1 r_2) + (p_2 q_3 - q_2 p_3) (r_2 q_3 - q_2 r_3) + \dots \\ &+ (p_1 q_3 - q_1 p_3) (r_1 q_3 - q_1 r_3) + (p_2 q_4 - q_2 p_4) (r_2 q_4 - q_2 r_4) + \dots \\ &+ (p_1 q_4 - q_1 p_4) (r_1 q_4 - q_1 r_4) + (p_2 q_5 - q_2 p_5) (r_2 q_5 - q_2 r_5) + \dots \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots\end{aligned}$$

war die Anzahl der ursprünglichen Bedingungsgleichungen m , so wird die Anzahl der Glieder in diesem Ausdrücke sein $\frac{m(m-1)}{2}$; vergleicht man demnach die neu eingeführten Hilfsgrössen mit diesem Resultate und beachtet insbesondere die einzelnen Factoren, so sieht man sofort, dass man in der That sich dieselben in ähnlicher Weise, wie die ursprünglichen Summensymbole entstanden denken kann, nur steigt der höchste Index, da in den letzteren m angenommen wurde, auf $\frac{m(m-1)}{2}$. Für die quadratischen Symbole $[bb_1]$, $[cc_1]$, $[dd_1]$... ist für p und r derselbe Buchstabe zu setzen, man erhält daher rechts vom Gleichheitszeichen eine Summe quadratischer Glieder; man kann daraus den wichtigen Schluss ziehen, dass die quadratischen Symbole stets positiv sein müssen. Ferner kann man hervorheben, dass wenn zwischen den Coefficienten der verschiedenen Unbekannten ein nahe proportionales Verhältniss besteht, so dass z. B. in den Relationen:

$$\begin{aligned} p_1 &= s q_1 + \lambda_1 \\ p_2 &= s q_2 + \lambda_2 \\ p_3 &= s q_3 + \lambda_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nothwendig klein wird, die obigen Coëfficienten für die quadratischen Glieder die Form annehmen:

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 q_2 - \lambda_2 q_1)^2 + (\lambda_2 q_3 - \lambda_3 q_2)^2 + \dots \\ &(\lambda_1 q_3 - \lambda_3 q_1)^2 + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

d. h. der für die Unbekannten bestimmende Coëfficient wird der Null gleich bis auf Glieder zweiter Ordnung von λ , und eine Bestimmung wird also, wenn λ klein wird, nicht möglich, was übrigens aus der allgemeinen Theorie der Gleichungen folgt, doch wird man aus dem obigen Ausdrücke leicht die Bemerkung ableiten, dass der Fall der Kleinheit der Coëfficienten nur unter dieser Bedingung auftreten kann.

Aus den Gleichungen B) nun eliminirt man y in ähnlicher Weise wie früher x aus A), und man wird aus ähnlichen Gründen, wie früher, y zunächst aus der ersten bestimmen und das Resultat in die folgenden einsetzen; es ist:

$$y = \frac{[b n 1]}{[b b 1]} z - \frac{[b c 1]}{[b b 1]} t - \frac{[b d 1]}{[b b 1]} t - \frac{[b e 1]}{[b b 1]} u - \frac{[b f 1]}{[b b 1]} w \quad 2)$$

Man wird also neue Hilfsgrößen zu bestimmen haben:

$$\begin{aligned} [c c 1] - \frac{[b c 1]}{[b b 1]} [b c 1] &= [c c 2], & [c f 1] - \frac{[b c 1]}{[b b 1]} [b f 1] &= [c f 2] \\ [c d 1] - \frac{[b c 1]}{[b b 1]} [b d 1] &= [c d 2], & [c n 1] - \frac{[b c 1]}{[b b 1]} [b n 1] &= [c n 2] \\ [c e 1] - \frac{[b c 1]}{[b b 1]} [b e 1] &= [c e 2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [d d 1] - \frac{[b d 1]}{[b b 1]} [b d 1] &= [d d 2], & [d f 1] - \frac{[b d 1]}{[b b 1]} [b f 1] &= [d f 2] \\ [d e 1] - \frac{[b d 1]}{[b b 1]} [b e 1] &= [d e 2], & [d n 1] - \frac{[b d 1]}{[b b 1]} [b n 1] &= [d n 2] \\ [e e 1] - \frac{[b e 1]}{[b b 1]} [b e 1] &= [e e 2], & [e n 1] - \frac{[b e 1]}{[b b 1]} [b n 1] &= [e n 2] \\ [e f 1] - \frac{[b e 1]}{[b b 1]} [b f 1] &= [e f 2]. \end{aligned}$$

$$[f f 1] - \frac{[b f 1]}{[b b 1]} [b f 1] = [f f 2], \quad [f n 1] - \frac{[b f 1]}{[b b 1]} [b n 1] = [f n 2].$$

Nach Einführung dieser Hilfsgrößen erhält man das System:

$$\left. \begin{aligned} [c c 2] z + [c d 2] t + [c e 2] u + [c f 2] w &= [c n 2] \\ [c d 2] z + [d d 2] t + [d e 2] u + [d f 2] w &= [d n 2] \\ [c e 2] z + [d e 2] t + [e e 2] u + [e f 2] w &= [e n 2] \\ [c f 2] z + [d f 2] t + [e f 2] u + [f f 2] w &= [f n 2] \end{aligned} \right\} \quad C)$$

Bestimmt man daraus z nach der ersten Gleichung:

$$z = \frac{[en2]}{[ee2]} - \frac{[cd2]}{[ce2]} t - \frac{[ce2]}{[ee2]} u - \frac{[ef2]}{[ce2]} w \quad 3)$$

substituiert diesen Werth in die folgenden und bildet:

$$\begin{aligned} [dd2] - \frac{[cd2]}{[ce2]} [cd2] &= [dd3] , & [df2] - \frac{[cd2]}{[ce2]} [cf2] &= [df3] \\ [de2] - \frac{[cd2]}{[ce2]} [ce2] &= [de3] , & [dn2] - \frac{[cd2]}{[ce2]} [cn2] &= [dn3] \\ [ee2] - \frac{[ce2]}{[ee2]} [ce2] &= [ee3] , & [en2] - \frac{[ce2]}{[ee2]} [en2] &= [en3] \\ [ef2] - \frac{[ce2]}{[ee2]} [cf2] &= [ef3] , \\ [ff2] - \frac{[cf2]}{[ee2]} [cf2] &= [ff3] , & [fn2] - \frac{[cf2]}{[ee2]} [cn2] &= [fn3] , \end{aligned}$$

so hat man daher die drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} [dd3] t + [de3] u + [df3] w &= [dn3] \\ [de3] t + [ee3] u + [ef3] w &= [en3] \\ [df3] t + [ef3] u + [ff3] w &= [fn3] \end{aligned} \right\} \quad D)$$

bestimmt man also wieder t nach

$$t = \frac{[dn3]}{[dd3]} - \frac{[de3]}{[dd3]} u - \frac{[df3]}{[dd3]} w , \quad 4)$$

und berechnet als neue Hilfsgrößen:

$$\begin{aligned} [ee3] - \frac{[de3]}{[dd3]} [de3] &= [ee4] , & [en3] - \frac{[de3]}{[dd3]} [dn3] &= [en4] \\ [ef3] - \frac{[de3]}{[dd3]} [df3] &= [ef4] , \\ [ff3] - \frac{[df3]}{[dd3]} [df3] &= [ff4] , & [fn3] - \frac{[df3]}{[dd3]} [dn3] &= [fn4] . \end{aligned}$$

so hat man Alles zurückgeführt auf die zwei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} [ee4] u + [ef4] w &= [en4] \\ [ef4] u + [ff4] w &= [fn4] \end{aligned} \right\} \quad E)$$

bestimmt man nun u nach:

$$u = \frac{[en4]}{[ee4]} - \frac{[ef4]}{[ee4]} w \quad 5)$$

und berechnet die Hilfsgrößen:

$$[ff4] - \frac{[ef4]}{[ee4]} [ef4] = [ff5] , \quad [fn4] - \frac{[ef4]}{[ee4]} [en4] = [fn5] ,$$

so wird man schliesslich haben:

$$[ff5] w = [fn5] , \quad F)$$

so ist, wenn man $[bs]$ und $[as]$ seiner Bedeutung nach auflöst:

$$[bs_1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] + [bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] + \dots + [bn] - \frac{[ab]}{[aa]}[an]$$

und mit Berücksichtigung der oben (pag. 330) eingeführten Hilfsgrößen auch:

$$[bs_1] = [bb_1] + [bc_1] + \dots + [bn_1],$$

wodurch eine zweckmässige Controlgleichung hergestellt ist. Um also den Uebergang von den sechs Normalgleichungen *A*) auf die Gleichungen *B*) zu prüfen, bildet man die Hilfsgrößen:

$$[bs] - \frac{[ab]}{[aa]}[as] = [bs_1], \quad [es] - \frac{[ae]}{[aa]}[as] = [es_1]$$

$$[cs] - \frac{[ac]}{[aa]}[as] = [cs_1], \quad [fs] - \frac{[af]}{[aa]}[as] = [fs_1]$$

$$[ds] - \frac{[ad]}{[aa]}[as] = [ds_1],$$

und hat dann die Prüfungsgleichungen:

$$[bs_1] = [bb_1] + [bc_1] + [bd_1] + [be_1] + [bf_1] + [bn_1]$$

$$[cs_1] = [bc_1] + [cc_1] + [cd_1] + [ce_1] + [cf_1] + [cn_1]$$

$$[ds_1] = [bd_1] + [cd_1] + [dd_1] + [de_1] + [df_1] + [dn_1]$$

$$[es_1] = [be_1] + [ce_1] + [de_1] + [ee_1] + [ef_1] + [en_1]$$

$$[fs_1] = [bf_1] + [cf_1] + [df_1] + [ef_1] + [ff_1] + [fn_1]$$

von denen jedoch nur die erstere in der Regel zur Prüfung Anwendung findet, der andern aber wird man bedürfen, um die Richtigkeit der folgenden Prüfungsgleichungen zu erweisen; ich werde, da sich die Beweise für das Bestehen dieser und der folgenden Relationen in der oben durchgeführten Weise leicht herstellen lassen, nur die erforderlichen Hilfsgrößen und Prüfungsgleichungen aufstellen.

$$[cs_1] - \frac{[bc_1]}{[bb_1]}[bs_1] = [cs_2], \quad [es_1] - \frac{[be_1]}{[bb_1]}[bs_1] = [es_2]$$

$$[ds_1] - \frac{[bd_1]}{[bb_1]}[bs_1] = [ds_2], \quad [fs_1] - \frac{[bf_1]}{[bb_1]}[bs_1] = [fs_2]$$

$$[cs_2] = [cc_2] + [cd_2] + [ce_2] + [cf_2] + [cn_2]$$

$$[ds_2] = [cd_2] + [dd_2] + [de_2] + [df_2] + [dn_2]$$

$$[es_2] = [ce_2] + [de_2] + [ee_2] + [ef_2] + [en_2]$$

$$[fs_2] = [cf_2] + [df_2] + [ef_2] + [ff_2] + [fn_2]$$

$$[ds_2] - \frac{[cd_2]}{[cc_2]}[cs_2] = [ds_3], \quad [fs_2] - \frac{[cf_2]}{[cc_2]}[cs_2] = [fs_3]$$

$$[es_2] - \frac{[ce_2]}{[cc_2]}[cs_2] = [es_3],$$

$$[ds_3] = [dd_3] + [de_3] + [df_3] + [dn_3]$$

$$[es_3] = [de_3] + [ee_3] + [ef_3] + [en_3]$$

$$[fs_3] = [df_3] + [ef_3] + [ff_3] + [fn_3]$$

$$[es3] - \frac{[de3]}{[dd3]} [ds3] = [es4] \quad , \quad [fs3] - \frac{[df3]}{[dd3]} [ds3] = [fs4]$$

$$[es4] = [ee4] + [ef4] + [en4]$$

$$[fs4] = [ef4] + [ff4] + [fn4]$$

$$[fs4] - \frac{[ef4]}{[ee4]} [es4] = [fs5]$$

$$[fs5] = [ff5] + [fn5] \quad ,$$

womit die Rechnung einer sehr durchgreifenden Controle unterworfen erscheint.

Ich könnte nun daran gehen, das unten ausführlich vorgelegte Schema, welches ich für die Anwendung zusammengestellt in den Text aufgenommen habe, zu erläutern. Es finden sich die Eliminationsrechnungen auf der linken Seite des aufgeschlagenen Buches (pag. 340), die Prüfungsgleichungen nebst einigen erläuternden Noten auf der rechten. Nachdem es aber zweckmässig erscheint, in das Schema auch jene Rechnungen aufzunehmen, welche die Herabminderung der Summe der Fehlerquadrate $[nn]$ durch die Bestimmung der einzelnen Unbekannten enthalten und schliesslich die minimale Fehlerquadratsumme kennen lehren, so sollen vorerst die hierzu nöthigen Ableitungen gemacht werden. Diese Grösse gibt eine sehr durchgreifende Prüfung für die Richtigkeit der gesamten Rechnungen, indem die Substitution der Unbekannten in die Bedingungsgleichungen die einzelnen übrig bleibenden Fehler erkennen lässt, deren Quadratsumme mit dem bei der Elimination hierfür gefundenen Werthe innerhalb der Unsicherheit der Rechnung stimmen muss. Ueberdiess hat die Ermittlung dieser Grössen eine Bedeutung, wenn man die Unsicherheit in den Unbekannten auf ein numerisches Maass zurückführen will. Es fanden sich oben (pag. 315) die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots - n_1 &= -v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots - n_2 &= -v_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \dots - n_3 &= -v_3 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad 8)$$

in welchen die Grössen $v_1, v_2, v_3 \dots$ die nach der Bestimmung der Unbekannten auftretenden Unterschiede zwischen der Beobachtung und Rechnung sind, wenn für $x, y, z \dots$ die aus den Normalgleichungen resultirenden Werthe eingesetzt werden; die Summe dieser Fehlerquadrate

$$v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3 + \dots = [vv]$$

kann auch dadurch gebildet werden, dass man die Gleichungen 8) rechts und links mit dem zugehörigen $-r$ durchmultipliziert und Alles addirt, man erhält so, wenn man zur Abkürzung einführt:

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 + \dots = [ar]$$

$$b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3 + \dots = [br]$$

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_3 r_3 + \dots = [cr]$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$n_1 r_1 + n_2 r_2 + n_3 r_3 + \dots = [nr]$$

die Relation:

$$[nv] = [av]x - [bv]y - [cv]z - [dv]t - [ev]u - [fv]w = [vv] .$$

Nun ist aber nach Gleichung 7. (pag. 316) für die Bedingung des Minimums der Fehlerquadrate, welches durch die Auflösung der Normalgleichungen erhalten wird:

$$[av] = 0, [bv] = 0, [cv] = 0, [dv] = 0, [ev] = 0, [fv] = 0 ,$$

woraus man die wichtige Relation ableitet:

$$[vn] = [vv] . \quad 9$$

Multipliziert man die Gleichungen 8) (pag. 336) mit den zugehörigen $-u$ durch und addirt, so erhält man:

$$[nn] - [an]x - [bn]y - [cn]z - [dn]t - [en]u - [fn]w = [vn] = [vv] , \quad 10)$$

welche Gleichung also sofort die Grösse $[vv]$ finden lässt, sobald die Unbekannten $x, y, z \dots$ den Normalgleichungen gemäss bestimmt sind. Es ist aber oben (pag. 330) x bestimmt worden durch:

$$x = \frac{[an]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}t - \frac{[ae]}{[aa]}u - \frac{[af]}{[aa]}w ;$$

setzt man also diesen Werth von x in Gleichung 10. ein und schreibt überdiess:

$$[nn] - \frac{[an]}{[aa]}[an] = [nn1] ,$$

so wird mit Rücksicht auf die oben (pag. 330) eingeführten Hilfsgrössen gesetzt werden dürfen:

$$[nn1] - [bn1]y - [cn1]z - [dn1]t - [en1]u - [fn1]w = [vv]$$

Ersetzt man wieder y nach der Gleichung 2) (pag. 332) und schreibt:

$$[nn1] - \frac{[bn1]}{[bb1]}[bn1] = [nn2] ,$$

so wird:

$$[nn2] - [cn2]z - [dn2]t - [en2]u - [fn2]w = [vv] ,$$

welches Verfahren bis zur letzten Unbekannten in ähnlicher Weise fortgesetzt werden kann; man hat also für die vorliegenden Gleichungen mit sechs Unbekannten die folgenden sechs Hilfsgrössen zu berechnen:

$$\left. \begin{aligned} [nn1] &= [nn] - \frac{[an]}{[aa]}[an] , & [nn4] &= [nn3] - \frac{[dn3]}{[dd3]}[dn3] \\ [nn2] &= [nn1] - \frac{[bn1]}{[bb1]}[bn1] , & [nn5] &= [nn4] - \frac{[en4]}{[ee4]}[en4] \\ [nn3] &= [nn2] - \frac{[cn2]}{[ce2]}[cn2] , & [nn6] &= [nn5] - \frac{[fn5]}{[ff5]}[fn5] \end{aligned} \right\} \quad 11)$$

und hat dann die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Summe der übrig-

bleibenden Fehlerquadrate $[vv]$, von denen man gewöhnlich nur die letzte in Anwendung bringen wird:

$$\left. \begin{aligned} [nn] - [an]x - [bn]y - [cn]z - [dn]t - [en]u - [fn]w &= [vv] \\ [nn1] - [bn1]y - [cn1]z - [dn1]t - [en1]u - [fn1]w &= [vr] \\ [nn2] - [cn2]z - [dn2]t - [en2]u - [fn2]w &= [vv] \\ [nn3] - [dn3]t - [en3]u - [fn3]w &= [vr] \\ [nn4] - [en4]u - [fn4]w &= [rv] \\ [nn5] - [fn5]w &= [vr] \\ [nn6] &= [vv] \end{aligned} \right\} 12)$$

Die Grösse $[nn6] = [vv]$ kann aber auch mit Hilfe der Summengrössen in ganz anderer Weise erhalten werden und diese Bestimmung wird, da dieselbe ebenfalls im Ganzen die Bildung von nur sechs Hilfsgrössen erfordert, als zweckmässige Controle benützt werden dürfen. Diese Prüfung ist eine der durchgreifendsten, doch wird dieselbe nur dann gut übereinstimmende Resultate geben, wenn die Auflösung der Normalgleichungen keiner besonderen Unsicherheit unterworfen ist. Der Fall des Eintretens einer solchen besonderen Unsicherheit wird am Schlusse dieses Abschnittes ausführlicher behandelt werden. Beachtet man die Bedeutung der Summengrösse

$$[ns] = [an] + [bn] + [cn] + [dn] + [en] + [fn] + [nn],$$

und bildet die Hilfsgrösse:

$$[ns1] = [ns] - \frac{[an]}{[aa]} [as],$$

so wird nach Auflösung der mit s verbundenen Summenglieder rechts vom Gleichheitszeichen geschrieben werden dürfen:

$$[ns1] = [bn] - \frac{[an]}{[aa]} [ab] + [cn] - \frac{[an]}{[aa]} [ac] + \dots + [nn] - \frac{[an]}{[aa]} [an]$$

oder durch Einführung der oben benützten Hilfsgrössen:

$$[ns1] = [bn1] + [cn1] + [dn1] + [en1] + [fn1] + [nn1].$$

Aehnlich vorgehend, wird man die Hilfsgrössen:

$$\left. \begin{aligned} [ns1] &= [ns] - \frac{[an]}{[aa]} [as] \\ [ns2] &= [ns1] - \frac{[bn1]}{[bb1]} [bs1] \\ [ns3] &= [ns2] - \frac{[cn2]}{[cc2]} [cs2] \\ [ns4] &= [ns3] - \frac{[dn3]}{[dd3]} [ds3] \\ [ns5] &= [ns4] - \frac{[en4]}{[ee4]} [es4] \\ [ns6] &= [ns5] - \frac{[fn5]}{[ff5]} [fs5] \end{aligned} \right\} 13)$$

bilden und die Relationen haben:

$$\left. \begin{aligned} [ns1] &= [bn1] + [cn1] + [dn1] + [en1] + [fn1] + [nn1] \\ [ns2] &= [cn2] + [dn2] + [en2] + [fn2] + [nn2] \\ [ns3] &= [dn3] + [en3] + [fn3] + [nn3] \\ [ns4] &= [en4] + [fn4] + [nn4] \\ [ns5] &= [fn5] + [nn5] \\ [ns6] &= [nn6] \end{aligned} \right\} 14$$

womit die geforderten Prüfungsgleichungen erlangt sind, von denen man bei der practischen Anwendung jedoch nur die letzte Gleichung benützen wird.

Ich gehe nun daran, an der Hand des auf pag. 340 aufgenommenen Schemas zu zeigen, in welcher einfachen und übersichtlichen Weise die für die Elimination nothwendigen Rechnungen und Controlen durchgeführt werden können.

Zunächst ziehe man auf einem mit Horizontallinien überzogenen Blatte zwei Verticalcolumnen mehr aus, als Unbekannte vorhanden sind. In die erste Zeile setzt man neben einander die Werthe, die mit a verbunden sind, also $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$... $[an]$, $[as]$ und darunter in die zweite Zeile die Logarithmen derselben und macht diese zweite Zeile etwa durch ein angehängtes E besonders kenntlich, denn es ist dies die erste Eliminationsgleichung, welche die Bestimmung von x (vergl. pag. 330) vermittelt. In die dritte Zeile kommen die mit b verbundenen Werthe $[bb]$, $[bc]$... $[bs]$ und man rückt hierbei um eine Verticalcolumn nach rechts ein, so dass die mit b verbundenen Buchstaben dieselben werden, die früher in denselben Verticalcolumnen mit a combinirt waren. In die erste Verticalcolumn der vierten Zeile setzt man $\log \frac{[ab]}{[aa]}$; dieser und alle in derselben Verticalcolumn enthaltenen Logarithmen müssen sorgfältig auf ihre Richtigkeit geprüft werden, da sich ein Fehler in denselben der Summencontrole leicht entzieht; ich habe diese wichtige Bemerkung deshalb im Schema hervorgehoben. Nun schreibt man diesen Logarithmus von $\frac{[ab]}{[aa]}$ auf den unteren Rand eines Zettellehens und addirt denselben der Reihe nach zu den Logarithmen von $[ab]$, $[ac]$... $[as]$, die alle in der zweiten Zeile stehen; indem man die Ziffern der beiden Logarithmen von vorn addirt, wird man das Hinschreiben der so entstehenden Logarithmen gänzlich vermeiden können, wenn man sofort die Zahlen aufsucht, und sie in die vierte Zeile und zwar in dieselbe Verticalcolumn, in der das Product gebildet wurde, einträgt. Es kommt also zu stehen:

$$\begin{array}{cccc} \frac{[ab]}{[aa]} & [ab] & \text{unter} & [bb] \\ \frac{[ab]}{[aa]} & [ac] & \text{»} & [bc] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{[ab]}{[aa]} & [as] & \text{unter} & [bs] \end{array} .$$

$\log \frac{aa}{aa}$	$\log \frac{ab}{ab}$	$\log \frac{ac}{ac}$	$\log \frac{ad}{ad}$	$\log \frac{ae}{ae}$	$\log \frac{af}{af}$	$\log \frac{an}{an}$	$\log \frac{as}{as}$	E
$\log \frac{ab}{aa} \cdot$	$\frac{bb}{aa} \frac{ab}{ab}$	$\frac{bc}{aa} \frac{ac}{ac}$	$\frac{bd}{aa} \frac{ad}{ad}$	$\frac{be}{aa} \frac{ae}{ae}$	$\frac{bf}{aa} \frac{af}{af}$	$\frac{bn}{aa} \frac{an}{an}$	$\frac{bs}{aa} \frac{as}{as}$	E
$\log \frac{ac}{aa} \cdot$	$\frac{bb1}{bb1} \log \frac{bb1}{bb1}$	$\frac{bc1}{bc1} \log \frac{bc1}{bc1}$	$\frac{bd1}{bd1} \log \frac{bd1}{bd1}$	$\frac{be1}{be1} \log \frac{be1}{be1}$	$\frac{bf1}{bf1} \log \frac{bf1}{bf1}$	$\frac{bn1}{bn1} \log \frac{bn1}{bn1}$	$\frac{bs1}{bs1} \log \frac{bs1}{bs1}$	E
$\log \frac{ad}{aa} \cdot$		$\frac{ce}{aa} \frac{ac}{ac}$	$\frac{cd}{aa} \frac{ad}{ad}$	$\frac{ce}{aa} \frac{ae}{ae}$	$\frac{cf}{aa} \frac{af}{af}$	$\frac{cn}{aa} \frac{an}{an}$	$\frac{cs}{aa} \frac{as}{as}$	E
$\log \frac{be1}{bb1} \cdot$		$\frac{ce1}{bb1} \frac{bc1}{bb1}$	$\frac{cd1}{bb1} \frac{bd1}{bb1}$	$\frac{ce1}{bb1} \frac{be1}{bb1}$	$\frac{cf1}{bb1} \frac{bf1}{bb1}$	$\frac{cn1}{bb1} \frac{bn1}{bb1}$	$\frac{cs1}{bb1} \frac{bs1}{bb1}$	E
		$\log \frac{ce2}{ce2}$	$\log \frac{cd2}{cd2}$	$\log \frac{ce2}{ce2}$	$\log \frac{cf2}{cf2}$	$\log \frac{cn2}{cn2}$	$\log \frac{cs2}{cs2}$	E
$\log \frac{ad}{aa} \cdot$			$\frac{dd}{aa} \frac{ad}{ad}$	$\frac{de}{aa} \frac{ae}{ae}$	$\frac{df}{aa} \frac{af}{af}$	$\frac{dn}{aa} \frac{an}{an}$	$\frac{ds}{aa} \frac{as}{as}$	E
$\log \frac{bd1}{bb1} \cdot$			$\frac{dd1}{bb1} \frac{bd1}{bb1}$	$\frac{de1}{bb1} \frac{be1}{bb1}$	$\frac{df1}{bb1} \frac{bf1}{bb1}$	$\frac{dn1}{bb1} \frac{bn1}{bb1}$	$\frac{ds1}{bb1} \frac{bs1}{bb1}$	E
$\log \frac{cd2}{ce2} \cdot$			$\frac{dd2}{ce2} \frac{cd2}{ce2}$	$\frac{de2}{ce2} \frac{ce3}{ce2}$	$\frac{df2}{ce2} \frac{cf3}{ce2}$	$\frac{dn2}{ce2} \frac{cn2}{ce2}$	$\frac{ds2}{ce2} \frac{cs2}{ce2}$	E
			$\log \frac{dd3}{dd3}$	$\log \frac{de3}{de3}$	$\log \frac{df3}{df3}$	$\log \frac{dn3}{dn3}$	$\log \frac{ds3}{ds3}$	E
$\log \frac{ae}{aa} \cdot$				$\frac{ee}{aa} \frac{ae}{ae}$	$\frac{ef}{aa} \frac{af}{af}$	$\frac{en}{aa} \frac{an}{an}$	$\frac{es}{aa} \frac{as}{as}$	E
$\log \frac{be1}{bb1} \cdot$				$\frac{ee1}{bb1} \frac{be1}{bb1}$	$\frac{ef1}{bb1} \frac{bf1}{bb1}$	$\frac{en1}{bb1} \frac{bn1}{bb1}$	$\frac{es1}{bb1} \frac{bs1}{bb1}$	E
$\log \frac{ce2}{ce2} \cdot$				$\frac{ee2}{ce2} \frac{ce2}{ce2}$	$\frac{ef2}{ce2} \frac{cf2}{ce2}$	$\frac{en2}{ce2} \frac{cn2}{ce2}$	$\frac{es2}{ce2} \frac{cs2}{ce2}$	E
$\log \frac{de3}{dd3} \cdot$				$\frac{ee3}{dd3} \frac{de3}{dd3}$	$\frac{ef3}{dd3} \frac{df3}{dd3}$	$\frac{en3}{dd3} \frac{dn3}{dd3}$	$\frac{es3}{dd3} \frac{ds3}{dd3}$	E
				$\log \frac{ee4}{ee4}$	$\log \frac{ef4}{ef4}$	$\log \frac{en4}{en4}$	$\log \frac{es4}{es4}$	E
$\log \frac{af}{aa} \cdot$	$\log \frac{an}{aa} \cdot$	$\frac{nn}{aa} \frac{an}{an}$	$\frac{ns}{aa} \frac{as}{as}$		$\frac{ff}{aa} \frac{af}{af}$	$\frac{fn}{aa} \frac{an}{an}$	$\frac{fs}{aa} \frac{as}{as}$	E
$\log \frac{bf1}{bb1} \cdot$	$\log \frac{bn1}{bb1} \cdot$	$\frac{nn1}{bb1} \frac{bn1}{bb1}$	$\frac{ns1}{bb1} \frac{bs1}{bb1}$	16)	$\frac{ff1}{bb1} \frac{bf1}{bb1}$	$\frac{fn1}{bb1} \frac{bn1}{bb1}$	$\frac{fs1}{bb1} \frac{bs1}{bb1}$	E
$\log \frac{cf2}{ce2} \cdot$	$\log \frac{cn2}{ce2} \cdot$	$\frac{nn2}{ce2} \frac{cn2}{ce2}$	$\frac{ns2}{ce2} \frac{cs2}{ce2}$	17)	$\frac{ff2}{ce2} \frac{cf2}{ce2}$	$\frac{fn2}{ce2} \frac{cn2}{ce2}$	$\frac{fs2}{ce2} \frac{cs2}{ce2}$	E
$\log \frac{df3}{dd3} \cdot$	$\log \frac{dn3}{dd3} \cdot$	$\frac{nn3}{dd3} \frac{dn3}{dd3}$	$\frac{ns3}{dd3} \frac{ds3}{dd3}$	18)	$\frac{ff3}{dd3} \frac{df3}{dd3}$	$\frac{fn3}{dd3} \frac{dn3}{dd3}$	$\frac{fs3}{dd3} \frac{ds3}{dd3}$	E
$\log \frac{ef4}{ee4} \cdot$	$\log \frac{en4}{ee4} \cdot$	$\frac{nn4}{ee4} \frac{en4}{ee4}$	$\frac{ns4}{ee4} \frac{es4}{ee4}$	19)	$\frac{ff4}{ee4} \frac{ef4}{ee4}$	$\frac{fn4}{ee4} \frac{en4}{ee4}$	$\frac{fs4}{ee4} \frac{es4}{ee4}$	E
	$\log \frac{fn5}{ff5} \cdot$	$\frac{nn5}{ff5} \frac{fn5}{ff5}$	$\frac{ns5}{ff5} \frac{fs5}{ff5}$	20)	$\frac{ff5}{ff5}$	$\frac{fn5}{ff5}$	$\frac{fs5}{ff5}$	E
		$\frac{nn6}{ff5}$	$\frac{ns6}{ff5}$	21)	$\log \frac{ff5}{ff5}$	$\log \frac{fn5}{fn5}$	$\log w$	E

Probegleichungen.

- 1) $[bs1] = [bb1] + [bc1] + [bd1] + [be1] + [bf1] + [bu1] \quad !$
- 2) $[cs1] = [bc1] + [ce1] + [cd1] + [cc1] + [cf1] + [cu1]$
- 3) $[cs2] = [cc2] + [cd2] + [ce2] + [cf2] + [cu2] \quad !$
- 4) $[ds1] = [bd1] + [cd1] + [dd1] + [de1] + [df1] + [du1]$
- 5) $[ds2] = [cd2] + [dd2] + [de2] + [df2] + [du2]$
- 6) $[ds3] = [dd3] + [de3] + [df3] + [du3] \quad !$
- 7) $[es1] = [be1] + [ce1] + [de1] + [ee1] + [ef1] + [eu1]$
- 8) $[es2] = [ee2] + [de2] + [ce2] + [ef2] + [eu2]$
- 9) $[es3] = [de3] + [ee3] + [ef3] + [eu3]$
- 10) $[es4] = [ee4] + [ef4] + [eu4] \quad !$
- 11) $[fs1] = [bf1] + [cf1] + [df1] + [ef1] + [ff1] + [fu1]$
- 12) $[fs2] = [cf2] + [df2] + [ef2] + [ff2] + [fu2]$
- 13) $[fs3] = [df3] + [ef3] + [ff3] + [fu3]$
- 14) $[fs4] = [ef4] + [ff4] + [fu4]$
- 15) $[fs5] = [ff5] + [fu5] \quad !$
- 16) $[ns1] = [bu1] + [cu1] + [du1] + [eu1] + [fu1] + [nu1]$
- 17) $[ns2] = [cu2] + [du2] + [eu2] + [fu2] + [nu2]$
- 18) $[ns3] = [du3] + [eu3] + [fu3] + [nu3]$
- 19) $[ns4] = [eu4] + [fu4] + [nu4]$
- 20) $[ns5] = [fu5] + [nu5]$
- 21) $[ns6] = [nu6] \quad !$

Bei der Anwendung wird man sich in der Regel mit den mit einem Ausrufungszeichen versehenen Probegleichungen, bei denen sich alle Werthe in derselben Horizontalzeile befinden, begnügen können. Die mit *E* bezeichneten Werthereihen entsprechen den Eliminationsgleichungen, die mit einem * versehenen Logarithmen müssen besonders nachgesehen werden, da sich ein Fehler in denselben leicht der Controle entzieht.

Zieht man nun die Zahlen dieser vierten Zeile von jenen der darüber stehenden dritten Zeile ab und setzt die so entstehenden Differenzwerthe in die fünfte Zeile, so hat man die Hilfsgrössen:

$$[bb_1], [bc_1], [bd_1], [be_1], [bf_1], [bu_1], [bs_1]$$

erhalten. Das dieser Zeile angehängte Zeichen 1) weist auf die auf pag. 341 stehende Prüfungsgleichung hin, welche Bemerkung für dieses und die ähnlichen Anmerkungszeichen für die Folge hier hervorgehoben werden soll. Dieser Probe muss völlig innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung genügt werden.

Ich kann mir aber wohl sparen, den weiteren Vorgang der Rechnung auseinanderzusetzen, indem die bisherigen Andeutungen in Verbindung mit dem auf pag. 340 in extenso mitgetheilten Eliminationschema wohl genügen werden, um die zweckmässige Anlage der Rechnung und die Bildung der nothwendigen Hilfsgrössen anschaulich zu machen. Ist die Elimination beendet, so wird man an die Bildung der Grösse $[uu_6]$ schreiten, die wohl auch durch das Schema selbst hinreichend erläutert ist.

Ich werde nun die oben (pag. 323) ermittelten Coëfficienten der Normalgleichungen den hier gegebenen Vorschriften gemäss auflösen und glaube, dass ich mich hierbei weiterer Erläuterungen enthalten kann; um die Elimination nicht zu unsicher zu machen, habe ich mich fünfstelliger logarithmischer Tafeln bedient; der Vorschlag, der hier und da gemacht wurde, im Falle einer besonderen Unsicherheit der Auflösung grössere logarithmische Tafeln hierbei anzuwenden, muss als unzweckmässig bezeichnet werden, wie dies eine einfache Ueberlegung zeigt. Sind die Normalgleichungen nämlich mit Hilfe kleinerer Tafeln gebildet, so erhält man dann nur eine Lösung, die von der Unsicherheit dieser logarithmischen Rechnung abhängt. In der folgenden Rechnung sind die Eliminationsgleichungen durch ein angehängtes E und die aus den Coëfficienten der Normalgleichungen gebildeten Zeilen durch ein vorgesetztes Sternchen bezeichnet, ausserdem sind die dem Resultate entsprechenden Probegleichungen in der letzten Verticalcolumn neben den direct berechneten Werthen angesetzt:

x	y	z	t	u	v	w	s	Proben
+ 5.24850 0.72003	— 1.74720 0 _n 24234	— 2.19540 0 _n 34151	+ 1.91120 0.28131	— 1.19230 0 _n 07639	+ 0.00080 6.90309	— 0.53990 9 _n 73231	+ 1.48570 0.17193	E
* 9 _n 52231	+ 1.88590 + 0.58164	+ 0.80410 + 0.73083	— 0.84540 — 0.63624	+ 0.38540 + 0.39692	— 0.00370 — 0.00027	+ 1.44930 + 0.17973	+ 1.92840 — 0.49459	
	+ 1.30426 0.11537	+ 0.07327 8.86493	— 0.20916 9 _n 32048	— 0.01152 8 _n 06145	— 0.00343 7 _n 53529	+ 1.26957 0.10365	+ 2.42299 0.38435	+ 2.42299 E
9 _n 62148	+ + 0.91832	+ 4.04400 — 0.91832	— 0.23560 — 0.79945	+ 0.34160 + 0.49873	— 0.00720 — 0.00033	+ 1.86810 + 0.22583	+ 4.61960 — 0.62146	
8 74956		+ 3.12568 + 0.00412	+ 0.56385 — 0.01175	— 0.15713 — 0.00065	— 0.00687 — 0.00019	+ 1.64227 + 0.07132	+ 5.24106 + 0.13612	
		+ 3.12156 0.49437	+ 0.57560 9.76012	— 0.15648 9 _n 19446	— 0.00668 7 _n 82478	+ 1.57095 0.19617	+ 5.10494 0.70799	+ 5.10495 E
9.56128		+ + 0.69597	+ 3.66700 — 0.43418	— 0.32200 + 0.00029	— 0.00070 — 0.00029	— 1.32770 — 0.19660	+ 2.84680 + 0.54101	
9 _n 20511			+ 2.97103 + 0.03354	+ 0.11218 + 0.00185	— 0.00099 + 0.00055	— 1.13110 — 0.20359	+ 2.30579 — 0.38856	
9.26575			+ 2.93749 + 0.10614	+ 0.11033 — 0.02885	— 0.00154 — 0.00123	— 0.92751 + 0.28968	+ 2.69435 + 0.94132	
			+ 2.83135 0.45199	+ 0.13918 9.14358	— 0.00031 6 _n 49136	— 1.21719 0 _n 08536	+ 1.75303 0.24379	+ 1.75303 E
9 _n 35636			* + 0.27086	+ 4.39830 — 0.00018	+ 0.20490 + 0.00018	+ 0.04630 + 0.12265	+ 3.86220 — 0.33752	
7 _n 94608				+ 4.12744 + 0.00010	+ 0.20508 + 0.00003	— 0.07635 — 0.01121	+ 4.19972 — 0.02140	
8 _n 7 009				+ 4.12734 + 0.00784	+ 0.20505 + 0.00033	— 0.06514 — 0.07875	+ 4 22112 — 0.25591	
8.69159				+ 4.11950 + 0.00684	+ 0.20472 — 0.00002	+ 0.01361 — 0.05983	+ 4.47703 + 0.08617	
		nn	ns	+ 4.11266 0.61412	+ 0.20474 9.31120	+ 0.07344 8.86593	+ 4.39086 0 64255	+ 4.39084 E
6.18306	9 _n 01228	+ 2.63220 + 0.05554	+ 4.10710 — 0.15283		* + 0.00000	— 0.02120 — 0.00008	+ 4.30570 + 0.00023	
7 _n 41992	9.98828	+ 2.57666 + 1.23574	+ 4.25993 + 2.35847		+ 4.13280 + 0 00001	— 0.02112 — 0.00334	+ 4.30547 — 0 00637	
7 _n 33041	9.70180	+ 1.34092 + 0.79062	+ 1.90146 + 2.56918		+ 4 13279 + 0.00001	— 0.01778 — 0.00336	+ 4.31184 — 0.01092	
6 _n 03937	9 _n 63337	+ 0.55030 + 0.52328	— 0.66772 — 0.75363		+ 4.13278 0.00000	— 0.01442 + 0.00013	+ 4.32276 — 0.00019	
8.69708	8.25181	+ 0.02702 + 0.00131	+ 0.08591 + 0.07841		+ 4.13278 + 0.01019	— 0.01455 + 0.00366	+ 4.32295 + 0.21859	
	7 _n 64514	+ 0.02571 + 0.00008	+ 0.00750 — 0.01813		+ 4.12259 0.61517	— 0.01821 8 _n 26031	+ 4.10436	+ 4.10438 E
		+ 0.02563	+ 0.02563			7 _n 64514		

Wie man sieht, stimmen alle Proben in sehr befriedigender Weise, ausserdem zeigt die starke Herabminderung der Fehlerquadrate von $+ 2.63220$ auf $+ 0.02563$, dass eine sehr wesentliche Verbesserung in der Darstellung der Beobachtungen erreicht werden wird.

§ 4. Bestimmung der Unbekannten aus den Eliminationsgleichungen.

Liegt blos die Aufgabe vor, die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten zu ermitteln, ohne auf die Bestimmung der Unsicherheit derselben eingehen zu wollen, so wird es sich wohl am meisten empfehlen, durch successive Rücksubstitutionen in den vorliegenden Eliminationsgleichungen die Werthe der Unbekannten zu ermitteln; das Schema der Rechnung gestaltet sich hierfür wie folgt:

	$+ [en4]$ $- w [ef4]$	$+ [dn3]$ $- w [df3]$ $- u [de3]$	$+ [en2]$ $- w [ef2]$ $- u [ce2]$ $- t [cd2]$	$+ [bn1]$ $- w [bf1]$ $- u [be1]$ $- t [bd1]$ $- z [bc1]$	$+ [an]$ $- w [af]$ $- u [ae]$ $- t [ad]$ $- z [ac]$ $y [ab]$
	$\Sigma (u)$ $\log \Sigma (u)$ $\log [ee4]$	$\Sigma (t)$ $\log \Sigma (t)$ $\log [dd3]$	$\Sigma (z)$ $\log \Sigma (z)$ $\log [ce2]$	$\Sigma (y)$ $\log \Sigma (y)$ $\log [bb1]$	$\Sigma (x)$ $\log \Sigma (x)$ $\log [aa]$
$\log w$	$\log u$	$\log t$	$\log z$	$\log y$	$\log x$

welches Schema wohl an sich verständlich ist; man hat hierbei nur zu beachten, dass die erste Zeile sofort hingeschrieben werden kann, die zweite Zeile aber mit Benützung des bereits im Eliminationsschema aufgenommenen Werthes von w ; die dritte Zeile erhält man mit Hilfe des Werthes u , der durch die bisherigen Rechnungen bekannt ist u. s. f.; hierbei stellen die Zeichen Σ die Summen der übereinanderstehenden Werthe vor. Die erforderlichen Producte bildet man am einfachsten, indem man den Logarithmus der betreffenden Unbekannten auf den untersten Rand eines Zettels schreibt und denselben hierauf successive über die entsprechenden Logarithmen der Eliminationsgleichungen hält. Man hat hierbei zu beachten, dass man im Eliminationsschema Seite 340 bei dem untersten links vorspringenden Logarithmus zu beginnen und stets in derselben Verticalcolumnne von einer der mit E bezeichneten Eliminationsgleichungen zur anderen nach aufwärts fortzurücken hat; dies wird sofort klar, wenn man sich die Eliminationsgleichungen ausgeschriebener hinstellt, nämlich:

$$\begin{aligned}
 [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t + [ae]u + [af]w &= [an] \\
 + [bb1]y + [bc1]z + [bd1]t + [be1]u + [bf1]w &= [bn1] \\
 + [ce2]z + [cd2]t + [ce2]u + [cf2]w &= [cn2] \\
 + [dd3]t + [de3]u + [df3]w &= [dn3] \\
 + [ee4]u + [ef4]w &= [en4] \\
 + [ff5]w &= [fn5] .
 \end{aligned}$$

Zur Controle der Richtigkeit dieser Elimination kann man die Summe der vorstehenden Gleichungen benützen; es wird nämlich der folgenden Gleichung nach Einsetzung der Werthe der Unbekannten innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung genügt werden müssen:

$$\left. \begin{aligned} &[aa]x \\ &+ \{[ab] + [bb1]\}y \\ &+ \{[ac] + [bc1] + [cc2]\}z \\ &+ \{[ad] + [bd1] + [cd2] + [dd3]\}t \\ &+ \{[ae] + [be1] + [ce2] + [de3] + [ee4]\}u \\ &+ \{[af] + [bf1] + [cf2] + [df3] + [ef4] + [ff5]\}w \end{aligned} \right\} = [an] + [bn1] + [cn2] + [dn3] + [en4] + [fn5]; \quad 1)$$

Ich ziehe es jedoch vor, die Controle mit Hilfe des weiter unten angesetzten Verfahrens herzustellen, welches zwar etwas mehr Arbeit verursacht, aber dann besondere Vortheile bietet, wenn man die Gewichte der Unbekannten bestimmen will. Vorerst werde ich jedoch die Zahlen des obigen Beispieles hier anführen. Nimmt man das obige Schema zum Muster, so ergeben die Eliminationsgleichungen des vorangehenden Paragraphen die Werthe:

	+ 0.07344	— 1.21719	+ 1.57095	+ 1.26957	— 0.53990
	+ 0.00090	— 0.00252	+ 0.24796	— 0.04276	+ 1.52297
		0.00000	+ 0.00283	— 0.09011	+ 1.28121
			— 0.00003	+ 0.00021	+ 0.82334
				— 0.00002	+ 0.02155
					0.00000
	+ 0.07434	— 1.21971	+ 1.82171	+ 1.13689	+ 3.10917
	8.87122	0.08626	0.26048	0.05572	0.49264
	0.61412	0.45199	0.49437	0.11537	0.72003
7.64514	8.25710	9.63427	9.76611	9.94035	9.77261

Die in der letzten Reihe stehenden Werthe sind also die Logarithmen der nummehr ermittelten Unbekannten w, u, t, z, y und x . Hierbei hat man aber zu beachten, dass in Folge des Homogenmachens (vergl. pag. 321) diese Unbekannten mit der oben angenommenen Fehlereinheit durchzumultipliciren sind, und durch die bezüglichen Homogenitätsfactoren zu dividiren wären; ich werde jedoch später auf diesen Umstand nochmals zurückkommen und die entsprechenden Transformationen vornehmen.

Es soll nun jenes Verfahren vorgenommen werden, welches zur unabhängigen Bestimmung einer jeden einzelnen Unbekannten führt; es scheint dasselbe, falls man die Gewichte der Unbekannten bestimmen will, worüber der nächste Paragraph handeln wird, das zweckmässigste zu sein; da ausserdem dieses Verfahren in der That sehr wenig Mehrarbeit verursacht, so möchte ich es stets zur Controle der vorstehend entwickelten Werthe empfehlen, auch wenn man nicht die Gewichte der Unbekannten selbst bestimmen will. Nimmt man die Gleichungen 1), 2), 3), 4) u. 5) (pag. 330, 332, 333) des vorangehenden Paragraphen vor, so gestalten sich dieselben nach einer einfachen Umsetzung:

$$\left. \begin{aligned}
 x + \frac{[ab]}{[aa]} y + \frac{[ac]}{[aa]} z + \frac{[ad]}{[aa]} t + \frac{[ae]}{[aa]} u + \frac{[af]}{[aa]} w &= \frac{[an]}{[aa]} \\
 y + \frac{[bc1]}{[bb1]} z + \frac{[bd1]}{[bb1]} t + \frac{[be1]}{[bb1]} u + \frac{[bf1]}{[bb1]} w &= \frac{[bn1]}{[bb1]} \\
 z + \frac{[cd2]}{[ce2]} t + \frac{[ce2]}{[ce2]} u + \frac{[cf2]}{[ce2]} w &= \frac{[cn2]}{[ce2]} \\
 t + \frac{[de3]}{[dd3]} u + \frac{[df3]}{[dd3]} w &= \frac{[dn3]}{[dd3]} \\
 u + \frac{[ef4]}{[ee4]} w &= \frac{[en4]}{[ee4]} \\
 w &= \frac{[fn5]}{[ff5]}
 \end{aligned} \right\} 2)$$

Multiplieirt man mit Ausschluss der ersten Gleichung die folgenden der Reihe nach mit den unbestimmten Factoren $A_1, A_2, \dots A_5$ und addirt dann diese neuen Gleichungen zu der ersten in 2), so kann man diesen unbestimmten Factoren die Bedingung unterlegen, dass nach der Addition der Reihe nach die Coëfficienten der Unbekannten y, z, t, u und w der Null gleich werden; diesen Bedingungen gemäss wird man daher für die Bestimmung dieser Coëfficienten die Gleichungen aufstellen können:

$$\left. \begin{aligned}
 0 &= \frac{[ab]}{[aa]} + A_1 \\
 0 &= \frac{[ac]}{[aa]} + \frac{[bc1]}{[bb1]} A_1 + A_2 \\
 0 &= \frac{[ad]}{[aa]} + \frac{[bd1]}{[bb1]} A_1 + \frac{[cd2]}{[ce2]} A_2 + A_3 \\
 0 &= \frac{[ae]}{[aa]} + \frac{[be1]}{[bb1]} A_1 + \frac{[ce2]}{[ce2]} A_2 + \frac{[de3]}{[dd3]} A_3 + A_4 \\
 0 &= \frac{[af]}{[aa]} + \frac{[bf1]}{[bb1]} A_1 + \frac{[cf2]}{[ce2]} A_2 + \frac{[df3]}{[dd3]} A_3 + \frac{[ef4]}{[ee4]} A_4 + A_5
 \end{aligned} \right\} 3)$$

Diese Gleichungen lassen in der That die successive Bestimmung der Coëfficienten in sehr einfacher Weise durchführen; sind diese einmal ermittelt, so hat die directe Bestimmung von x keine Schwierigkeit, denn man hat offenbar:

$$x = \frac{[an]}{[aa]} + \frac{[bn1]}{[bb1]} A_1 + \frac{[cn2]}{[ce2]} A_2 + \frac{[dn3]}{[dd3]} A_3 + \frac{[en4]}{[ee4]} A_4 + \frac{[fn5]}{[ff5]} A_5.$$

Um eine ähnliche Gleichung für die folgende Unbekannte zu erhalten, wird man in den Gleichungen 2) die dritte mit B_2 , die vierte mit B_3 u. s. f. multipliciren und dann das Resultat dieser Multiplication zur zweiten Gleichung addiren; legt man den B Coëfficienten wieder die Eigenschaft unter, dass die in dieser Summe auftretenden Factoren der Unbekannten z, t, u und w verschwinden sollen, so müssen dieselben den Bedingungen genügen:

$$\left. \begin{aligned}
 0 &= \frac{[bc1]}{[bb1]} + B_2 \\
 0 &= \frac{[bd1]}{[bb1]} + \frac{[cd2]}{[ce2]} B_2 + B_3 \\
 0 &= \frac{[be1]}{[bb1]} + \frac{[ce2]}{[ce2]} B_2 + \frac{[de3]}{[dd3]} B_3 + B_4 \\
 0 &= \frac{[bf1]}{[bb1]} + \frac{[cf2]}{[ce2]} B_2 + \frac{[df3]}{[dd3]} B_3 + \frac{[ef4]}{[ee4]} B_4 + B_5
 \end{aligned} \right\} 4)$$

Indem man dieses Verfahren fortsetzt, erhält man als weitere Bedingungen-
gleichungen:

$$\begin{array}{lcl}
 \circ = \frac{[e d 2]}{[e e 2]} + C_3 & & \\
 \circ = \frac{[e e 2]}{[e e 2]} + \frac{[d e 3]}{[d d 3]} C_3 + C_4 & & \\
 \circ = \frac{[e f 2]}{[e e 2]} + \frac{[d f 3]}{[d d 3]} C_3 + \frac{[e f 4]}{[e e 4]} C_4 + C_5 & & \\
 \circ = \frac{[d e 3]}{[d d 3]} + D_4 & & \\
 \circ = \frac{[d f 3]}{[d d 3]} + \frac{[e f 4]}{[e e 4]} D_4 + D_5 & & \\
 \circ = \frac{[e f 4]}{[e e 4]} + E_5 & &
 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \\ \\ \\ 6 \\ \\ 7 \end{array}$$

Hat man sich die bezüglichen Coëfficienten den vorstehenden Gleichungen 3), 4), 5), 6) und 7) gemäss bestimmt, so findet man offenbar für die Unbekannten die Werthe:

$$\begin{array}{lcl}
 x = \frac{[a n]}{[a a]} + \frac{[b n 1]}{[b b 1]} A_1 + \frac{[e n 2]}{[e e 2]} A_2 + \frac{[d n 3]}{[d d 3]} A_3 + \frac{[e n 4]}{[e e 4]} A_4 + \frac{[f n 5]}{[f f 5]} A_5 & & \\
 y = \frac{[b n 1]}{[b b 1]} + \frac{[e n 2]}{[e e 2]} B_2 + \frac{[d n 3]}{[d d 3]} B_3 + \frac{[e n 4]}{[e e 4]} B_4 + \frac{[f n 5]}{[f f 5]} B_5 & & \\
 z = \frac{[e n 2]}{[e e 2]} + \frac{[d n 3]}{[d d 3]} C_3 + \frac{[e n 4]}{[e e 4]} C_4 + \frac{[f n 5]}{[f f 5]} C_5 & & \\
 t = \frac{[d n 3]}{[d d 3]} + \frac{[e n 4]}{[e e 4]} D_4 + \frac{[f n 5]}{[f f 5]} D_5 & & \\
 u = \frac{[e n 4]}{[e e 4]} + \frac{[f n 5]}{[f f 5]} E_5 & & \\
 w = \frac{[f n 5]}{[f f 5]} & &
 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} 8)$$

Die Rechnung nach diesen Formeln gestaltet sich ausserordentlich einfach und bequem, wenn man dieselbe in der folgenden Weise ausführt; ich werde wieder zunächst das Rechnungsschema hinschreiben und dann durch den erläuternden Text dasselbe näher ausführen. In die erste Zahlenreihe setze man die Logarithmen der Grössen: $\frac{[a b]}{[a a]}, \frac{[a e]}{[a a]}, \dots, \frac{[a f]}{[a a]}$ mit umgekehrten Zeichen, in die zweite eine Verticalcolumnne einrückend $\log \left(-\frac{[b e 1]}{[b b 1]} \right), \dots, \log \left(-\frac{[b f 1]}{[b b 1]} \right)$ u. s. f. Alle diese Logarithmen findet man schon nur mit Abänderung des Zeichens in der ersten Verticalcolumnne des Eliminationsschemas (pag. 340) mit *) bezeichnet, und zwar in einer ganz analogen Anordnung, so dass kaum das Hinschreiben dieser ersten Zahlengruppe nöthig wäre; doch ziehe ich es vor, diese kleine Mehrarbeit vorzunehmen, weil sich in dieser Anordnung die weiteren Operationen sehr einfach gestalten. Nun beginnt die Rechnung der A-Coëfficienten; zu diesem Ende schlägt man mit Ausschluss des ersten Logarithmus die Zahlen zu den Logarithmen der ersten Reihe auf, bringt sie in die erste Reihe unter den ersten stärker markirten Horizontalstrich und setzt

1	2	3	4	5
$\log \left(- \frac{[ab]}{[aa]} \right)$	$\log \left(- \frac{[ae]}{[aa]} \right)$ $\log \left(- \frac{[be1]}{[bb1]} \right)$	$\log \left(- \frac{[ad]}{[aa]} \right)$ $\log \left(- \frac{[bd1]}{[bb1]} \right)$ $\log \left(- \frac{[cd2]}{[ce2]} \right)$	$\log \left(- \frac{[ae]}{[aa]} \right)$ $\log \left(- \frac{[be1]}{[bb1]} \right)$ $\log \left(- \frac{[ce2]}{[ce2]} \right)$ $\log \left(- \frac{[de3]}{[dd3]} \right)$	$\log \left(- \frac{[af]}{[aa]} \right)$ $\log \left(- \frac{[bf1]}{[bb1]} \right)$ $\log \left(- \frac{[cf2]}{[ce2]} \right)$ $\log \left(- \frac{[df3]}{[dd3]} \right)$ $\log \left(- \frac{[ef4]}{[ce4]} \right)$
	$-\frac{[ae]}{[aa]}$ $-\frac{[be1]}{[bb1]} A_1$	$-\frac{[ad]}{[aa]}$ $-\frac{[bd1]}{[bb1]} A_1$ $-\frac{[cd2]}{[ce2]} A_2$	$-\frac{[ae]}{[aa]}$ $-\frac{[be1]}{[bb1]} A_1$ $-\frac{[ce2]}{[ce2]} A_2$ $-\frac{[de3]}{[dd3]} A_3$	$-\frac{[af]}{[aa]}$ $-\frac{[bf1]}{[bb1]} A_1$ $-\frac{[cf2]}{[ce2]} A_2$ $-\frac{[df3]}{[dd3]} A_3$ $-\frac{[ef4]}{[ce4]} A_4$
$\log A_1$	A_2 $\log A_2$	A_3 $\log A_3$	A_4 $\log A_4$	A_5 $\log A_5$
		$-\frac{[bd1]}{[bb1]}$ $-\frac{[cd2]}{[ce2]} B_2$	$-\frac{[be1]}{[bb1]}$ $-\frac{[ce2]}{[ce2]} B_2$ $-\frac{[de3]}{[dd3]} B_3$	$-\frac{[bf1]}{[bb1]}$ $-\frac{[cf2]}{[ce2]} B_2$ $-\frac{[df3]}{[dd3]} B_3$ $-\frac{[ef4]}{[ce4]} B_4$
	$\log B_2$	B_3 $\log B_3$	B_4 $\log B_4$	B_5 $\log B_5$
			$-\frac{[ce2]}{[ce2]}$ $-\frac{[de3]}{[dd3]} C_3$	$-\frac{[cf2]}{[ce2]}$ $-\frac{[df3]}{[dd3]} C_3$ $-\frac{[ef4]}{[ce4]} C_4$
		$\log C_3$	C_4 $\log C_4$	C_5 $\log C_5$
				$-\frac{[df3]}{[dd3]}$ $-\frac{[ef4]}{[ce4]} D_4$
			$\log D_4$	D_5 $\log D_5$
				$\log E_5$

sofort an der entsprechenden Stelle in der Verticalcolumnne 1 den Werth von $\log A_1$ an, der schon in der ersten Zeile enthalten ist (es ist $A_1 = -\frac{[ab]}{[aa]}$). Diesen Logarithmus bringt man auf den unteren Rand eines Zettels und hält nun diesen über die Logarithmen der zweiten Reihe und schreibt die so erhaltenen Producte in die zweite Zeile der A -Gruppe. Die Addition der zwei Werthe in der zweiten Verticalcolumnne gibt den Werth A_2 , zu dem sofort der Logarithmus aufgeschlagen und an entsprechender Stelle eingetragen wird. Diesen Logarithmus nun schreibt man wieder auf den unteren Rand eines Zettels und hält diesen über die Logarithmen der dritten Zeile; die so gebildeten Producte werden nun in die dritte Zeile der A -Gruppe eingetragen. Die drei Werthe der dritten Verticalcolumnne ergeben den Werth von A_3 . Analog das Verfahren fortsetzend, gelangt man schliesslich bis zum Werthe A_5 . Die B , C , D und E -Werthe werden ganz in der gleichen Weise gebildet, nur denkt man sich die Logarithmen der ersten Zeile für die Ermittlung von B , die zwei ersten Zeilen für die Ermittlung von C u. s. f. weggestrichen. Durch dieses einfache Verfahren, dessen Mechanismus man sich bald zu eigen machen wird, werden die erforderlichen Factoren leicht erhalten.

Nun schreibt man sich auf den unteren Rand eines Zettels der Reihe nach die in der zweiten Verticalcolumnne des Eliminationsschemas (pag. 340) mit dem Zeichen \cdot versehenen Logarithmen von $\frac{[an]}{[aa]}, \frac{[bn1]}{[bb1]}, \dots, \frac{[fn5]}{[ff5]}$, man erhält so einen Zahlenwerth mehr als Verticalcolumnnen in dem vorstehenden Schema sind; hält man nun diesen Zettel so über die Reihe der A -Werthe, dass der Logarithmus von $\frac{[fn5]}{[ff5]}$ über den Logarithmus von A_5 zu stehen kommt, schlägt zu $\frac{[an]}{[aa]}$ die Zahl auf, dann die Zahlen der Producte $A_1 \frac{[bn1]}{[bb1]}, A_2 \frac{[cn2]}{[cc2]}$ u. s. f., und bringt diese Werthe in eine Verticalcolumnne, die mit x überschrieben ist, so ist die Summe dieser Werthe der Werth der Unbekannten x . Nun rückt man den Zettel über die $\log B$ -Reihe, ohne seine Lage gegen die Verticalcolumnnen zu ändern und beachtet nur den ersten Werth, der keinen Logarithmus unter sich stehen hat; zu diesem schlägt man wieder den Werth auf und bildet die Producte $B_2 \frac{[cn2]}{[cc2]}, B_3 \frac{[dn3]}{[dd3]}$ u. s. f., die man in die mit y überschriebene Verticalcolumnne bringt; die Summe dieser Werthe ist die Unbekannte y , und in analoger Weise bilden sich die übrigen Unbekannten.

Das Schema der Rechnung stellt sich wie folgt:

x	y	z	t	u	w
$\begin{bmatrix} an \\ aa \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} bn1 \\ bb1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} cn2 \\ ce2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} dn3 \\ dd3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} en4 \\ ee4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} fn5 \\ ff5 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} bn1 \\ bb1 \end{bmatrix} A_1$	$\begin{bmatrix} cn2 \\ ce2 \end{bmatrix} B_2$	$\begin{bmatrix} dn3 \\ dd3 \end{bmatrix} C_3$	$\begin{bmatrix} en4 \\ ee4 \end{bmatrix} D_4$	$\begin{bmatrix} fn5 \\ ff5 \end{bmatrix} E_5$	
$\begin{bmatrix} cn2 \\ ce2 \end{bmatrix} A_2$	$\begin{bmatrix} dn3 \\ dd3 \end{bmatrix} B_3$	$\begin{bmatrix} en4 \\ ee4 \end{bmatrix} C_4$	$\begin{bmatrix} fn5 \\ ff5 \end{bmatrix} D_5$		
$\begin{bmatrix} dn3 \\ dd3 \end{bmatrix} A_3$	$\begin{bmatrix} en4 \\ ee4 \end{bmatrix} B_4$	$\begin{bmatrix} fn5 \\ ff5 \end{bmatrix} C_5$			
$\begin{bmatrix} en4 \\ ee4 \end{bmatrix} A_4$	$\begin{bmatrix} fn5 \\ ff5 \end{bmatrix} B_5$				
$\begin{bmatrix} fn5 \\ ff5 \end{bmatrix} A_5$					
x log x	y log y	z log z	t log t	u log u	w log w

Benützt man wieder, um diese Schemen durch Zahlenbeispiele zu erläutern, die im vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Eliminationsgleichungen, so stellt sich die Rechnung, wie folgt (vergl. Schema pag. 348):

	1	2	3	4	5
	9.52231	9.62148 8 _n 74956	9 _n 56128 9.20511 9 _n 26575	9.35636 7.94608 8.70009 8 _n 69159	6 _n 18306 7.41992 7.33041 6.03937 8 _n 69708
		+ 0.41829 — 0.01870	— 0.36415 + 0.05338 — 0.07368	+ 0.22717 + 0.00294 + 0.02003 + 0.01890	— 0.00015 + 0.00088 + 0.00086 — 0.00004 — 0.01339
A	9.52231	+ 0.39959 9.60162	— 0.38445 9 _n 58484	+ 0.26904 9.42981	— 0.01184 8 _n 07335
			+ 0.16037 + 0.01036	+ 0.00883 — 0.00282 — 0.00839	+ 0.00263 — 0.00012 + 0.00002 + 0.00012
B		8 _n 74956	+ 0.17073 9.23231	— 0.00238 7 _n 37658	+ 0.00265 7.42325
				+ 0.05013 + 0.00906	+ 0.00214 — 0.00002 — 0.00295
C			9 _n 26575	+ 0.05919 8.77225	— 0.00083 6 _n 91908
					+ 0.00011 + 0.00245
D				8 _n 69159	+ 0.00256 7.40824
E					8 _n 69708

$$\begin{aligned}\log \delta L' &= 1.0025 \\ \log \delta \mu &= 7.4842 \\ \log \delta \Phi &= 0.7807 \\ \log \delta \Psi &= 0.6939 \\ \log \delta \Omega' \sin i' &= 9.6220 \\ \log \delta i' &= 9.0576 .\end{aligned}$$

Schreibt man sich auf den unteren Rand eines Papierses die Logarithmen dieser Grössen mit veränderten Zeichen hin und setzt in die erste Zeile des folgenden Schemas die ursprünglichen Fehler n und darunter die Producte der Unbekannten in die diesbezüglichen Coëfficienten (pag. 320, 321), so wird man durch die Summirung der über einander stehenden Werthe zur Kenntniss der übrig bleibenden Fehler in den einzelnen Coordinaten gelangen; man erhält so die folgenden Resultate:

Rectascensionen.

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	$-37''05$	$-12''73$	$+10''29$	$-9''87$	$-0''05$	$+22''28$	$+27''09$	$+17''07$	$+1''69$
Correct. v. $\delta L'$	-20.49	-15.70	-9.67	-19.68	-17.54	-10.02	-9.89	-14.71	-21.95
» » $\delta \mu$	$+32.29$	$+22.46$	$+12.60$	$+7.12$	$+3.81$	$+0.84$	-0.43	-2.58	-6.99
» » $\delta \Phi$	$+21.62$	-7.01	-12.98	$+21.47$	-4.73	-13.40	-6.64	$+11.39$	$+14.97$
» » $\delta \Psi$	$+3.48$	$+14.00$	-0.59	$+0.08$	$+15.96$	$+0.31$	-9.64	-11.18	$+14.65$
» » $\delta \Omega'$	-0.13	$+0.08$	-0.11	-0.12	$+0.10$	-0.11	$+0.03$	$+0.07$	0.00
» » $\delta i'$	0.00	$+0.03$	0.00	$+0.01$	$+0.02$	0.00	-0.03	$+0.03$	-0.04
v	-0.28	$+1.13$	-0.46	-0.99	-2.43	-0.10	$+0.49$	$+0.17$	$+2.32$
v^2	0.08	1.28	0.21	0.98	5.90	0.01	0.24	0.03	5.38

Declinationen.

No.	10	11	12	13	14	15	16	17	18
n	$-13''43$	$+3''39$	$-5''19$	$-7''56$	$-0''64$	$-8''24$	$-7''35$	$+4''13$	$-1''30$
Correct. v. $\delta L'$	-8.35	$+2.97$	$+3.96$	-7.92	$+1.77$	$+4.11$	$+2.44$	-2.88	-6.40
» » $\delta \mu$	$+13.18$	-4.24	-5.17	$+2.88$	-0.38	-0.36	$+0.09$	-0.51	-2.02
» » $\delta \Phi$	$+8.87$	$+1.42$	$+5.31$	$+8.67$	$+0.51$	$+5.48$	$+1.73$	$+2.25$	$+4.56$
» » $\delta \Psi$	$+1.24$	-2.64	$+0.15$	-0.13	-1.61	-0.21	$+2.34$	-2.17	$+4.14$
» » $\delta \Omega'$	$+0.67$	-0.23	-0.57	$+0.66$	-0.20	-0.58	-0.36	$+0.30$	$+0.45$
» » $\delta i'$	0.00	$+0.15$	-0.01	-0.03	$+0.16$	0.00	-0.12	-0.15	$+0.13$
v	$+2.18$	$+0.82$	-1.52	-3.43	-0.39	$+0.20$	-1.23	$+0.97$	-0.44
v^2	4.75	0.67	2.31	11.76	0.15	0.04	1.51	0.94	0.19

addirt man nun diese Fehlerquadrate, nachdem man dieselben mit ihren Gewichten durchmultiplicirt hat, was im vorliegenden Falle wenig Mühe macht, da alle Bedingungengleichungen das Gewicht 1 haben, mit Ausnahme der Gleichungen No. 3 und 12, denen nur das Gewicht 0.5 zugeschrieben ist, so findet sich:

$$[vr] = 35''17 .$$

Aus der Zahl $[nn6] = 0.02563$ resultirt aber, wenn man dieselbe mit dem Quadrate der angenommenen Fehlereinheit multiplicirt:

$$[nn6] = 35''18$$

was eine befriedigende Uebereinstimmung ist, und eine durchgreifende Controle aller bisherigen Rechnungen abgibt.

§ 3. Bestimmung der Gewichte und der mittleren Fehler der Unbekannten.

Im Falle, dass eine Unbekannte durch directe Beobachtungen bestimmt wurde, war die Auswerthung des Gewichtes des arithmetischen Mittels sehr einfach, indem dasselbe unmittelbar gleich war der Summe der Gewichte der Beobachtungen; viel schwieriger wird aber die Bestimmung der Gewichte in dem nunmehr vorliegenden Falle, wenn durch die Beobachtungen mehrere Unbekannte gleichzeitig bestimmt werden.

Seien die Gewichte der Unbekannten der Reihe nach durch P_x, P_y, P_z, \dots bezeichnet, ferner sollen die Beobachtungswerthe n_1, n_2, n_3, \dots gleiches Gewicht haben. Es ist nämlich oben (pag. 314) gezeigt worden, dass man durch die Multiplication einer jeden Bedingungsgleichung mit der Quadratwurzel des zugehörigen Gewichtes derselben ein System von Beobachtungen von verschiedenen Gewichten auf ein solches mit gleichen Gewichten zurückführen kann; wären also die vorgelegten Beobachtungen von differenter Genauigkeit, so wird vorausgesetzt, dass durch das eben erwähnte Verfahren die Zurückführung auf gleiche Gewichte bewerkstelligt sei.

Die Unbekannte x und ebenso die anderen, werden sich offenbar nach dem linearen Charakter der in Betracht gezogenen Functionen in eine lineare Abhängigkeit von den Beobachtungsfehlern bringen lassen; man wird daher, ohne vorerst auf die Bedeutung der Coëfficienten näher einzugehen, schreiben dürfen:

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3 + \dots \\ y &= \beta_1 n_1 + \beta_2 n_2 + \beta_3 n_3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

Ist ε der mittlere Fehler einer Beobachtung mit der Gewichtseinheit, und sind $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \dots$ die mittleren Fehler der Unbekannten, so lassen sich zunächst sofort die Relationen aufstellen (vergl. pag. 311):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots} = \varepsilon \sqrt{[\alpha \alpha]} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon \sqrt{[\beta \beta]} \\ &\vdots \\ P_x &= \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_x^2} = \frac{1}{[\alpha \alpha]} \\ P_y &= \frac{1}{[\beta \beta]} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

Man hat daher zur Bestimmung des Gewichtes der Unbekannten P_x nur die Bedeutung der Summe $[\alpha \alpha]$ näher zu ermitteln. Hierzu bieten die Normalgleichungen ein geeignetes Mittel; dieselben sind (vergl. pag. 317):

$$\begin{aligned} [a a] x + [a b] y + [a c] z + \dots &= [a n] \\ [a b] x + [b b] y + [b c] z + \dots &= [b n] \\ [a c] x + [b c] y + [c c] z + \dots &= [c n] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Denkt man sich nun ein analoges Gleichungssystem von der Form:

$$\left. \begin{aligned} [aa] Q_1 + [ab] Q_2 + [ac] Q_3 + \dots &= 1 \\ [ab] Q_1 + [bb] Q_2 + [bc] Q_3 + \dots &= 0 \\ [ac] Q_1 + [bc] Q_2 + [cc] Q_3 + \dots &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad 3)$$

so erhält man durch Auflösung dieses Systemes die Werthe der Grösse $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$; addirt man nun die Normalgleichungen, nachdem man dieselben der Reihe nach mit $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ durchmultiplicirt hat, so erhält man mit Rücksicht auf die in 3) aufgestellten Bedingungen nach der Addition:

$$x = [an] Q_1 + [bn] Q_2 + [cn] Q_3 + \dots$$

Löst man nun in dieser Gleichung die Summen auf und ordnet nach den Grössen n , so werden die Coëfficienten der verschiedenen n mit den α -Coëfficienten der Gleichung 1) identisch werden und man wird durch die Gleichsetzung erhalten:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_1 Q_1 + b_1 Q_2 + c_1 Q_3 + \dots \\ a_2 &= a_2 Q_1 + b_2 Q_2 + c_2 Q_3 + \dots \\ a_3 &= a_3 Q_1 + b_3 Q_2 + c_3 Q_3 + \dots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad 4)$$

Um nun die geforderte Bestimmung von $[aa]$ zu erhalten, denke man sich vorerst diese Gleichungen links und rechts mit $a_1, a_2, a_3 \dots$ multiplicirt und addirt, dann folgt sofort mit Rücksicht auf die erste Gleichung und 3):

$$a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + \dots = [aa] = 1 \quad 5)$$

ebenso wird die Multiplication mit b, c u. s. w. ergeben:

$$\left. \begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots &= [ab] = 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \dots &= [ac] = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad 6)$$

weiter gibt aber die Multiplication der Gleichungen 4) mit den zugehörigen α und Addition derselben mit Rücksicht auf die Relationen 5) und 6);

$$[aa] = Q_1 \quad 7)$$

womit also die Bestimmung des reciproken Werthes des Gewichtes von x erreicht ist, da ja die Bestimmung von Q_1 aus den Gleichungen 3) keinen weiteren Schwierigkeiten unterworfen ist. Wollte man in analoger Weise die Bestimmung der Werthe $[\beta\beta], [\gamma\gamma] \dots$ durchführen, so würde man nun in den Gleichungen 3) für die erstere Bestimmung in der zweiten Gleichung rechts vom Gleichheitszeichen die Einheit zu setzen haben, für die anderen Gleichungen aber die Null einsetzen, für die Bestimmung von $[\gamma\gamma]$ würde man die dritte Gleichung der Einheit gleich setzen u. s. f. Man gelangt dadurch zu dem Schlusse, dass man den reciproken Werth des Gewichtes einer jeden Unbekannten leicht erhält, wenn man in die Normalgleichungen der Reihe nach rechts vom Gleichheitszeichen für x die erste

Gleichung, für y die zweite Gleichung u. s. f. der Einheit, die übrigen Coëfficienten rechts vom Gleichheitszeichen der Null gleich setzt und die Gleichungen diesen Bedingungen entsprechend μ mal auflöst, wobei μ die Anzahl der Unbekannten vorstellt; der an Stelle der betreffenden Unbekannten auftretende Werth ist der gesuchte. So einfach scheinbar diese Methode ist, so würde dieselbe in der eben hingestellten Form doch recht beschwerlich ausfallen, weil man das Gleichungssystem μ mal auflösen hätte; es lassen sich aber Methoden der Rechnung angeben, welche diese Arbeit mit Benützung der bereits berechneten Coëfficienten auf eine höchst unbedeutende reduciren.

Dehnt man die folgenden Entwicklungen auf den Fall von 6 Unbekannten aus, so hat man zur Bestimmung des Gewichtes von x nach dem Vorausgehenden in den Normalgleichungen zu setzen:

$$\begin{aligned} [an] &= 1, & [cn] &= 0, & [en] &= 0 \\ [bn] &= 0, & [dn] &= 0, & [fn] &= 0; \end{aligned}$$

beachtet man, dass nach der vorliegenden Methode der Gewichtsbestimmung die Auswerthung des reciproken Werthes des Gewichtes durch die successive Elimination sich genau so gestaltet, wie die Ermittlung des Werthes von x , so sieht man sofort, dass nur jene Hilfsgrößen Abänderungen erfahren werden, die mit n verbunden erscheinen, die übrigen bleiben unverändert; man wird also zu setzen haben, wenn man die bei der directen Bestimmung der Unbekannten (pag. 346, 347) benützten Hilfsgrößen einführt:

$$\left. \begin{aligned} [bn1] &= -\frac{[ab]}{[aa]} = A_1, & [cn2] &= -\frac{[ac]}{[aa]} - \frac{[bc1]}{[bb1]} A_1 = A_2, \\ & & [dn3] &= -\frac{[ad]}{[aa]} - \frac{[bd1]}{[bb1]} A_1 - \frac{[cd2]}{[cc2]} A_2 = A_3, \\ [cn1] &= -\frac{[ac]}{[aa]}, & [dn2] &= -\frac{[ad]}{[aa]} - \frac{[bd1]}{[bb1]} A_1, \\ & & [en3] &= -\frac{[ae]}{[aa]} - \frac{[be1]}{[bb1]} A_1 - \frac{[ce2]}{[cc2]} A_2, \\ [dn1] &= -\frac{[ad]}{[aa]}, & [en2] &= -\frac{[ae]}{[aa]} - \frac{[be1]}{[bb1]} A_1, \\ & & [fn3] &= -\frac{[af]}{[aa]} - \frac{[bf1]}{[bb1]} A_1 - \frac{[cf2]}{[cc2]} A_2, \\ [en1] &= -\frac{[ae]}{[aa]}, & [fn2] &= -\frac{[af]}{[aa]} - \frac{[bf1]}{[bb1]} A_1, \\ [fn1] &= -\frac{[af]}{[aa]}, \\ [en4] &= -\frac{[ae]}{[aa]} - \frac{[be1]}{[bb1]} A_1 - \frac{[ce2]}{[cc2]} A_2 - \frac{[de3]}{[dd3]} A_3 = A_4, \\ [fn4] &= -\frac{[af]}{[aa]} - \frac{[bf1]}{[bb1]} A_1 - \frac{[cf2]}{[cc2]} A_2 - \frac{[df3]}{[dd3]} A_3, \\ [fn5] &= -\frac{[af]}{[aa]} - \frac{[bf1]}{[bb1]} A_1 - \frac{[cf2]}{[cc2]} A_2 - \frac{[df3]}{[dd3]} A_3 - \frac{[ef4]}{[ee4]} A_4 = A_5. \end{aligned} \right\} 8)$$

Oben (pag. 347) war für die directe Bestimmung von x gefunden worden die Gleichung:

$$x = \frac{[an]}{[aa]} + \frac{[bn1]}{[bb1]} A_1 + \frac{[cn2]}{[cc2]} A_2 + \frac{[dn3]}{[dd3]} A_3 + \frac{[en4]}{[ee4]} A_4 + \frac{[fn5]}{[ff5]} A_5 .$$

Man hat also in dem vorliegenden Falle gemäss den Gleichungen 8) (pag. 355) in diesen Ausdruck statt $[an]$, $[bn1]$, $[cn2]$, $[dn3]$, $[en4]$, $[fn5]$ beziehungsweise die Werthe 1, A_1 , A_2 , A_3 , A_4 und A_5 zu setzen und erhält also zur Bestimmung des reciproken Werthes des Gewichtes von x die Gleichung:

$$\frac{1}{P_x} = \frac{1}{[aa]} + \frac{A_1 A_1}{[bb1]} + \frac{A_2 A_2}{[cc2]} + \frac{A_3 A_3}{[dd3]} + \frac{A_4 A_4}{[ee4]} + \frac{A_5 A_5}{[ff5]} . \quad 9)$$

Will man das Gewicht von y bestimmen, so hat man zu setzen:

$$[an] = 0, [bn] = 1, [cn] = 0, [dn] = 0, [en] = 0, [fn] = 0 . .$$

oder was auf dasselbe hinauskommt:

$$\begin{aligned} [bn1] &= 1, & [dn1] &= 0, & [fn1] &= 0, \\ [cn1] &= 0, & [en1] &= 0, \end{aligned}$$

verfährt man nun in ganz ähnlicher Weise wie oben, so wird man leicht finden, dass für die Bestimmung des Gewichtes von y , welches durch P_y bezeichnet ist, resultirt:

$$\frac{1}{P_y} = \frac{1}{[bb1]} + \frac{B_2 B_2}{[cc2]} + \frac{B_3 B_3}{[dd3]} + \frac{B_4 B_4}{[ee4]} + \frac{B_5 B_5}{[ff5]} .$$

Zur Bestimmung des Gewichtes von z wird man zu setzen haben:

$$\begin{aligned} [cn2] &= 1 & [en2] &= 0 \\ [dn2] &= 0, & [fn2] &= 0, \end{aligned}$$

von t :

$$\begin{aligned} [dn3] &= 1, & [fn3] &= 0 \\ [en3] &= 0, \end{aligned}$$

von u :

$$[en4] = 1, \quad [fn4] = 0$$

von w :

$$[fn5] = 1 .$$

Es bestimmen sich also die reciproken Werthe der Gewichte der einzelnen Unbekannten durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P_x} &= \frac{1}{[aa]} + \frac{A_1 A_1}{[bb1]} + \frac{A_2 A_2}{[cc2]} + \frac{A_3 A_3}{[dd3]} + \frac{A_4 A_4}{[ee4]} + \frac{A_5 A_5}{[ff5]} \\ \frac{1}{P_y} &= \frac{1}{[bb1]} + \frac{B_2 B_2}{[cc2]} + \frac{B_3 B_3}{[dd3]} + \frac{B_4 B_4}{[ee4]} + \frac{B_5 B_5}{[ff5]} \\ \frac{1}{P_z} &= \frac{1}{[cc2]} + \frac{C_3 C_3}{[dd3]} + \frac{C_4 C_4}{[ee4]} + \frac{C_5 C_5}{[ff5]} \\ \frac{1}{P_t} &= \frac{1}{[dd3]} + \frac{D_4 D_4}{[ee4]} + \frac{D_5 D_5}{[ff5]} \\ \frac{1}{P_u} &= \frac{1}{[ee4]} + \frac{E_5 E_5}{[ff5]} \\ \frac{1}{P_w} &= \frac{1}{[ff5]} \end{aligned} \right\} \quad 10)$$

Aus den Gleichungen 10) erhält man also mit Hilfe der bereits vorhandenen Hilfsgrößen in sehr einfacher Weise die reciproken Werthe der Gewichte, wobei man zu beachten haben wird, dass dies eigentlich jene Werthe sind, deren man zur Bestimmung der mittleren Fehler bedarf, da ja die Quadrate der mittleren Fehler umgekehrt proportional den Gewichten sind. Ausserdem ist es klar, dass von einer Gewichtsbestimmung ganz wohl die Rede sein kann, wenn die Anzahl der Bedingungsgleichungen der Anzahl der Unbekannten gleich ist.

Die Bestimmung der mittleren Fehler der Unbekannten wird also sofort thunlich sein, wenn der mittlere Fehler einer Beobachtung mit dem Gewichte 1 bekannt ist; es sollen nun die zur Bestimmung der letzteren Grösse nöthigen Ableitungen vorgenommen werden, wobei die schon früher berechnete Grösse $[vv] = [nn]$ ihre Verwendung findet.

Es sei der mittlere Fehler einer Beobachtung mit der Gewichtseinheit ε und es wird vorausgesetzt, dass alle Bedingungsgleichungen das gleiche Gewicht haben, was stets dadurch erreicht wird (vergl. pag. 314), dass man vor Beginn der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate alle vorhandenen Bedingungsgleichungen mit der Quadratwurzel des zugehörigen Gewichtes durchmultipliziert; das Gewicht einer solchen Gleichung soll nun der Einheit gleich sein, also der mittlere Fehler derselben ε ; bezeichnet man wieder mit $v_1, v_2, v_3 \dots$ die Unterschiede zwischen der Beobachtung und Rechnung nach erfolgter Ausgleichung, mit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \dots$ die wirklichen Beobachtungsfehler, sind $x, y, z \dots$ die durch die Ausgleichungsrechnungen gefundenen Werthe der Unbekannten, $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z \dots$ die wahren Werthe derselben, so hat man offenbar (vergl. pag. 315) die zwei Gleichungssysteme:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots - n_1 &= -v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots - n_2 &= -v_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \dots - n_3 &= -v_3 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad 11)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 (x + \delta x) + b_1 (y + \delta y) + c_1 (z + \delta z) + \dots - n_1 &= -\mathcal{A}_1 \\ a_2 (x + \delta x) + b_2 (y + \delta y) + c_2 (z + \delta z) + \dots - n_2 &= -\mathcal{A}_2 \\ a_3 (x + \delta x) + b_3 (y + \delta y) + c_3 (z + \delta z) + \dots - n_3 &= -\mathcal{A}_3 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad 12)$$

Multipliziert man nun die Gleichungen 11) der Reihe nach mit $v_1, v_2, v_3 \dots$ und addirt, so erhält man, da die Relation (vergl. pag. 337) besteht:

$$[av] = [bv] = [cv] = \dots = 0,$$

sofort:

$$[vn] = [vv] \quad 13)$$

Verfährt man ebenso mit den Gleichungen 12), so findet sich andererseits:

$$[vn] = [v\mathcal{A}]. \quad 14)$$

Die Vereinigung der Resultate der Gleichungen 13) und 14) ergibt:

$$[vv] = [v\mathcal{A}]. \quad 15)$$

Um nun die Summe der thatsächlichen Fehlerquadrate $[AA]$ mit der minimalen $[vv]$ mit Hilfe der Fehler der Unbekannten in Verbindung zu bringen, multiplicirt man die Gleichungen 11) und 12) der Reihe nach mit $A_1, A_2, A_3 \dots$ und erhält so durch Addition:

$$\begin{aligned} [aA]x + [bA]y + [cA]z + \dots - [nA] &= -[vA] = -[vv] \\ [aA](x + \delta x) + [bA](y + \delta y) + [cA](z + \delta z) + \dots - [nA] &= -[AA] \end{aligned}$$

Die Subtraction dieser Gleichungen ergibt:

$$[AA] = [vv] - [aA]\delta x - [bA]\delta y - [cA]\delta z - \dots \quad 16)$$

wobei offenbar nach der Idee des mittleren Fehlers zu setzen sein wird:

$$[AA] = m\epsilon\epsilon, \quad 17)$$

wenn m die Anzahl der Bedingungsgleichungen vorstellt. Die Bestimmung von $[AA]$ aus der Gleichung 16) hätte keine weitere Schwierigkeit, wenn die Fehler der für die Unbekannten gefundenen Werthe bekannt wären, eine Bestimmung die offenbar unthunlich ist; doch soll sofort gezeigt werden, welche Werthe man diesen Fehlern nach den Principien der Wahrscheinlichkeit beimessen kann. Multiplicirt man die Gleichungen 12) der Reihe nach mit $a_1, a_2, a_3 \dots$ und addirt dieselben so findet sich leicht:

$$\left. \begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \dots - [an] \\ + [aa]\delta x + [ab]\delta y + [ac]\delta z + \dots \end{aligned} \right\} = -[aA] \quad 18)$$

Nun ist aber die erste Zeile in diesem Ausdrucke der Bestimmung der Normalgleichungen entsprechend der Null gleich, man hat daher, wenn man die analogen Resultate hinschreibt, die die Multiplication mit den $b, c \dots$ Coëfficienten ergibt:

$$\left. \begin{aligned} [aa]\delta x + [ab]\delta y + [ac]\delta z + \dots + [aA] &= 0 \\ [ab]\delta x + [bb]\delta y + [bc]\delta z + \dots + [bA] &= 0 \\ [ac]\delta x + [bc]\delta y + [cc]\delta z + \dots + [cA] &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad 19)$$

Die Gleichungen 19) sind wie Normalgleichungen zusammengesetzt, nur stehen an Stelle der Unbekannten die Fehler derselben und anstatt n die Grössen $-A$; es wird daher die Bestimmung dieser Fehler durch die Grössen $-A$ in derselben Weise vorgenommen werden dürfen, wie die Bestimmung der Unbekannten aus n und man wird deshalb die in der Gleichung 1) (pag. 353) auftretenden $\alpha, \beta, \gamma \dots$ Coëfficienten ohne Abänderung benützen dürfen und die Relationen erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= -\{ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \dots \} \\ \delta y &= -\{ \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 + \dots \} \\ \delta z &= -\{ \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 + \dots \} \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad 20)$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen 16) ein, so wird man, wenn man die Summe $[aA]$ auflöst, für die einzelnen Glieder erhalten:

$$\left. \begin{aligned} - [a \mathcal{A}] \delta x &= (a_1 \mathcal{A}_1 + a_2 \mathcal{A}_2 + a_3 \mathcal{A}_3 + \dots) (\alpha_1 \mathcal{A}_1 + \alpha_2 \mathcal{A}_2 + \alpha_3 \mathcal{A}_3 + \dots) \\ - [b \mathcal{A}] \delta y &= (b_1 \mathcal{A}_1 + b_2 \mathcal{A}_2 + b_3 \mathcal{A}_3 + \dots) (\beta_1 \mathcal{A}_1 + \beta_2 \mathcal{A}_2 + \beta_3 \mathcal{A}_3 + \dots) \\ - [c \mathcal{A}] \delta z &= (c_1 \mathcal{A}_1 + c_2 \mathcal{A}_2 + c_3 \mathcal{A}_3 + \dots) (\gamma_1 \mathcal{A}_1 + \gamma_2 \mathcal{A}_2 + \gamma_3 \mathcal{A}_3 + \dots) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad 21)$$

Man wird vor Allem behaupten können, dass diese Producte nothwendig positiv sein müssen, denn die Constanten sind so bestimmt, dass $[v v]$ ein Minimum ist; jede von der durch die Normalgleichung erhaltenen Bestimmung der Unbekannten abweichende Bestimmung wird daher diese Fehlerquadratsumme vermehren müssen, woraus unmittelbar mit Berücksichtigung der Gleichung 16) die aufgestellte Behauptung bestätigt wird.

Führt man nun die in 21) angezeigten Multiplicationen durch und beschränkt sich auf die erste Gleichung allein, indem die übrigen in gleicher Weise behandelt werden können, so kann das Resultat dieser Multiplication in der folgenden Weise hingeschrieben werden:

$$- [a \mathcal{A}] \delta x = a_1 \alpha_1 \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1 + a_2 \alpha_2 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_2 + a_3 \alpha_3 \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_3 + \dots + \Sigma q (\mathcal{A}_p \mathcal{A}_r)$$

wobei unter den Zeichen Σ alle jene Producte zusammengefasst gedacht erscheinen, die verschiedenen Fehlern angehören, während die ersteren Glieder die Quadrate dieser Fehler enthalten; setzt man nun für $\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3 \mathcal{A}_3$.. ihre mittleren Fehlerquadrate $\varepsilon \varepsilon$ und beachtet, dass nach Gleichung 5) (pag. 354) ist:

$$[a a] = 1,$$

so erhält man:

$$- [a \mathcal{A}] \delta x = \varepsilon \varepsilon + \Sigma q (\mathcal{A}_p \mathcal{A}_r);$$

der erste Theil rechter Hand wird als Quadrat nothwendig positiv sein, also der obigen Forderung, dass $- [a \mathcal{A}] \delta x$ positiv ist, genügen; im letzteren Theile wird aber wegen der Combination der verschiedenen Fehler mit einander, und da positive und negative Fehler die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, die angezeigte Summe bald positive bald negative Werthe erhalten, die aber im Allgemeinen gegen das erstere Glied klein sein werden; man darf daher im Durchschnitte annehmen, dass ist

$$- [a \mathcal{A}] \delta x = \varepsilon \varepsilon :$$

durch ganz ähnliche Schlüsse erhält man die Relationen:

$$- [b \mathcal{A}] \delta y = - [c \mathcal{A}] \delta z = \dots = \varepsilon \varepsilon .$$

Setzt man diese Relationen in die Gleichung 16) ein, so erhält man also, wenn man mit μ die Anzahl der Unbekannten bezeichnet, mit Rücksicht auf 17):

$$m \varepsilon \varepsilon = [v v] + \mu \varepsilon \varepsilon$$

in welcher Gleichung m die Anzahl der Bedingungsgleichungen vorstellt; bestimmt man daraus ε , so findet sich:

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{m - \mu}} \quad 22)$$

womit die verlangte Bestimmung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit erlangt ist. Die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers nach dieser Formel zeigt, dass

an eine solche nur gedacht werden kann, wenn mehr Bedingungsgleichungen vorhanden sind, als die Anzahl der Unbekannten beträgt. Verbindet man diese so gewonnenen Werthe von ε mit den durch die Gleichung 10) (pag. 356) bestimmten Gewichten, so erhält man die mittleren Fehler der Unbekannten bestimmt durch:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_x}} \\ \varepsilon_y &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_y}} \\ \varepsilon_z &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_z}} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad 23)$$

Indem somit die letzte gestellte Aufgabe erledigt erscheint, wird es wieder angemessen erscheinen, die Rechnungsschemen anzugeben und durch ein Beispiel zu erläutern. Zur Berechnung der Formeln 10) wird man sich in das Schema in der unmittelbar ersichtlichen Weise die Logarithmen der Quadrate der bereits ermittelten Hilfsgrößen eintragen, auf den unteren Rand eines Papiere die Com-
plemente der Logarithmen von $[aa]$, $[bb1]$, $[cc2]$, $[dd3]$, $[ee4]$, $[ff5]$ aufschreiben und diese Logarithmen über die A^2 Zeile halten, so dass $\log \frac{1}{[ff5]}$ über $\log A_5^2$ zu stehen kommt; hierbei wird der $\log \frac{1}{[aa]}$ über die Zahlen des Schemas hinausragen; zu diesem letzteren Logarithmus wird man die Zahl aufschlagen und unter dieselbe in eine Vertikalcolumnne die übrigen Produkte der Horizontalzeile bringen, die Summe dieser Zahlen ist der reciproke Werth des Gewichtes von x ; nun rückt man das Papier vertikal um eine Horizontalzeile herab, schlägt zum ersten nach links vorstehenden Logarithmus die Zahl und die übrigen Produkte auf und bringt alles wieder in eine Vertikalcolumnne, die Summe dieser Werthe ist $\frac{1}{P_y}$ u. s. f.; das Schema stellt sich also wie folgt:

	1	2	3	4	5
	$\log A_1^2$	$\log A_2^2$ $\log B_2^2$	$\log A_3^2$ $\log B_3^2$ $\log C_3^2$	$\log A_4^2$ $\log B_4^2$ $\log C_4^2$ $\log D_4^2$	$\log A_5^2$ $\log B_5^2$ $\log C_5^2$ $\log D_5^2$ $\log E_5^2$
1	1	1	1	1	
$[aa]$	$[bb1]$	$[cc2]$	$[dd3]$	$[ee4]$	
$A_1 A_1$	$B_2 B_2$	$C_3 C_3$	$D_4 D_4$	$E_5 E_5$	
$[bb1]$	$[cc2]$	$[dd3]$	$[ee4]$	$[ff5]$	
$A_2 A_2$	$B_3 B_3$	$C_4 C_4$	$D_5 D_5$		
$[cc2]$	$[dd3]$	$[ee4]$	$[ff5]$		
$A_3 A_3$	$B_4 B_4$	$C_5 C_5$			
$[dd3]$	$[ee4]$	$[ff5]$			
$A_4 A_4$	$B_5 B_5$				
$[ee4]$	$[ff5]$				
$A_5 A_5$					
$[ff5]$					
$1 : P_x$ $\log (1 : P_x)$	$1 : P_y$ $\log (1 : P_y)$	$1 : P_z$ $\log (1 : P_z)$	$1 : P_t$ $\log (1 : P_t)$	$1 : P_u$ $\log (1 : P_u)$	$1 : P_v$ $\log (1 : P_v)$

Die Fortsetzung des oben gegebenen Rechnungsbeispielles gibt also mit Rücksicht auf das obige Schema:

	9.04462	9.20324 7.49912	9.16968 8.46462 8.53150	8.85962 4.75316 7.54450 7.38318	6.14670 4.84650 3.83816 4.81648 7.39416
+0.19053 +0.08496 +0.05115 +0.05220 +0.01760 +0.00003	+0.76670 +0.00101 +0.01029 +0.00000 +0.00000	+0.32035 +0.01201 +0.00085 +0.00000	+0.35319 +0.00059 +0.00000	+0.24316 +0.00060	
+0.39647 9.5982	+0.77800 9.8910	+0.33321 9.5227	+0.35378 9.5487	+0.24376 9.3870	9.3848

Die Summe der übrig bleibenden Fehlerquadrate ist (vergl. pag. 343):

$$[vv] = [nn6] = 0.02563.$$

Da im vorliegenden Falle $m = 18$ und $\mu = 6$ ist, so findet sich der mittlere Fehler einer Bedingungsgleichung nach der Formel 23) (pag. 360):

$$\log \varepsilon = 8.6647.$$

Will man diesen mittleren Fehler in Bogensekunden kennen, so wird man dieses so gefundene ε mit der Fehlereinheit, deren Logarithmus oben mit 1.5688 angenommen wurde, zu multipliciren haben und es findet sich also:

$$\varepsilon = \pm 1''712;$$

will man nun die Unsicherheit, d. h. den mittleren Fehler der Elemente selbst kennen, so wird man zu beachten haben, dass die vorliegende Auflösung nicht die Unbekannten selbst gibt, sondern Unbekannte, die in einer linearen Relation zu den ersteren stehen; die diesbezüglichen Factoren wurden oben (pag. 321) angenommen (die Coëfficienten sind logarithmisch angesetzt):

$$\begin{aligned} x &= 0.33893 \partial L', & t &= 0.50920 \partial \Psi \\ y &= 4.02489 \partial \mu, & u &= 0.20387 \partial \Omega' \sin i' \\ z &= 0.55422 \partial \Phi, & w &= 0.15635 \partial i' \end{aligned}$$

man wird also die Quadratwurzeln der gefundenen Reciproken der Gewichte mit ε zu multipliciren und durch die diesbezüglichen Homogenitätscoëfficienten zu dividiren haben, um die mittleren Fehler der Elemente zu erhalten, und mit Benützung der vorstehenden Zahlen finden:

$$\begin{aligned} \text{mittlerer Fehler von } \partial L' &= \pm 0''494 \\ \text{„ „ „ } \partial \mu &= \pm 0.000143 \\ \text{„ „ „ } \partial \Phi &= \pm 0.276 \\ \text{„ „ „ } \partial \Psi &= \pm 0.315 \\ \text{„ „ „ } \partial \Omega' \sin i' &= \pm 0.529 \\ \text{„ „ „ } \partial i' &= \pm 0.588. \end{aligned}$$

§ 6. Behandlung der vorgelegten Aufgabe im Falle, dass die Auflösung der Normalgleichungen besonderen Unsicherheiten unterworfen ist.

Die in den vorausgehenden Paragraphen gegebenen Vorschriften bedürfen unter Umständen einer etwas veränderten Behandlung, wenn nämlich die Auflösung der Normalgleichungen besondere Unsicherheiten bietet; man erkennt diese Unsicherheiten, wenn man nicht schon vor Beginn der Lösung von diesem Umstande Kenntniss hat, sofort daran, dass der erste Coëfficient einer oder mehrer Eliminationsgleichungen sehr klein wird; es sind diese Coëfficienten oben mit den Symbolen $[aa]$, $[bb_1]$, $[cc_2]$, $[dd_3]$, ... identificirt worden. Diese Coëfficienten müssen, wie man dies aus ihrer Entstehung sofort ableitet (vergl. pag. 331), nothwendig positiv sein, es kann aber in Fällen besonderer Unsicherheit, wo dann der fragliche Coëfficient unter die Grenze der Sicherheit der Rechnung tritt, der paradoxe Fall eintreten, dass dieser Coëfficient thatsächlich negativ gefunden wird. Die Ursache dieser Erscheinung ist oben (pag. 332) erklärt worden, als bedingt durch das nahe proportionale Verhältniss zweier oder mehrer Coëfficientenreihen. Ist der Zusammenhang zwischen den Unbekannten und den Beobachtungen ein völlig linearer, so kann dem eben bemerkten Nachtheile dadurch begegnet werden, dass man die ganze Rechnung auf eine grössere Anzahl von Decimalen, als im Endresultate verlangt werden, anlegt; doch macht diese Ausdehnung der Rechnung auf mehr Decimalen die Arbeit bei den zahlreichen Multiplicationen sehr mühsam und zeitraubend. Bei der Anwendung auf die in dem vorliegenden Werke auftretenden Probleme hat man aber niemals mit solchen linearen Functionen zu thun, so dass das eben in Vorschlag gebrachte Verfahren wenig Aussicht auf Erfolg hätte, denn die in Anwendung gebrachten Differentialquotienten zwischen den Incrementen der Unbekannten und den beobachteten Werthen werden bei so bedeutenden Aenderungen nicht constant angenommen werden dürfen. Man wird aber hieraus die im Allgemeinen zu wenig beachtete Bemerkung ableiten, dass man die Wahl der Unbekannten des Problems so vorzunehmen hat, dass der Zusammenhang zwischen den Aenderungen derselben und den Beobachtungen ein möglichst linearer wird; hierfür können aber keine allgemeinen Methoden gegeben werden, und man wird von Fall zu Fall für das vorgelegte Problem die entsprechendsten Hilfsmittel einzuführen trachten. So viel kann man aber im Allgemeinen bemerken, dass man durch die Lösung des Problems unter Voraussetzung der Linearität der Functionen den gesuchten Resultaten näher kommen wird; trifft diese Annäherung nicht hinreichend zu, so wird die Anwendung der mit Hilfe des zuletzt gewonnenen Resultates neu berechneten Differentialquotienten eine abermalige Verbesserung finden lassen, welches Verfahren fortgesetzt im Allgemeinen eine mehr minder rasche Convergenz zeigen wird. Man wird aber leicht bemerken, dass dieser Vorgang viel an Kürze zu wünschen übrig lassen wird, denn man hat für jede Verbesserung die Rechnungen ganz vom Anfang an neu durchzuführen; die in diesem Werke

angeführten Methoden sind jedoch so gewählt, dass man wohl nur in sehr seltenen Fällen auf dieses beschwerliche Verfahren zurückgeführt wird.

Man wird meist schon bei Beginn der Rechnungen theils durch anderweitig gewonnene Erfahrungen, theils aus theoretischen Betrachtungen wissen können, ob in dem vorgelegten Falle besondere Unsicherheiten in der Lösung des Problemcs zu erwarten sind; so wird z. B. die Bestimmung der Bahnelemente eines kleinen Planeten aus den Beobachtungen einer Opposition meist in zwei Elementen eine besondere Unsicherheit hervortreten lassen, aus zwei Oppositionen in einem; die Bestimmung einer Kometenbahn aus den Beobachtungen einer Erscheinung wird im Allgemeinen meist nur eine Unbekannte besonders unsicher erscheinen lassen. Man wird sich hierbei klar zu machen haben, dass diese Unsicherheit, wenn nicht die Wahl der Unbekannten besonders zweckmässig vorgenommen werden kann, sich meist auf die übrigen Unbekannten erstreckt, indem sich diese als Functionen des unsicheren Elementes darstellen lassen; die Bestimmung der übrigen Elemente erscheint sofort sicher, wenn man eine Relation einführt, die die Unsicherheit in dem fraglichen Elemente aufhebt. Bei Bahnbestimmungen werden aber solche, die Unsicherheit behebende Relationen selten genug herbeigeschafft werden können, wenn nicht anderweitige neue, der Zeit nach weit abstehende Beobachtungen herangezogen werden können; doch wird zum Beispiel der Umstand, dass die meisten Kometen nahezu parabolische Bahnen haben, benützt werden können, bei der Lösung des Problemcs in diesem Falle $e = 1$ zu setzen; es wird durch diese Specialisirung in den meisten Fällen die Unsicherheit in der Auffindung der Elemente behoben.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen will ich nun noch auf die Methode eingehen, die man im Falle einer besonderen Unsicherheit in der Auflösung der Normalgleichungen anwenden kann, um so weit als thunlich Resultate zu erlangen, die den Principien der Wahrscheinlichkeit gemäss bestimmt sind. Es ist klar, dass, da im Allgemeinen zu dieser Lösung keine neuen theoretischen Bedingungen eingeführt werden können und dürfen, eigentlich das Bestreben nur dahin gerichtet werden muss, die Auflösung der Normalgleichungen derartig einzurichten, dass der Unsicherheit der Rechnung der möglichst geringe Einfluss eingeräumt wird. Ich werde wieder, wie oben, voraussetzen, dass sechs Unbekannte zu bestimmen seien, von denen zwei einer besonderen Unsicherheit unterworfen sind; es wird diese letztere Beschränkung für die vorliegenden Zwecke ausreichend sein und die Zurückführung auf den einfacheren Fall, wo nur eine Unbekannte unsicher bestimmt erscheint, sich leicht machen lassen. Man wird vorerst die Rechnung so anlegen, dass die voraussichtlich mit besonderen Unsicherheiten behafteten zwei Unbekannten als die letzten erscheinen, was meist a priori entschieden werden kann; wenn dies nicht möglich wäre, so wird eine vorläufige Lösung der Normalgleichung die gewünschte Aufklärung geben; ich setze also voraus, dass die Bestimmung der Unbekannten u und w besonderen Unsicherheiten unterworfen ist; es werden demnach in der vollständigen Elimination die Coëfficienten $[ee_4]$ und $[ff_5]$ ausserordentlich klein. Ich hebe hier nochmals hervor, dass sich diese Unsicherheit gewöhnlich auch

den anderen Unbekannten in verschiedenem Maasse mittheilt. Unter den eben gemachten Voraussetzungen wird also die Bildung der Eliminationsgleichungen bis zur fünften Gleichung (Elimination von u) keine Unsicherheit bieten; man wird deshalb ohne Bedenken nach der bisherigen Methode die folgenden Eliminationsgleichungen bilden können:

$$\left. \begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t + [ae]u + [af]w &= [an] \\ [bb_1]y + [bc_1]z + [bd_1]t + [be_1]u + [bf_1]w &= [bn_1] \\ [cc_2]z + [cd_2]t + [ce_2]u + [cf_2]w &= [cn_2] \\ [dd_3]t + [de_3]u + [df_3]w &= [dn_3] \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

Diese Eliminationsgleichungen werden aber offenbar die Unbekannten als Funktionen von u und w darstellen lassen, durch successive Substitution oder durch irgend ein zweckmässiges Eliminationsverfahren, indem hier die vier ersten Unbekannten die Formen erhalten:

$$\left. \begin{aligned} t &= (\alpha t) + (\beta t)u + (\gamma t)w \\ z &= (\alpha z) + (\beta z)u + (\gamma z)w \\ y &= (\alpha y) + (\beta y)u + (\gamma y)w \\ x &= (\alpha x) + (\beta x)u + (\gamma x)w \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

wobei jetzt die in runden Klammern stehenden Coëfficienten von Fall zu Fall bekannte Grössen sind. Man wird zu 2) bemerken können, dass, wofern man auf eine Bestimmung der Unbekannten u und w verzichtet, und dieselben der Null gleich setzt, die erste verticale Coëfficientenreihe die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten unter der gemachten Voraussetzung ergibt. Andererseits wird die Grösse der β und γ Coëfficienten die aus der Unsicherheit der Elemente u und w entstehende Unsicherheit in den anderen Elementen aufweisen, wobei häufig der Fall eintreten wird, dass einer oder mehrere dieser Coëfficienten klein werden; man wird daraus den Schluss ableiten dürfen, dass in diesem Falle für das betreffende Element die Unsicherheit von u und w ohne wesentlichen Nachtheil ist. Hat man für u und w in der That die unsichersten Elemente gesetzt, so wird keiner der β und γ Coëfficienten die Einheit überschreiten; sollte dies aber doch der Fall sein, so deutet dieser Umstand darauf hin, dass man dieses Element hätte als letztes wählen sollen, doch wird dies keinen wesentlichen Nachtheil für die Rechnung haben, so lange nicht ein solcher Coëfficient die Einheit um ein Vielfaches überschreitet.

Die Bestimmung dieser in 2) auftretenden Coëfficienten muss sorgfältig controlirt werden, da diese Coëfficienten die Grundlage für alle späteren Rechnungen abgeben. Indem vorausgesetzt ist, dass diese durch die Methode der unmittelbaren Substitution erhalten sind, kann zu deren Controle in sehr übersichtlicher Weise mit Hilfe der bereits oben (pag. 346, 347) eingeführten $A, B, C \dots$ Coëfficienten eine nochmalige Bestimmung erhalten werden; man findet leicht, wenn man beachtet, dass die mit dem Index 5 versehenen Coëfficienten sich der Voraussetzung nach einer sicheren Berechnung entziehen:

so wird man vorerst zu beachten haben, dass man als Controle der bisherigen Rechnungen (vgl. pag. 337) benützen kann:

$$[n \ n \ 4] = [n' \ n'] . \quad 7)$$

Mit Hilfe der Relationen 4) und 6) (pag. 365) hat man also den Zusammenhang zwischen den Unbekannten u und w mit den Beobachtungen auf die einfachste und directeste Weise hergestellt, man hat nämlich jetzt die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (\beta_1) u + (\gamma_1) w &= n_1' \\ (\beta_2) u + (\gamma_2) w &= n_2' \\ (\beta_3) u + (\gamma_3) w &= n_3' \\ \vdots \quad \quad \quad &\quad \quad \quad \end{aligned} \right\} \quad 8)$$

die zur Bestimmung von u und w verwerthet werden können. Es ist also hiermit das anfangs angedeutete Ziel erreicht, die Bestimmung der Unbekannten u und w aus den Beobachtungen selbst durch möglichst wenig Zwischenrechnungen herstellen zu können, und mehr ist, wie schon oben angedeutet wurde, nicht zu leisten. Diese Gleichungen 8) werden einen sehr sicheren Maassstab abgeben, ob die Bestimmung der Unbekannten u und w oder einer derselben überhaupt möglich ist; werden nämlich die Coëfficienten (β) und (γ) alle gleichzeitig so klein, dass dieselben gleich geachtet werden können der Unsicherheit der angewandten Rechnungsmethode, so ist eine Bestimmung beider Unbekannten völlig unthunlich, haben aber diese Coëfficienten eine angemessene Grösse, so kann dennoch die Bestimmung der einen Unbekannten unmöglich sein, wenn die zusammengehörigen (β) und (γ) Coëfficienten nahe proportional sind; dieser Umstand braucht jedoch vorerst hier nicht beachtet zu werden, er tritt ohnehin bei den weiteren Schritten der Auflösung von selbst hervor. Es soll nun vorausgesetzt werden, dass diese Coëfficienten, wie dies wohl in der Regel der Fall sein wird, eine angemessene Grösse haben, welche die unvermeidliche Unsicherheit der Rechnung wesentlich überschreitet. Die Bedingungsgleichungen 8) enthalten zwar keine neuen Bedingungen gegen die ursprünglichen Gleichungen und dürfen dieselben auch nicht enthalten, gewähren aber den Vorthail, dass denselben bereits vier Bedingungen (allgemein $(\mu-2)$ Bedingungen) der Normalgleichungen genügen, daher die noch zu erfüllenden Bedingungen einfacher präcisirt werden können. Es kann hier noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass es sich für die Bequemlichkeit der Rechnung empfiehlt, die Gleichungen 8) ähnlich wie dies mit den ursprünglichen Bedingungsgleichungen geschehen ist, durch Einführung von Homogenitätsfactoren (vergl. pag. 318) umzugestalten; man wird nur schliesslich bei der Bestimmung der Werthe der Unbekannten diese Factoren gehörig zu berücksichtigen haben. Bildet man nun nach den bekannten Regeln aus den Gleichungen 8) die Normalgleichungen, so erhalten dieselben die Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} [\beta \beta] u + [\beta \gamma] w &= [\beta n'] \\ [\beta \gamma] u + [\gamma \gamma] w &= [\gamma n'] \end{aligned} \right\} \quad 9)$$

doch wird man nur nöthig haben, die Coëfficienten der ersten Gleichung allein

zu berechnen, da vorerst nur die Absicht vorliegt, u als Funktion von w darzustellen. Es ist klar, dass bis auf eventuell eingeführte Homogenitätsfactoren, die leicht in Rechnung zu ziehen sind, nothwendig nach der Herstellung und den Bedingungen der Gleichungen sein muss:

$$[\beta\beta] = [ee_4], [\beta\gamma] = [ef_4], [\beta n'] = [en_4], \quad 10)$$

doch wird diese Identität nur theoretisch bestehen, in der Anwendung werden mehr oder minder grosse Unterschiede auftreten, je nach dem Maasse der vorhandenen Unsicherheit in der Lösung der Normalgleichungen; es werden jedoch die aus den Gleichungen 9) resultirenden Werthe den Vorzug verdienen, da dieselben aus einer fast directen Rechnung erlangt sind, und in der That das hier vorgeschlagene modificirte Verfahren angewendet wurde, um eine grössere Sicherheit zu erhalten. Man ist also dahin gelangt, die vorletzte Eliminationsgleichung hinschreiben zu können mit der Ueberzeugung, dass die Coëfficienten im Allgemeinen numerisch nahe richtig festgelegt erscheinen. Setzt man demnach:

$$[\gamma' u] = - \frac{[\beta \gamma']}{[\beta \beta]}, \quad [\alpha' u] = \frac{[\beta n']}{[\beta \beta]}, \quad 11)$$

so ist die Relation zwischen u und w bestimmt durch:

$$u = (\alpha' u) + [\gamma' u] w, \quad 12)$$

wobei wieder $(\alpha' u)$ der wahrscheinlichste Werth von u sein wird, wenn man w der Null gleich setzt. Die durch diese Substitution erlangte verminderte Summe der Fehlerquadrate wird nach den bekannten Regeln bestimmt sein durch:

$$[n'' n''] = [n' n'] - \frac{[\beta n'^2]}{[\beta \beta]}, \quad 13)$$

führt man die Relation 12) in die Gleichungen 2) (pag. 361) ein, so nehmen dieselben die Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} u &= (\alpha' u) + [\gamma' u] w \\ t &= (\alpha' t) + [\gamma' t] w \\ z &= (\alpha' z) + [\gamma' z] w \\ y &= (\alpha' y) + [\gamma' y] w \\ x &= (\alpha' x) + [\gamma' x] w \end{aligned} \right\} \quad 14)$$

wobei also allgemein gesetzt ist:

$$(\alpha' E) = (\alpha E) + (\beta E) (\alpha' u); \quad 15)$$

führt man aber 12) in die Gleichungen 8) ein und setzt:

$$\left. \begin{aligned} n_1'' &= n_1' - (\beta_1) (\alpha' u) \\ n_2'' &= n_2' - (\beta_2) (\alpha' u) \\ n_3'' &= n_3' - (\beta_3) (\alpha' u) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \right\} \quad 16)$$

und:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1' &= (\gamma_1) + (\beta_1) (\gamma' u) \\ \gamma_2' &= (\gamma_2) + (\beta_2) (\gamma' u) \\ \gamma_3'' &= (\gamma_3) + (\beta_3) (\gamma' u) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \right\} \quad 17)$$

so erhalten nimmeh die Gleichungen 8) (pag. 366) die Form:

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_1') w &= n_1'' \\ (\gamma_2') w &= n_2'' \\ (\gamma_3') w &= n_3'' \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad 18)$$

wobei man sich durch die Relation 13) (pag. 367) eine theilweise Controle für die Richtigkeit der Rechnung verschafft; aus diesen Gleichungen wird die Bestimmung von w nach eventueller Einführung von Homogenitätsfactoren durch:

$$w = \frac{[\gamma' n'']}{[\gamma' \gamma']} \quad 19)$$

bewirkt. Man wird wieder bemerken, dass theoretisch

$$[\gamma' \gamma'] = [ff5] \quad [\gamma' n''] = [fn5] \quad 20)$$

sein muss, dass aber bei den vorausgesetzten Verhältnissen wieder eine nahe Uebereinstimmung nicht erwartet werden kann. Die auf das Minimum herabgebrachte Summe der Fehlerquadrate wird sein:

$$[vv] = [nn6] = [n'' n''] - \frac{[\gamma' n'']^2}{[\gamma' \gamma']} \quad 21)$$

Ist nun einmal $[vv]$ bekannt, so bestimmt sich nach der Formel 22) (pag. 359) der mittlere Fehler einer Bedingungsgleichung. und da durch 10) (pag. 367) und 20), die für die Rechnung der Hilfsgrössen A_5 , B_5 , C_5 , D_5 und E_5 nöthigen Factoren (pag. 346, 347) mit hinreichender Genauigkeit bekannt sind, (auf eventuell eingeführte Homogenitätsfactoren zu achten), so wird die Rechnung der Gewichte nach der Formel 10) (pag. 356) keine weitere Schwierigkeit haben, und hiernüt erscheint das vorgelegte Problem mit einer nach Thunlichkeit maximalen Präcision gelöst. Diese letzteren Bestimmungen werden aber in der Regel in den vorgelegten Fällen nicht vorgenommen werden, da es sich meist darum handelt, neben dem wahrscheinlichsten Elementensysteme jene Grenze zu suchen, bis zu welcher hinaus dieselben abgeändert werden dürfen ohne den Beobachtungen zu widersprechen, Grenzen, die nach den vorgelegten Beobachtungen und der subjectiven Anschauung sehr dehnbar sind.

Die Gleichungen 14) (pag. 367) stellen die Unbekannten als Funktionen der unabhängig Variablen w dar; betrachtet man aber überdiess u in so weit unabhängig variabel, als dasselbe abgeändert werden darf, ohne w zu variiren, so sind die maassgebenden Coëfficienten für u in den Gleichungen 2) (pag. 364) enthalten; man wird deshalb sagen können, dass in den folgenden Gleichungen u und w unabhängig variabel sind:

$$\left. \begin{aligned} t &= (\alpha' t) + (\beta' t) u + (\gamma' t) w \\ z &= (\alpha' z) + (\beta' z) u + (\gamma' z) w \\ y &= (\alpha' y) + (\beta' y) u + (\gamma' y) w \\ x &= (\alpha' x) + (\beta' x) u + (\gamma' x) w, \end{aligned} \right\} \quad 22)$$

wobei aber zu beachten ist, dass wenn man w allein als unabhängig variabel betrachtet, u bestimmt werden muss nach 12) (pag. 367) nämlich:

$$u = (\alpha' u) + (\gamma' u) w.$$

Unter diesen einschränkenden Voraussetzungen erscheint also in der Folge u als unabhängig variabel. Indem man den nach 19) (pag. 368) bestimmten Werth in die Bedingungsgleichungen 18) einsetzt, gelangt man zur Kenntniss der minimalen Fehler, setzt man also:

$$\left. \begin{aligned} n_1'' - (\gamma_1') w &= v_1 \\ n_2'' - (\gamma_2') w &= v_2 \\ n_3'' - (\gamma_3') w &= v_3 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad 23)$$

so muss die auf diese Weise gefundene Summe der Fehlerquadrate $[v v]$ mit dem durch 21) (pag. 368) bestimmten Werthe innerhalb der Unsicherheitsgrenzen der Rechnung stimmen, womit eine gute Controle erreicht ist. Man kann nun daran gehen, eine umfassende Controle noch dadurch herzustellen, dass man den durch 19) bestimmten Werth von w in 12) (pag. 367) einführt und dadurch (u) erhält. Die Substitution dieser Werthe in 2) (pag. 364) gibt die übrigen Unbekannten; die so gefundenen Werthe der Unbekannten setzt man in die ursprünglichen Bedingungsgleichungen ein, und muss die eben angeführten minimalen Fehler $v_1, v_2, v_3 \dots$ bestätigt finden.

Den Gleichungen 22) (pag. 368) analog, kann man die übrig bleibenden Fehler als Funktionen von w und u darstellen, beide unter den gemachten Einschränkungen als unabhängig variabel betrachtend; man erhält dann die Fehler, die in den Orten übrig bleiben, bestimmt durch:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= n_1'' - \{(\beta_1) u + (\gamma_1') w\} \\ f_2 &= n_2'' - \{(\beta_2) u + (\gamma_2') w\} \\ f_3 &= n_3'' - \{(\beta_3) u + (\gamma_3') w\} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad 24)$$

In diesen Ausdrücken wird, wenn man für w den wahrscheinlichsten Werth substituirt und u nach 12) (pag. 367) bestimmt, $u = 0$ zu setzen und f in v zu verwandeln sein; variirt man aber w in $(w + \Delta w)$, und u in $(u + \Delta u)$, so erhält man sofort, wenn man diese Werthe in 24) einführt:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= v_1 - \{(\beta_1) \Delta u + (\gamma_1') \Delta w\} \\ f_2 &= v_2 - \{(\beta_2) \Delta u + (\gamma_2') \Delta w\} \\ f_3 &= v_3 - \{(\beta_3) \Delta u + (\gamma_3') \Delta w\} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad 25)$$

welche Gleichungen also die Aenderungen der übrig bleibenden Beobachtungsfehler darstellen, wenn man u und w unter den gemachten Einschränkungen willkürlich variirt. Quadriert und addirt man die vorstehenden Gleichungen, so erhält man:

$$[ff] = [vv] + [\beta\beta] \Delta u^2 + [\gamma'\gamma'] \Delta w^2, \quad 26)$$

da nothwendig nach Gleichung 7) (pag. 316)

$$\begin{aligned} [\beta v] &= 0 \\ [\gamma' v] &= 0 \end{aligned}$$

ist, und nach 17) (pag. 367) wenn man daselbst beiderseits mit dem entsprechenden β multiplicirt und die Relation 11) (pag. 367) beachtet,

$$[\beta \gamma'] = 0$$

wird.

Der Ausdruck 26) zeigt unmittelbar in welcher Weise die Summe der Fehlerquadrate zunimmt, wenn man für u und w Annahmen macht, die von den wahrscheinlichsten Werthen um die Beträge $\mathcal{A}u$ und $\mathcal{A}w$ abweichen. Da nun nach Gleichung 22) (pag. 359) in einem gegebenen Falle der mittlere Fehler ϵ einer Bedingungsgleichung von der Summe der Fehlerquadrate abhängig erscheint, so wird stets derselbe Werth von ϵ erhalten, wenn man nur die Quadratsummen gleich macht. Man leitet hieraus den Schluss ab, dass alle jene Systeme die gleiche Wahrscheinlichkeit für sich in Anspruch nehmen, für welche die Summe der Quadrate der Fehler f identisch wird; für $\mathcal{A}u = \mathcal{A}w = 0$ erhält man die minimale Summe. Man kann der Gleichung 26) noch eine andere Gestalt geben, die für die Folge sich bequem erweist. Setzt man nämlich:

$$\left. \begin{aligned} n \sin N &= \mathcal{A}u \\ n \cos N &= \mathcal{A}w \end{aligned} \right\} \quad 27)$$

so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$[ff] = [vv] + n^2 \{ [\beta\beta] + [\gamma'\gamma'] \}, \quad 28)$$

d. h. alle jene Systeme, für die n identisch ist, haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, der Winkel N bleibt völlig willkürlich.

Die vorstehend entwickelten Vorschriften werde ich später bei dem für den Planeten Hilda gewählten Beispiele ausführlich erläutern und verweise demnach in dieser Richtung auf das betreffende Kapitel. Das weiter unten durchgeführte Beispiel für den Kometen I 1866, behandelt den einfacheren Fall, wo nämlich nur die Bestimmung einer Unbekannten einer besonderen Unsicherheit unterworfen ist.

Ableitung der Elemente aus einer beliebig grossen Zahl von Beobachtungen.

A. Bildung der Normalorte.

Mit Rücksicht auf die 1 pag. 94 gemachten Bemerkungen ist es sofort klar, dass, wenn die Zahl der vollständigen Beobachtungen 3 überschreitet, denselben nur durch ein Elementensystem nach Maassgabe der Beobachtungsfehler genügt werden kann; es stellt sich also die Aufgabe, aus einer beliebig grossen Zahl von Beobachtungen die wahrscheinlichsten Elemente zu ermitteln, und es werden daher jene Principien, die in der Methode der kleinsten Quadrate aufgestellt wurden, hier zur Verwerthung kommen. Es wird aber nicht immer nöthig sein, die daselbst aufgestellten Grundsätze in aller Strenge durchzuführen, wenn nicht die äusserste Genauigkeit verlangt wird, und man wird sich je nach den Umständen Abkürzungen erlauben können. Es werden daher in der Folge sowohl die strengen, als auch die genähert richtigen Methoden zur Erreichung des Zweckes mitgetheilt werden; vor Allem soll aber vorerst die Vereinfachung der Rechnung, die durch die Bildung der Normalorte erlangt wird, näher beleuchtet werden.

Es wird in den folgenden Untersuchungen stets vorausgesetzt, dass genähert richtige Elemente in irgend einer Weise bekannt sind; aus diesen kann man sich den geocentrischen Lauf des Himmelskörpers (Ephemeride) berechnen; vergleicht man die aus dieser Rechnung folgenden Orte mit den Beobachtungen, so ist klar, dass innerhalb gewisser Zeitgrenzen die Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Orten in jeder der zwei polaren Coordinaten auf die Form:

$$u = a + bt + ct^2 + dt^3 + \dots$$

gebracht werden können. Die Coefficienten $a, b, c \dots$ werden im Allgemeinen um so kleiner sein, je näher die zu Grunde gelegten Elemente der Wahrheit kommen; ausserdem werden im Allgemeinen die Coefficienten mit den Potenzen von t rasch kleiner werden. Seien nun n Beobachtungen, die innerhalb des vorgesezten Zeitraumes liegen, angestellt zur Zeit $t_1, t_2, \dots t_n$; die Unterschiede zwischen der Beobachtung und Rechnung im Sinne »Beobachtung-Rechnung« angesetzt, seien der Reihe nach $u_1, u_2 \dots u_n$; ist nun T irgend ein bestimmtes Zeitmoment, innerhalb der gesetzten Zeitgrenzen, welches man als Ausgangspunkt der Zeitzählung wählt,

so erhält man vorerst für die Bestimmung der Coëfficienten $a, b, c \dots$ die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= a + b(t_1 - T) + c(t_1 - T)^2 + \dots \\ u_2 &= a + b(t_2 - T) + c(t_2 - T)^2 + \dots \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ u_n &= a + b(t_n - T) + c(t_n - T)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

aus welchen Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate die Coëfficienten $a, b, c \dots$ bestimmt werden können; sind dieselben bestimmt, so wird der Coëfficient a jene Correction angeben, die man an den für die Zeit T berechneten Ephemeridenort anzubringen hat, um den aus den n Beobachtungen für diese Zeit resultirenden Ort, den Normalort, zu erhalten. An die Gleichungen 1) wird man aber noch mehrere Bemerkungen zu knüpfen haben. Es ist zunächst klar, dass man in diesem Systeme allen beobachteten Unterschieden $u_1, u_2 \dots u_n$ genügen könnte, wenn man nur rechter Hand vom Gleichheitszeichen eine der Anzahl n entsprechende Zahl von zu bestimmenden Coëfficienten einführt; doch wird dieses scheinbar strenge Verfahren zu wesentlichen Ungenauigkeiten führen; es ist aus dem Umstande, dass die Ephemeride verhältnissmässig nahe richtig ist, also selbst für weit ausserhalb der gesetzten Zeitgrenzen liegende Epochen die Beobachtungen noch nahe darstellt, klar, dass die Coëfficienten a, b, c, \dots mit den Potenzen von t rasch abnehmen müssen, und um so rascher, je genauer die der Rechnung der Ephemeride zu Grunde gelegten Elemente sind; man wird daher in der Lösung der Gleichungen 1) eine erheblich grössere Genauigkeit erhalten, wenn man von der theoretisch nothwendig stattfindenden Bedingung der Kleinheit der höheren Coëfficienten Gebrauch macht und dieselben der Null gleich setzt, und sich je nach Maassgabe der Umstände höchstens auf die Bestimmung der drei ersten Coëfficienten beschränkt. Es erscheint mir sogar erwünscht, stets so nahe richtige Ephemeriden zu benützen, dass man auch den c -Coëfficienten vernachlässigen kann, in diesem Falle wird sich aber die Rechnung ganz ausserordentlich einfach gestalten lassen; bestimmt man nämlich T_1 so, dass dasselbe dem Mittel der Beobachtungszeiten entspricht, nämlich:

$$T = \frac{1}{n} (t_1 + t_2 + \dots + t_n), \quad 2)$$

so sieht man sofort ein, dass die Bestimmung des eigentlich nur zur Ermittlung der Ephemeridencorrection für die Zeit T nothwendigen a -Coëfficienten erlangt wird durch:

$$a = \frac{1}{n} (u_1 + u_2 + \dots + u_n), \quad 3)$$

weil im Mittel, der hier gewählten Bestimmung von T gemäss, der Factor von b verschwindet. Ist die Ephemeride nur einigermaassen zutreffend, so wird man ohne merklichen Fehler für die Zeit T die dem Mittel der Zeiten nächste Epoche der Ephemeride benützen dürfen.

Zu den vorstehenden Betrachtungen kann man noch hinzufügen, dass wenn

die einzelnen Beobachtungen verschiedenes Gewicht, beziehungsweise $g_1, g_2 \dots g_n$, hätten, die in Betracht kommenden Werthe T und a zu berechnen wären nach:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{g_1 t_1 + g_2 t_2 + \dots + g_n t_n}{g_1 + g_2 + \dots + g_n} \\ a &= \frac{g_1 u_1 + g_2 u_2 + \dots + g_n u_n}{g_1 + g_2 + \dots + g_n} \end{aligned} \right\} \quad +)$$

Hat aber die Ephemeride nicht die gewünschte Annäherung, so dass man fürchten muss, nicht mit den aus 2) und 3) (pag. 372) resultirenden Näherungen auszureichen, so wird man, was ich für das genaueste halte, sich eine bessere Ephemeride herzustellen trachten, welcher Forderung meist leicht genügt werden kann, oder man wird nach den bei der Methode der kleinsten Quadrate auseinandergesetzten Methoden die Gleichungen 1) (pag. 372) zur Bestimmung der a, b und c Coëfficienten verwenden, oder was am schnellsten zum Ziele führt, wenn auch die Genauigkeit dadurch am meisten leidet, man wird sich die Abweichungen der Beobachtungen von der Rechnung als Ordinaten in ein im entsprechenden Maassstabe ausgeführtes Coordinatensystem eintragen und als Abscissen die Beobachtungszeiten nehmen; eine nach dem Augenmaasse gezogene, diesen festgelegten Punkten möglichst entsprechende Curve von einfachem Zuge wird ebenfalls sehr nahe den Fehler der Ephemeride darstellen; die Ordinate dieser Curve zu einer der Mitte der Beobachtungszeiten nahe gelegenen Abscisse wird also die Correction der Ephemeride für dieses Moment ergeben; ich brauche aber wohl kaum hier hervorzuheben, dass ich das letztere Verfahren nur als einen wenig befriedigenden Nothbehelf betrachte und den zuerst genannten Methoden den Vorzug gebe.

Bei der Anwendung der vorstehenden Methoden kommt es hauptsächlich an auf die Herstellung der Ephemeride und auf die Vergleichung derselben mit den Beobachtungen, und es wird sich empfehlen, hier auf diese Sache näher einzugehen.

Die Ephemeride gibt den Ort des Himmelskörpers für bestimmte Zeitpunkte an, die durch gleiche Zeitabstände getrennt sind: sind diese sehr gross gewählt, so wird die Interpolation wegen der höheren Differenzwerthe schwierig, kann sogar unter Umständen zu ungenauen Resultaten führen; sind die Abstände der Epochen aber wieder sehr eng gewählt, so wird zwar die Interpolation wesentlich erleichtert, man hat aber eine nicht ganz unbeträchtliche Mehrarbeit geleistet, indem mehr Ephemeridenorte gerechnet wurden, als unumgänglich nöthig sind. Hierbei das richtige Maass zu finden, ist im Allgemeinen nicht leicht; die Bemerkung aber, dass die Interpolation anfängt lästig zu werden, falls die zweiten Differenzwerthe ein gewisses Maass überschreiten, gibt in mancher Beziehung die nöthige Leitung und die folgenden Betrachtungen werden eine zwar nicht ganz sichere, aber doch mindestens orientirende Richtschnur geben.

Im Allgemeinen wird man die Betrachtungen zunächst auf die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten beschränken können, denn hat man dieselben in für die Interpolation genügend kleinen Intervallen berechnet (diese Rechnung macht die grösste Arbeit bei der Herstellung einer Ephemeride) so wird man, falls

die polaren geocentrischen Coordinaten allzu unregelmässig gingen, durch eventuell wiederholte Interpolation in die Mitte für die letzteren die hinreichend kleinen Intervalle erhalten können. Für die rechtwinkligen Coordinaten geben aber die bekannten Bewegungsgleichungen (I pag. 40) die Form:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{x}{r^3}.$$

da man aber x auf die Form $r \cos \psi$ bringen kann, und die zweiten Differentiale ein Maass für die zweiten Differenzwerthe abgeben, so wird man daraus die Bemerkung ableiten können, dass die Differenzen zweiter Ordnung nahezu umgekehrt proportional den zweiten Potenzen der heliocentrischen Entfernung sein werden; man wird also für das Intervall der Ephemeridenepochen (T) die Form erhalten:

$$J = c r^2, \quad 5)$$

wo c eine Constante ist, die leicht durch die Erfahrung sich bestimmen lässt. Für die Erde würde, wenn nicht der Mond Störungen von sehr kurzer Periode veranlassen würde, eine Rechnung von 3 zu 3 Tagen genügend sein, um die Interpolation der rechtwinkligen Coordinaten bis auf die siebente Stelle sicher ausführen zu können; daraus leitet man den Schluss ab, dass c etwa gleich 3 gesetzt werden darf, da für die Erde ohne merklichen Fehler für die vorliegenden Zwecke, r der Einheit gleich gesetzt werden kann.

Man wird aus 5) zunächst die Bemerkung ableiten, dass man für Himmelskörper mit mässiger Excentricität (Planeten) wohl das Intervall für alle Theile der Bahn constant annehmen darf; sind aber die Excentricitäten gross, so muss das Intervall variirt werden, und man wird sich zu entscheiden haben, welche Wahl man trifft; man wird demnach in diesem Falle nur immer für gewisse Bahntheile das Intervall constant annehmen dürfen.

Beim Uebergange auf den geocentrischen Ort wäre zu beachten, dass vorerst die Differenzen der Coordinaten des Himmelskörpers und der Erde in Betracht kommen; man wird daher zu berücksichtigen haben, dass bei der Vereinigung der beiden Coordinaten sich die zweiten Differenzwerthe ebenfalls summiren; man wird also in diesem Falle das Intervall im Allgemeinen nicht grösser wählen dürfen als 3 Tage für alle Himmelskörper, für die r grösser als die Einheit wird; man hat also die Bedingungen:

$$\begin{aligned} r > 1, & \quad J = 3 \\ r < 1 & \quad J = 3 r^2. \end{aligned}$$

Da man aber stets von den geocentrischen rechtwinkligen Coordinaten den Uebergang auf die polaren macht, so werden die Aenderungen der polaren Coordinaten im Allgemeinen proportional dem reciproken Werthe der geocentrischen Distanz A sein; beachtet man, dass überdies mindestens für die eine Coordinate auch eine Multiplication mit $\sec \delta$, wo δ die auf der Fundamentalebene senkrechte polare Coordinate vorstellt, zur Reduction auf's Parallel erforderlich ist, so wird man für die Bestimmung von J für die geocentrischen polaren Coordinaten zunächst erhalten für die zwei Fälle:

$$\left. \begin{array}{l} r > 1 \quad J = 3 \mathcal{A} \cos \delta \\ r < 1 \quad J = 3 r^2 \mathcal{A} \cos \delta, \end{array} \right\} \quad 6)$$

wobei J in Tagen ausgedrückt erscheint; man darf aber bei Benützung der Formeln 6 nicht vergessen, dass dieselben nur eine annähernd richtige Leitung geben; man erhält also die folgende Uebersicht für die Bestimmungen von J in Tagen:

	$r > 1$	$r < 1$
heliocentrische rechth. Coord.	$J = 3 r^2$	$J = 3 r^2$
geocentrische rechth. " "	$J = 3$	$J = 3 r^2$
geocentrische polare " "	$J = 3 \mathcal{A} \cos \delta$	$J = 3 r^2 \mathcal{A} \cos \delta.$

Der Umstand, dass das Intervall auch von $\cos \delta$ abhängig ist, also im Falle, wo sich der Himmelskörper den Polen des gewählten Coordinatensystems nähert, auf sehr kleine Werthe für J führt, zeigt, dass die Herstellung einer Ephemeride zur Bildung von Normalorten, wenn sich der Himmelskörper dem Pole nähert, auf Schwierigkeiten stossen kann; man kann sich in solchen Fällen theilweise damit behelfen, dass man auf die Ephemeride mit polaren Coordinaten Verzicht leistet, und unmittelbar für die Zeit die vorgelegten Coordinaten interpolirt und aus diesen erst die polaren berechnet; doch ist dieses Auskunftsmittel keineswegs sehr geeignet, da gerade in diesen Fällen der Fehler der Ephemeride, zerlegt nach den Componenten der polaren Coordinaten, nothwendig rasche Aenderungen zeigen muss, und im Falle der Polpassage in beiden Coordinaten eine völlige Discontinuität eintritt. Man hat daher in ähnlichen Fällen, das Coordinatensystem des Aequators, welches gewöhnlich als Grundlage für die Berechnung der Ephemeride dient, verlassen und dafür das der Ekliptik eingesetzt; man muss aber dieses Verfahren ebenfalls als ein wenig zweckmässiges bezeichnen, indem durch viel leichtere und einfachere Rechnungen radicalere Abhilfe geschafft werden kann; man darf nämlich nicht vergessen, dass die Transformation aller auf den Aequator bezogenen Beobachtungen in Länge und Breite keine ganz geringe Arbeit ist, und dass wegen der verhältnissmässig geringen Entfernung der Pole des Aequators und der Ekliptik (Abstand $23^{\circ}5'$) immerhin die Unregelmässigkeit in den polaren Coordinaten nicht ganz behoben erscheint. Das radicale Auskunftsmittel, welches ich in diesem Falle empfehle, ist das folgende: ich lege das neue Coordinatensystem so, dass der Pol desselben in den Frühljahrspunkt zu liegen kommt, die Fundamentalebene geht also durch die Pole des Aequators und ich wähle den Nordpol des Aequators als Ausgangspunkt der Zählung; denkt man sich in denselben die positive x' Achse des neuen Systems gelegt, die y' Achse in den Punkt, dessen Rectascension 90° ist, die positive z' Achse in den Frühljahrspunkt und bezeichnet die Coordinaten des neuen Systems durch Accente, so hat man die Relationen:

$$\begin{aligned} x' &= z \\ y' &= y \\ z' &= x. \end{aligned}$$

Es entsteht also dieses neue Coordinatensystem aus dem Aequatorealsystem durch

Drehung des letzteren Systems um 90° um die gemeinsame y Achse. Man kann demnach ohne weitere Transformationen die bereits berechneten geocentrischen Coordinaten benützen und wird, wenn man dieselben für das System des Aequators, mit ξ , η und ζ bezeichnet zur Berechnung der neuen polaren Coordinaten die Relationen haben:

$$\begin{aligned} A \cos \alpha' \cos \delta' &= \zeta \\ A \sin \alpha' \cos \delta' &= \eta \\ A \sin \delta' &= \xi; \end{aligned}$$

auch die Verwandlung der beobachteten äquatorialen Coordinaten in die des neuen Systems gestaltet sich ganz einfach; man wird haben, wie dies aus der Transformation der Coordinaten unmittelbar ersichtlich ist:

$$\begin{aligned} \cos \alpha' \cos \delta' &= \sin \delta \\ \sin \alpha' \cos \delta' &= \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta' &= \cos \alpha \cos \delta \end{aligned}$$

wodurch, da $\cos \delta'$ stets positiv zu nehmen ist, die polaren Coordinaten unzweideutig bestimmt erscheinen.

Hat man also eine Ephemeride in geeigneter Weise hergestellt, so tritt zunächst die Nothwendigkeit ein, die Angaben derselben mit den Beobachtungen zu vergleichen; es wird sich hierbei als nothwendig herausstellen, für gewisse Zeitmomente die Positionen der Ephemeride durch Interpolation zu ermitteln: man wird aber, wenn man mit n den Abstand des Beobachtungsmomentes seiner absoluten Grösse nach von der nächsten Ephemeridenepoche ausgedrückt in Einheiten des Intervalles bezeichnet, durch die bekannten Interpolationsformeln das gewünschte Resultat erlangen; man hat nämlich für die Interpolation nach vorwärts (vergl. über die Bezeichnung pag. 3 ff.):

$$\begin{aligned} f(a+nw) &= f(a) + nf^1(a+\tfrac{1}{2}w) + \frac{n(n-1)}{1.2} f^2(a) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} f^3(a+\tfrac{1}{2}w) + \\ &+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} f^4(a) + \dots \end{aligned}$$

nach rückwärts:

$$\begin{aligned} f(a-nw) &= f(a) - nf^1(a-\tfrac{1}{2}w) + \frac{n(n-1)}{1.2} f^2(a) - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} f^3(a-\tfrac{1}{2}w) + \\ &+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} f^4(a) \dots, \end{aligned}$$

so dass man n stets kleiner als $\frac{1}{2}$ wählen kann. Hat man aber sehr zahlreiche Beobachtungen, was wohl nur bei sehr hellen Kometen der Fall ist, für dasselbe Intervall mit der Ephemeride zu vergleichen, dann verlohnt es sich wohl der Mühe, die obigen Formeln nach Potenzen von n zu ordnen und die so gebildeten Coëfficienten statt der Differenzwerthe der Ephemeride beizufügen. Ordnet man die obigen Ausdrücke nach Potenzen von n und führt überdies die arithmetischen Mittel (vergl. pag. 4) der ungeraden Differenzen ein, so erhält man leicht die Form:

$$\begin{aligned} f(a+nw) &= f(a) + An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 \dots \text{ für die Interpol. nach vorwärts} \\ f(a-nw) &= f(a) - An + Bn^2 - Cn^3 + Dn^4 \dots \text{ » » » » rückwärts,} \end{aligned}$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1!} \{ f^I(a) - \frac{1}{6} f^{III}(a) + \frac{1}{30} f^V(a) - \frac{1}{140} f^{VII}(a) + \dots \} \\ B &= \frac{1}{2!} \{ f^{II}(a) - \frac{1}{12} f^{IV}(a) + \frac{1}{90} f^{VI}(a) - \dots \} \\ C &= \frac{1}{3!} \{ f^{III}(a) - \frac{1}{4} f^V(a) + \frac{7}{120} f^{VII}(a) - \dots \} \\ D &= \frac{1}{4!} \{ f^{IV}(a) - \frac{1}{6} f^{VI}(a) + \dots \} \\ E &= \frac{1}{5!} \{ f^V(a) - \frac{1}{3} f^{VII}(a) + \dots \} \\ F &= \frac{1}{6!} \{ f^{VI}(a) - \dots \} \\ G &= \frac{1}{7!} \{ f^{VII}(a) - \dots \} \end{aligned}$$

wobei die Formeln in einer weit die Grenzen der gewöhnlichen Anwendung überschreitenden Vollständigkeit angesetzt sind. Man wird beachten, dass man diese Formeln eigentlich angemessener nicht zerfällt in ein System für die Interpolation nach vorwärts und eines für die Interpolation nach rückwärts, sondern sich, indem man n stets kleiner als $\frac{1}{2}$ annimmt, dasselbe im ersten Fall mit dem positiven, im letzteren Falle mit dem negativen Vorzeichen behaftet vorstellt.

Um für einen speciellen Fall n zu bestimmen, hat man unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Ephemeriden die Orte für das wahre Aequinoctium geben, zunächst die auf den Normalmeridian reducirte Beobachtungszeit um die Lichtzeit zu vermindern (vgl. I pag. 71) und für diese so verminderte Zeit den Ephemeridenort zu interpoliren. Die Lichtzeit in Zeitsekunden findet sich nach:

$$\text{Aberrzt} = \overline{2.6971} \, A,$$

wo A die geocentrische Distanz in Einheiten der Erdbahnhalfachse vorstellt und statt des Coëfficienten der Logarithmus desselben angesetzt ist. Der für diese so corrigirte Zeit aus der Ephemeride entlehnte Ort ist identisch mit dem scheinbaren zur Zeit der Beobachtung und umgekehrt; man erhält nach Ausführung der hier angezeigten Operationen einen unmittelbaren Vergleich des beobachteten und berechneten Ortes, doch ist noch vorher, wenn dies nicht schon geschehen ist, die Beobachtung vom Einflusse der Parallaxe zu befreien (vgl. I pag. 32), da die Ephemeriden geocentrische Orte geben. Indem man so zur Kenntniss des Ephemeridenfehlers gelangt, den man aus dem Unterschiede Beobachtung-Rechnung ableitet, hat man ferner zu beachten, dass der Fehler in Rectascension eigentlich noch mit $\cos \delta$ zu multipliciren ist, um denselben auf den grössten Kreis zu reduciren; man wird aber, sofern der Himmelskörper sich nicht den Polen allzusehr nähert und einen mässigen Bogen in der Declination innerhalb der Zeitgrenzen der zu einem Normalorte verbundenen Beobachtungen zurücklegt, meist von dieser Multiplication Abstand nehmen können. Man hat aber, wenn man diese Correction berücksichtigt, wohl zu beachten, dass man bei der Bildung des Normalortes, indem man die im Mittel resultirende Correction der Ephemeride an den Ephemeridenort anbringt,

diese Quantität vorher durch die Multiplication mit $\sec \delta$ auf das Parallel zurückführen muss.

Die mehrfachen Operationen, die man mit den Daten der Beobachtung vorzunehmen hat, machen es erwünscht, dieselben möglichst übersichtlich zu gestalten; man wird dies am Besten dadurch erreichen, dass man jede Beobachtung auf einen entsprechend aus etwas stärkerem Papiere geschnittenen Zettel ausschreibt, der etwa $0^m 20$ Breite $0^m 15$ Höhe hat, und auf denselben alle erforderlichen Bemerkungen und Angaben einträgt. Links oben in die Ecke setzt man den Namen des Himmelskörpers; gehört die Beobachtung einem kleinen Planeten an und ist eine Schätzung seiner Helligkeit (Grösse) vom Beobachter angegeben, so kann dieselbe dort ihren Platz finden. In der Mitte oben setzt man gleichsam als Aufschrift den Namen des Beobachtungsortes, rechts oben in die Ecke kommen die Notizen über die Art der Beobachtung und etwaige Bemerkungen des Beobachters über die Sicherheit derselben; ist diese Beobachtung eine Meridianbeobachtung, so kann man dies durch den Buchstaben *M* bezeichnen, ist dieselbe aber eine differentielle, so wird man, falls dies die Mittheilungen des Beobachters gestatten, anführen die Art des Mikrometers, die beobachteten Differenzen zwischen dem Himmelskörper und dem Vergleichsterne, die Anzahl der Einzelbeobachtungen, die zur Ableitung dieses Resultates gedient haben, und schliesslich die angenommenen mittleren und scheinbaren Positionen des Vergleichsternes nebst Angabe der Quellen, die der Beobachter zur Ableitung der angeführten Positionen benützt hat. An sich wären diese Notizen nicht von Erheblichkeit, wenn man stets sicher sein könnte, dass keine Versehen bei der Reduction der Beobachtungen vorgefallen sind, alle diese Notizen werden sich aber bei der näheren Discussion der Beobachtungen, auf die allerdings hier nicht eingegangen werden kann, sehr nützlich erweisen und allenfalls bei der Vergleichung sich zeigende auffallende Unterschiede oft genug erklären. Jetzt füllt man die erste Zeile des Zettels aus; dieselbe enthält zuerst die Jahreszahl, den Monat und das Datum, unter den Namen des Beobachtungsortes stellt man die mittlere Zeit des Beobachtungsortes hierbei kann man erwähnen, dass häufig die englischen Beobachter statt der mittleren Ortszeit die mittlere Greenwicher Zeit ansetzen, ein nicht ganz zu lobender Vorgang; dann folgt weiter nach rechts die beobachtete Rectascension und Declination, neben jede dieser Coordinaten setzt man auf 3 und 4 Stellen die allenfalls von den Beobachtern mitgetheilten parallaktischen Factoren; doch sind dieselben von den verschiedenen Beobachtern sehr verschieden mitgetheilt; bald enthalten sie bereits die mittlere Sonnenparallaxe, bald nicht, sind bald in Bogenmaass für Rectascension angesetzt, bald in Zeitmaass, bald stehen die Logarithmen, bald die Zahlen u. s. w. Man wird daher gut thun, sich niemals auf diese Angaben allzusehr zu verlassen und durch directe Nachrechnung die parallaktischen Factoren (I pag. 32) prüfen, die selbst gewonnenen Resultate, nachdem man sich von deren Richtigkeit überzeugt, an Stelle der von den Beobachtern mitgetheilten Zahlen ansetzen, und die letzteren nur mehr als beiläufige Controlen gelten lassen; man wird sich bald überzeugen, dass in der That selbst bei sehr sorgfältig reducirenden

Beobachtern in diesen Zahlen häufig genug Irrthümer vorhanden sind. Einige Beobachter geben gleich die geocentrischen Orte selbst, und man ist dadurch der Rechnung der Correction für Parallaxe überhoben; doch ziehe ich es vor, diese Correctionen dem Rechner zu überlassen und aus den Händen des Beobachters die reinen Beobachtungsdaten zu erhalten.

Unter die mittlere Ortszeit in die zweite Zeile setzt man die mittlere Zeit des angenommenen Normalmeridians, welche man erhält, wenn man an die Ortszeit die Längendifferenz anbringt, bei östlich von dem Hauptmeridiane gelegenen Orten subtractiv, bei westlichen additiv; unter diese Zahl setzt man die wohl meist mit ausreichender Genauigkeit durch lineare Interpolation aus der Ephemeride entlehnte Aberrationszeit, die stets an die obige Zahl subtractiv anzubringen ist; zur Ableitung von n , jenem numerischen Werthe, der zur Interpolation nöthig ist, wird man die in Stunden, Minuten und Secunden angegebene corrigirte Beobachtungszeit in Decimalthelle des Tages mit den bekannten Hilfsmitteln verwandeln. Unter die scheinbaren Rectascensionen und Declinationen setzt man in die zweite Zeile die für Parallaxe erforderlichen Correctionen und in die dritte Zeile setzt man die aus diesen Correctionen resultirenden geocentrischen Coordinaten; links unten setzt man die Ephemeridencoordinaten der der Beobachtung zunächst gelegenen Epoche an und lässt unter denselben so viel Raum, um die durch die Interpolation gefundenen Reductionen auf die Epoche der Beobachtung anbringen und darunter den resultirenden Ephemeridenort ansetzen zu können; den übrigen Raum des Zettels benützt man für die nöthigen Interpolationsrechnungen, die sich meist durch die Benützung zweckmässig angelegter Hilfstafeln wesentlich erleichtern lassen; rechts unten in die Ecke setzt man die zwischen der Beobachtung und der Rechnung resultirenden Unterschiede im Sinne Beobachtung-Rechnung und setzt also da (eventuell $\cos \delta da$) und $d\delta$ an, und fügt sofort eine Bemerkung bei, wenn die Beobachtung kein Vertrauen verdient.

In dieser Weise gelangt man zur Kenntniss der Fehler der Ephemeriden für jede einzelne Beobachtung und indem man die Beobachtungen in entsprechender Weise, wie es die Umstände gerade gestatten und fordern, gruppiert, gelangt man mit Hilfe der eben besprochenen Methode zur Kenntniss der Normalorte, die sich der Bedeutung der Zahlen der Ephemeride gemäss, auf das wahre Aequinoctium der Zeit des Normalortes beziehen; man wird aber die Normalorte zweckmässig auf gewisse mittlere Aequinoctien beziehen; die hierfür erforderlichen Correctionen für Nutation und Präcession sind ausführlich im ersten Bande (I pag. 88 u. ff.) erläutert worden. Der Nutzen der Einführung der Normalorte ist offenbar darin begründet, dass man, ohne die Genauigkeit des Resultates in irgend einer Weise erheblich zu schädigen, die Zahl der Bedingungsgleichungen wesentlich einschränkt, ein Vortheil der bei der Anwendung die Rechnung ganz wesentlich abkürzt. Gelingt es in einem gegebenen Falle, die Beobachtungen in 3 Normalorte zusammenzufassen, so kann man diesen Orten jene Methoden für die erste Bahnbestimmung zu Grunde legen, die im ersten Bande dieses Werkes auseinandergesetzt sind.

Es soll nun die Bildung eines Normalortes und die Zurückführung desselben auf ein bestimmtes mittleres Aequinoctium durchgeführt werden, wobei aber die sonst auf die verschiedenen Zettel zu vertheilenden Zahlen hier übersichtlich neben einander gesetzt werden müssen; ich entlehne das Beispiel dem Planeten $\textcircled{62}$ Erato. Es finden sich für diesen Planeten aus dem Jahre 1871 neben anderen die folgenden Beobachtungen, wobei ein dem Namen des Beobachtungsortes zugefügtes M anzeigt, dass die Beobachtung im Meridian angestellt ist.

No.	Datum	Beobachtungsort	Ortszeit	Beob. Rectasc.	Beob. Decl.
1	1871 Sept. 12	Leiden (M)	12 ^h 22 ^m 27 ^s	23 ^h 48 ^m 38 ^s .21	— 4° 3'39"5
2	" 12	Paris (M)	12 22 26	23 48 38.34	— 4 3 35.7
3	" 14	Leiden (M)	12 13 9	23 47 12.15	— 4 14 30.8
4	" 15	Berlin	11 37 1	23 46 30.69	— 4 19 37.2
5	" 16	Berlin	11 1 39	23 45 48.39	— 4 24 55.6
6	" 22	Greenwich (M)	11 35 49	23 41 21.33	— 4 57 14.7 .

Eine aus sehr nahe richtigen Elementen abgeleitete Ephemeride ergab die folgenden wahren Orte:

12 ^h mittl. B. Zt.	Rectasc.	1. Diff.	2. Diff.	Decl.	1. Diff.	2. Diff.	log \mathcal{A}	Abrrzt.
1871 Sept. 11	23 ^h 49 ^m 22 ^s .04		—0 ^s .43	—3°57'58"1		—1"1	0.2324	14 ^m 10 ^s
		—42 ^s .62			—5'24"5			
" 12	48 39.42		—0.37	—4 3 22.6		—0.8	0.2318	14 9
		—42.99			—5 25.3			
" 13	47 56.43		—0.33	—4 8 47.9		—0.4	0.2313	14 8
		—43.32			—5 25.7			
" 14	47 13.11		—0.28	—4 14 13.6		+0.1	0.2308	14 7
		—43.60			—5 25.6			
" 15	46 29.51		—0.22	—4 19 39.2		+0.4	0.2304	14 6
		—43.82			—5 25.2			
" 16	45 45.69		—0.17	—4 25 4.4		+0.8	0.2301	14 6
		—43.99			—5 24.4			
" 17	45 1.70		—0.10	—4 30 28.8		+1.3	0.2298	14 5
		—44.09			—5 23.1			
" 18	44 17.61		—0.03	—4 35 51.9		+1.6	0.2296	14 5
		—44.12			—5 21.5			
" 19	43 33.49		+0.02	—4 41 13.4		+2.0	0.2294	14 4
		—44.10			—5 19.5			
" 20	42 49.39		+0.08	—4 46 32.9		+2.5	0.2294	14 4
		—44.02			—5 17.0			
" 21	42 5.37		+0.13	—4 51 49.9		+2.8	0.2294	14 4
		—43.89			—5 14.2			
" 22	41 21.48		+0.18	—4 57 4.1		+3.2	0.2295	14 4.

Die folgende Zusammenstellung gibt in der ersten Columnne die Nummer der Beobachtung, in der zweiten sind die auf den Normalmeridian bezogenen Zeiten der Beobachtung, in der dritten die zugehörige Aberrationszeit, in der vierten der Abstand von der nächsten Epoche in der Ephemeride angegeben, die fünfte und sechste mit $\mathcal{A}\alpha$ und $\mathcal{A}\delta$ überschriebene Columnne gibt die mit Hilfe der ersten und zweiten Differenzen abgeleiteten Bewegungen des Planeten in der Zeit des Abstandes von der nächsten Epoche der Ephemeride an, welche Zahlen an die entsprechenden

Werthe der Ephemeride angebracht, den scheinbaren Ort für die Beobachtungszeit angeben; die siebente und achte Columnne geben die Parallaxen, welche mit ihren Zeichen an die beobachteten Werthe anzubringen sind, um geocentrische Orte zu erhalten, endlich geben die zwei letzten Columnnen die so gefundenen Unterschiede im Sinne Beobachtung — Rechnung:

	Berl. Zeit	Abrrzt.	Δt	$\Delta \alpha$	$\Delta \delta$	Parall. in		B—R	
						α	δ	α	δ
1	12 ^h 58 ^m 6 ^s	14 ^m 9 ^s	+	43 ^m 9 ^s	—1 ^s 31	— 9 ^{''} 9	0 ^{''} 00	+4 ^{''} 3	+0 ^{''} 10 —2 ^{''} 7
2	13 6 40	14 9	+	52 31	—1.56	—11.9	0.00	+4.1	+0.48 +2.9
3	12 48 48	14 7	+	34 41	—1.05	— 7.8	0.00	+4.3	+0.09 —5.1
4	11 37 1	14 6	—	37 5	+1.13	+ 8.1	—0.03	+4.3	+0.02 —2.1
5	11 1 39	14 6	—1 ^h	12 27	+2.21	+16.3	—0.06	+4.3	+0.43 —3.2
6	12 29 24	14 4	+	15 20	—0.47	— 3.3	0.00	+4.3	+0.32 —1.0

Das Mittel der Correctionen ist in Rectascension +0^s24 in Decl. —2^{''}2, das Mittel der Zeiten entspricht nahe Sept. 15.5; bei der geringen Zahl der Beobachtungen einerseits und anderseits bei dem nahen Anschlusse der Ephemeride an die Beobachtungen, der sich durch weiter abstehende Beobachtungen bestätigt, wird man wohl mit Recht von der Bestimmung der mit der Zeit und dem Quadrate der Zeit verbundenen Coëfficienten der Ephemeridencorrection absehen, und die obigen Mittelwerthe einfach an die Angaben der Ephemeride für die betreffende Epoche anbringen; setzt man die so erhaltene Rectascension im Bogenmaasse an, so erhält man den folgenden Normalort:

$$\begin{array}{cc} \alpha & \delta \\ 1871 \text{ Sept. } 15.5 & 356^{\circ}37'26''2 \quad -4^{\circ}19'41''4, \end{array}$$

der sich auf das zugehörige wahre Aequinoctium bezieht; die Reduction auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges mit Hilfe der f , g und G Grössen (vergl. I pag. 89) nach den Angaben des Berliner Jahrbuches ergibt, wenn man beachtet, dass die daselbst gegebenen Formeln die Reduction vom mittleren Aequinoctium des Jahresanfanges auf das wahre des Datum liefern, für die verlangte Reduction:

$$\text{in Rectase. } -17''1 \quad \text{in Decl. } -7''3;$$

will man aber z. B. den Normalort auf das mittlere Aequinoctium 1870,0 beziehen, so findet sich der Einfluss der Präcession (vergl. I pag. 84):

$$\text{in Rectase. } -46''1 \quad \text{in Decl. } -20''0$$

und man erhält demnach für den auf das mittl. Aequ. 1870,0 bezogenen Normalort

$$\begin{array}{cc} \alpha & \delta \\ 1871 \text{ Sept. } 15.5 & 356^{\circ}36'23''0 \quad -4^{\circ}20'8''7. \end{array}$$

Die neueren Jahrgänge des Berliner Jahrbuches gestatten aber bekanntlich die Reduction eines beliebigen wahren Aequinoctium auf das mittlere des nächstgelegenen Jahrzehntes direct auszuführen.

Da ich in der Folge zur Erläuterung der angeführten Methoden als Beispiel die ausführliche Bearbeitung des Planeten Erato wähle, so führe ich gleich hier die Orte an, die sich aus der ähnlichen Behandlung der Beobachtungen der übrigen Oppositionen ergeben, und setze daneben die auf dasselbe Aequinoctium bezogenen äquatorealen Sonnenkoordinaten nach Le Verrier*); die dem Datum in der Klammer nachfolgende Zahl zeigt die Anzahl der zum Normalorte verbundenen Beobachtungen an:

	α	δ	X	Y	Z	mittl. Aequinoct.
1860 Sept. 19.5(5)	8°41'29"8	+ 0°30' 6"2	—1.0024059	+0.0452085	+0.0196157	1860,0
1861 Dec. 28.5(4)	124 41 40.1	+18 57 53.2	+0.1242279	—0.8948019	—0.3882817	
1863 April 10.5(1)	184 36 25.5	+ 0 55 11.0	+0.9389739	+0.3224833	+0.1399321	
1871 Sept. 15.5(6)	356 36 23.0	— 4 20 8.7	—0.9966609	+0.1184494	+0.0513987	1870,0
1873 Jan. 16.5(5)	110 10 58.2	+21 19 43.8	+0.4457436	—0.8046120	—0.3491156	
1874 März 22.5(4)	183 28 45.8	+ 1 17 38.5	+0.9965770	+0.0338177	+0.0146734	
1875 Mai 21.5(4)	235 16 33.9	—16 43 4.2	+0.4985747	+0.8085520	+0.3508195	1880,0
1876 Juli 18.5(2)	305 9 24.3	—19 14 35.0	—0.4552539	+0.8334188	+0.3616114	
1877 Nov. 24.5(6)	46 46 34.3	+14 3 47.2	—0.4500626	—0.8054688	—0.3494796	

B. Anschluss der Elemente an die Beobachtungen mit strenger Berücksichtigung der Principien der Methode der kleinsten Quadrate.

§ 1. Allgemeines.

Verbindet man die Forderungen der Methode der kleinsten Quadrate mit dem hier vorgelegten Probleme, so sieht man sofort, dass man in dem gegebenen Falle die daselbst verlangte lineare Form zwischen den Fehlern und den Unbekannten nur dadurch herstellen kann, dass man als Ausgangspunkt der Untersuchung genäherte richtige Elemente, die man sich stets wird verschaffen können, annimmt, und die Verbesserungen der zu Grunde gelegten Elemente als Unbekannte in das Problem einführt, so dass man diese Incremente als Grössen erster Ordnung (also adäquat den differentiellen Aenderungen) auffassen kann; es wird jede Aenderung in einer beobachteten Coordinate δB dargestellt werden können durch:

$$\delta B = a_1 \delta E_1 + a_2 \delta E_2 + a_3 \delta E_3 + a_4 \delta E_4 + a_5 \delta E_5 + a_6 \delta E_6$$

wobei E_1, E_2, \dots, E_6 die Elemente darstellen und a_1, a_2, \dots, a_6 die entsprechenden Differentialquotienten; es können unter Umständen noch mehrere Glieder ein-

*.) Die Correction der Le Verrier'schen Nutation um das Glied $+0''128 \sin (\odot - P)$ ist hierbei berücksichtigt, vergleiche hierbei die diesbezügliche Bemerkung in den erläuternden Anhängen der Berliner Jahrbücher.

treten, wenn man z. B. auf Grössen von der Ordnung der Störungen Rücksicht nimmt und etwa Verbesserungen der angewandten störenden Massen auffinden will u. s. w., es wird sich aber in der Form der obigen Gleichungen durch diese Erweiterungen nichts ändern; hierbei könnte noch erwähnt werden, dass eigentlich 7 Elemente in Betracht zu ziehen sind, wenn man die Maasse des betreffenden Körpers und deren Verbesserung aufsuchen wollte; doch würde aus diesen Gleichungen aus leicht ersichtlichen Gründen eine Bestimmung dieses siebenten Elementes mit Sicherheit niemals möglich sein, und ausserdem wird die Masse derjenigen Himmelskörper, die hier in Betracht kommen, so wenig von der Null verschieden sein, dass man ohne Bedenken den Nullwerth für deren Masse substituiren kann; ich werde daher auf diesen Umstand nicht weiter Rücksicht nehmen.

Man erhält für jede vollständige Beobachtung oder für jeden Normalort, da derselbe 2 Coordinaten gibt, 2 Bedingungsgleichungen von der oben aufgestellten Form; überschreitet nun die Anzahl der Bedingungsgleichungen die Zahl der Elemente (in unserem Falle 6), so wird man nach der Methode der kleinsten Quadrate die erforderlichen Incremente der Elemente suchen, um die wahrscheinlichsten Elemente zu erhalten. Um aber diese Rechnungen ausführen zu können, muss die Berechnung der Differentialquotienten ermöglicht werden und es sollen in den folgenden Paragraphen die hierfür nöthigen Entwicklungen vorgenommen werden.

§ 2. Darstellung der Variationen der Beobachtungen durch die Variationen des Knotens, der Neigung, der Länge in der Bahn und des Radiusvectors.

Die Ausdrücke für die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten, denen dasselbe Coordinatensystem zu Grunde liegt, auf welches sich die Elemente beziehen, sind (vergl. I pag. 16):

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i \\ y &= r \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i \\ z &= r \sin u \sin i \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

denkt man sich für das Argument der Breite u geschrieben:

$$u = (v + \pi) - \Omega$$

wobei v die wahre Anomalie und π die Länge des Perihels vorstellt, so wird $v + \pi$ die Länge in der Bahn sein; diese Zerlegung erweist sich in der Folge besonders bei Bahnen mit kleinen Neigungen als sehr zweckmässig. Man erhält durch Differentiation der Ausdrücke 1) nach $(v + \pi)$, r , Ω und i leicht:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial (v + \pi)} &= -r (\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i) \\ \frac{\partial y}{\partial (v + \pi)} &= -r (\sin u \sin \Omega - \cos u \cos \Omega \cos i) \\ \frac{\partial z}{\partial (v + \pi)} &= r \cos u \sin i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos u \cos \varrho - \sin u \sin \varrho \cos i \\
 \frac{\partial y}{\partial r} &= \cos u \sin \varrho + \sin u \cos \varrho \cos i \\
 \frac{\partial z}{\partial r} &= \sin u \sin i \\
 \frac{\partial x}{\partial \varrho} &= 2r \sin \frac{1}{2} i^2 \sin (u - \varrho) \\
 \frac{\partial y}{\partial \varrho} &= 2r \sin \frac{1}{2} i^2 \cos (u - \varrho) \\
 \frac{\partial z}{\partial \varrho} &= -r \cos u \sin i \\
 \frac{\partial x}{\partial i} &= r \sin u \sin \varrho \sin i \\
 \frac{\partial y}{\partial i} &= -r \sin u \cos \varrho \sin i \\
 \frac{\partial z}{\partial i} &= r \sin u \cos i .
 \end{aligned}$$

Um die voranstehenden Formeln sofort einfacher zu gestalten, soll als Ausgangspunkt der Zählung in der Fundamentalebene der Punkt ϱ gewählt werden; dann ist in den obigen Ausdrücken $\varrho = 0$ zu setzen und man erhält:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial (v + \pi)} &= -r \sin u & \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos u \\
 \frac{\partial y}{\partial (v + \pi)} &= r \cos u \cos i & \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin u \cos i \\
 \frac{\partial z}{\partial (v + \pi)} &= r \cos u \sin i & \frac{\partial z}{\partial r} &= \sin u \sin i \\
 \frac{\partial x}{\sin i \partial \varrho} &= r \sin u \operatorname{tg} \frac{1}{2} i & \frac{\partial x}{\partial i} &= 0 \\
 \frac{\partial y}{\sin i \partial \varrho} &= r \cos u \operatorname{tg} \frac{1}{2} i & \frac{\partial y}{\partial i} &= -r \sin u \sin i \\
 \frac{\partial z}{\sin i \partial \varrho} &= -r \cos u & \frac{\partial z}{\partial i} &= r \sin u \cos i
 \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

Um nun die Aenderungen der rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten auf die geocentrischen polaren zu übertragen, erinnere man sich der (I pag. 31) gegebenen Ausdrücke; man erhält dann mit Rücksicht auf den Ausgangspunkt der Zählung, wenn man mit α und δ die polaren Coordinaten, denen das oben gewählte System zu Grunde liegt, und mit Δ die geocentrische Entfernung bezeichnet:

$$\begin{aligned}
 \delta \alpha \cos \delta &= -\frac{\sin (\alpha - \varrho)}{\Delta} \delta x + \frac{\cos (\alpha - \varrho)}{\Delta} \delta y \\
 \delta \delta &= -\frac{\cos (\alpha - \varrho)}{\Delta} \sin \delta \delta x - \frac{\sin (\alpha - \varrho)}{\Delta} \sin \delta \delta y + \frac{\cos \delta}{\Delta} \delta z .
 \end{aligned}$$

Substituirt man in diesen Ausdrücken die Variationen aus 2), so erhält man leicht für die Variationen der in der Fundamentalebene gezählten polaren Coordinaten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial (v+\pi)} &= \frac{r}{\varpi} \left\{ \sin (\alpha-\Omega) \sin u + \cos (\alpha-\Omega) \cos u \cos i \right\} \\ \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial r} &= \frac{1}{\varpi} \left\{ -\sin (\alpha-\Omega) \cos u + \cos (\alpha-\Omega) \sin u \cos i \right\} \\ \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\sin i \partial \Omega} &= \frac{r}{\varpi} \operatorname{tang} \frac{1}{2} i \cos (\alpha-\Omega+u) \\ \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial i} &= -\frac{r}{\varpi} \sin u \cos (\alpha-\Omega) \sin i ; \end{aligned} \right\} 3)$$

für die vertical auf die Fundamentalebene gezählte Coordinate findet sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial (v+\pi)} &= \frac{r}{\varpi} \left\{ \cos (\alpha-\Omega) \sin u \sin \delta - \sin (\alpha-\Omega) \cos u \cos i \sin \delta + \cos u \sin i \cos \delta \right\} \\ -\frac{\partial \delta}{\partial r} &= \frac{1}{\varpi} \left\{ -\cos (\alpha-\Omega) \cos u \sin \delta - \sin (\alpha-\Omega) \sin u \cos i \sin \delta + \sin u \sin i \cos \delta \right\} \\ \frac{\partial \delta}{\sin i \partial \Omega} &= -\frac{r}{\varpi} \left\{ \sin (\alpha-\Omega+u) \sin \delta \operatorname{tang} \frac{1}{2} i + \cos u \cos \delta \right\} \\ -\frac{\partial \delta}{\partial i} &= \frac{r}{\varpi} \left\{ \sin (\alpha-\Omega) \sin \delta \sin i + \cos \delta \cos i \right\} \sin u . \end{aligned} \right\} 4)$$

Die Einführung einiger Hilfswinkel wird die Berechnung der Variationen nach der Länge in der Bahn und dem Radiusvector wesentlich erleichtern; setzt man nämlich:

$$\left. \begin{aligned} A \sin A' &= \cos (\alpha-\Omega) \cos i, \quad m \sin M = \sin i, & B \sin B' &= m \sin (M+\delta) \\ A \cos A' &= \sin (\alpha-\Omega), & m \cos M &= -\sin (\alpha-\Omega) \cos i, & B \cos B' &= \cos (\alpha-\Omega) \sin \delta \end{aligned} \right\} 5)$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial (v+\pi)} &= \frac{r}{\varpi} A \sin (A'+u), & \frac{\partial \delta}{\partial (v+\pi)} &= \frac{r}{\varpi} B \sin (B'+u) \\ \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial r} &= -\frac{1}{\varpi} A \cos (A'+u), & -\frac{\partial \delta}{\partial r} &= -\frac{1}{\varpi} B \cos (B'+u). \end{aligned} \right\} 6)$$

welche Formen sich in den späteren Rechnungen sehr bequem erweisen werden. Die Variationen nach den Elementen Ω und i haben in den Ausdrücken 3 und 4 bereits hinlänglich bequeme Formen für die Rechnung.

Um den Vortheil der eben angegebenen Formeln zu erweisen, denken wir uns die Variation von $(v+\pi)$ und r nach irgend einem Elemente dargestellt durch:

$$\frac{\partial (v+\pi)}{\partial E} = F, \quad \frac{\partial r}{\partial E} = R;$$

setzt man nun:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial E} &= -\frac{R}{r} = N \sin N' \\ V &= N \cos N', \end{aligned}$$

und beachtet, dass ist:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial E} &= \left(\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial (v+\pi)} \right) \left(\frac{\partial (v+\pi)}{\partial E} \right) + \left(\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial E} \right) \\ -\frac{\partial \delta}{\partial E} &= \left(\frac{\partial \delta}{\partial (v+\pi)} \right) \left(\frac{\partial (v+\pi)}{\partial E} \right) + \left(\frac{\partial \delta}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial E} \right). \end{aligned}$$

so wird die gemeinsame Form aller Differentialquotienten zwischen den vier Elementen, welche $(v+\pi)$ und r bestimmen, und den beobachteten Orten die folgende sein:

$$\frac{\cos \delta \partial u}{\partial E} = \frac{r}{J} A N \sin (N' + A' + u)$$

$$-\frac{\partial \delta}{\partial E} = \frac{r}{J} A N \sin (N' + B' + u) ,$$

welche Form für die logarithmische Rechnung eine sehr bequeme ist.

§ 3. Entwicklung der Differentialquotienten von r und r' nach den Elementen in Bahnen mit mässiger Excentricität.

Die vorstehend ermittelten Differentialausdrücke der Coordinaten eines Himmelskörpers sind vorerst nach den Elementen Ω und i entwickelt und ausserdem durch die Variationen der Coordinaten $(r + \pi)$ und r ausgedrückt, welche letzteren Variationen in solche der Elemente umgesetzt werden müssen. Diese Aufgabe muss, um practisch brauchbare Resultate zu erlangen, in zweifacher Weise gelöst werden, je nachdem der kreisförmige oder der parabolische Character der Bahn überwiegt. Indem ich die Lösung der letzteren Aufgabe auf den folgenden Paragraphen verschiebe, soll hier die Entwicklung vorgenommen werden, die in elliptischen Bahnen von mässiger Excentricität Anwendung findet, wobei ich bemerke, dass hierunter keineswegs die Beschränkung auf kleine Excentricitäten zu verstehen ist; so werden beispielsweise die folgenden Formeln bei allen periodischen Kometen mit mässiger Umlaufszeit mit Vorthail benützt werden können.

Die wahre Anomalie r wird in elliptischen Bahnen bestimmt durch die Gleichungen (vergl. I pag. 45 und 46)

$$M_0 + \mu t = E - e \sin E . \quad 1)$$

$$\tan \frac{1}{2} v = \tan (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) \tan \frac{1}{2} E , \quad 2)$$

wobei die Zeit t in Einheiten des mittleren Sonnentages von derjenigen Epoche an zu zählen ist, für welche die mittlere Anomalie M_0 gilt. Die Variation der ersten Gleichung gibt unter Anwendung einiger offenkundiger Reductionen:

$$\partial M_0 + t \partial \mu = \frac{r}{a} \partial E - \sin E \cos \varphi \partial \varphi ;$$

Da aber die Relation besteht:

$$\cos \varphi \sin E = \frac{r}{a} \sin v ,$$

so wird:

$$\partial E = \frac{a}{r} (\partial M_0 + t \partial \mu) + \sin v \partial \varphi . \quad 3)$$

Denkt man sich die Gleichung 2) logarithmisch geschrieben und bildet dann die Variation derselben, so findet sich leicht:

$$\frac{\partial v}{\sin v} = \frac{\partial \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\partial E}{\sin E} ;$$

verbindet man diesen Ausdruck mit 3), so resultirt sofort, wenn man auf die Relation

$$\partial (v + \pi) = \partial v + \partial \pi \quad .$$

Rücksicht nimmt, der Ausdruck:

$$\partial (v + \pi) = \partial \pi + \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi (\partial M_0 + t \partial \mu) + \frac{\sin v}{\cos \varphi} (2 + e \cos v) \partial \varphi \quad . \quad 4)$$

Um die Variation des Radiusvector zu finden, differentiire man die Gleichung:

$$r = a (1 - e \cos E) ;$$

man erhält dadurch:

$$\partial r = \frac{r}{a} \partial a + a \sin \varphi \sin E \partial E - a \cos E \cos \varphi \partial \varphi ; \quad 5)$$

nun ist aber:

$$\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} , \quad \partial \mu = - \frac{3}{2} \frac{\mu}{a} \partial a ;$$

ersetzt man überdiess ∂E in 5) durch den Ausdruck in 3) (pag. 386), so findet sich zunächst:

$$\partial r = a \operatorname{tg} \varphi \sin v \partial M_0 + \left(t a \operatorname{tg} \varphi \sin v - \frac{2}{3} \frac{r}{\mu} \right) \partial \mu + a (\sin \varphi \sin E \sin v - \cos E \cos \varphi) \partial \varphi \quad .$$

Der Coëfficient von $\partial \varphi$ lässt sich wesentlich vereinfachen; berücksichtigt man nämlich die Relationen:

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v} , \quad \sin E = \frac{\sin v \cos \varphi}{1 + e \cos v} ,$$

so wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \varphi} &= \frac{a}{1 + e \cos v} \{ \sin \varphi \cos \varphi \sin v^2 - \cos \varphi \cos v - \sin \varphi \cos \varphi \} = \\ &= - \frac{a \cos \varphi \cos v}{1 + e \cos v} (1 + e \cos v) ; \end{aligned}$$

demgemäss wird man haben:

$$\partial r = a \operatorname{tang} \varphi \sin v \partial M_0 + \left(t \cdot a \operatorname{tang} \varphi \sin v - \frac{2}{3} \frac{r}{\mu \sin i''} \right) \partial \mu - a \cos \varphi \cos v \partial \varphi , \quad 6)$$

wobei ich sofort μ mit $\sin i''$ multiplicirt angesetzt habe, weil μ gewöhnlich in Bogensekunden gegeben wird.

Die Formeln 4) und 6) stellen also die Variationen der Coordinaten $(v + \pi)$ und r durch die Variationen der Elemente π (die Länge des Perihels), M_0 (die mittlere Anomalie zur Zeit der Epoche), μ (die mittlere tägliche siderische Bewegung) und φ (der Excentricitätswinkel $\sin \varphi = e$) dar, womit das gestellte Problem gelöst erscheint. Doch werden noch weitere Transformationen in dem Falle nöthig, wo sich die Bahn sehr wenig vom Kreise unterscheidet, und in der That werden sich die folgenden Transformationen bei der Anwendung auf alle Planetenbahnen empfehlen, während die Anwendung auf die Bahnen periodischer Kometen kurzer Umlaufzeit die Beibehaltung der obigen Formeln wünschenswerth erscheinen lässt.

Ist nämlich die Bahn sehr nahe kreisförmig, so wird in 4) der Coëfficient von $\partial \pi$ und ∂M_0 nahe gleich und man wird grosse Aenderungen des einen

Elementes bei entsprechender umgekehrter Aenderung des anderen vornehmen können, ohne dass der Ort in der Bahn sich wesentlich ändert; aus diesem Umstande aber entsteht ein Nachtheil für die Bequemlichkeit und Sicherheit der Rechnung, da die obigen Differentialformeln nur kleine Aenderungen der Elemente vorsezen. In Etwas wird man diesen Nachtheil beheben, so dass nur grosse Aenderungen das eine Element treffen können, wenn man statt der mittleren Anomalie die mittlere Länge (L_0) zur Zeit der Epoche einführt; es ist:

$$L_0 = M_0 + \pi ,$$

also

$$\partial M_0 = \partial L_0 - \partial \pi ,$$

und man erhält demnach für 4) und 6) (pag. 387) die folgenden Formen;

$$\left. \begin{aligned} \partial (v + \pi) &= \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \left\{ \partial L_0 + t \partial \mu \right\} + \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \right\} \partial \pi + \frac{\sin v}{\cos \varphi} \left\{ 2 + e \cos v \right\} \partial \varphi \\ \partial r &= a \operatorname{tg} \varphi \sin v \partial L_0 + \left(t \cdot a \operatorname{tg} \varphi \sin v - \frac{2}{3} \frac{r}{a \sin^3 \varphi} \right) \partial \mu - a \operatorname{tg} \varphi \sin v \partial \pi - \\ &\quad - a \cos \varphi \cos v \partial \varphi ; \end{aligned} \right\} 7)$$

diese Form hat indess immer noch den Nachtheil, dass für nahezu kreisförmige Bahnen der Coëfficient von $\partial \pi$ sich der Null nähert, da derselbe von der Ordnung der Excentricität wird, so dass grosse Variationen, die die Grenzen der differentiellen Aenderungen weit überschreiten, in π vorgenommen werden können, ohne den Ort der Bahn wesentlich zu verschieben.

Beachtet man, dass für nahe kreisförmige Bahnen mit Weglassung der Glieder von der Ordnung der Excentricität in die Variation des Elementes geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial (v + \pi)}{\partial \pi} = - 2 \cos v \sin \varphi , \quad \frac{\partial (v + \pi)}{\partial \varphi} = 2 \sin v ,$$

so ergibt sich sofort, dass die Einführung der Elemente:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{\sin \varphi}{\sin^3 \varphi} \sin \pi \\ \Psi &= \frac{\sin \varphi}{\sin^3 \varphi} \cos \pi \end{aligned} \right\} 8)$$

für den Kreis jede Unsicherheit schwinden lässt, und dass durch dieselbe ein wesentlich linearer Character der Functionen erreicht wird.

Um nun diese Elemente, die ich wegen der Gleichförmigkeit mit den übrigen in Bogenmaass angesetzt habe, in die Gleichungen 7) einführen zu können, bedenke man, dass die Differentiation von 8) ergibt:

$$\begin{aligned} \partial \Phi &= \sin \varphi \cos \pi \partial \pi + \sin \pi \cos \varphi \partial \varphi \\ \partial \Psi &= - \sin \varphi \sin \pi \partial \pi + \cos \pi \cos \varphi \partial \varphi , \end{aligned}$$

wobei die Aenderungen $\partial \pi$ und $\partial \varphi$ ebenfalls in Bogenmaass angenommen sind; daraus bestimmt sich leicht:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi \partial \pi &= \cos \pi \partial \Phi - \sin \pi \partial \Psi \\ \cos \varphi \partial \varphi &= \sin \pi \partial \Phi + \cos \pi \partial \Psi . \end{aligned} \right\} 9)$$

Die Substitution der Ausdrücke 9) in 7) (pag. 388) ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \delta(v + \pi) &= \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi (\delta L_0 + t \delta \mu) + \\ &+ \left\{ \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \right) \frac{\cos \pi}{\sin \varphi} + \frac{\sin v}{\cos \varphi^2} (2 + e \cos v) \sin \pi \right\} \delta \Phi \\ &+ \left\{ - \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \right) \frac{\sin \pi}{\sin \varphi} + \frac{\sin v}{\cos \varphi^2} (2 + e \cos v) \cos \pi \right\} \delta \Psi \\ \delta r &= a \operatorname{tang} \varphi \sin v \delta L_0 + \left(t \cdot a \operatorname{tg} \varphi \sin v - \frac{2}{3} \frac{r}{\mu \sin 1''} \right) \delta \mu - \\ &- a \left(\frac{\sin v}{\cos \varphi} \cos \pi + \cos v \sin \pi \right) \delta \Phi \\ &+ a \left(\frac{\sin v}{\cos \varphi} \sin \pi - \cos v \cos \pi \right) \delta \Psi . \end{aligned} \right\} 10)$$

Diese Formen können, so weit dieselben die Coëfficienten von $\delta \Phi$ und $\delta \Psi$ in dem Ausdrücke für $\delta(v + \pi)$ betreffen, so transformirt werden, dass der Berechnung derselben keine weitere Unsicherheit anhaftet; die analogen Coëfficienten in δr sind diesem Nachtheile ohnehin nicht unterworfen.

Man kann schreiben:

$$\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \right) \operatorname{cosec} \varphi = \frac{\operatorname{cosec} \varphi}{\cos \varphi^2} \left\{ 1 - e^2 - \frac{(1 + e \cos v)^2}{\cos \varphi} \right\} ;$$

nun ist aber:

$$\frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1 - 2 \sin \frac{1}{2} \varphi^2 + 2 \sin \frac{1}{2} \varphi^2}{\cos \varphi} = 1 + \frac{2 \sin \frac{1}{2} \varphi^2}{\cos \varphi} ;$$

man hat also:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \right) \operatorname{cosec} \varphi &= \frac{\operatorname{cosec} \varphi}{\cos \varphi^2} \left\{ 1 - e^2 - (1 + e \cos v)^2 - 2 \left(\frac{p}{r} \right)^2 \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi^2}{\cos \varphi} \right\} \\ &= - \frac{1}{\cos \varphi^2} \left\{ \cos v (2 + e \cos v) + e \left(1 + \left(\frac{p}{r} \right)^2 \frac{1}{2 \cos \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi^2} \right) \right\} ; \end{aligned}$$

demnach ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta(v + \pi)}{\delta \varphi} &= - \left\{ \cos(v + \pi) \frac{2 + e \cos v}{\cos \varphi^2} + \frac{\varphi \sin 1''}{\cos \varphi^2} \left(1 + \frac{(1 + e \cos v)^2}{2 \cos \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi^2} \right) \right\} \\ \frac{\delta(v + \pi)}{\delta \varphi^2} &= \left\{ \sin(v + \pi) \frac{2 + e \cos v}{\cos \varphi^2} + \frac{\varphi \sin 1''}{\cos \varphi^2} \left(1 + \frac{(1 + e \cos v)^2}{2 \cos \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi^2} \right) \right\} . \end{aligned} \right\} 11)$$

Will man, was nicht gerade nöthig ist, die Ausdrücke für δr ähnlich transformiren, so findet sich leicht:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta r}{\delta \varphi} &= - a \left\{ \sin(v + \pi) + \frac{\varphi \sin 1'' \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi}{\cos \varphi} \sin v \right\} \\ \frac{\delta r}{\delta \varphi^2} &= - a \left\{ \cos(v + \pi) - \frac{\varphi \sin 1'' \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi}{\cos \varphi} \sin v \right\} \end{aligned} \right\} 12)$$

Stellt man daher die gewonnenen Resultate zusammen, so erhält man für die Anwendung auf Planetenbahnen:

$$\begin{aligned}
 \delta(v + \pi) &= \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \delta L_0 + \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \cdot t \cdot \delta \mu - \\
 &\quad - \left\{ \cos(v + \pi) \frac{2 + e \cos v}{\cos \varphi^2} + \frac{\psi \sin \iota''}{\cos \varphi^2} \left(1 + \frac{(1 + e \cos v)^2}{2 \cos \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi^2} \right) \right\} \delta \Phi \\
 &\quad + \left\{ \sin(v + \pi) \frac{2 + e \cos v}{\cos \varphi^2} + \frac{\phi \sin \iota''}{\cos \varphi^2} \left(1 + \frac{(1 + e \cos v)^2}{2 \cos \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi^2} \right) \right\} \delta \Psi \\
 \delta r &= a \operatorname{tg} \varphi \sin v \delta L_0 + \left(t \cdot a \operatorname{tg} \varphi \sin v - \frac{2}{3} \frac{r}{\mu \sin \iota''} \right) \delta \mu - \\
 &\quad - a \left\{ \sin(v + \pi) + \frac{\psi \sin \iota'' \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi}{\cos \varphi} \sin v \right\} \delta \Phi \\
 &\quad - a \left\{ \cos(v + \pi) - \frac{\phi \sin \iota'' \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi}{\cos \varphi} \sin v \right\} \delta \Psi .
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \delta(v + \pi) \\ \delta r \end{aligned}} \right\} 13)$$

Für die Bahnen der periodischen Kometen wird man aber die Formeln 4) und 6) (pag. 387) unverändert anwenden, also haben:

$$\begin{aligned}
 \delta(v + \pi) &= \delta \pi + \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \delta M_0 + \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi t \cdot \delta \mu + \frac{\sin v}{\cos \varphi} (2 + e \cos v) \delta \varphi \\
 \delta r &= a \operatorname{tg} \varphi \sin v \delta M_0 + \left(t \cdot a \operatorname{tg} \varphi \sin v - \frac{2}{3} \frac{r}{\mu \sin \iota''} \right) \delta \mu - a \cos \varphi \cos v \delta \varphi .
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \delta(v + \pi) \\ \delta r \end{aligned}} \right\} 14)$$

Um endlich die Differentialquotienten dem oben (§ 2 pag. 385) angegebenen Kunstgriffe entsprechend zu verwerthen, hat man für jeden Ort zu rechnen:

Bei Planetenbahnen:

$$\begin{aligned}
 A \sin A' &= \cos(\alpha - \Omega) \cos i \\
 A \cos A' &= \sin(\alpha - \Omega) \\
 m \sin M &= \sin i \\
 m \cos M &= -\sin(\alpha - \Omega) \cos i \\
 B \sin B' &= m \sin(M + \delta) \\
 B \cos B' &= \cos(\alpha - \Omega) \sin \delta \\
 u &= v + \omega
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A \sin A' \\ A \cos A' \\ m \sin M \\ m \cos M \\ B \sin B' \\ B \cos B' \end{aligned}} \right\} 1)$$

dann weiter:

$$\begin{aligned}
 F \sin F' &= -\frac{a}{r} \operatorname{tg} \varphi \sin v \\
 F \cos F' &= \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \\
 G \sin G' &= t \cdot F \sin F' + \frac{2}{3 \mu \sin \iota''} \\
 G \cos G' &= t \cdot F \cos F' \\
 \frac{\psi \sin \iota'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}{\cos \varphi} &= l, \quad \frac{\psi \sin \iota''}{\cos \varphi^2} = n, \quad \frac{2 + \sin \varphi \cos v}{\cos \varphi^2} = d \\
 \frac{\phi \sin \iota'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}{\cos \varphi} &= m, \quad \frac{\phi \sin \iota''}{\cos \varphi^2} = q, \quad 1 + \frac{(1 + \sin \varphi \cos v)^2}{2 \cos \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi^2} = f \\
 H \sin H' &= \frac{a}{r} \{ \sin(v + \pi) + l \sin v \} \\
 H \cos H' &= -\{ d \cos(v + \pi) + n f \} \\
 K \sin K' &= \frac{a}{r} \{ \cos(v + \pi) - m \sin v \} \\
 K \cos K' &= \{ d \sin(v + \pi) + q f \}
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} F \sin F' \\ F \cos F' \\ G \sin G' \\ G \cos G' \\ \frac{\psi \sin \iota'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}{\cos \varphi} \\ \frac{\phi \sin \iota'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}{\cos \varphi} \\ H \sin H' \\ H \cos H' \\ K \sin K' \\ K \cos K' \end{aligned}} \right\} 11)$$

wobei t in mittleren Sonnentagen von der Zeit der Epoche an zu zählen ist.
Dann ist:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial L_0} &= \frac{r}{J} A F \sin (F' + A' + u) \\
 \frac{\partial \delta}{\partial L_0} &= \frac{r}{J} B F \sin (F' + B' + u) \\
 \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \mu} &= \frac{r}{J} A G \sin (G' + A' + u) \\
 \frac{\partial \delta}{\partial \mu} &= \frac{r}{J} B G \sin (G' + B' + u) \\
 \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \phi} &= \frac{r}{J} A H \sin (H' + A' + u) \\
 \frac{\partial \delta}{\partial \phi} &= \frac{r}{J} B H \sin (H' + B' + u) \\
 \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial q'} &= \frac{r}{J} A K \sin (K' + A' + u) \\
 \frac{\partial \delta}{\partial q'} &= \frac{r}{J} B K \sin (K' + B' + u) \\
 \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\sin i \partial \Omega} &= \frac{r}{J} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \cos (\alpha - \Omega + u) \\
 \frac{\partial \delta}{\sin i \partial \Omega} &= - \frac{r}{J} \{ \sin (\alpha - \Omega + u) \sin \delta \operatorname{tg} \frac{1}{2} i + \cos u \cos \delta \} \\
 \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial i} &= - \frac{r}{J} \sin u \cos (\alpha - \Omega) \sin i \\
 \frac{\partial \delta}{\partial i} &= \frac{r}{J} \{ \sin (\alpha - \Omega) \sin \delta \sin i + \cos \delta \cos i \} \sin u .
 \end{aligned} \right\} \text{III)}$$

Bei Bahnen periodischer Kometen kurzer Umlaufszeit:

Die Formeln I) werden ungeändert benützt und ebenso die Bestimmung von F , F' und G , G' ; dagegen hat man zu setzen:

$$\left. \begin{aligned}
 P \sin P' &= \frac{a}{r} \cos \varphi \cos v \\
 P \cos P' &= \frac{\sin v}{\cos \varphi} (2 + e \cos v)
 \end{aligned} \right\} \text{II)}$$

dann wird:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial M_0} &= \frac{r}{J} A F \sin (F' + A' + u) \\
 \frac{\partial \delta}{\partial M_0} &= \frac{r}{J} B F \sin (F' + B' + u) \\
 \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \mu} &= \frac{r}{J} A G \sin (G' + A' + u) \\
 \frac{\partial \delta}{\partial \mu} &= \frac{r}{J} B G \sin (G' + B' + u) \\
 \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \varphi} &= \frac{r}{J} A P \sin (P' + A' + u) \\
 \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} &= \frac{r}{J} B P \sin (P' + B' + u) \\
 \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \pi} &= \frac{r}{J} A \sin (A' + u) \\
 \frac{\partial \delta}{\partial \pi} &= \frac{r}{J} B \sin (B' + u)
 \end{aligned} \right\} \text{III)}$$

Die Formeln für $\partial \Omega$ und ∂i bleiben ungeändert.

Werden die Neigungen gegen die Fundamentalebene verschwindend klein, so wird man mit den obigen Formeln für $\delta\Omega$ nicht ausreichen, man wird ähnlich wie in der Störungsrechnung (pag. 223) die Elemente

$$\sin i \sin \Omega \quad \text{und} \quad \sin i \cos \Omega$$

einführen; doch gehe ich auf diese Formeln hier nicht näher ein, weil man von denselben wohl niemals Gebrauch machen wird.

Die vorstehend entwickelten Formeln bedürfen noch zweier Zusätze; man erhält, wenn man von den Formeln für Planetenbahnen Gebrauch macht, nicht die Elemente π und e , sondern die dieselben ersetzenden Grössen Φ und Ψ ; man muss daher den Einfluss kennen, den die Aenderungen der letzteren Grössen auf die ersteren ausüben; hierbei wird es aber nicht zweckmässig sein, sich auf die differentiellen Verhältnisse zu beschränken, da eben die Aenderungen von Φ und Ψ in π durch die im Allgemeinen geringe Excentricität dividirt erscheinen. Die strengen Formeln ergeben sich leicht auf folgendem Wege. Es ist:

$$\begin{aligned} e \sin \pi &= e_0 \sin \pi_0 + \delta \Phi \\ e \cos \pi &= e_0 \cos \pi_0 + \delta \Psi, \end{aligned}$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\begin{aligned} e \sin (\pi - \pi_0) &= \delta \Phi \cos \pi_0 - \delta \Psi \sin \pi_0 \\ e \cos (\pi - \pi_0) &= e_0 + \delta \Phi \sin \pi_0 + \delta \Psi \cos \pi_0; \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} e \sin (\pi - \pi_0) \\ e \cos (\pi - \pi_0) \end{aligned}} \right\} \quad \text{15)}$$

setzt man daher:

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= n \sin N \\ \delta \Psi &= n \cos N, \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \delta \Phi \\ \delta \Psi \end{aligned}} \right\} \quad \text{IV)}$$

so ist:

$$\tan (\pi - \pi_0) = \tan \delta \pi = \frac{n \sin (N - \pi_0)}{e_0 + n \cos (N - \pi_0)},$$

welche Formel der strenge Ausdruck der gesuchten Aenderung ist. Die Grösse n erscheint hierbei im Bogenmaasse; macht man daher von der bekannten Reihenentwicklung (vergl. I. pag. 28) Gebrauch und setzt:

$$\frac{n}{\sin q_0} = p, \quad \text{V)}$$

so ist:

$$\delta \pi = p \sin (N - \pi_0) + \frac{1}{2} p^2 \sin 1'' \sin 2 (N - \pi_0) + \frac{1}{3} p^3 (\sin 1'')^2 \sin 3 (N - \pi_0) + \dots \quad \text{VI)}$$

Multiplieirt man die Gleichungen 15) beziehungsweise mit $\sin \frac{1}{2} (\pi - \pi_0)$ und $\cos \frac{1}{2} (\pi - \pi_0)$ und addirt, so erhält man leicht:

$$e - e_0 = \frac{\sin \frac{1}{2} (\pi + \pi_0)}{\cos \frac{1}{2} (\pi - \pi_0)} \delta \Phi + \frac{\cos \frac{1}{2} (\pi - \pi_0)}{\cos \frac{1}{2} (\pi - \pi_0)} \delta \Psi,$$

oder mit Einführung des Werthes N :

$$e - e_0 = \frac{n \cos \frac{1}{2} N - \frac{1}{2} (\pi + \pi_0)}{\cos \frac{1}{2} (\pi - \pi_0)} = \delta e \quad \text{VII)}$$

Um aber δe auf q zu übertragen, kann man consequenter Weise sich auf die ersten Potenzen von δe beschränken und man hat dann:

$$\delta q = \frac{\delta e}{\cos q_0}. \quad \text{VIII}$$

Ein weiterer Zusatz resultirt daraus, dass die gefundenen Aenderungen sich auf äquatorale Elemente beziehen und eine Uebertragung auf die Aenderungen der ekliptikalen Elemente erwünscht ist. Zu diesem Zwecke wird es angemessen sein, zunächst die diesbezüglichen Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie zu entwickeln.

Geht man von den beiden Gleichungen aus:

$$\sin a \sin C = \sin c \sin A$$

$$\cos a \sin C = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c$$

und differentiiert nach allen Grössen, so erhält man, da

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c = -\cos C$$

ist,

$$-\sin C \sin a \cdot da + \cos a \cos C dC = -\cos C dB - (\sin B \sin A - \cos A \cos B \cos c) dA \\ - \sin A \cos B \sin c dc,$$

$$\sin C \cos a da + \sin a \cos C dC = \sin c \cos A dA + \sin A \cos c dc.$$

Multiplieirt man die erste Gleichung mit $-\sin a$, die zweite mit $\cos a$ und addirt, so wird, wenn man beachtet, dass

$$\sin A (\cos B \sin c \sin a + \cos c \cos a) = \sin A \cos b$$

ist, jetzt:

$$\sin C da = \sin a \cos C dB + \cos b \sin A dc$$

$$+ dA \{ \sin B \sin A \sin a - \cos A \cos B \cos c \sin a + \cos A \sin c \cos a \}.$$

Der letzte Coëfficient ist aber $\sin b$; denn setzt man im ersten Gliede:

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A,$$

und im zweiten Gliede:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \cos c \sin b \cos A,$$

so wird derselbe geschrieben werden können:

$$\sin b - \sin b \cos A^2 + \cos A \sin c (\cos a - \cos b \cos c) + \cos A^2 \cos c^2 \sin b;$$

beachtet man noch die Relation:

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A,$$

so erhellt unmittelbar die eben aufgestellte Behauptung.

Man hat also:

$$\sin C da = \sin a \cos C dB + \sin b dA + \sin A \cos b dc,$$

eine Formel, die man selten angeführt findet.

Andererseits resultirt aus der Formel:

$$\cos A = \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C$$

durch Differentiation:

$$-\sin A dA = (\cos B \sin C \cos a + \sin B \cos C) dB \\ + (\sin B \cos C \cos a + \cos B \sin C) dC \\ - \sin B \sin C \sin a da.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}\cos B \sin C \cos a + \sin B \cos C &= \sin A \cos c \\ \sin B \cos C \cos a + \cos B \sin C &= \sin A \cos b \\ \sin B \sin a &= \sin A \sin b ,\end{aligned}$$

somit

$$d A = - \cos c d B - \cos b d C + \sin b \sin C d a .$$

Betrachtet man nun das sphärische Dreieck zwischen der Ekliptik, dem Aequator und der Bahnlage, wobei der Bogen zwischen dem Aequator und der Ekliptik, welcher durch die Uebertragung der ekliptikalen Elemente auf den Aequator (vergl. I. pag. 9 ff.) bekannt ist, mit σ bezeichnet werden möge, setzt im Falle der Anwendung der ersten Formeln:

$$\begin{aligned}a &= \Omega & A &= 180 - i' \\ b &= \sigma & B &= \varepsilon \\ c &= \Omega' & C &= i\end{aligned}$$

im zweiten Falle:

$$\begin{aligned}a &= \sigma & A &= \varepsilon \\ b &= \Omega & B &= 180 - i' \\ c &= \Omega' & C &= i ,\end{aligned}$$

und beachtet, dass die Variation von ε der Null gleich zu setzen ist, so erhält man die folgenden Formeln, denen ich sogleich auch die aus den zweiten Differentialformeln folgende Variation von i beigelegt habe, die sich ergibt, wenn man:

$$\begin{aligned}a &= \Omega' & A &= i \\ b &= \sigma & B &= \varepsilon \\ c &= \Omega & C &= 180 - i\end{aligned}$$

setzt :

$$\begin{aligned}\sin i d \Omega &= \cos \sigma \sin i' d \Omega' - \sin \sigma d i' \\ \sin i d \sigma &= \sin \varepsilon \cos \Omega d \Omega' - \sin \sigma \cos i d i' \\ d i &= \sin \sigma \sin i' d \Omega' + \cos \sigma d i' .\end{aligned}$$

Diese Formeln lassen sich noch zweckmässig transformiren.

Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned}\sin i' d \Omega' &= p \sin P \\ d i' &= p \cos P ,\end{aligned}$$

so erscheint im ersten Ausdrucke jene Grösse, die durch die obigen Formeln als Unbekannte erhalten wird und es ist:

$$\begin{aligned}d \Omega &= \frac{p}{\sin i} \sin (P - \sigma) \\ d i &= p \cos (P - \sigma) ;\end{aligned}$$

beachtet man, dass nach einer Fundamentalrelation der sphärischen Trigonometrie, wenn man das Dreieck zwischen der Bahn, der Ekliptik und dem Aequator betrachtet, die Gleichung gilt:

$$\sin \varepsilon \cos \Omega = -\cos i' \sin i + \sin i' \cos i \cos \sigma,$$

so erhält der Ausdruck für $d\sigma$ die Form:

$$d\sigma = \cotg i \cdot p \sin (P - \sigma) - \cos i' d\Omega'.$$

Zu Folge der Relationen $\omega = \pi - \Omega = \omega' - \sigma = \pi' - \Omega' - \sigma$ wird jetzt:

$$d\pi = d\pi' - d\Omega' - d\sigma + d\Omega.$$

Man hat also:

$$d\pi = d\pi' - 2 \sin^2 \frac{1}{2} i' d\Omega' + p \sin (P - \sigma) \left\{ \frac{1}{\sin i} - \frac{1}{\tg i} \right\}$$

oder

$$d\pi = d\pi' + p \tg \frac{1}{2} i \sin (P - \sigma) - \tg \frac{1}{2} i' (\sin i' d\Omega').$$

Hierzu kommt noch, da:

$$\begin{aligned} L &= \pi + M \\ L' &= \pi' + M \end{aligned}$$

ist, die weitere Relation:

$$L = L' + \pi - \pi'$$

woraus

$$dL = dL' + p \tg \frac{1}{2} i \sin (P - \sigma) - \tg \frac{1}{2} i' (\sin i' d\Omega')$$

folgt.

Die gesammten Formeln für diese Uebertragung sind demnach die folgenden, wenn man wieder die Differentiation durch Variation ersetzt:

$$\left. \begin{aligned} p \sin P &= \sin i' \delta \Omega' \\ p \cos P &= \delta i' \\ \delta i &= p \cos (P - \sigma) \\ \delta \Omega &= \frac{p}{\sin i} \sin (P - \sigma) \\ \mathcal{A}\pi &= p \tg \frac{1}{2} i \sin (P - \sigma) - \tg \frac{1}{2} i' (\sin i' \delta \Omega') \\ \delta \pi &= \delta \pi' + \mathcal{A}\pi \\ \delta L &= \delta L' + \mathcal{A}L \end{aligned} \right\} \quad \text{IX)}$$

Will man aber, was vielleicht weniger bequem ist, Alles durch $\sin i' d\Omega'$ und $d i'$ ausgedrückt erhalten, so hätte man zu schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \delta i &= \cos \sigma \delta i' + \sin \sigma (\sin i' \delta \Omega') \\ \delta \Omega &= -\frac{\sin \sigma}{\sin i} \delta i' + \frac{\cos \sigma}{\sin i} (\sin i' \delta \Omega') \\ \mathcal{A}\pi &= -\sin \sigma \tg \frac{1}{2} i \delta i' + (\cos \sigma \tg \frac{1}{2} i - \tg \frac{1}{2} i') (\sin i' \delta \Omega') \\ \delta \pi &= \delta \pi' + \mathcal{A}\pi \\ \delta L &= \delta L' + \mathcal{A}L \end{aligned} \right\} \quad \text{X)}$$

§ 4. Entwicklung der Differentialquotienten von v und r nach den Elementen in nahezu parabolischen Bahnen.

Die im vorstehenden Paragraphen für die Ellipse entwickelten Differentialquotienten von v und r nach den Elementen sind für parabolische und hyperbolische Bahnen nicht anwendbar und werden selbst in Ellipsen, die sich wenig von der Parabel unterscheiden, bei der Rechnung höchst beschwerlich und unsicher. Der zuerst hervorgehobene Nachtheil der Beschränkung lässt sich aber durch eine geeignete Wahl der willkürlichen Constanten 'Elemente' umgehen, und es werden leicht Formeln erlangt werden, die reell bleiben für jede Kegelschnittsgattung; ich werde diese Formeln aus den obigen für die Ellipse hergestellten Relationen ableiten, was gestattet ist, da die für die Ellipse gefundenen Formen sich von jenen für die Hyperbel nur dadurch unterscheiden, dass gewisse Grössen in der letzteren imaginär werden; da aber die Imaginären denselben Rechnungsoperationen, wie die Reellen, unterworfen werden dürfen, im Endresultate aber das Imaginäre eliminirt erscheint, so führt der eingeschlagene Vorgang auf richtige Resultate. Es war oben (pag. 387) gefunden worden:

$$\left. \begin{aligned} \delta v &= \frac{a^2}{r^2} \cos q (\delta M_0 + t \delta \mu) + (2 + \sin q \cos v) \frac{\sin v}{\cos q} \delta q \\ \delta r &= a \operatorname{tg} q \sin v \delta M_0 + \left(t \cdot a \operatorname{tg} q \sin v - \frac{2r}{3\mu} \right) \delta \mu - a \cos q \cos v \delta q \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

Führt man statt der Elemente M_0 , μ und q die Elemente T (die Zeit des Periheldurchganges), q (der Perihelabstand) und e (die Excentricität) ein, so hat man zunächst:

$$\begin{aligned} M_0 &= (t - T) \mu, & a &= \frac{q}{1 - e}, & \delta \mu &= -\frac{3}{2} k \frac{\delta a}{a^2} \\ \delta M_0 &= -\mu \delta T, & \delta a &= \frac{\delta q}{1 - e} + \frac{q}{1 - e^2} \delta e, & \delta e &= \cos q \delta q, \\ \mu_0 &= \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}, & p &= q(1 + e). \end{aligned}$$

Transformirt man mit Hilfe dieser Relationen die Ausdrücke 1), so erhält man nach einigen leicht ersichtlichen Umsetzungen die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \delta v &= -\frac{k \sqrt{q(1+e)}}{r^2} \delta T - \frac{3}{2} \frac{t-T}{r^2} \frac{k}{q} \sqrt{\frac{1+e}{q}} \delta q \\ &\quad + \left\{ \left[1 + \frac{q(1+e)}{r} \right] \sin v - \frac{3}{2} \frac{t-T}{r^2} \frac{k}{q} (1+e)^{\frac{3}{2}} \sqrt{q} \right\} \frac{\delta e}{1-e^2} \\ \delta r &= -\frac{ke \sin v}{\sqrt{q(1+e)}} \delta T + \left\{ \frac{r}{q} - \frac{3}{2} \frac{t-T}{q^{\frac{3}{2}}} \frac{k}{q} \cdot \frac{e \sin v}{1+e} \right\} \delta q \\ &\quad + \left\{ r - q \cos v - \frac{3}{2} \frac{t-T}{\sqrt{q(1+e)}} \frac{ke \sin v}{q} \right\} \frac{\delta e}{1-e} \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

Das Formelsystem 2) erscheint nunmehr von der Gattung des Kegelschnittes unabhängig und würde in der That in jeder Beziehung sehr vorthellhaft sein, wenn nicht gerade in jenen Fällen, in denen man diese Formeln in Anwendung zieht, die

Bahnen einen nahezu parabolischen Charakter hätten, da sich in diesem Falle e nur wenig von der Einheit unterscheiden kann, so erhalten die Differentialquotienten von $\frac{dr}{de}$ und $\frac{dr}{dv}$ wegen des Nenners $(1-e)$ eine für die numerische Anwendung sehr unsichere Form, für die Parabel selbst bleiben diese Differentialquotienten durch die obigen Ausdrücke völlig unbestimmt, weil dieselben nothwendig die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ erhalten müssen. Man wird also im Falle der Parabel nothwendig die Relationen haben:

$$r - q \cos v = \frac{3}{2} \frac{(t-T) k e \sin v}{1 + q(1+e)}$$

$$\left[1 + \frac{q(1+e)}{r} \right] \sin v = \frac{3}{2} \frac{(t-T) k}{r^2} (1+e)^{\frac{3}{2}} \sqrt{q}$$

wobei natürlich e der Einheit gleich gesetzt werden muss; thut man dies, so wird sich zunächst durch die erstere Relation der Coëfficient von $\frac{\partial r}{\partial q}$ für die Parabel wesentlich vereinfachen lassen; man erhält nach einigen leichten Substitutionen sofort:

$$\frac{\partial r}{\partial q} = \cos v \quad 3)$$

wodurch der etwas complicirtere Coëfficient von $\frac{\partial r}{\partial q}$ eine sehr einfache Gestalt im Specialfalle der Parabel annimmt. Der Coëfficient von $\frac{\partial v}{\partial q}$ ist in den Formeln 2) in einer für die logarithmische Rechnung bequemen und sicheren Form enthalten, man kann aber für die Parabel mit Rücksicht auf die obige 2. Relation ($e = 1$ gesetzt) denselben auch die Form geben:

$$\frac{\partial r}{\partial q} = - \left(1 + \frac{\cos v}{2} \right) \frac{\sin v}{q} \quad 4)$$

welcher Ausdruck für die Parabel bei der Anwendung von Additionslogarithmen vielleicht noch bequemer erscheint, als der obige in 2) enthaltene Ausdruck.

Die für die Parabel hier näher ausgeführten Andeutungen geben deutlich den Weg an, den man bei der weiteren Verwerthung der Formeln 2) für die Rechnung einschlagen muss. Die erste Aufgabe wird demnach sein, die Differentialquotienten von ∂e von ihrer unbestimmten Form zu befreien und die zweite, unter Beibehaltung der für $\frac{\partial r}{\partial q}$ für die Parabel gefundenen Form die Correction für die von der Parabel abweichenden Bahnen zu suchen; eine ähnliche Transformation der Formel 4) würde bei der ohnehin so bequemen strengen Form keine Vortheile bieten.

Die erstere Aufgabe ist in völliger Strenge, so weit mir bekannt, noch nicht gelöst worden, den Fall der Parabel ausgenommen; man hat sich begnügt mit mehr oder minder genauen Annäherungen; da aber die Abschätzung der dadurch begangenen Fehler einigermaassen schwierig ist, so habe ich unter zu Grundelegung des Gauss'schen Verfahrens zur Bestimmung der wahren Anomalie in sehr excentrischen Bahnen (I pag. 60 ff.) strenge Ausdrücke entwickelt, und hiermit die der Lösung der

Aufgabe entgegenstehenden Hindernisse definitiv beseitigt; die hierfür nöthigen Hilfstafeln hat Herr F. K. Ginzel auf mein Ersuchen berechnet und dieselben sind in der angehängten Tafelsammlung als Tafel XVI aufgenommen.

Ich nehme vorerst die Entwicklung des Ausdruckes $\frac{dv}{de}$ vor und beziehe mich durchaus auf die Formeln und Bezeichnungen, die im ersten Bande des vorliegenden Werkes pag. 60 u. ff. bei der Auseinandersetzung der Gauss'schen Methode bewiesen und angewendet wurden. Setzt man:

$$\theta = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 \quad 5)$$

so wird sein:

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v (1+\theta)}$$

und hiermit wird das erste Glied im Klammerausdrucke für $\frac{dv}{de}$ sich schreiben lassen:

$$\left(1 + \frac{q(1+e)}{r}\right) \sin v = \sin v + (1+e)(1+\theta) \cos \frac{1}{2} v^2 \sin v \quad 6)$$

Für die Bestimmung des zweiten Theiles ziehe ich die folgenden am citirten Orte entwickelten Relationen heran. es ist:

$$\frac{k(t-T)}{2Bq^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{1+9e}{5}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} w + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} w^3$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \delta C \operatorname{tg} \frac{1}{2} w = \sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}} C \operatorname{tg} \frac{1}{2} w$$

man erhält also für den zweiten Theil ohne Rücksicht auf das negative Vorzeichen:

$$3(1+e) \frac{B}{C} \cos \frac{1}{2} v^4 (1+\theta)^2 \left\{ \operatorname{tg} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3}{\delta^2 C^2} \right\}$$

oder:

$$\sin v \frac{1+e}{2} \cdot \frac{B}{\delta^2 C^3} (1+\theta)^2 + \sin v \cos \frac{1}{2} v^2 \left\{ \frac{3}{2} (1+e) \frac{B}{C} (1+\theta)^2 - \frac{1+e}{2} \frac{B}{\delta^2 C^3} (1+\theta)^2 \right\} \quad 7)$$

Vereinigt man nun die Resultate aus 6) und 7), so erhält man mit Rücksicht auf 2) sofort:

$$\frac{dv}{de} = \sin v \left\{ 1 - \frac{(1+e)B}{2\delta^2 C^3} (1+\theta)^2 + \frac{\cos \frac{1}{2} v^2}{1-e} \left[(1+\theta) + \frac{B(1+\theta)^2}{2\delta^2 C^3} - \frac{3}{2} \frac{B}{C} (1+\theta)^2 \right] \right\} \quad 8)$$

Dieser Ausdruck kann als Ausgangspunkt für Reihenentwickelungen dienen, die nach steigenden Potenzen von θ fortschreiten, wobei zu beachten ist, dass θ eine Grösse von der Ordnung $(1-e)$ ist.

Die Reihen für $\frac{B}{C} (1+\theta)^2$ und $\frac{B}{C^3} (1+\theta)^2$ können mit Rücksicht auf die 1 pag. 61 u. ff. gemachten Entwickelungen leicht genug aufgestellt werden; es ist nämlich daselbst gesetzt worden:

$$A = \frac{15(\alpha-\beta)}{9\alpha+\beta}, \quad B = \frac{9\alpha+\beta}{20\frac{1}{3}A}, \quad \frac{1}{C^2} = \frac{A}{\theta}$$

und die Reihen für diese Ausdrücke sind:

$$\begin{aligned} 15 (\alpha - \beta) &= 20 \sqrt{\theta} \left\{ \theta - \frac{6}{5} \theta^2 + \frac{9}{7} \theta^3 - \frac{12}{9} \theta^4 + \dots \right\} \\ 9 \alpha + \beta &= 20 \sqrt{\theta} \left\{ 1 - \frac{6}{15} \theta + \frac{7}{25} \theta^2 - \frac{8}{35} \theta^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

in welche Reihen das Fortschreitungs-gesetz klar ist. Die Verwerthung dieser Ausdrücke für den vorgelegten Zweck ergibt leicht:

$$\frac{B}{C} = \frac{9\alpha + \beta}{20 \sqrt{\theta}}, \quad \frac{B}{C^3} = \frac{(9\alpha + \beta)A}{20 \theta \sqrt{\theta}} = \frac{15 (\alpha - \beta)}{20 \theta \sqrt{\theta}}$$

es ist also:

$$\frac{B}{C} = 1 - \frac{6}{15} \theta + \frac{7}{25} \theta^2 - \frac{8}{35} \theta^3 + \dots = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\theta^{n+5}}{5 \cdot 2^{n+1}} \quad 9)$$

$$\frac{B}{C^3} = 1 - \frac{6}{5} \theta + \frac{9}{7} \theta^2 - \frac{12}{9} \theta^3 + \dots = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1} \theta^n}{2^{n+3}} \quad 10)$$

Multipliziert man nun die eben hingeschriebenen Ausdrücke mit $(1 + \theta)^2$, so findet sich leicht:

$$\frac{B}{C} (1 + \theta)^2 = 1 + \frac{8}{5} \theta + \frac{36}{5} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \quad 11)$$

und

$$\frac{B}{C^3} (1 + \theta)^2 = 1 - 12 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = 1 + 12 \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \quad 12)$$

Hiermit sind also jene Reihenentwickelungen gegeben, deren man zur weiteren Umgestaltung des Ausdruckes 8) bedarf; in demselben wird man aber noch weiter einführen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\theta^2} &= \frac{1+9e}{5(1+e)} = 1 - \frac{4}{5} \frac{1-e}{1+e} \\ \frac{1+e}{2\theta^2} &= \frac{1+9e}{10} = 1 - \frac{9}{10} (1-e) \end{aligned} \right\} \quad 13)$$

Mit Rücksicht auf 12) und 13) wird man in dem ersten Gliede in der Klammer des Ausdruckes 8) schreiben dürfen:

$$\begin{aligned} \frac{1+e}{2\theta^2} \frac{B}{C^3} (1+\theta)^2 &= 1 - 12 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} - \\ &= \frac{9}{10} (1-e) \left\{ 1 + 12 \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right\} \quad 14) \end{aligned}$$

in diesem Ausdruck kann aber zu Folge 5) pag. 398 gesetzt werden:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \frac{1}{2} e^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

Wegen

$$\frac{1}{1+e} = \frac{1}{2} + \frac{1-e}{2(1+e)}$$

ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = -\frac{1-e}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi^2 \left\{ \frac{1}{15} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right\} -$$

$$- \frac{1-e}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}$$

Subtrahirt man den Ausdruck 14) mit Rücksicht auf die eben gemachten Transformationen von der Einheit, so wird erhalten:

$$1 - \frac{1+e}{2\varphi^2} \frac{B}{e^3} (1+\theta)^2 = -\frac{2}{5} (1-e) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi^2 \left\{ 1 - 15 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right\} + \left\{ \right. 15)$$

$$\left. + \frac{9}{10} (1-e) + \frac{24}{5} (1-e) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right\}$$

dividirt man nun diesen Ausdruck durch $(1-e)(1+e)$, so wird das erste Glied des Klammerausdruckes 8), welches ich der Kürze halber mit (I) bezeichne, geschrieben werden dürfen:

$$(I) = \frac{1}{1+e} \left\{ \frac{9}{10} + \frac{24}{5} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} - \right. 16)$$

$$\left. - \frac{2}{5} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi^2 \left(1 - 15 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right) \right\}$$

Das zweite Glied des Ausdruckes 8) kann in ähnlicher Weise transformirt werden; es ist, wenn man die eben angewendeten Principien auf die 3 Glieder des zweiten Ausdruckes in 8) anwendet und die Glieder einzeln hinschreibt:

$$1 + \theta = 1 + \theta$$

$$\frac{B(1+\theta)^2}{2\varphi^2 C^3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \theta - 6 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} -$$

$$- \frac{2}{5} \frac{1-e}{1+e} \left\{ 1 + 12 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right\}$$

$$- \frac{3}{2} \frac{B}{C} (1+\theta)^2 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{5} \theta - \frac{54}{5} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}$$

die Addition ergibt rechter Hand:

$$- \theta \left\{ 1 + \frac{24}{5} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (7n+3) \theta^{n-1}}{(4n^2-9)(4n^2-1)} \right\} - \frac{2}{5} \frac{1-e}{1+e} \left\{ 1 + 12 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right\}$$

führt man nun für θ den Werth $\frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \varphi$ ein, so wird das zweite Glied in 8) geschrieben werden dürfen:

$$(II) = -\frac{\cos \frac{1}{2} \varphi^2}{1+e} \left\{ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi^2 \left\{ 1 + \frac{24}{5} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (7n+3) \theta^{n-1}}{(4n^2-9)(4n^2-1)} \right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{5} \left\{ 1 + 12 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right\} \right\} 17)$$

Denkt man sich $\frac{\partial v}{\partial e}$ geschrieben in der Form:

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \frac{\sin v \cos \frac{1}{2} v^2}{2(1+e)} \left\{ \frac{2(1+e)(I)}{\cos \frac{1}{2} v^2} + \frac{2(1+e)(II)}{\cos \frac{1}{2} v^2} \right\}$$

so wird man 16) und 17) mit $\frac{2(1+e)}{\cos \frac{1}{2} v^2}$ zu multipliciren haben; in 17) kürzt sich dann der gemeinschaftliche Factor $\cos \frac{1}{2} v^2$ im Zähler und Nenner ab, in 16) denkt man sich die Multiplicationen mit dem identischen Werthe $2(1+e)(1+\operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2)$ durchgeführt; man erhält so vorerst:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial e} = \frac{\sin v \cos \frac{1}{2} v^2}{2(1+e)} & \left\{ \frac{9}{5} + \frac{48}{5} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} - \frac{4}{5} - \frac{48}{5} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right. \\ & - \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 \left[2 + \frac{48}{5} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (7n+3) \theta^{n-1}}{(4n^2-9)(4n^2-1)} - \frac{9}{5} - \frac{48}{5} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right. \\ & \left. \left. + \frac{4}{5} - 12 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right] \right. \\ & \left. - \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4 \left[\frac{4}{5} - 12 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right] \right\} \end{aligned}$$

Vereinigt man nun die einzelnen numerischen Werthe und Reihen und setzt zur Abkürzung:

$$\left. \begin{aligned} E_2^v &= - \left\{ 1 + 12 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right\} \\ E_4^v &= - \left\{ \frac{4}{5} - 12 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad 18)$$

so wird die schliessliche Berechnung des gesuchten Differentialquotienten enthalten sein in:

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \frac{\sin v \cos \frac{1}{2} v^2}{2(1+e)} \left\{ 1 + E_2^v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 + E_4^v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4 \right\} \quad 19)$$

in welchem Ausdrücke die Coëfficienten E_2^v und E_4^v leicht in Tafeln mit dem Argumente θ gebracht werden können und für die Parabel beziehungsweise die Werthe -1 und $-\frac{4}{5}$ annehmen. Ehe ich jedoch daran gehe, die Construction und den Gebrauch der hierfür erforderlichen Tafeln zu erläutern, will ich die Entwicklungen für $\frac{\partial r}{\partial e}$ vornehmen. Es wird nicht nöthig sein, hierbei von dem in 2) enthaltenen Ausdrücke auszugehen, da durch die Differentiation der Relation:

$$r = \frac{q(1+e)}{1+e \cos v}$$

sich ergibt:

$$\frac{\partial r}{\partial e} = \frac{q}{1+e \cos v} \left\{ 1 - \frac{(1+e) \cos v}{1+e \cos v} \right\} + e \frac{q(1+e) \sin v}{(1+e \cos v)^2} \frac{\partial v}{\partial e}$$

oder

$$\frac{\partial r}{\partial e} = \frac{r^2 \sin v}{q(1+e)^2} \left\{ \operatorname{tg} \frac{1}{2} v + e(1+e) \frac{\partial v}{\partial e} \right\} \quad 20)$$

so dass mit den bisher entwickelten Hilfsmitteln die Berechnung von $\frac{\partial r}{\partial e}$ keine

Schwierigkeiten mehr hat. Da sich aber für diesen Differentialquotienten eine dem Ausdrücke 19) (pag. 401) ähnliche Form herstellen lässt, deren Berechnung durch geeignet construirte Hilfstafeln sehr erleichtert werden kann, so werde ich zuerst die diesbezüglichen Transformationen vornehmen. Substituirt man in 20) (pag. 401) die Werthe nach 18) und 19) (pag. 401), nachdem man in 20) $\frac{\sin v \cos \frac{1}{2} v^2}{2}$ als gemeinschaftlichen Factor herausgehoben hat, wobei ist:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v}{\sin v \cos \frac{1}{2} v^2} = (1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2)^2,$$

so erhält man leicht:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dv} = & \frac{r^2 \sin v^2 \cos \frac{1}{2} v^2}{2q(1+v)} \left\{ 1 + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2}{1+v} \left[2 - e - 12e \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4}{1+v} \left[1 - \frac{4}{3}e + 12e \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right] \right\} \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\frac{2-e}{1+v} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{1-e}{1+v}, \quad \frac{e}{1+v} = \frac{1}{2} - \frac{1-e}{2(1+v)}, \quad \frac{1-\frac{4}{3}e}{1+v} = \frac{1}{6} + \frac{9}{10} \frac{1-e}{1+v},$$

damit wird, wenn hier statt r geschrieben wird $\frac{q}{\cos \frac{1}{2} v^2 (1+\theta)}$ (vergl. I pag. 61):

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dv} = & \frac{r \sin v^2}{2(1+v)(1+\theta)} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \theta + 6 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 \left[1 + \frac{9}{5} \theta - 12 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} - 12 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{10} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4 \left[1 + 60 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right] \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

Nun ist aber nach 11) (pag. 390):

$$6 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} = \frac{5}{6} \left\{ \frac{B}{C} (1 + \theta^2 - 1 - \frac{8}{5} \theta) \right\},$$

es ist also:

$$\frac{1}{1+\theta} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \theta + 6 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right\} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \frac{B}{C} (1 + \theta),$$

man erhält also durch 9) (pag. 390) für den von $\operatorname{tg} \frac{1}{2} v$ freien Coefficienten des Klammerausdruckes 21) für $\frac{dr}{dv}$, den ich mit (1) bezeichnen will:

$$\frac{I}{1+\theta} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+5) \theta^n}{5(2n+1)} + \frac{5}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+5) \theta^{n+1}}{5(2n+1)},$$

oder:

$$\frac{I}{1+\theta} = 1 - \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(4n^2-1)} \quad (22)$$

Für den Coëfficienten von $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2$ im Ausdrücke 21) (pag. 402), der mit (II) bezeichnet werden soll, ergibt sich:

$$\frac{(II)}{1+\theta} = \frac{1}{1+\theta} \left\{ 1 + \frac{9}{5} \theta - \frac{4}{5} \theta^2 - 12 \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} - 12 \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right\}$$

oder:

$$\frac{(II)}{1+\theta} = 1 \quad . \quad 23)$$

Schreibt man für den Coëfficienten von $\frac{1}{10} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4$ in 21) (pag. 402) das Symbol (III), so wird man haben:

$$\frac{(III)}{1+\theta} = \frac{1}{1+\theta} \left\{ 1 + 60 \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right\} .$$

Dieser Ausdruck lässt sich durch die folgende, leicht zu verificirende Relation umgestalten, es ist:

$$(1+\theta)^2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n (n+1) \theta^n}{(2n+5)} = \frac{1}{5} - 12 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} ,$$

es wird also zunächst sein:

$$1 + 60 \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = 1 - 60 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} ,$$

also mit Rücksicht auf die obige Relation erhält man:

$$\frac{(III)}{1+\theta} = 5 (1+\theta) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n (n+1) \theta^n}{(2n+5)} ,$$

oder nach einer leichten Reduction:

$$\frac{(III)}{1+\theta} = 1 + 15 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n+3)(2n+5)} \quad 24)$$

Setzt man also:

$$\left. \begin{aligned} E_0^r &= 2 - 3 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(4n^2-1)} \\ E_4^r &= \frac{1}{5} + 3 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \theta^n}{(2n+3)(2n+5)} \end{aligned} \right\} \quad 25)$$

so erhält man mit Rücksicht auf 22), 23) und 24);

$$\frac{\partial r}{\partial e} = \frac{r \sin v^2}{4(1+e)} \{ E_0^r + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 + E_4^r \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4 \} . \quad 26)$$

in welchem Ausdrücke die Coëfficienten E_0^r und E_4^r leicht mit dem Argumente θ in Tafeln gebracht werden können und in der Tafel XVI aufgenommen sind.

Was die Construction dieser Tafel anlangt, so beachte man, dass sich die in 18) (pag. 401) und 25) aufgestellten Reihen mit Hilfe zweier Reihen darstellen lassen; setzt man nämlich:

$$S = 12 \left\{ \frac{1}{105} \theta - \frac{1}{315} \theta^2 + \frac{1}{693} \theta^3 - \frac{1}{1287} \theta^4 + \dots + \sum_{n=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \theta^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \right\}$$

$$\sigma = 3 \left\{ \frac{1}{35} \theta - \frac{1}{63} \theta^2 + \frac{1}{99} \theta^3 - \frac{1}{143} \theta^4 + \dots + \sum_{n=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \theta^n}{(2n+3)(2n+5)} \right\},$$

so wird sein:

$$E_2^r = -1 - \frac{1}{5} \theta + \theta S$$

$$E_1^r = -\frac{4}{5} + S$$

$$E_0^r = 2 + \theta - \frac{1}{5} \theta^2 + \sigma \theta^2$$

$$E_4^r = \frac{1}{5} - \sigma,$$

nach welchen Formeln die Tafel XVI berechnet ist. Sie gibt mit dem Argumente

$$\theta = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2$$

die Werthe $\log E_2^r$, $\log E_1^r$, $\log E_0^r$ und $\log E_4^r$ auf fünf Decimalen für jeden Tausendtheil des Argumentes, was wohl für die Fälle der Anwendung der vorstehenden Formeln stets ausreichen wird. Die letzte Stelle wird selten um mehr als eine halbe Einheit fehlerhaft sein, da Herr F. K. Ginzel, der auf mein Ersuchen diese Tafel berechnet hat, die Rechnung sorgfältig 7stellig durchführte. Das Argument θ selbst ist innerhalb der Grenzen -0.4 und $+0.4$ angenommen, was wohl stets ausreichen wird; sollte jemals die Ausdehnung der Tafel nicht ausreichen, so kann man immer mit Sicherheit die diesbezüglichen Formeln in 2) (pag. 396) anwenden, doch nehme ich auf diesen Umstand bei der unten folgenden Zusammenstellung keine Rücksicht, da mit Ausschluss der periodischen Kometen von kurzer Umlaufzeit, für welche diese Differentialquotienten nach den Elementen, zweckmässiger nach den Formeln für mässige Excentricitäten berechnet werden, kein Komet in solcher Sonnenferne unseren optischen Hilfsmitteln erreichbar ist, wo die Grenzen der vorliegenden Tafel überschritten werden.

Vergleicht man den Ausdruck 26 (pag. 403) mit der entsprechenden Formel in 2) (pag. 396), so resultirt sofort:

$$r = q \cos v = \frac{3}{2} \frac{k(t-T) e \sin v}{1 + q(1+e)} = (1-e) \frac{\partial r}{\partial e},$$

ersetzt man nun dieser Relation gemäss den Factor $\frac{3}{2} \frac{k(t-T) k}{q^2} \cdot \frac{e \sin v}{1+e}$ in $\frac{\partial r}{\partial q}$, so erhält man sofort:

$$\frac{\partial r}{\partial q} = \cos v + \frac{1-e}{q} \left(\frac{\partial r}{\partial e} \right), \quad (27)$$

welche Formel viel bequemer ist, als die ursprüngliche in 2) (pag. 396) enthaltene, in der Voraussetzung, wie dies wohl in diesen Fällen stets eintreten wird, dass die hierfür nöthige Berechnung von $\frac{\partial r}{\partial e}$ aus anderen Gründen vorgenommen werden muss.

Die Bestimmung von $\frac{\partial r}{\partial q}$ durch ähnliche Ausdrücke bietet keine wesentlichen Vortheile gegen die ohnehin bequeme logarithmische Form des Coëfficienten in 2) (pag. 396), weshalb ich es unterlasse, diese Form hier anzuführen.

In Bezug auf die Differentialquotienten von q kann noch bemerkt werden, dass es im Allgemeinen etwas bequemer erscheint, als Element $\log q$ einzuführen; es ist aber:

$$\delta \log q = \text{Mod } \frac{\delta q}{q},$$

es wird also sein:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta r}{\delta \log q} &= \frac{1}{\text{Mod}} \left\{ q \cos v + (1-e) \left(\frac{\delta r}{\delta e} \right) \right\} \\ \frac{\delta e}{\delta \log q} &= - \frac{3}{2} \frac{t-T}{\text{Mod } r^2} \frac{k}{q} (1+e) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Mit Rücksicht auf die in den vorstehenden Paragraphen aufgenommenen Entwicklungen gestalten sich daher die Formeln zur Berechnung der Differentialquotienten für Kometenbahnen wie folgt, wobei zu achten ist, dass sich die Coordinaten α und δ auf dieselbe Fundamentalebene beziehen müssen, auf welche die Grössen Ω , i und u bezogen sind:

$$\left. \begin{aligned} A \sin A' &= \cos (\alpha - \Omega) \cos i \\ A \cos A' &= \sin (\alpha - \Omega) \\ m \sin M &= \sin i \\ m \cos M &= - \sin (\alpha - \Omega) \cos i \\ B \sin B' &= m \sin (M + \delta) \\ B \cos B' &= \cos (\alpha - \Omega) \sin \delta \\ u &= v + w \end{aligned} \right\} \quad \text{I}$$

weiter ist:

$$\left. \begin{aligned} F \sin F' &= \frac{k e \sin v}{r \sqrt{p}} \\ F \cos F' &= - \frac{k \sqrt{p}}{r^2} ; \\ G \sin G' &= - \frac{\sin v^2}{4(1+e)} \{ E_0 r + \text{tg } \frac{1}{2} v^2 + E_4 r \text{tg } \frac{1}{2} v^4 \} \\ G \cos G' &= \frac{\sin v \cos \frac{1}{2} v^2}{2(1+e)} \{ 1 + E_2 r \text{tg } \frac{1}{2} v^2 + E_1 r \text{tg } \frac{1}{2} v^4 \} \\ H \sin H' &= - \frac{1}{\text{Mod}} \left\{ \frac{q}{r} \cos v - (1-e) G \sin G' \right\} \\ H \cos H' &= - \gamma \frac{t-T}{r^2} \sqrt{p} \end{aligned} \right\} \quad \text{II}$$

wobei zu setzen ist:

$$\begin{aligned} p &= q(1+e) \\ \log k &= 8.23558 - 10 \\ \log (-\gamma) &= 8.77389 - 10 \\ \log \left(-\frac{1}{\text{Mod}} \right) &= 0.36222, \end{aligned}$$

*) Für die*Parabel wird offenbar $F' = 180 - \frac{1}{2} v$.

und hiermit δT in Einheiten des mittleren Sonnentages erhalten wird; mit dem Argumente

$$\theta = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2$$

sind aus der Tafel XVI $\log E_2^r$, $\log E_4^v$, $\log E_0^r$ und $\log E_4^r$ zu entnehmen.

Dann ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos \delta \delta \alpha}{\delta T} &= \frac{r}{J} A F \sin (F' + A' + u) \\ -\frac{\delta \delta}{\delta T} &= \frac{r}{J} B F \sin (F' + B' + u) \\ \frac{\cos \delta \delta \alpha}{\delta e} &= \frac{r}{J} A G \sin (G' + A' + u) \\ \frac{\delta \delta}{\delta e} &= \frac{r}{J} B G \sin (G' + B' + u) \\ \frac{\cos \delta \delta \alpha}{\delta \log q} &= \frac{r}{J} A H \sin (H' + A' + u) \\ \frac{\delta \delta}{\delta \log q} &= \frac{r}{J} B H \sin (H' + B' + u) \\ \frac{\cos \delta \delta \alpha}{\delta \pi} &= \frac{r}{J} A \sin (A' + u) \\ -\frac{\delta \delta}{\delta \pi} &= \frac{r}{J} B \sin (B' + u) \\ \frac{\cos \delta \delta \alpha}{\sin i \delta \Omega} &= \frac{r}{J} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \cos (\alpha - \Omega + u) \\ \frac{\delta \delta}{\sin i \delta \Omega} &= -\frac{r}{J} \left\{ \sin (\alpha - \Omega + u) \sin \delta \operatorname{tg} \frac{1}{2} i + \cos u \cos \delta \right\} \\ \frac{\cos \delta \delta \alpha}{\delta i} &= -\frac{r}{J} \sin u \cos (\alpha - \Omega) \sin i \\ -\frac{\delta \delta}{\delta i} &= \frac{r}{J} \left\{ \sin (\alpha - \Omega) \sin \delta \sin i + \cos \delta \cos i \right\} \sin u, \end{aligned} \right\} \text{IIIa)}$$

wobei noch zu bemerken ist, dass für die ersten drei Elemente der Radius als Einheit gilt, während die letzteren drei Elemente schon im Bogenmaasse verstanden werden; es müssen deshalb die für die drei ersteren Elemente gefundenen Correctionen mit $\sin 1''$ multiplicirt werden. wenn die Unterschiede zwischen der Beobachtung und Rechnung, wie es wohl gewöhnlich der Fall ist, in Bogensecunden angesetzt werden.

Die eben hingeschriebenen Formeln werden aber einer theilweisen Transformation bedürfen, wenn die Neigung der Kometenbahn nahe 180° gegen die gewählte Fundamentalebene ist, denn in diesem Falle wird jede Aenderung von π durch die doppelte Aenderung von Ω im verkehrten Sinne nahezu aufgehoben; führt man daher das Element:

$$A = \pi - 2 \Omega$$

ein, so wird anstatt δA in der Differentialformel zu setzen sein:

$$\delta \pi = \delta A + 2 \delta \Omega.$$

* Für retrograde Kometen wird man mit Vortheil die Formeln IIIb) benützen.

Nach den Formeln 3) und 4) (pag. 385) wird man haben:

$$\begin{aligned}\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \pi} &= \frac{r}{J} \left\{ \sin (\alpha - \Omega) \sin u + \cos (\alpha - \Omega) \cos u \cos i \right\} \\ \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \Omega} &= 2 \frac{r}{J} \sin \frac{1}{2} i^2 \cos (\alpha - \Omega + u) \\ \frac{\partial \delta}{\partial \pi} &= \frac{r}{J} \left\{ \cos (\alpha - \Omega) \sin u \sin \delta - \sin (\alpha - \Omega) \cos u \cos i \sin \delta + \cos u \sin i \cos \delta \right\} \\ \frac{\partial \delta}{\partial \Omega} &= - \frac{r}{J} \left\{ 2 \sin (\alpha - \Omega + u) \sin \delta \sin \frac{1}{2} i^2 + \cos u \cos \delta \sin i \right\},\end{aligned}$$

addirt man die zusammengehörigen Formeln, nachdem man die Differentialquotienten nach π mit 2 multiplicirt hat, so erhält man nach einigen leichten und offenkundigen Reductionen sofort:

$$\begin{aligned}A &= \pi - 2 \Omega \\ \left. \begin{aligned}\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial A} &= \frac{r}{J} A \sin (A' + u) \\ \frac{\partial \delta}{\partial A} &= \frac{r}{J} B \sin (B' + u) \\ \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\sin i \partial \Omega} &= \frac{r}{J} \cos (\alpha - \Omega - u) \cotg \frac{1}{2} i \\ \frac{\partial \delta}{\sin i \partial \Omega} &= \frac{r}{J} \left\{ \cos u \cos \delta - \sin (\alpha - \Omega - u) \sin \delta \cotg \frac{1}{2} i \right\},\end{aligned} \right\} \text{ IIIb)}\end{aligned}$$

welche Ausdrücke in den vorstehenden Formeln IIIa) an die Stelle von $\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \pi}$, $\frac{\partial \delta}{\partial \pi}$, $\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\sin i \partial \Omega}$ und $\frac{\partial \delta}{\partial i}$ zu treten haben, wenn sich die Neigungen gegen die Fundamentalebene wenig von 180° unterscheiden. Man wird dieselben aber stets mit Vortheil anwenden, wenn die Neigung der Kometen grösser als 90° also die Bewegung retrograd ist. Würden aber die Neigungen fast völlig mit 180° zusammenfallen, so würden natürlich auch diese Formeln nicht ausreichen, und man hätte ähnlich wie bei der Störungsrechnung (pag. 223) die Elemente $\sin i \sin \Omega$ und $\sin i \cos \Omega$ einzuführen; doch gehe ich auf diese Formeln hier nicht näher ein, weil man dieselben wohl niemals in Anwendung ziehen wird.

Es ist klar, dass man von vorstehenden Formeln ebenfalls Gebrauch machen wird, wenn man sich nur die Ermittlung parabolischer Elemente vorsetzt; man wird nur die von den Grössen G und G' abhängigen Grössen nicht zu berechnen brauchen. Stellt sich im Verlaufe der Rechnung heraus, dass die Parabel den Beobachtungen nicht völlig genügt, so wird man die Berechnung dieser Grössen nachtragen, unter der Voraussetzung $e = 1$; man wird so in den meisten Fällen mit genügender Genauigkeit die elliptischen oder hyperbolischen Elemente des betreffenden Himmelskörpers erlangen. Diese Methode würde nur in jenen Fällen ungenauere Resultate liefern, wenn die Abweichung von der Parabel sehr beträchtlich ist; im letzteren Falle wird man wohl stets, vor Beginn solcher definitiven Ausgleichungen, von diesem Umstande Kenntniss haben und in der Lage sein, genügende Annäherungen für die Elemente sich anderweitig zu beschaffen; auch wird

im Falle einer nicht allzu bedeutenden Abweichung von der Parabel die wiederholte Auflösung der Bedingungsgleichungen mit den Werthen der ersten Annäherung das Ziel meist erreichen lassen, falls die erste Auflösung keine genügende Uebereinstimmung zwischen den Resultaten der directen Rechnung und der aus den Differentialquotienten abgeleiteten Darstellung der Orte ergeben würde.

§ 5. Die Differentialquotienten mit Rücksicht auf die Störungen.

Die in den vorstehenden Formeln auftretenden Coëfficienten müssen in etwas verschiedener Weise gewählt werden, wenn man die Störungsrechnung nach verschiedenen Methoden durchgeführt hat; erlaubt man sich aber, die Producte der Incremente der Elemente in die Störungen zu übergehen, so gestaltet sich die Lösung dadurch sehr einfach, dass man die nahe richtige Voraussetzung machen darf, dass die Störungswerthe in beiden Elementensystemen identisch gefunden werden. Es sollen dem entsprechend die verschiedenen Methoden der Störungsrechnung für die vorliegenden Aufgaben vorgenommen werden.

Vergleicht man die Form der heliocentrischen Coordinaten, die in § 11) (pag. 383) als Ausgangspunkt für die Ermittlung der Differentialquotienten gedient haben, mit der folgenden Form, die Encke's Methode der Störungsrechnung gibt:

$$\begin{aligned}x &= r_0 (\cos u_0 \cos \Omega_0 - \sin u_0 \sin \Omega_0 \cos i_0) + \xi \\y &= r_0 (\cos u_0 \sin \Omega_0 + \sin u_0 \cos \Omega_0 \cos i_0) + \eta \\z &= r_0 \sin u_0 \sin i_0 + \zeta\end{aligned}$$

und beachtet, dass der Voraussetzung nach ξ , η und ζ constant sind, so leitet man leicht die Bemerkung ab, dass die Variationen der heliocentrischen Coordinaten in diesem Falle dadurch erhalten werden, dass man in den früher entwickelten Formeln durchaus die ungestörten Grössen einführt. Der Uebergang auf die geocentrischen Orte durch die Formeln:

$$\begin{aligned}\cos \delta \, \delta \alpha &= - \frac{\sin(\alpha - \Omega)}{r} \, \delta x + \frac{\cos(\alpha - \Omega)}{r} \, \delta y \\ \delta \delta &= - \frac{\cos(\alpha - \Omega)}{r} \sin \delta \, \delta x - \frac{\sin(\alpha - \Omega)}{r} \sin \delta \, \delta y + \frac{\cos \delta}{r} \, \delta z\end{aligned}$$

erfordert aber für die Berechnung der Coëfficienten der Variationen der Coordinaten, wie man sich leicht überzeugt, die thatsächlichen geocentrischen Coordinaten, die man sofort dadurch erhält, dass man für α und δ die beobachteten Coordinaten, für die geocentrische Entfernung r aber die mit Rücksicht auf die Störungen erlangten Werthe einsetzt. Werthe, die ohnedies schon stets durch anderweitige Rechnungen bekannt sind. Es ist klar, dass man von den gemachten Vorschriften, ohne mehr als die Eingangs als zulässig betrachtete Vernachlässigung der Producte der Störungen in die Incremente der Elemente zu übergehen, abweichen kann und

untermischt die mit Rücksicht oder ohne Rücksicht auf Störungen erhaltenen Werthe als Grundlage für die Berechnung der Differentialquotienten benützen kann; doch wird die Befolgung der obigen Vorschriften den Vortheil bieten, dass man in dem vorgelegten Falle die Variationen der geocentrischen Orte durch die Variationen der Elemente streng ausgedrückt erhält, wenn man die Störungswerthe als unabhängig von den letzteren betrachtet. Von diesem Gesichtspunkte aus ist auch das Folgende zu betrachten.

Bei Hansen-Tietjen's Methode hat man für die heliocentrischen Coordinaten die Form:

$$\begin{aligned} x &= \langle r \rangle (1 + v) \{ \cos (I' + \omega_0 + \mathcal{A} \omega) \cos \Omega_0 - \sin (I' + \omega_0 + \mathcal{A} \omega) \sin \Omega_0 \cos i_0 \} + z \cos a \\ y &= \langle r \rangle (1 + v) \{ \cos (I' + \omega_0 + \mathcal{A} \omega) \sin \Omega_0 + \sin (I' + \omega_0 + \mathcal{A} \omega) \cos \Omega_0 \cos i_0 \} + z \cos b \\ z &= \langle r \rangle (1 + v) \sin u_0 \sin i_0 + z \cos c ; \end{aligned}$$

gestattet man sich die Variationen der Grössen $\cos a$, $\cos b$ und $\cos c$ in die stets kleine Störung der verticalen Coordinate zu vernachlässigen, so hat man in den Formeln 1) pag. 383) nach der Vergleichung zu setzen:

$$\begin{array}{llll} \text{statt } v \text{ den Werth } I' & & & \\ \text{„ } r \text{ „ „ „ } \langle r \rangle & & & \\ \text{„ } u \text{ „ „ „ } (I' + \omega_0 + \mathcal{A} \omega) & . & & \end{array}$$

Mit Rücksicht auf den Uebergang auf die geocentrischen Coordinaten wird man daher für diese Methode die Bemerkung ableiten, dass bei der Berechnung der Differentialquotienten durchaus die Coëfficienten der eben gemachten Identification zufolge zu bestimmen sind, dass für α und δ die beobachteten Grössen, für \mathcal{A} die geocentrische Distanz mit Rücksicht auf Störungen zu substituiren ist, dass aber in dem allen Quotienten gemeinsamen Factor $\frac{r}{\langle r \rangle}$ für r der Werth: $\langle r \rangle = \langle r \rangle (1 + v)$ einzusetzen ist (die zweiten Potenzen von z übergehend), da nach der Differentiation der obigen Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen der gemeinsame Factor $(1 + v)$ auftritt.

Endlich sind bei der Methode der Variation der Constanten durchaus jene Werthe für die in den Differentialformeln auftretenden Grössen zu substituiren, die sich aus den für die Zeit des Ortes osculirenden Elementen, die man ohnehin zur Darstellung der Orte gebraucht, ergeben.

Erreichen aber die Störungen halbwegs grosse Werthe, so werden die hier angegebenen Formeln auf arge Widersprüche führen, die sich dahin aussprechen lassen, dass dieselben Incremente der Elemente zur Zeit der Ausgangsepoche verschiedene Aenderungen in denselben Orten bei Anwendung verschiedener Methoden der Störungsrechnung bedingen werden, da die nach den obigen Vorschriften entwickelten Differentialformeln für die verschiedenen Störungsmethoden nicht identisch gefunden werden können. Diese Unterschiede hängen innig mit der bei der Störungsrechnung bereits erörterten Frage zusammen, was zu thun ist, wenn man die Störungsrechnung nach der Variation der Coordinaten mit etwas veränderten

Elementen fortsetzen will. Macht man wie dort die Voraussetzung, dass die Elemente hinreichend genau sind zur Darstellung der Kräfte, so wird man zu dem Schlusse gelangen, dass die nach der Variation der Constanten entwickelten Werthe für die Differentialformeln jene sind, die voransichtlich der Wahrheit am nächsten kommen; man sieht hieraus, dass durch diese Betrachtungen ein neuer wesentlicher Vorzug für die Methode der Variation der Constanten resultirt. Es wird also als das Richtigste erscheinen, für jeden Ort osculirende Elemente abzuleiten und aus diesen die Differentialformeln abzuleiten; dies würde aber auf sehr weitläufige Rechnungen führen und es wird im Allgemeinen vorzuziehen sein, auf diese Unterschiede nicht weiter Rücksicht zu nehmen und sich an die obigen Vorschriften zu halten.

§ 6. Beispiele.

Es sollen nun die in den vorstehenden Paragraphen entwickelten Methoden zur Ableitung der wahrscheinlichsten Bahnelemente einer Planeten und einer Kometenbahn verwerthet werden, und ich wähle als erstes Beispiel den Planeten Erato, für den die der Rechnung zu Grunde zu legenden Daten nahe vollständig in den vorangehenden Abschnitten als Beispiele aufgenommen sind. Die Normalorte und die Sonnencoordinaten finden sich auf pag. 382, die Störungswerthe auf pag. 196 ff.

Zunächst wurden aus den Störungstafeln mit Hilfe der bei den mechanischen Quadraturen (pag. 35, 39, 53, 55) entwickelten Formeln die Störungswerthe für die Zeiten der Normalorte gebildet; es fand sich so:

	AM	Aw	$\log(1+v)$	z
1860 Sept. 19.5	+ 3 ^h 12'52"96	— 39' 0"95	9.998 9782	+ 0.000 6033
1861 Dec. 28.5	+ 2 8 23.59	— 36 49.97	0.005 2451	— 0.001 0723
1863 Apr. 10.5	+ 0 36 7.19	— 33 23.14	0.001 7959	— 0.000 7677
1871 Sept. 15.5	+ 1 1 47.42	— 8 18.00	0.000 6861	+ 0.000 0705
1873 Jan. 16.5	+ 0 21 8.44	— 5 27.49	0.001 7985	— 0.000 2138
1874 März 22.5	+ 0 0 52.69	— 1 21.89	0.000 2260	— 0.000 0614
1875 Mai 21.5	— 0 0 1.85	— 0 20.41	0.000 0088	— 0.000 0136
1876 Juli 18.5	+ 0 2 19.35	— 4 21.39	9.999 5890	— 0.000 1117
1877 Nov. 24.5	+ 0 32 4.26	— 13 9.48	9.997 9572	— 0.000 0183

Der Ausgleichung zu Grunde gelegt wurden die folgenden genähert richtigen Elemente der Erato, welche auch für die Ermittlung der Störungswerthe gedient haben:

⑥2 Erato

Epoche und Osculation 1874 Dec. 26.0 mittl. Berl. Zeit.

Mittl. Aeq. 1870.0.

$$L = 219^{\circ} 8' 6''8$$

$$M = 180 40'48.9$$

$$\pi = 38 27 17.9$$

$$\Omega = 125 42 39.7$$

$$i = 2 12 23.9$$

$$q = 9 59 14.9$$

$$\mu = 640''89605$$

$$\log a = 0.495 4793 .$$

Da man noch der auf das mittlere Aeq. 1860.0 und 1880.0 bezogenen Elemente bedarf, so wurde nach den diesbezüglichen Formeln (I pag. 81) der Einfluss der Präcession gerechnet und für die nöthigen Reductionen gefunden:

	1860,0	1880,0
$\Delta L = \Delta \pi$	$- 8'22''45$	$+ 8'22''47$
$\Delta \Omega$	$- 6'50''69$	$+ 6'50''72$
Δi	$+ 3''24$	$- 3''24$

Damit fand sich nach den Ausdrücken 13) (pag. 162):

	1860	1870	1880
ω_0	272°43' 6''44	272°44'38''20	272°46' 9''95
A	215 37 1.51	215 43'52.21	215 50 42.97
B	126 20 54.17	126 27 39.46	126 34 24.86
C	121 13 19.66	121 20 35.84	121 27 52.16
$\sin a$	9.999 7869	9.999 7877	9.999 7884
$\sin b$	9.966 6719	9.966 6852	9.966 6985
$\sin c$	9.578 0699	9.577 9845	9.577 8993
$\cos a$	8.495 84	8.495 04	8.494 24
$\cos b$	9.576 58	9.576 50	9.576 42
$\cos c$	9.966 42	9.966 44	9.966 45

Hierbei wurde die mittlere Schiefe der Ekliptik nach Le Verrier angenommen und zwar:

	ε
1860	23°27'27''07
1870	22.31
1880	17.55 ;

hierauf wurden die Störungen in der verticalen Coordinate (vergl. pag. 410) z mit den entsprechenden Cosinusfunctionen multiplicirt und die für die drei Coordinaten gefundenen Correctionen mit den Sonnencoordinaten verbunden, wodurch in den ferneren Rechnungen die auf der Bahnebene verticalen Störungscomponenten die

einfachste Berücksichtigung finden: die so veränderten Sonnencordinaten nebst der Anzahl der Tage, die von der Zeit der Epoche an verfloßen sind, finden sich in der folgenden Zusammenstellung:

	t	$X+z\cos a$	$Y+z\cos b$	$Z+z\cos c$
1860 Sept. 19.5	— 5210.5	— 1.002 3870	+ 0.044 9809	+ 0.020 1741
1861 Dec. 28.5	— 4745.5	+ 0.124 1943	— 0.894 3974	— 0.389 2742
1863 Apr. 10.5	— 4277.5	+ 0.938 9499	+ 0.322 7729	+ 0.139 2215
1871 Sept. 15.5	— 1197.5	— 0.996 6587	+ 0.118 4228	+ 0.051 4640
1873 Jan. 16.5	— 708.5	+ 0.445 7369	— 0.804 5314	— 0.349 3135
1874 März 22.5	— 278.5	+ 0.996 5751	+ 0.033 8409	+ 0.014 6166
1875 Mai 21.5	+ 146.5	+ 0.498 5743	+ 0.808 5571	+ 0.350 8069
1876 Juli 18.5	+ 570.5	— 0.455 2574	+ 0.833 4609	+ 0.361 5080
1877 Nov. 24.5	+ 1064.5	— 0.450 0632	— 0.805 4619	— 0.349 4965

Leitet man nun mit Hilfe der Formeln 14) (pag. 162) die heliocentrischen Coordinaten nach den obigen Elementen ab und verbindet dieselben mit den entsprechenden Sonnencordinaten, so finden sich die folgenden Unterschiede zwischen den Beobachtungen und den berechneten Orten:

	Beobachtung-Rechnung	
	$\cos \delta \delta \alpha$	$\delta \delta$
1860 Sept. 19.5	— 37"05	— 13"43
1861 Dec. 28.5	— 12.73	+ 3.39
1863 Apr. 10.5	+ 10.29	— 5.19
1871 Sept. 15.5	— 9.87	— 7.56
1873 Jan. 16.5	— 0.05	— 0.64
1874 März 22.5	+ 22.28	— 8.24
1875 Mai 21.5	+ 27.09	— 7.35
1876 Juli 18.5	+ 17.07	+ 4.13
1877 Nov. 24.5	+ 1.69	— 1.30

welche dazu benützt werden können, um diejenigen Verbesserungen zu finden, die man an die obigen Elemente anzubringen hat, um die wahrscheinlichsten zu finden. Zur Herstellung der Relationen zwischen den Aenderungen der Elemente und den geocentrischen Orten wurden die auf pag. 390 ff. zusammengestellten Formeln benützt und mit Rücksicht auf die pag. 409 gemachten Bemerkungen stellt sich die Rechnung, bei welcher in Bezug auf den Aequator $\Omega = 4^{\circ}44'48''$, $i' = 22^{\circ}14'28''$ und $\omega' = 33^{\circ}56'26''$ angenommen wurde, und die ich hier übrigens der Kürze halber nur für den ersten Normalort mittheile, wie folgt:

Aus I) (pag. 390) folgt:

$$\begin{array}{lll}
 \alpha - \Omega \quad 3^{\circ}56'42'' & \sin i' = m \sin M \quad 9.57807 & \sin \delta \quad 7.94229 \\
 \cos (\alpha - \Omega) \quad 9.99897 & & 9.99394 \quad B \sin B' \quad 9.57741 \\
 A \cos A' = \sin (\alpha - \Omega) \quad 8.83758 & m \cos M \quad 8.80400 & 9.99988
 \end{array}$$

9.99880	M 99°33'0"	$B \cos B'$ 7.94126
$A \sin A'$ 9.96539	$M + \delta$ 100° 3'6"	B' 88°40'34"
A' 85°44'20"	$\sin M + \delta$ 9.99328	$\log B$ 9.57753
$\log A$ 9.96659	m 9.58413	u' 359°40'52"

Aus II) (pag. 390) resultirt:

$-a : (r)$ 0.07186	$\cos I'$ 9.92050	$-d \cos (I' + \pi)$ 0.034286
$\sin I'$ 9.974314	$e \cos I' + 0.14444$	$-nf$ 9.936753
$a^2 : (r)^2$ 0.14372	$2 + e \cos I'$ 0.33131	Add. 0.04369
$F \sin F'$ 9.06076	$\log d$ 0.34457	$d \sin (I' + \pi)$ 9.29155
9.99848	$1 + e \cos I'$ 0.05860	qf 9.27103
$F \cos F'$ 0.13709	$(1 + e \cos I')^2$ 0.11720	Add. 0.31141
F'' 4°47'42"	$f - 1$ 9.82610	$H \sin H'$ 8.98493
$\log F$ 0.13861	$\log f$ 0.22273	9.99966
$\log t$ 3.71688	$I' + \pi$ 5°4'40"	$H \cos H'$ 0.938655
$t F \sin F'$ 2.77764	$\sin (I' + \pi)$ 8.94698	H' 177°43'43"
Add 9.80752	$I \sin I'$ 7.82271	$\log H$ 0.38689
$G \sin G'$ 2.758516	Add. 9.96609	$K \sin K'$ 0.07246
9.99937	$\cos (I' + \pi)$ 9.99829	9.97838
$G \cos G'$ 3.85397	$-m \sin I'$ 7.72621	$K \cos K'$ 9.58244
G' 183°4'57"	Add. 0.00231	K' 72°4'10"
$\log G$ 3.85460	$H \sin H' \frac{(r)}{a}$ 8.91307	$\log K$ 0.09408
	$K \sin K' \frac{(r)}{a}$ 0.00060	

Weiter findet sich:

(r) 0.42260
A 0.21875
$(r) : A$ 0.20385
$A' + u'$ 85°25'12"
$B' + u'$ 88°21'26
$(r) A : A$ 0.17044
$(r) B : A$ 9.78138

Die Rechnung nach III) (pag. 391) stellt sich wie folgt:

$F' + A' + u$ 90°12'54"	$G' + A' + u$ 268°30'9"	$H' + A' + u$ 263°8'55"	$K' + A' + u$ 157°29'22"
$\sin(F' + A' + u)$ 0.00000	$\sin(G' + A' + u)$ 9.99985	$\sin(H' + A' + u)$ 9.99689	$\sin(K' + A' + u)$ 9.58303
$(r) AF : A$ 0.30905	$(r) AG : A$ 4.02504	$(r) AH : A$ 0.55733	$(r) AK : A$ 0.26452
$\cos \delta \delta \alpha : dL'$ 0.30905	$\cos \delta \delta \alpha : \delta \mu$ 4.02489	$\cos \delta \delta \alpha : \delta \Phi$ 0.55422	$\cos \delta \delta \alpha : \delta \Psi$ 9.84755
$F' + B' + u$ 93° 9' 8"	$G' + B' + u$ 271°26'23"	$H' + B' + u$ 266°5' 9"	$K' + B' + u$ 160°25'36"
$\sin(F' + B' + u)$ 9.99934	$\sin(G' + B' + u)$ 9.99986	$\sin(H' + B' + u)$ 9.99899	$\sin(K' + B' + u)$ 9.52506
$(r) BF : A$ 9.91999	$(r) BG : A$ 3.63598	$(r) BH : A$ 0.16827	$(r) BK : A$ 9.87546
$\delta \delta = dL'$ 9.91933	$\delta \delta : \delta \mu$ 3.63584	$\delta \delta : \delta \Phi$ 0.16726	$\delta \delta : \delta \Psi$ 9.40052

$\alpha - \Omega' + u'$	$3^{\circ}37'34''$	$\sin u'$	7_n74565
$\cos (\alpha - \Omega' + u')$	9.99913	$\cos (\alpha - \Omega') \sin i'$	9.57704
$(r) \operatorname{tg} \frac{1}{2} i' : A$	9.49735	$\cos \delta \partial \alpha : \partial i'$	7.52654
$\cos \delta \partial \alpha : \sin i' \partial \Omega$	9.49648	$\sin (\alpha - \Omega') \sin i'$	8.41565
$\sin (\alpha - \Omega' + u')$	8.80103	$\sin \delta$	7.94229
$\sin \delta \operatorname{tg} \frac{1}{2} i'$	7.23579	Add.	0.00011
$\cos u'$	9.99999	$\cos \delta \cos i'$	9.96640
$\cos \delta$	9.99998	I	6.35794
I	6.03682	{...}	9.96651
II	9.99997	$(r) \sin u' : A$	7_n94950
Add.	0.00005	$\partial \delta : \partial i'$	7_n91601
{...}	0_n00002		
$\partial \delta : \sin i' \partial \Omega'$	0_n20387		

Als Probe für die Richtigkeit der Rechnung kann man das Verfahren einschlagen, dass man mit variirten Elementen die Darstellung der Orte sucht und nachsicht, ob die auf diese Weise gefundenen Aenderungen in den Orten mit den aus den Differentialformeln folgenden innerhalb der Unsicherheit der Rechnung stimmen, doch darf man die Aenderungen nicht allzu gross nehmen, weil sonst der Einfluss der Glieder zweiter Ordnung zu nachtheilig wird.

Behandelt man in ähnlicher Weise die übrigen Orte, so erhält man die auf pag. 320 ff. bereits angeführten Bedingungsgleichungen. An dem citirten Orte wird sofort die Ableitung der Normalgleichungen aus denselben vorgenommen und pag. 343 die Herstellung der Eliminationsgleichungen erläutert; pag. 345 findet sich die Bestimmung der Unbekannten aus den letzteren durch successive Substitution, pag. 350, 351 dieselbe Bestimmung unabhängig für jede Unbekannte durchgeführt, pag. 352 ist die Darstellung der Orte nach den Differentialformeln hergestellt; man wird stets als Controle für die Richtigkeit der Rechnung diese Darstellung auch durch die directe Rechnung prüfen. Auf pag. 352 finden sich die Correctionen der Elemente logarithmisch in Bogensekunden verstanden:

$$\begin{array}{ll}
 \log \partial L' = 1.0025 & \log \partial \Psi = 0_n6939 \\
 \log \partial \mu = 7.4842 & \log \sin i' \partial \Omega' = 9.6220 \\
 \log \partial \Phi = 0.7807 & \log \partial i' = 9_n0576,
 \end{array}$$

Um zunächst die Elementenänderungen von Φ und Ψ in solche von π' und φ zu übertragen, wird man sich der Formeln IV), VII) und VIII) (pag. 392, 393) bedienen und finden:

$$\begin{array}{l}
 \pi' - \pi_0' = + 44''99 \\
 \varphi - \varphi_0 = - 0''07.
 \end{array}$$

Die Ausgangselemente selbst sind auf die Ekliptik bezogen, während sich die hier gefundenen Verbesserungen auf äquatoreale Elemente beziehen; zu der hier nöthigen Transformation wird man die Formel IX) pag. 395 heranziehen und finden, wenn man nun alle Correctionen zusammenbringt:

$$\delta L = + 9''98$$

$$\delta \pi = + 44.91$$

$$\delta \Omega = - 3.12$$

$$\delta i = + 0.42$$

$$\delta \varphi = - 0.07$$

$$\delta \mu = + 0.003049$$

und die verbesserten Elemente der Erato werden sein:

⑥2 Erato

Epoche und Ocul. 1874 Dec. 26.0 mittl. Berl. Zeit

mittl. Aequ. 1870.0.

$$L = 219^{\circ} 8' 16''78$$

$$M = 180 40 13.97$$

$$\pi = 38 28 2.81$$

$$\Omega = 125 42 36.58$$

$$i = 2 12 24.32$$

$$\varphi = 9 59 14.83$$

$$\mu = 640''899099$$

$$\log a = 0.4954779$$

Rechnet man nun nach diesen Elementen die Darstellung der Orte mit Rücksicht auf die obigen Störungswerthe, so erhält man die folgenden Unterschiede zwischen der Beobachtung und Rechnung, denen ich jene auf pag. 352 durch die Differentialformeln erhaltenen beisetze; die Uebereinstimmung beider Resultate innerhalb der Unsicherheit einer siebenstelligen Rechnung gibt eine höchst befriedigende Controle. Es findet sich:

	directe Rechnung		Differentialformeln	
	$\cos \delta \delta \alpha$	$\delta \delta$	$\cos \delta \delta \alpha$	$\delta \delta$
1.	— 0''27	+ 2''18	— 0''28	+ 2.18
2.	+ 1.14	+ 0.82	+ 1.13	+ 0.82
3.	— 0.58	— 1.49	— 0.46	— 1.52
4.	— 1 09	— 3.47	— 0.99	— 3.43
5.	— 2.31	— 0.32	— 2.43	— 0.39
6.	— 0.15	+ 0.22	— 0.10	+ 0.20
7.	+ 0.37	— 1.23	+ 0.49	— 1.23
8.	+ 0.04	+ 0.94	+ 0.17	+ 0.97
9.	+ 2.26	— 0.42	+ 2.32	— 0.44

Schliesslich wäre noch erwähnen, dass auf pag. 361 die Gewichte und die mittleren Fehler der Unbekannten abgeleitet sind; es ist an der betreffenden Stelle gefunden worden:

$$\delta L' = \pm 0''494$$

$$\delta \Psi = \pm 0''315$$

$$\delta \mu = \pm 0.000143$$

$$\delta \Omega' \sin i'' = \pm 0.529$$

$$\delta \Phi = \pm 0.276$$

$$\delta i'' = \pm 0.588$$

Zunächst wird man die Unsicherheit der Elemente π' und q mit Hilfe der Formeln 9) pag. 388 ableiten. Dieselben ergeben:

$$\begin{aligned}\delta \pi' &= \frac{\cos \pi'}{\sin q} \delta \Phi - \frac{\sin \pi'}{\sin q} \delta \Psi \\ \delta q &= \frac{\sin \pi'}{\cos q} \delta \Phi + \frac{\cos \pi'}{\cos q} \delta \Psi,\end{aligned}$$

mit Rücksicht auf die bei der Methode der kleinsten Quadrate aneinandergesetzten Principien wird man, wenn man durch E den mittleren Fehler vorstellt und durch den Index das Element, auf das er sich bezieht, bezeichnet erhalten:

$$\begin{aligned}E(\pi') &= \pm \sqrt{\left(\frac{\cos \pi'}{\sin q} E(\Phi)\right)^2 + \left(\frac{\sin \pi'}{\sin q} E(\Psi)\right)^2} \\ E(q) &= \pm \sqrt{\left(\frac{\sin \pi'}{\cos q} E(\Phi)\right)^2 + \left(\frac{\cos \pi'}{\cos q} E(\Psi)\right)^2}\end{aligned}$$

und unter den Annahmen $\pi' = 38^{\circ}49'6$ und $q = 9^{\circ}59'2$ wird folgen:

$$\begin{aligned}E(\pi') &= \pm 1''683 \\ E(q) &= \pm 0.305.\end{aligned}$$

Ähnlich wird man aus den Formeln X) pag. 395 erhalten ($i = 2^{\circ}12'4$, $i' = 22^{\circ}14'2$, $\sigma = 121^{\circ}20'6$):

$$\begin{aligned}E(i) &= \pm \sqrt{(\cos \sigma E(i'))^2 + (\sin \sigma E(\Omega' \sin i'))^2} \\ E(\Omega) &= \pm \sqrt{\left(\frac{\sin \sigma}{\sin i} E(i')\right)^2 + \left(\frac{\cos \sigma}{\sin i} E(\Omega' \sin i')\right)^2} \\ E(\pi) &= \pm \sqrt{E(\pi')^2 + (\sin \sigma \operatorname{tg} \frac{1}{2} i E(i'))^2 + \{(\cos \sigma \operatorname{tg} \frac{1}{2} i - \operatorname{tg} \frac{1}{2} i)\} E(\Omega' \sin i')^2} \\ E(L) &= \pm \sqrt{E(L')^2 + (\sin \sigma \operatorname{tg} \frac{1}{2} i E(i'))^2 + \{(\cos \sigma \operatorname{tg} \frac{1}{2} i - \operatorname{tg} \frac{1}{2} i)\} E(\Omega' \sin i')^2}\end{aligned}$$

nach Einführung der obigen numerischen Werthe:

$$\begin{aligned}E(L) &= \pm 0''506 \\ E(\mu) &= \pm 0.000143 \\ E(\pi) &= \pm 1.687 \\ E(q) &= \pm 0.305 \\ E(\Omega) &= \pm 14.873 \\ E(i) &= \pm 0.546.\end{aligned}$$

Um die für die periodischen Cometen in Vorschlag gebrachten Formeln zu erläutern, will ich dieselben auf einen Ort des Winnecke'schen Cometen (III, 1819) anwenden; für den auf den mittleren Aequator 1880,0 bezogenen Ort des Cometen hat man:

$$1875 \text{ Febr. } 9.5 \text{ mittl. Berl. Zeit } \alpha = 276^{\circ}38'1 \quad \delta = -16^{\circ}16'2;$$

die aus den Elementen zu entnehmenden Grössen sind:

$$\begin{aligned}\Omega' &= 29^{\circ}17'7 & v &= -47^{\circ}43'3 \\ i' &= 21 \ 50.0 & \log r &= 9.9837 \\ \omega' &= 249 \ 35.0 & \log \mathcal{A} &= 0.1340 \\ q &= 47 \ 49.1 & \log a &= 0.5053 \\ \mu &= 619''61 & \log t &= 3.7874\end{aligned}$$

wobei also wieder, wie im früheren Beispiele der Aequator als Fundamentalebene und für die Zeit t als Ausgangsepoche 1858 Mai 1.0 angenommen ist. Nach den Formeln I) (pag. 390) erhält man:

$\alpha - \Omega'$	247°20'4	$m \sin M$	9.5704
$\sin \delta$	9 _n 4474		9.9625
$\cos(\alpha - \Omega')$	9 _n 5858	$m \cos M$	9.9328
$\cos i'$	9.9677	M	23°28'0
$\sin(\alpha - \Omega')$	9 _n 9651	$M + \delta$	7 11 8
$A \sin A'$	9 _n 5535	$\sin(M + \delta)$	9.0979
— —	9 _n 9696	m	9.9703
$A \cos A'$	9 _n 9651	$B \sin B'$	9.0682
A'	201°11'3		9.8663
$\log A$	9.9955	$B \cos B'$	9.0332
u'	201°51'7	B'	47°18'4
$A' + u'$	43° 3'0	$\log B$	9.2019
$B' + u'$	249 10 1	$r : A$	9.8497
$Ar : A$	9.8452	$\cos v$	9.8278
$Br : A$	9.0516	$\sin v$	9 _n 8692

nach II) (pag. 390, 391) wird sich finden:

$\cos q \cos v$	9.6548	$t F' \sin F''$	4.2210	$\sin q \cos v$	9.6970
$a : r$	0.5216	$2 : 3 \mu \sin i''$	2.3462	$2 + \sin q \cos v$	0.3977
$-\operatorname{tg} q \sin v$	9.9120	Add.	0.0058	$\sin v \sec q$	0 _n 0422
$a^2 : r^2$	1.0432	$G \sin G'$	4.2268	$P \sin P'$	0.1764
$F \sin F'$	0.4336		9.9721		9 _n 9435
	9.9727	$G \cos G'$	4.6576	$P \cos P'$	0 _n 4399
$F' \cos F''$	0.8702	G''	20°20'8	P'	151°24'3
F''	20°5'9	$\log G$	4.6855	$\log P$	0.4964
$\log F$	0.8975				

aus III) (pag. 391) erhält man, wenn man die analogen Operationen für die 4 Elemente neben einander durchführt (die angesetzte Bezeichnung ist demnach für die 4 verschiedenen Columnen entsprechend verändert zu denken):

	M_0	μ	q	α'
$F'' + A' + u'$	63°8'9	63°23'8	194°27'3	43°3'0
$\sin(F'' + A' + u')$	9.9504	9.9514	9 _n 3973	9.8342
$r A F : A$	0.7427	4.5307	0.3416	9.8452
$\cos \delta \delta \alpha : \delta M_0$	0.6931	4.4821	9 _n 7389	9.6794
$F'' + B' + u'$	269°16'0	269°30'9	40°34'4	249°10'1
$\sin(F'' + B' + u')$	0 _n 0000	0 _n 0000	9.8132	9 _n 9706
$r A F : A$	9.9491	3.7371	0.5480	9.0516
$\delta \delta : \delta M_0$	9 _n 9491	3 _n 7371	9.3612	9 _n 0222

für $\partial \varrho'$ und $\partial i''$ erhält man aus III pag. 391:

$\alpha - \varrho' + u'$	89°12'1	$\sin u'$	9 _n 5709
$\cos(\alpha - \varrho' + u')$	8.1441	$-\cos(\alpha - \varrho') \sin i''$	9.1562
$r \operatorname{tg} \frac{1}{2} i'' : J$	9.1350	$\cos \delta \partial \alpha : \partial i''$	8 _n 5768
$\cos \delta \partial \alpha : \partial \varrho' \sin i''$	7.2791	$\sin(\alpha - \varrho') \sin i''$	9 _n 5355
$\sin(\alpha - \varrho' + u')$	0.0000	$\sin \delta$	9 _n 4474
$\sin \delta \operatorname{tg} \frac{1}{2} i''$	8 _n 7327	Add.	0.0445
$\cos u'$	9 _n 9676	$\cos \delta \cos i''$	9.9500
$\cos \delta$	9.9823	1	8.9829
I	8 _n 7327	{...}	9.9945
II	9 _n 9499	$r' \sin u' : J$	9 _n 4206
Add.	0.0256	$\partial \delta : \partial i''$	9 _n 4151
{...}	9.9755		
$\partial \delta : \partial \varrho' \sin i''$	9.8252		

man hat also zwischen den Variationen der Elemente und den Variationen der geocentrischen Orte die folgenden Relationen, deren Coefficienten logarithmisch zu verstehen sind:

$$\begin{aligned} \cos \delta \partial \alpha &= 0.6931 \partial M_0 + 4.4821 \partial \mu_0 + 9_n7389 \partial q + 9.6794 \partial \pi' + 7.2791 \sin i' \partial \varrho' + 8_n5768 \partial i'' \\ \partial \delta &= 9_n9491 \partial M_0 + 3_n7371 \partial \mu_0 + 9.3612 \partial q + 9_n0222 \partial \pi' + 9.8252 \sin i' \partial \varrho' + 9_n4151 \partial i'' \end{aligned}$$

Um die Richtigkeit dieser Formeln zu prüfen, kann man sich durch willkürliche Variation der Elemente und directe Rechnung aus denselben eine zweckmässige Controle verschaffen. Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned} \partial M &= - 60'' \\ \partial \mu &= + 0''01 \\ \partial q &= - 300'' \\ \partial \pi' &= - 40'' \\ \partial \varrho' \sin i'' &= + 100'' \\ \partial i'' &= + 100'' \end{aligned}$$

so erhält man durch eine directe 6stellige Rechnung als Variationen der geocentrischen Orte die Werthe:

$$\cos \delta \partial \alpha = + 149''1 \quad \partial \delta = - 25''4$$

die Substitution der obigen Variationen in die früher ermittelte Relation ergibt hierfür:

$$\cos \delta \partial \alpha = + 149''2 \quad \partial \delta = - 25''0$$

was in Anbetracht, dass die Rechnung nur 6stellig geführt wurde, eine mehr als genügende Uebereinstimmung ist.

Um nun endlich ein Beispiel für die Anwendung der Formeln, die für mehr parabolische Bahnen gelten, vorzuführen, wähle ich hierfür die Bahnbestimmung des Cometen I 1866, und werde das Beispiel ausführlich hier mittheilen, weil es Gelegenheit bietet, jenen bei der Methode der kleinsten Quadrate aufgeführten Fall (pag. 362 ff.), wo die Bestimmung einer Unbekannten mit einer besonderen Unsicher-

heit behaftet ist, näher zu erläutern. Als Grundlagen der Rechnung wurden die folgenden Normalorte und Sonnencoordinaten angenommen, die sich auf den mittleren Aequator 1866.0 beziehen:

mittl. Berl. Zeit	α	δ	X	Y	Z
1. 1865 Dec. 22.5	333°18'17"3	+59°41'14"9	+0.0206905	-0.9019836	-0.3913801
2. » 27.0	348.16 3.2	+26 58 14.3	+0.0992222	-0.8974048	-0.3893961
3. 1866 Jan. 4.0	352 58 28.8	+ 7 12 57.5	+0.2369292	-0.8753931	-0.3798464
4. » 9.0	354 140.8	+ 2 21 55.0	+0.3207984	-0.8527856	-0.3700335
5. » 15.0	354 45 57.7	- 1 5 42.3	+0.4181360	-0.8169047	-0.3544614
6. » 22.0	355 18 6.2	- 3 37 25.5	+0.5256975	-0.7634815	-0.3312834
7. Febr. 5.0	355 59 26.5	- 6 35 35.4	+0.7152903	-0.6229677	-0.2703121

Als genähert richtige Elemente, deren Verbesserungen gesucht werden sollen, wurden die folgenden äquatorealen Elemente angenommen:

$$\begin{aligned}
 T &= 1866 \text{ Januar } 11.171697 \text{ mittl. Berl. Zeit} \\
 \left. \begin{aligned} \pi' &= 342^{\circ}28'24''88 \\ \Omega' &= 202 \ 54 \ 49.06 \\ i' &= 143 \ 19 \ 36.10 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{mittl. Aequ.} \\ &1866.0. \end{aligned} \\
 \log q &= 9.9896805 \\
 e &= 0.9053669
 \end{aligned}$$

Rechnet man in der bekannten Weise die Fehler, welche diese Elemente in den obigen Normalorten übrig lassen, so finden sich dieselben im Sinne Beobachtung — Rechnung, wie folgt:

	$\cos \delta \, \delta \alpha$	$\delta \delta$	v	$\log r$	$\log \mathcal{A}$	$\log t - T$
1.	-2"02	+0.76	-26°46'26"	0.01239	9.30736	1 _n 29384
2.	+4.55	+2.27	-20 56 14	0.00352	9.48685	1 _n 18103
3.	-0.23	-0.84	-10 3 42	9.99287	9.76731	0 _n 85562
4.	-1.02	+1.40	- 3 3 37	9.98997	9.88562	0 _n 33680
5.	-0.58	-2.04	+ 5 23 23	9.99059	6.99336	0.58301
6.	-2.16	-0.06	+15 5 54	9.99686	0.08850	1.03456
7.	+0.64	+0.58	+33 8 45	0.02463	0.21886	1.39495

ausserdem habe ich die aus diesen Elementen für die Zeiten der Normalorte resultirenden wahren Anomalien (v), Radiusvectoren (r), geocentrischen Distanzen (\mathcal{A}) und die seit der Perihelpassage verfllossene Zeit ($t - T$) in mittleren Sonnentagen genähert angesetzt, weil die Kenntniss dieser Grössen bei der Berechnung der Differentialquotienten nöthig ist; die Rechnung nach den Formeln I) (pag. 405) stellt sich wie folgt:

	1	2	3	4	5	6	7
$\alpha - \delta'$	$130^{\circ}23'28''$	$145^{\circ}21'14''$	$150^{\circ}3'40''$	$151^{\circ}6'52''$	$151^{\circ}51'9''$	$152^{\circ}23'17''$	$153^{\circ}4'37''$
$\sin \delta$	9.93615	9.65661	9.09903	8.61564	8.28130	8.80075	9.06001
$\cos(\alpha - \delta')$	9.81158	9.91523	9.93780	9.94230	9.94534	9.94749	9.95018
$\sin(\alpha - \delta')$	9.88175	9.75474	9.69817	9.68400	9.67370	9.66603	9.65590
	9.91699	9.87943	9.90970	9.91588	9.92007	9.92305	9.92679
$A \sin A'$	9.71578	9.81943	9.84200	9.84650	9.84954	9.85169	9.85438
A'	$34^{\circ}18'32''$	$49^{\circ}15'5''$	$54^{\circ}19'7''$	$55^{\circ}28'40''$	$56^{\circ}17'40''$	$56^{\circ}53'24''$	$57^{\circ}39'34''$
$\log A$	9.96476	9.94000	9.93230	9.93062	9.92947	9.92864	9.92759
$m \sin M$	9.77616	9.77616	9.77616	9.77616	9.77616	9.77616	9.77616
	9.85433	9.90028	9.91944	9.92373	9.92673	9.92890	9.93168
$m \cos M$	9.78595	9.65894	9.60237	9.58820	9.57790	9.57023	9.56010
M	$44^{\circ}21'15''$	$52^{\circ}38'25''$	$56^{\circ}10'10''$	$57^{\circ}1'44''$	$57^{\circ}38'46''$	$58^{\circ}6'6''$	$58^{\circ}41'54''$
$M + \delta$	$104^{\circ}230$	$79^{\circ}3639$	$63^{\circ}237$	$59^{\circ}2339$	$56^{\circ}334$	$54^{\circ}2841$	$52^{\circ}619$
$\sin(M + \delta)$	9.98683	9.99282	9.95136	9.93485	9.92136	9.91057	9.89716
m	9.93162	9.87588	9.85672	9.85243	9.84943	9.84726	9.84448
$B \sin B'$	9.91845	9.86870	9.80808	9.78728	9.77079	9.75783	9.74164
	9.91848	9.95070	9.99386	9.99925	9.99982	9.99793	9.99265
$B \cos B'$	9.974773	9.957184	9.903683	8.855794	8.22664	8.74824	9.01019
B'	$124^{\circ}1'4''$	$116^{\circ}47'8''$	$99^{\circ}36'40''$	$93^{\circ}22'30''$	$88^{\circ}21'49''$	$84^{\circ}24'48''$	$79^{\circ}29'10''$
$\log B$	9.99997	9.91800	9.81422	9.78803	9.77097	9.75990	9.74899
u'	$112^{\circ}47'10''$	$118^{\circ}37'22''$	$129^{\circ}29'54''$	$136^{\circ}29'59''$	$144^{\circ}56'59''$	$154^{\circ}39'30''$	$172^{\circ}42'21''$

aus II) pag. 405 findet sich:

	1	2	3	4	5	6	7
$\sin v$	9.965366	9.955309	9.924231	8.972743	8.97281	9.41577	9.73781
r	0.01239	0.00352	9.99287	9.98997	9.99059	9.99686	0.02463
$\cos r$	9.95075	9.97034	9.99327	9.99938	9.99808	9.98475	9.92287
$\sin v : r$	9.964127	9.954957	9.924944	8.973746	8.98222	9.41891	9.71318
r^2	0.02478	0.00704	9.98574	9.97994	9.98118	9.99372	0.04926
$F \sin F'$	7.969885	7.960715	7.930702	6.979504	7.03980	7.47649	7.77076
	9.998022	9.999343	9.99849	9.99086	9.99957	9.99659	9.98343
$F \cos F'$	8.934562	8.936336	8.938466	8.939046	8.938922	8.937668	8.932114
F''	$192^{\circ}42'36''$	$189^{\circ}56'35''$	$184^{\circ}46'50''$	$181^{\circ}27'5''$	$177^{\circ}26'20''$	$172^{\circ}49'40''$	$164^{\circ}16'24''$
$\log F'$	8.35640	8.36993	8.38617	8.39060	8.38965	8.38009	8.33771
$\lg \frac{1}{2} r$	9.937656	9.926663	8.994463	8.942673	8.67274	9.12230	9.47363
$\lg \frac{1}{2} r^2$	8.75312	8.53326	7.88926	0.85346	7.34548	8.24460	8.94726
θ	$+0.00281$	$+0.00170$	$+0.00038$	$+0.00004$	$+0.00011$	$+0.00087$	$+0.00440$
$\lg \frac{1}{2} r^4$	7.50624	7.06652	5.77852	3.70692	4.69096	6.48920	7.89452
$E_1 r$	9.330051	9.30071	9.30096	9.30102	9.30101	9.30086	9.30021
$E_0 r$	$+2.00281$	$+2.00170$	$+2.00038$	$+2.00004$	$+2.00011$	$+2.00087$	$+2.00440$

	1	2	3	4	5	6	7
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 + 0.05664 + 0.03414 + 0.00775 + 0.00071 + 0.00222 + 0.01756 + 0.08856$							
$E_1^r \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4 + 0.00064 + 0.00023 + 0.00001 + 0.00000 + 0.00000 + 0.00006 + 0.00157$							
$\{ \dots \} + 2.06009 + 2.03607 + 2.00814 + 2.00075 + 2.00233 + 2.01849 + 2.09453$							
$\log \{ \dots \}$	0.31389	0.30879	0.30279	0.30119	0.30153	0.30503	0.32109
$\sin v^2$	9.30732	9.10618	8.48462	7.45486	7.94562	8.83154	9.47562
E_2^v	0.000097	0.000059	0.000013	0.000001	0.000004	0.000030	0.000153
E_4^v	9.90291	9.90299	9.90307	9.90309	9.90308	9.90304	9.90282
$1 + E_2^v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2 + 0.94323 + 0.96581 + 0.99225 + 0.99929 + 0.99778 + 0.98242 + 0.91112$							
$E_4^r \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^4 - 0.00257 - 0.00093 - 0.00005 + 0.00000 + 0.00000 - 0.00025 - 0.00627$							
$\log \{ \dots \}$	9.97343	9.98447	9.99660	9.99969	9.99903	9.99219	9.95657
$\cos \frac{1}{2} v^2$	9.97607	9.98542	9.99665	9.99969	9.99904	9.99244	9.96315
$\sin v : 2 (1 + e)$	9.907266	8.97209	8.66131	8.14643	8.39181	8.83477	9.15681
$G \sin G'$	8.73918	8.53294	7.90538	6.87402	7.36512	8.25454	8.91468
	9.94787	9.96927	9.99321	9.99938	9.99807	9.98446	9.91567
$G \cos G'$	9.902216	8.94198	8.65456	8.14581	8.38988	8.81940	9.07653
$G' 207^{\circ} 31' 46'' 201^{\circ} 18' 3'' 190^{\circ} 6' 7'' 183^{\circ} 3' 41'' - 5^{\circ} 23' 46'' - 15^{\circ} 14' 8'' - 34^{\circ} 33' 45''$							
$\log G$	9.07429	8.97271	8.66135	8.14643	8.39181	8.83494	9.16086
<hr/>							
$\cos v : r$	9.93836	9.96682	0.00040	0.00941	0.00749	9.98789	9.89824
$q \cos v : r$	9.92804	9.95650	9.99008	9.99909	9.99717	9.97757	9.88792
$-(1 - e) G \sin G'$	7.71522	7.50948	6.88142	5.85006	6.34116	7.23058	7.89072
Add.	0.00265	0.00155	0.00034	0.00003	0.00010	0.00078	0.00435
$\log \{ \dots \}$	9.93069	9.95805	9.99042	9.99912	9.99727	9.97835	9.89227
$(t - T) : r^2$	1.26906	1.17399	0.86988	0.35686	0.60183	1.04084	1.34509
$H \sin H'$	0.29291	0.32027	0.35264	0.36134	0.35949	0.34057	0.25119
	9.89951	9.93729	9.98508	9.99861	9.99569	9.96680	9.84953
$H \cos H'$	0.17777	0.08270	0.77859	0.26557	0.51054	0.94955	0.25440
$H' - 52^{\circ} 30' 27'' - 59^{\circ} 56' 36'' - 75^{\circ} 4' 9'' - 85^{\circ} 24' 51'' 261^{\circ} 56' 27'' 247^{\circ} 52' 55'' 225^{\circ} 0' 22''$							
$\log H$	0.39340	0.38298	0.36756	0.36273	0.36380	0.37377	0.40496

Bei der Anwendung des Formelsystems III_a pag. 406 wurden jene Abänderungen in Rechnung gezogen, die in der Formel III_b pag. 407 enthalten sind, da der Comet sich in Bezug auf die gewählte Fundamentalebene als retrograd erweist, es wird also statt α' das Element \mathcal{A}' eingeführt; die Rechnung stellt sich wie folgt:

	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{A}' + u'$	147° 5' 42"	167° 52' 27"	183° 10' 1"	191° 58' 39"	201° 14' 39"	211° 32' 54"	230° 21' 55"
$B' + u'$	236 48 14	235 24 30	229 6 34	229 52 29	233 18 48	239 4 18	252 11 31
$Ar : \mathcal{A}$	0.66979	0.45667	0.15786	0.03497	9.92670	9.83700	9.73336
$Br : \mathcal{A}$	0.70500	0.43467	0.03978	9.89238	9.76820	9.66826	9.55476

	1	2	3	4	5	6	7
$A' + F' + u'$	339°48'18"	357°49' 2"	8°35'51"	13°25'44"	18°40'59"	24°22'34"	34°38'19"
$\sin (A' + F' + u')$	9 _n 53809	8 _n 58078	9.17461	9.36594	9.50560	9.61566	9.75466
$F'Ar : A$	9.02619	8.82660	8.54403	8.42557	8.31635	8.21709	8.07107
$\cos \delta \delta \alpha : \delta T$	8 _n 56428	7 _n 40738	7.71864	7.79151	7.82195	7.83275	7.82573
$B' + F' + u'$	69°30'50"	65°21' 5"	53°53'24"	51°19'34"	50°45' 8"	51°53'58"	56°27'55"
$\sin (B' + F' + u')$	9.97163	9.95851	9.90735	9.89249	9.88898	9.89594	9.92093
$F'Br : A$	9.06140	8.80460	8.42595	8.28298	8.15785	8.04835	7.89247
$\delta \delta : \delta T$	9.03303	8.76311	8.33330	8.17547	8.04683	7.94429	7.81340
$A' + G' + u'$	354°37'28"	9°10'30"	13°55' 8"	15° 2'20"	195°50'53"	196°18'46"	195°48'10"
$\sin (A' + G' + u')$	8 _n 97166	9.20263	9.38120	9.41409	9 _n 43630	9 _n 44852	9 _n 43509
$G'Ar : A$	9.74408	9.42938	8.81921	8.18140	8.31851	8.67194	8.89422
$\cos \delta \delta \alpha : \delta e$	8 _n 71574	8.63201	8.20041	7.59549	7 _n 75481	8 _n 12046	8 _n 32931
$B' + G' + u'$	84°20' 0"	76°42'33"	59°12'41"	52°56'10"	227°55' 2"	223°50'10"	217°37'46"
$\sin (B' + G' + u')$	9.99787	9.98821	9.93402	9.90198	9 _n 87050	9 _n 84048	9 _n 78572
$G'Br : A$	9.77929	9.40738	8.70113	8.03881	8.16001	8.50320	8.71562
$\delta \delta : \delta e$	9.77716	9.39559	8.63515	7.94079	8 _n 03051	8 _n 34368	8 _n 50134
$A' + H' + u'$	94°35'15"	107°55'51"	108°44'52"	106°33'48"	103°11' 6"	99°25'49"	95°22'17"
$\sin (A' + H' + u')$	9.99861	9.97838	9.97633	9.98159	9.98840	9.99409	9.99809
$H'Ar : A$	1.06319	0.83965	0.52542	0.39770	0.29050	0.21077	0.13832
$\cos \delta \delta \alpha : \delta \log q$	1.06180	0.81803	0.50175	0.37929	0.27890	0.20486	0.13641
$B' + H' + u'$	184°17'47"	175°27'54"	154° 2'25"	144°27'38"	135°15'15"	126°57'13"	117°11'53"
$\sin (B' + H' + u')$	8 _n 87458	8.89800	9.64122	9.76438	9.84755	9.90261	9.94912
$H'Br : A$	1.09840	0.81765	0.40734	0.25511	0.13200	0.04203	9.95972
$\delta \delta : \delta \log q$	9 _n 97298	9.71565	0.04856	0.01949	9.97955	9.94464	9.90884
$\sin (A' + u')$	9.73499	9.32234	8 _n 82327	9 _n 31708	9 _n 55912	9 _n 71868	9 _n 88656
$\cos \delta \delta \alpha : \delta A'$	0.40478	9.77901	8 _n 98113	9 _n 35205	9 _n 48582	9 _n 55568	9 _n 61992
$\sin (B' + u')$	9 _n 92262	9 _n 91552	9 _n 87850	9 _n 88346	9 _n 90413	9 _n 93339	9 _n 97868
$\delta \delta : \delta A$	0 _n 62762	0 _n 35019	9 _n 91828	9 _n 77584	9 _n 67233	9 _n 60165	9 _n 53344
$\alpha - \varpi' - u'$	17°36'18"	26°43'52"	20°33'46"	14°36'53"	6°54'10"	357°43'47"	340°22'16"
$\cos (\alpha - \varpi' - u')$	9.97917	9.95092	9.97141	9.98572	9.99684	9.99966	9.97400
$r \cotg \frac{1}{2} i' : A$	0.22542	0.03706	9.74595	9.62474	9.51762	9.42875	9.32616
$\cos \delta \delta \alpha : \sin i' \delta \varpi'$	0.20459	9.98798	9.71739	9.61046	9.51446	9.42841	9.30016
$\cos u'$	9 _n 58804	9 _n 68037	9 _n 80349	9 _n 86056	9 _n 91310	9 _n 95606	9 _n 99647
$\cos \delta$	9.70305	9.95000	9.99655	9.99963	9.99992	9.99913	9.99712
$\sin (\alpha - \varpi' - u')$	9.48066	9.65302	9.54560	9.40194	9.07985	8 _n 59784	9 _n 52624
$\sin \delta \cotg \frac{1}{2} i'$	9.45654	9.17700	8.61942	8.13603	7 _n 80169	8 _n 32114	8 _n 58040

	1	2	3	4	5	6	7
log I	9 _n 29109	9 _n 63037	9 _n 80004	9 _n 86019	9 _n 91302	9 _n 95519	9 _n 99359
log (—II)	8 _n 93720	8 _n 83002	8 _n 16502	7 _n 53797	6.88154	6 _n 91898	8 _n 10664
Add.	0.15918	0.06384	0.00995	0.00206	9.99960	0.00040	0.00560
log { . . . }	9 _n 45027	9 _n 69421	9 _n 80999	9 _n 86225	9 _n 91262	9 _n 95559	9 _n 99919
δ δ : sin i' δ Q'	0 _n 15530	0 _n 21088	0 _n 03555	9 _n 96660	9 _n 90985	9 _n 86395	9 _n 80496
sin u'	9.96471	9.94339	9.88742	9.83781	9.75913	9.63146	9.10368
cos (α — Q') sin i'	9 _n 58774	9 _n 69139	9 _n 71390	9 _n 71846	9 _n 72150	9 _n 72365	9 _n 72634
cos δ δ α : δ i'	0.25748	0.15145	9.82694	9.66062	9.47786	9.26347	8.63579
sin δ sin (α — Q')	9.81790	9.41135	8.79720	8.29964	7 _n 95500	8 _n 46678	8 _n 71591
log I	9.59406	9.18751	8.57336	8.07580	7 _n 73116	8 _n 24294	8 _n 49207
log II	9 _n 60725	9 _n 85420	9 _n 90075	9 _n 90383	9 _n 90412	9 _n 90333	9 _n 90132
Add.	8.48907	0.89463	9.97907	9.99350	0.00291	0.00939	0.01660
log { . . . }	8 _n 08313	9 _n 74883	9 _n 87982	9 _n 89733	9 _n 90703	9 _n 91272	9 _n 91792
r sin u : Δ	0.60974	0.46006	0.11298	9.94216	9.75636	9.53982	8.90945
δ δ : δ i'	8 _n 75287	0 _n 20889	9 _n 99280	9 _n 83949	9 _n 66339	9 _n 45254	8 _n 82737

Bei der Ausgleichung wird allen Normalorten das gleiche Gewicht gegeben, man kann also sofort daran gehen, nach den bei der Methode der kleinsten Quadrate angeführten Vorschriften (pag. 318) die Coëfficienten homogen zu machen und man wird als neue Unbekannte ansetzen (Coëfficienten logarithmisch):

$$\begin{aligned}
 x &= 0.25748 \delta i' \\
 y &= 0.21088 \sin i' \delta Q' \\
 z &= 0.62762 \delta \Delta' \\
 t &= 1.06180 \delta \log y \\
 u &= 9.03303 \delta T' \\
 w &= 9.77716 \delta e
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x &= 0.25748 \delta i' \\ y &= 0.21088 \sin i' \delta Q' \\ z &= 0.62762 \delta \Delta' \\ t &= 1.06180 \delta \log y \\ u &= 9.03303 \delta T' \\ w &= 9.77716 \delta e \end{aligned}} \right\} \alpha$$

log Fehlereinheit = 0.6580 .

Hier ist schon die Anordnung der Unbekannten so gewählt, dass die mit besonderer Unsicherheit zu bestimmende Excentricität, als die letzte erscheint. Die logarithmisch angesetzten, homogen gemachten Bedingungsgleichungen sind also:

$$\begin{aligned}
 9_n6474 &= 0.0000 x + 9.9937 y + 9.7772 z + 0.0000 t + 9_n5312 u + 8_n9386 w \\
 0.0000 &= 9.8940 \quad 9.7771 \quad 9.1514 \quad 9.7562 \quad 8_n3743 \quad 8.8548 \\
 8_n7037 &= 9.5695 \quad 9.5065 \quad 8_n3535 \quad 9.4399 \quad 8.6856 \quad 8.4232 \\
 9_n3506 &= 9.4031 \quad 9.3996 \quad 8_n7244 \quad 9.3175 \quad 8.7585 \quad 7.8183 \\
 9_n1054 &= 9.2204 \quad 9.3036 \quad 8_n8582 \quad 9.2171 \quad 8.7889 \quad 7_n9776 \\
 9_n6765 &= 9.0060 \quad 9.2175 \quad 8_n9281 \quad 9.1431 \quad 8.7997 \quad 8_n3433 \\
 9.1482 &= 8.3783 \quad 9.0893 \quad 8_n9923 \quad 9.0746 \quad 8.7927 \quad 8_n5521 \\
 9.2228 &= 8_n4954 \quad 9_n9444 \quad 0_n0000 \quad 8_n9112 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \\
 9.6980 &= 9_n9514 \quad 0_n0000 \quad 9_n7226 \quad 8.6538 \quad 9.7301 \quad 9.6184
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 9_n6474 &= 0.0000 x + 9.9937 y + 9.7772 z + 0.0000 t + 9_n5312 u + 8_n9386 w \\ 0.0000 &= 9.8940 \quad 9.7771 \quad 9.1514 \quad 9.7562 \quad 8_n3743 \quad 8.8548 \\ 8_n7037 &= 9.5695 \quad 9.5065 \quad 8_n3535 \quad 9.4399 \quad 8.6856 \quad 8.4232 \\ 9_n3506 &= 9.4031 \quad 9.3996 \quad 8_n7244 \quad 9.3175 \quad 8.7585 \quad 7.8183 \\ 9_n1054 &= 9.2204 \quad 9.3036 \quad 8_n8582 \quad 9.2171 \quad 8.7889 \quad 7_n9776 \\ 9_n6765 &= 9.0060 \quad 9.2175 \quad 8_n9281 \quad 9.1431 \quad 8.7997 \quad 8_n3433 \\ 9.1482 &= 8.3783 \quad 9.0893 \quad 8_n9923 \quad 9.0746 \quad 8.7927 \quad 8_n5521 \\ 9.2228 &= 8_n4954 \quad 9_n9444 \quad 0_n0000 \quad 8_n9112 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \\ 9.6980 &= 9_n9514 \quad 0_n0000 \quad 9_n7226 \quad 8.6538 \quad 9.7301 \quad 9.6184 \end{aligned}} \right\} \beta$$

$$\begin{array}{rcl}
 9_{n2663} & = & 9_{n7353}x + 9_{n8247}y + 9_{n2907}z + 8.9868t + 9.3003u + 8.8580w \\
 9.4881 & = & 9_{n5820} \quad 9_{n7557} \quad 9_{n1482} \quad 8.9577 \quad 9.1424 \quad 8.1636 \\
 9_{n6516} & = & 9_{n4059} \quad 9_{n6990} \quad 9_{n0447} \quad 8.9177 \quad 9.0138 \quad 8_{n2533} \\
 8_{n1202} & = & 9_{n1951} \quad 9_{n6531} \quad 8_{n9740} \quad 8.8828 \quad 8.9113 \quad 8_{n5665} \\
 9.1054 & = & 8_{n5699} \quad 9_{n5941} \quad 8_{n9058} \quad 8.8470 \quad 8.7804 \quad 8_{n7242}
 \end{array}$$

Die Bildung der Normalgleichungen aus diesen Coëfficienten ist ausführlich bei der Methode der kleinsten Quadrate (pag. 327 ff.) behandelt. Entlehnt man nun dieser Rechnung die für die Bildung der Eliminationsgleichungen nothwendigen Grössen, und bildet die Controlgrössen $[as]$, $[bs]$ etc. (vergl. pag. 317) so gestaltet sich die Elimination nach den früher (pag. 339 ff.) gegebenen Vorschriften wie folgt, wobei jedoch mit Rücksicht auf die im § 6 der Methode der kleinsten Quadrate (pag. 363 ff.) gemachte Bemerkung die Elimination nur bis zur vorletzten Unbekannten durchgeführt wurde:

x	y	z	t	u	w	n	s	Proben
+ 3.1865 0.50331	+ 3.4049 0.53211	+ 1.3742 0.13805	+ 1.4853 0.17182	— 1.0222 0_{n00954}	— 0.4592 9_{n66200}	— 0.1590 9_{n20141}	+ 7.8105 0.89268	E
0.02880	+ 4.7297 + 3.6384	+ 2.3616 + 1.4684	+ 1.3453 + 1.5871	— 2.0300 — 1.0923	— 1.3478 — 0.4907	— 0.5159 — 0.1699	+ 7.9478 + 8.3460	
	+ 1.0913 0.03794	+ 0.8932 9.95095	— 0.2418 9_{n38346}	— 0.9377 9_{n97206}	— 0.8571 9_{n93303}	— 0.3460 9_{n53908}	— 0.3982 9_{n60010}	— 0.3981 E
9.63474		+ 1.7681 + 0.5926	+ 0.6311 + 0.6406	— 1.5927 — 0.4408	— 1.2625 — 0.1980	— 0.4725 — 0.0686	+ 2.8073 + 3.3684	
9.91301		+ 1.1755 + 0.7311	— 0.0095 — 0.1979	— 1.1519 — 0.7675	— 1.0645 — 0.7015	— 0.4039 — 0.2832	— 0.5611 — 0.3259	
	+ 0.4444 9.64777	+ 0.1884 9.27508	— 0.3844 9_{n58478}	— 0.3630 9_{n55991}	— 0.1207 9_{n08171}	— 0.2352 9_{n37144}	— 0.2353 E	
9.66851		+ 1.5484 + 0.6924	— 0.3078 — 0.4765	— 0.1085 — 0.2140	— 0.0143 — 0.0741	+ 4.5795 + 3.6407		
9_{n34552}		+ 0.8560 + 0.0536	+ 0.1687 + 0.2078	+ 0.1055 + 0.1899	+ 0.0598 + 0.0767	+ 0.9388 + 0.0882		
9.62731		+ 0.8024 + 0.0799	— 0.0391 — 0.1630	— 0.0844 — 0.1539	— 0.0169 — 0.0512	+ 0.8506 — 0.0997		
	+ 0.7225 9.85884	+ 0.1239 9.09307	+ 0.0695 8.84198	+ 0.0343 8.53529	+ 0.9503 9.97786	+ 0.9502 E		
9_{n50623}		+ 1.5016 + 0.3279	+ 1.2568 + 0.1473	+ 0.4841 + 0.0510	— 1.7102 — 2.5056			
9_{n93412}		+ 1.1737 + 0.8057	+ 1.1095 + 0.7365	+ 0.4331 + 0.2973	+ 0.7954 + 0.3422			
9_{n93701}		+ 0.3680 + 0.3325	+ 0.3730 + 0.3140	+ 0.1358 + 0.1044	+ 0.4532 + 0.2034			
9.23423		+ 0.0355 + 0.0212	+ 0.0590 + 0.0119	+ 0.0314 + 0.0059	+ 0.2498 + 0.1630			
	+ 0.0143 8.15534	+ 0.0471 8.67302	+ 0.0255 8.40654	+ 0.0868 E	+ 0.0869 E			

Um zu zeigen, dass in der That die Bestimmung der letzten Unbekannten mit einem einigermaassen genügenden Grade der Annäherung aus diesen Gleichungen nicht möglich ist, will ich des Beispieles halber die Elimination vollenden, man erhält so, das Schema fortsetzend:

$$\begin{array}{rcl}
 & + 1.1978 & + 0.4811 \\
 9_n 15869 & + 0.0662 & + 0.0229 \\
 & + 1.1316 & + 0.4582 \\
 9_n 89509 & + 0.6732 & + 0.2718 \\
 & + 0.4584 & + 0.1864 \\
 9_n 91214 & + 0.2965 & + 0.0986 \\
 & + 0.1619 & + 0.0878 \\
 8.98314 & + 0.0067 & + 0.0033 \\
 & + 0.1552 & + 0.0845 \\
 0.51768 & + 0.1551 & + 0.0840 \\
 & + 0.0001 & + 0.0005
 \end{array}$$

so dass in der That der für die Bestimmung der letzten Unbekannten notwendige Coëfficient weit innerhalb der Grenzen der Unsicherheit der Rechnung liegt und wohl auch in ähnlichen Fällen der theoretischen Ableitung entgegen (pag. 331) negativ gefunden wird.

Bestimmt man die Summe der Fehlerquadrate nach den bekannten Formeln (pag. 337, 338), die übrig bleiben, wenn man von der letzten Unbekannten absieht, so erhält man:

$$|nn5| = 1.9368. \quad \gamma)$$

Aus der letzten Eliminationsgleichung folgt aber logarithmische Coëfficienten:

$$u = 0.25120 + 0_n 51768 w$$

da der Coëfficient von w grösser als die Einheit wird, so lehrt dieser Umstand (vergl. pag. 364), dass es in der That zweckmässiger gewesen wäre, als letzte Unbekannte u anzusetzen, doch ist dieser Factor hinreichend klein, so dass ein wesentlicher Nachtheil für die Rechnung daraus nicht entstehen kann. Substituirt man nun diesen Werth von u der Reihe nach in die einzelnen Eliminationsgleichungen (vergl. pag. 424), so erhält man alle Unbekannten als Functionen von w ausgedrückt; man findet so, indem wieder alle Coëfficienten logarithmisch verstanden werden:

$$\left. \begin{array}{l}
 u = 0.25120 + 0_n 51768 w \\
 t = 9_n 41207 + 9.67085 w \\
 z = 0.14004 + 0_n 34848 w \\
 y = 8.44778 + 9_n 06036 w \\
 x = 8.23547 + 8_n 66312 w
 \end{array} \right\} \delta$$

Die erste Columnne rechts vom Gleichheitszeichen gibt also die wahrscheinlichsten Correctionen der Elemente, wenn man $w = 0$ setzt; substituirt man dem-

nach die Werthe von δ (pag. 425) in die Gleichungen β (pag. 423) und schafft die von w unabhängigen Correctionen auf die linke Seite des Gleichheitszeichens, so erhält man als neue Bedingungsgleichungen zur Bestimmung von w sofort (Coëfficienten nicht logarithmisch):

Rectascensionen.	Declinationen.	
$- 0.4510 = + 0.0061 w$	$- 0.2318 = + 0.0016 w$	} ϵ
$+ 0.9636 = - 0.0042 w$	$+ 0.3249 = + 0.0012 w$	
$- 0.0502 = - 0.0079 w$	$- 0.2180 = - 0.0027 w$	
$- 0.2111 = - 0.0071 w$	$+ 0.3004 = - 0.0031 w$	
$- 0.1035 = - 0.0046 w$	$- 0.4396 = - 0.0026 w$	
$- 0.4406 = + 0.0007 w$	$+ 0.0064 = - 0.0006 w$	
$+ 0.1926 = + 0.0195 w$	$+ 0.1609 = + 0.0077 w$	

Die Grössen links vom Gleichheitszeichen stellen also die minimalen Fehler dar, wenn man $w = 0$ setzt; die Summe dieser Fehlerquadrate muss daher mit dem oben gefundenen Werthe γ (pag. 425) von $[nn5]$ stimmen. in der That ist:

$$[n'n'] = 1.9368,$$

so dass die Uebereinstimmung zufällig vollkommen ist; man sieht aus den Gleichungen ϵ) sofort, dass die Bestimmung von w sehr unsicher ausfallen muss, da alle Coëfficienten dieser Unbekannten klein sind, doch übersteigen die meisten weit die Unsicherheit der Rechnung; vergleicht man also dieses Resultat mit dem der obigen Elimination, so sieht man sofort ein, dass die Zurückführung des Zusammenhanges der unsicheren Unbekannten mit den Beobachtungen auf die einfachste Form in der That ganz wesentliche Vortheile bringt.

Führt man nun wieder, um die Rechnung einfacher zu gestalten (logarithmisch):

$$w' = 8.2900 w$$

ein, so erhält man durch die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate w' bestimmt durch:

$$w' = \frac{[a'n']}{[a'a']} ;$$

es ist aber:

$$\begin{aligned} [a'n'] &= + 0.0551 \\ [a'a'] &= + 1.7278 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } \log w' &= 8.5038 \\ \log w &= 0.2138 , \end{aligned}$$

substituirt man diesen Werth von w in die Gleichungen δ) (pag. 425), so resultirten aus denselben die Werthe der Unbekannten, die mit Rücksicht auf die in α) (pag. 423) eingeführten Homogenitätsfactoren und unter Beachtung des Umstandes, dass die Unbekannten $\delta \log q$, δT und δe zunächst im Bogenmaasse erscheinen, also durch die

Multiplication mit dem Sinus einer Bogensekunde auf Einheiten des Radius zurückgeführt werden müssen, in die Aenderungen der Elemente leicht umgesetzt werden können:

$$\begin{array}{ll} \log w = 0.2138 & \delta e = + 0.0000603 \\ \log u = 0.5570 & \delta T = - 0.000737 \\ \log t = 9.7062 & \delta \log q = + 0.0000010 \\ \log z = 0.3560 & \delta \Delta' = - 2''43 \\ \log y = 9.2041 & \delta \Omega' = - 0.75 \\ \log x = 8.7643 & \delta i' = - 0.15 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \delta e \\ \delta T \\ \delta \log q \\ \delta \Delta' \\ \delta \Omega' \\ \delta i' \end{array}} \right\} \delta \pi' = - 3''93$$

Substituirt man den oben gefundenen Werth von w in die Gleichungen ε verwandelt alles in Bogenmaass und führt überdies statt w die Unbekannte δe ein, so erhält man nach den Differentialformeln die folgende Darstellung der Orte, wobei aber für das wahrscheinlichste System $\delta e = 0$ zu setzen ist:

	$\cos \delta d\alpha$	$d\delta$	
1865 Dec. 22.5	$- 2''10 - 0''75 \ 10^3 \delta e$	$- 1''07 - 0''20 \ 10^3 \delta e$	} ζ_1
» 27.0	$+ 4.42 + 0.52$	$+ 1.47 - 0.15$	
1866 Jan. 4.0	$- 0.17 + 0.98$	$- 0.97 + 0.33$	
» 9.0	$- 0.91 + 0.88$	$+ 1.39 + 0.38$	
» 15.0	$- 0.44 + 0.57$	$- 1.98 + 0.32$	
» 22.0	$- 2.01 - 0.09$	$+ 0.03 + 0.07$	
Febr. 5.0	$+ 0.73 - 2.41$	$+ 0.67 - 0.95$	

Die verbesserten Elemente selbst werden erhalten durch die Hinzufügung der Correctionen:

$$\begin{array}{l} \text{♂ I. 1866} \\ T = 1866 \text{ Januar } 11.170960 \text{ mittl. Berl. Zeit.} \\ \left. \begin{array}{l} \pi' = 342^{\circ}28'20''95 \\ \Omega' = 202^{\circ}54'48''31 \\ i' = 143^{\circ}19'35''95 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{mittl. Aequat.} \\ 1866,0 \end{array} \\ \log q = 9.9896815 \\ e = 0.9054272 \end{array}$$

Rechnet man aus diesen Elementen die Darstellung der Orte direct, so findet man eine völlige Uebereinstimmung mit den Werthen in ζ_1 innerhalb der Unsicherheit der siebenstelligen Rechnung; würden aber die erforderlichen Correctionen der Elemente wesentlich grösser sein als in dem vorliegenden Falle, so könnten leicht ganz erhebliche Differenzen zwischen den Resultaten der directen Rechnung und jenen der Differentialformeln auftreten: man würde in einem solchen Falle die Auflösung der Normalgleichungen zu wiederholen haben; hierbei wird es aber, wenn nicht die zu Grunde gelegten Elemente allzu fehlerhaft waren, nur nöthig sein, die mit n verbundenen Coëfficienten, also $[an], [bn] \dots [fn]$ neu zu rechnen, und demnach bei der Auflösung der Normalgleichungen nur die vorletzte Columnne, die die n -Werthe enthält, abzuändern. Für die Werthe von n müssen natürlich die Resultate der directen Vergleichung der verbesserten Elemente mit den Normalorten

zu Grunde gelegt werden. Die Gleichungen § (pag. 427) zeigen, dass man wohl δe innerhalb der Grenzen ± 0.003 abändern darf, ohne gerade mit den Beobachtungen in Widerspruch zu gerathen; jede Aenderung von δe bewirkt aber nach den Gleichungen § (pag. 425) eine Aenderung von q , man erhält aus diesen die diesbezügliche Relation:

$$\delta \log q = 8.3862 \delta e,$$

also sind die in $\delta \log q$ bewirkten Aenderungen $\pm 0.000\ 0730$, wenn man δe um ± 0.003 abändert. Die grosse Achse und die Umlaufszeit in siderischen Jahren bestimmt sich nach:

$$a = \frac{q}{1-e} \qquad U = a^{\frac{3}{2}}$$

ist also nach den obigen Elementen:

$$\log a = 1.0139152$$

$$U = 33.17973 \text{ sid. Jahre.}$$

Macht man aber von den obigen als möglich bezeichneten Aenderungen Gebrauch, so findet man für:

$$\begin{array}{ll} \delta e = + 0.003 & \delta e = - 0.003 \\ \delta \log q = + 0.000\ 0730 & \delta \log q = - 0.0000730 \\ \log a = 1.0279880 & \log a = 1.0002797 \\ U = 34.83 & U = 31.65, \end{array}$$

d. h. die Umlaufszeit kann zwischen den Grenzen 31.65 und 34.83 Jahren angenommen werden, ohne mit den Beobachtungen in Widerspruch zu gerathen.

§ 7. Bestimmung der Bahnelemente eines kleinen Planeten aus den Beobachtungen einer Opposition.

Die Anwendung der in dem vorausgehenden Paragraphen entwickelten Methoden auf die Bestimmung der Bahnelemente eines kleinen Planeten aus den Beobachtungen einer Opposition scheint auf den ersten Blick keinen theoretischen Schwierigkeiten unterworfen zu sein, doch wird man sich derselben sofort bewusst werden, wenn man erwägt, dass die Bahnelemente in dem vorliegenden Falle niemals mit einem hohen Grade von Genauigkeit bestimmt werden können, da der von den Planeten innerhalb des Zeitraumes der vorhandenen Beobachtungen zurückgelegte heliocentrische Bogen ein mässiger sein wird; man wird deshalb in der Lage sein, die Elemente der Planeten innerhalb verhältnissmässig weiter Grenzen zu variiren, ohne auf eine gute Darstellung der Beobachtungen verzichten zu müssen. Sind aber die an die Elemente anzubringenden Incremente gross, so wird man nicht erwarten dürfen, dass der Zusammenhang derselben mit den Beobachtungen ein linearer bleibt; genügen aber die Bedingungsgleichungen nicht völlig diesen Bedingungen,

so wird jede auf diese Voraussetzung begründete Lösung mit Fehlern behaftet sein, die unter Umständen ganz beträchtlich sein können. Der durch die Methode der kleinsten Quadrate gestellten Forderung des linearen Zusammenhanges wird man aber in verschiedener Weise durch entsprechende Wahl der willkürlichen Constanten des Problems genügen können, und in der That lässt sich für den vorliegenden Fall eine Wahl derselben treffen, die in viel höherem Maasse der gestellten Forderung entspricht, als die in den vorstehenden Methoden eingeführten Elemente. Man gelangt dadurch zu einer Lösung der vorgelegten Aufgabe, die eine sonst mehrfach zu wiederholende Aufstellung der Bedingungsgleichungen in kurzer und sicherer Weise umgeht, und um so werthvoller wird, wenn man sich nicht begnügt die wahrscheinlichsten Elemente allein zu bestimmen, sondern auch jene Elemente aufsucht, die die Eigenschaft haben, noch in erträglicher Weise sich den Beobachtungen anzuschliessen, eine Untersuchung, die insbesondere bei im Verlust gerathenen Planeten oft von grosser Bedeutung sein kann.

Es lässt sich nach I pag. 108 jede heliocentrische Coordinate x, y, z innerhalb mässiger Zeitgrenzen mit Vortheil als Funktion der Ausgangscoordinaten x_0, y_0, z_0 und deren Geschwindigkeiten $\frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \frac{dz_0}{dt}$ darstellen; nämlich:

$$\left. \begin{aligned} x &= ax_0 + b \frac{dx_0}{dt} \\ y &= ay_0 + b \frac{dy_0}{dt} \\ z &= az_0 + b \frac{dz_0}{dt} \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

wo a und b für jede der drei Coordinaten identische Funktionen der Ausgangscoordinaten, Geschwindigkeiten und der Zwischenzeit τ sind: in der ersten Annäherung kann aber $a = 1$ und $b = \tau$ gesetzt werden, woraus man den Schluss ziehen kann, dass die Variationen der Coordinaten und der Geschwindigkeiten für die Ausgangsepoche im Allgemeinen einen geringen Einfluss auf a und b zeigen werden. Hierbei wird die Zeit von der Epoche der Ausgangscoordinaten gezählt gedacht, ausgedrückt in Einheiten des mittleren Sonnentages multiplicirt in die Constante des Sonnensystems k , man hat also die ebenfalls am citirten Orte angeführten Relationen:

$$k t = \tau, \quad k d t = d \tau.$$

Setzt man der Kürze halber:

$$\frac{dx_0}{dt} = \xi_0, \quad \frac{dy_0}{dt} = \eta_0, \quad \frac{dz_0}{dt} = \zeta_0, \quad 2)$$

so wird man statt 1) zu schreiben haben:

$$\left. \begin{aligned} x &= ax_0 + b \xi_0 \\ y &= ay_0 + b \eta_0 \\ z &= az_0 + b \zeta_0 \end{aligned} \right\} \quad 3)$$

Setzt man:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r_0^2,$$

also:

$$x_0 \xi_0 + y_0 \eta_0 + z_0 \zeta_0 = r_0 \left(\frac{dr_0}{dt} \right), \quad 4)$$

so hat man für a und b nach I pag. 109 die Reihen:

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{r_0^3} + \frac{1}{2} \frac{r^3}{r_0^4} \left(\frac{dr_0}{dt} \right) + \left\{ \frac{1}{r_0^6} - \frac{12}{r_0^5} \left(\frac{dr_0}{dt} \right)^2 + \frac{3}{r_0^4} \left(\frac{d^2 r_0}{dt^2} \right) \right\} \frac{r^4}{24} + \dots \\ b &= \tau - \frac{1}{6} \frac{r^3}{r_0^3} + \frac{1}{4} \frac{r^4}{r_0^4} \left(\frac{dr_0}{dt} \right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad 5)$$

welche wohl stets innerhalb der hier in Aussicht genommenen Ausdehnung ausreichen werden. Zur Berechnung von $\left(\frac{dr_0}{dt} \right)$ kann man wohl die Relation 4) benutzen, kürzer wird sich aber die Rechnung gestalten (vergl. pag. 89), wenn man berechnet:

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{\sin \varphi_0 \sin v_0}{\sqrt{p_0}}, \quad 6)$$

wo also φ_0 , p_0 der Excentricitätswinkel und der Parameter der Ausgangselemente ist und die aus den letzteren folgende wahre Anomalie zur Zeit der Ausgangsepoche durch v_0 bezeichnet wird. Die nochmalige Differentiation nach der Zeit gibt in Verbindung mit der bekannten Relation (vergl. I pag. 45):

$$\left. \begin{aligned} r^2 \frac{dv}{dt} &= \sqrt{p} (k \frac{dt}{dt}) \\ \frac{d^2 r_0}{dt^2} &= \frac{\sin \varphi_0 \cos v_0}{r_0^2} \end{aligned} \right\} \quad 7)$$

Durch die Gleichungen 6) und 7) werden also die in den Gleichungen 5) auftretenden Differentialquotienten leicht berechnet werden können. Setzt man also:

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= - \frac{1}{2 r_0^3} \\ A_3 &= \frac{1}{2 r_0^4} \left(\frac{dr_0}{dt} \right) = \frac{1}{2 r_0^5} \left(r_0 \frac{dr_0}{dt} \right) \\ A_4 &= \frac{1}{24 r_0^5} \left\{ \frac{1}{r_0} + 3 r_0 \left(\frac{d^2 r_0}{dt^2} \right) - 12 \left(\frac{dr_0}{dt} \right)^2 \right\} *) \\ B_3 &= - \frac{1}{6 r_0^3} \\ B_4 &= \frac{1}{4 r_0^4} \left(\frac{dr_0}{dt} \right) = \frac{1}{4 r_0^5} \left(r_0 \frac{dr_0}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \quad 8)$$

so sind die in 8) bestimmten Coëfficienten in einem gegebenen Falle bestimmte numerische Constanten und man hat zur Berechnung von a und b die bequemen Formen:

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 + A_2 r^2 + A_3 r^3 + A_4 r^4 + \dots \\ b &= \tau (1 + B_3 r^2 + B_4 r^3 + \dots) \end{aligned} \right\} \quad 9)$$

Es sollen nun als die sechs Constanten des Problems (Elemente) die Grössen x_0 , y_0 , z_0 , ξ_0 , η_0 und ζ_0 gewählt werden, ohne noch vorerst über die Lage des

*) A_4 kann noch berechnet werden nach $\frac{1}{8 r_0^5} g^2 - \frac{5}{8 r_0^5} \left(\frac{dr_0}{dt} \right)^2 - \frac{1}{12 r_0^6}$, welche Transformation sich leicht aus den folgenden Entwicklungen ergibt (vgl. Gleichung 14).

Coordinatensystemes, ausser der Bedingung, dass der Anfangspunkt in den Sonnenmittelpunkt gelegt ist, weitere Bestimmungen zu treffen. Es wird sich also mit Rücksicht auf die Gleichung 3) (pag. 429) jede Variation einer heliocentrischen Coordinate als Variation der obigen Elemente darstellen lassen und man erhält, indem man die Ermittlung der Variationen der Grössen a und b vorerst symbolisch darstellt und deren Entwicklung auf später vorbehält, das folgende System:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_0} &= a + x_0 \left(\frac{\partial a}{\partial x_0} \right) + \xi_0 \left(\frac{\partial b}{\partial x_0} \right), & \frac{\partial x}{\partial \xi_0} &= b + x_0 \left(\frac{\partial a}{\partial \xi_0} \right) + \xi_0 \left(\frac{\partial b}{\partial \xi_0} \right) \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} &= x_0 \left(\frac{\partial a}{\partial y_0} \right) + \xi_0 \left(\frac{\partial b}{\partial y_0} \right), & \frac{\partial x}{\partial \eta_0} &= x_0 \left(\frac{\partial a}{\partial \eta_0} \right) + \xi_0 \left(\frac{\partial b}{\partial \eta_0} \right) \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} &= x_0 \left(\frac{\partial a}{\partial z_0} \right) + \xi_0 \left(\frac{\partial b}{\partial z_0} \right), & \frac{\partial x}{\partial \zeta_0} &= x_0 \left(\frac{\partial a}{\partial \zeta_0} \right) + \xi_0 \left(\frac{\partial b}{\partial \zeta_0} \right) \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} &= y_0 \left(\frac{\partial a}{\partial x_0} \right) + \eta_0 \left(\frac{\partial b}{\partial x_0} \right), & \frac{\partial y}{\partial \xi_0} &= y_0 \left(\frac{\partial a}{\partial \xi_0} \right) + \eta_0 \left(\frac{\partial b}{\partial \xi_0} \right) \\ \frac{\partial y}{\partial y_0} &= a + y_0 \left(\frac{\partial a}{\partial y_0} \right) + \eta_0 \left(\frac{\partial b}{\partial y_0} \right), & \frac{\partial y}{\partial \eta_0} &= b + y_0 \left(\frac{\partial a}{\partial \eta_0} \right) + \eta_0 \left(\frac{\partial b}{\partial \eta_0} \right) \\ \frac{\partial y}{\partial z_0} &= y_0 \left(\frac{\partial a}{\partial z_0} \right) + \eta_0 \left(\frac{\partial b}{\partial z_0} \right), & \frac{\partial y}{\partial \zeta_0} &= y_0 \left(\frac{\partial a}{\partial \zeta_0} \right) + \eta_0 \left(\frac{\partial b}{\partial \zeta_0} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} &= z_0 \left(\frac{\partial a}{\partial x_0} \right) + \zeta_0 \left(\frac{\partial b}{\partial x_0} \right), & \frac{\partial z}{\partial \xi_0} &= z_0 \left(\frac{\partial a}{\partial \xi_0} \right) + \zeta_0 \left(\frac{\partial b}{\partial \xi_0} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial y_0} &= z_0 \left(\frac{\partial a}{\partial y_0} \right) + \zeta_0 \left(\frac{\partial b}{\partial y_0} \right), & \frac{\partial z}{\partial \eta_0} &= z_0 \left(\frac{\partial a}{\partial \eta_0} \right) + \zeta_0 \left(\frac{\partial b}{\partial \eta_0} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial z_0} &= a + z_0 \left(\frac{\partial a}{\partial z_0} \right) + \zeta_0 \left(\frac{\partial b}{\partial z_0} \right), & \frac{\partial z}{\partial \zeta_0} &= b + z_0 \left(\frac{\partial a}{\partial \zeta_0} \right) + \zeta_0 \left(\frac{\partial b}{\partial \zeta_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad 10)$$

Die nächste Aufgabe wird nun darin bestehen, die Bedeutung der symbolisch angezeigten Differentialquotienten näher zu entwickeln. Beachtet man die Ausdrücke 5) (pag. 430), so sieht man sofort, dass die Differentiation nach jeder Coordinate und deren Geschwindigkeit völlig analoge Ausdrücke ergeben muss; da die angeführten Ausdrücke die Coordinaten und Geschwindigkeiten nur in r_0 und deren Derivationen enthalten, die selbst völlig symmetrisch in Bezug auf die letzteren gebaut sind. Es wird also die Durchführung der Differentiation nach x_0 und ξ_0 allein genügen, um die analogen Formen für die Derivationen von y_0 , η_0 , z_0 und ζ_0 hinschreiben zu können; und auch diese Operationen lassen sich wesentlich vereinfachen, wenn man die folgenden Bemerkungen beachtet.

Zunächst wird man berücksichtigen, das ist:

$$\frac{\partial r_0}{\partial x_0} = \frac{x_0}{r_0}, \quad \frac{\partial r_0}{\partial \xi_0} = 0, \quad 11)$$

setzt man weiter:

$$\left(r_0 \frac{\partial r_0}{\partial t} \right) = h',$$

so ist offenbar nach 4) (pag. 430):

$$\frac{\partial h'}{\partial x_0} = \xi_0, \quad \frac{\partial h'}{\partial \xi_0} = x_0. \quad 12)$$

Um für die zweiten Differentialquotienten von r_0 die entsprechenden Differentiationen ausführen zu können, werde ich die bei der Hansen-Tietjen'schen Methode (pag. 112) der Störungsrechnung aufgestellte Gleichung heranziehen; dieselbe wurde an der citirten Stelle gefunden:

$$\frac{d^2(r)}{dt^2} - (r) \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + \frac{k^2(r)}{r^3} = (r) \Sigma R - (r) \Sigma w ;$$

bemerkt man, dass für die ungestörte Bewegung der Ausdruck rechter Hand verschwindet und (r) mit r und $\frac{dl}{dt}$ mit $\frac{dv}{dt}$ identificirt werden darf, so wird geschrieben werden können:

$$\frac{d^2 r_0}{dt^2} = r_0 \left(\frac{dv_0}{dt} \right)^2 - \frac{1}{r_0^3} .$$

Das Quadrat der Geschwindigkeit, dividirt durch das Quadrat der Constante des Sonnensystems, sei durch g^2 bezeichnet, so wird g^2 leicht (vergl. I pag. 44) berechnet werden können nach:

$$g^2 = \frac{2}{r_0} - \frac{1}{a_0} ; \quad 13)$$

es ist aber überdiess:

$$g^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = \left(r_0 \frac{dr_0}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr_0}{dt} \right)^2 ,$$

man wird also haben:

$$r_0^2 \frac{d^2 r_0}{dt^2} = r_0 g^2 - r_0 \left(\frac{dr_0}{dt} \right)^2 - 1 .$$

Führt man diese Relation in A_1 8) (pag. 430) ein, so findet sich:

$$A_1 = \frac{1}{24 r_0^6} \left\{ -2 - 15 r_0 \left(\frac{dr_0}{dt} \right)^2 + 3 r_0 g^2 \right\} = -\frac{1}{12 r_0^6} - \frac{5}{8 r_0^7} h'^2 + \frac{1}{8 r_0^5} g^2 . \quad 14)$$

wobei ist:

$$\frac{\partial g}{\partial x_0} = 0 \quad g \frac{\partial g}{\partial \xi_0} = \xi_0 ; \quad 15)$$

es wird also:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_2}{\partial x_0} &= \frac{3}{2} \frac{x_0}{r_0^5} , & \frac{\partial A_2}{\partial \xi_0} &= 0 \\ \frac{\partial A_3}{\partial x_0} &= -\frac{5 x_0}{2 r_0^6} \left(\frac{dr_0}{dt} \right) + \frac{\xi_0}{2 r_0^5} , & \frac{\partial A_3}{\partial \xi_0} &= \frac{x_0}{2 r_0^5} \\ \frac{\partial A_4}{\partial x_0} &= \left\{ \frac{1}{2 r_0^8} + \frac{35}{8 r_0^7} \left(\frac{dr_0}{dt} \right)^2 - \frac{5}{8 r_0^7} g^2 \right\} \xi_0 - \frac{5}{4 r_0^6} \left(\frac{dr_0}{dt} \right) x_0 \\ \frac{\partial A_4}{\partial \xi_0} &= -\frac{5 x_0}{4 r_0^6} \left(\frac{dr_0}{dt} \right) + \frac{\xi_0}{4 r_0^5} \\ \frac{\partial B_3}{\partial x_0} &= \frac{x_0}{2 r_0^5} , & \frac{\partial B_3}{\partial \xi_0} &= 0 \\ \frac{\partial B_4}{\partial x_0} &= -\frac{5 x_0}{4 r_0^6} \left(\frac{dr_0}{dt} \right) + \frac{\xi_0}{4 r_0^5} , & \frac{\partial B_4}{\partial \xi_0} &= \frac{x_0}{4 r_0^5} . \end{aligned} \right\} \quad 16)$$

es ist aber offenbar nach 9) (pag. 430):

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial x_0} &= \frac{\partial A_2}{\partial x_0} x^2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_0} x^3 + \frac{\partial A_4}{\partial x_0} x^4 \\ \frac{\partial a}{\partial \xi_0} &= \frac{\partial A_2}{\partial \xi_0} x^2 + \frac{\partial A_3}{\partial \xi_0} x^3 + \frac{\partial A_4}{\partial \xi_0} x^4 \\ \frac{\partial b}{\partial x_0} &= \frac{\partial B_3}{\partial x_0} x^3 + \frac{\partial B_4}{\partial x_0} x^4 \\ \frac{\partial b}{\partial \xi_0} &= \frac{\partial B_3}{\partial \xi_0} x^3 + \frac{\partial B_4}{\partial \xi_0} x^4.\end{aligned}$$

Substituiert man nun in diese Ausdrücke die in 16 (pag. 432) gefundenen Differentialquotienten und setzt abkürzend:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{3}{2} \frac{x^2}{r_0^5} \left\{ 1 - \frac{5}{3} \frac{x}{r_0} \left(\frac{dr_0}{dx} \right) + \frac{x^2}{12 r_0^2} \left[\frac{4}{r_0} + 35 \left(\frac{dr_0}{dx} \right)^2 - 5 g^2 \right] \right\} \\ \beta &= \frac{1}{2} \frac{x^3}{r_0^5} \left\{ 1 - \frac{5}{2} \frac{x}{r_0} \left(\frac{dr_0}{dx} \right) \right\} \\ \gamma &= \frac{1}{4} \frac{x^4}{r_0^5}\end{aligned}$$

welchen Ausdrücken man auch die folgende Gestalt geben kann:

$$\left. \begin{aligned}\alpha &= \alpha_2 x^2 \left\{ 1 + \alpha_3 x + \alpha_4 x^2 \right\} \\ \beta &= \beta_3 x^3 \left\{ 1 + \beta_4 x \right\} \\ \gamma &= \gamma_4 x^4 \\ \alpha_2 &= \frac{3}{2 r_0^5} \\ \alpha_3 &= - \frac{5}{3 r_0} \left(\frac{dr_0}{dx} \right) \\ \alpha_4 &= \frac{1}{12 r_0^2} \left\{ \frac{4}{r_0} + 35 \left(\frac{dr_0}{dx} \right)^2 - 5 g^2 \right\} \\ \beta_3 &= \frac{1}{2 r_0^5} \\ \beta_4 &= - \frac{5}{2 r_0} \left(\frac{dr_0}{dx} \right) \\ \gamma_4 &= \frac{1}{4 r_0^5}\end{aligned} \right\} \quad 17)$$

so findet sich leicht:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial x_0} &= \alpha x_0 + \beta \xi_0, & \frac{\partial b}{\partial x_0} &= \frac{\partial a}{\partial \xi_0} = \beta x_0 + \gamma \xi_0, & \frac{\partial b}{\partial \xi_0} &= \gamma x_0 \\ \frac{\partial a}{\partial y_0} &= \alpha y_0 + \beta \eta_0, & \frac{\partial b}{\partial y_0} &= \frac{\partial a}{\partial \eta_0} = \beta y_0 + \gamma \eta_0, & \frac{\partial b}{\partial \eta_0} &= \gamma y_0 \\ \frac{\partial a}{\partial z_0} &= \alpha z_0 + \beta \zeta_0, & \frac{\partial b}{\partial z_0} &= \frac{\partial a}{\partial \zeta_0} = \beta z_0 + \gamma \zeta_0, & \frac{\partial b}{\partial \zeta_0} &= \gamma z_0.\end{aligned} \right\} \quad 18)$$

Es ist somit die Möglichkeit geboten, die Variationen der rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten für Zeiten, die nicht zu weit von der Ausgangsepoche abstehen, durch die Variationen der Coordinaten und Geschwindigkeiten zur Zeit der Ausgangsepoche darzustellen. Die Beschränkung, dass die Zwischenzeiten nicht zu gross sind, kommt für kleine Planeten, die nur in einer Opposition beobachtet wurden, nicht weiter in Betracht, da in der That für diese die obigen Formeln eine

stets ausreichende Genauigkeit liefern werden, um so mehr, wenn man als Ausgangs-epoche einen Zeitpunkt annimmt, der nahe mit der Mitte der Zeiten der Normalorte zusammenfällt. Uebrigens kann man im Falle grosser Zwischenzeiten die von Kühnert Astr. Nachr. No. 2266 entwickelten geschlossenen Ausdrücke benützen.

Die Variationen der heliocentrischen rechtwinkligen Coordinaten können leicht in Variationen der geocentrischen polaren Coordinaten übertragen werden (vergl. I pag. 31) durch:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta \, \delta \lambda &= - \frac{\sin \lambda}{\mathcal{A}} \, \delta x + \frac{\cos \lambda}{\mathcal{A}} \, \delta y \\ \delta \beta &= - \frac{\cos \lambda \sin \beta}{\mathcal{A}} \, \delta x - \frac{\sin \lambda \sin \beta}{\mathcal{A}} \, \delta y + \frac{\cos \beta}{\mathcal{A}} \, \delta z, \end{aligned} \right\} \quad 19)$$

in welchen Ausdrücken \mathcal{A} die geocentrische Entfernung darstellt, λ und β die geocentrischen polaren Coordinaten vorstellen und an welche blos die Bedingung geknüpft ist, dass sie sich auf dasselbe Coordinatensystem beziehen, auf welches die Variationen der Coordinaten bezogen sind. Da aber das letztere bezüglich der Richtungen der Achsen völlig willkürlich war, so wird es zweckmässig erscheinen für die Lage derselben eine solche Wahl zu treffen, dass sich einerseits die Rechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate möglichst einfach gestalten und andererseits, was noch wesentlich ist, die Unsicherheit in den Elementen so weit als thunlich auf zwei Elemente zurückgedrängt wird; es sollen für diese letzteren Elemente die Grössen x_0 und ξ_0 gewählt werden.

Da sich die scheinbare Bahn eines kleinen Planeten in einer Opposition nie allzuweit von einem grössten Kreise entfernt, so wird man zweckmässig den grössten Kreis als Fundamentalebene wählen, der sich den beobachteten Orten möglichst nahe anschliesst, und als Anfangspunkt der Zählung in diesem grössten Kreise jenen Punkt annehmen, der die Quadratsumme der Entfernungen der Orte von demselben zu einem Minimum macht. Da aber die Lage des Coordinatensystemes nur näherungsweise diesen Bedingungen zu entsprechen braucht, so wird es genügen, ein nahe richtiges Verfahren einzuschlagen. Die hierfür anzuwendenden Formeln werden sich sehr leicht ergeben, wenn man die Sinus aller auftretenden kleinen Bogen mit den Bogen, die Cosinus mit der Einheit vertauscht. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ und $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots \delta_n$ die Rectascensionen und Declinationen der n zu Grunde gelegten Beobachtungen, so bestimmt man zunächst:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_m &= \frac{1}{n} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots \alpha_n) \\ \delta_m &= \frac{1}{n} (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots \delta_n) \end{aligned} \right\} \quad 20)$$

und rechnet:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (\alpha_1 - \alpha_m) \cos \delta_m & y_1 &= \delta_1 - \delta_m \\ x_2 &= (\alpha_2 - \alpha_m) \cos \delta_m & y_2 &= \delta_2 - \delta_m \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n &= (\alpha_n - \alpha_m) \cos \delta_m & y_n &= \delta_n - \delta_m \end{aligned} \right\} \quad 21)$$

so wird α_m und δ_m nahe jenem Punkte der Fundamentalebene entsprechen, der als Ausgangspunkt der Zählung den obigen Bedingungen zufolge gewählt werden

kann. Bezeichnet man mit ε den Winkel, den der gesuchte grösste Kreis mit dem durch den Punkt (α_m, δ_m) gehenden Parallelkreise einschliesst, so wird der Abstand des Normalortes von diesem grössten Kreise (y') innerhalb der gestatteten Annäherungen dargestellt werden durch:

$$y' = y \cos \varepsilon - x \sin \varepsilon,$$

eine solche Gleichung wird jeder Normalort geben; quadriert man und addirt, so erhält man:

$$\Sigma (y'_a)^2 = \Sigma (y_a \cos \varepsilon)^2 + \Sigma (x_a \sin \varepsilon)^2 - \Sigma (x_a y_a \sin 2\varepsilon), \quad 22)$$

wobei sich das Summenzeichen auf den Index a von x und y bezieht und den Gleichungen 21) entsprechend der Reihe nach für a die Indices 1, 2 ... n einzusetzen sind.

Statt der Relation 22) kann noch geschrieben werden:

$$\Sigma (y'_a)^2 = \frac{1}{2} \Sigma (y_a)^2 + \Sigma (x_a)^2 + \frac{1}{2} \cos 2\varepsilon \{ \Sigma (y_a)^2 - \Sigma (x_a)^2 \} - \sin 2\varepsilon \Sigma (x_a y_a).$$

Soll nun $\Sigma (y'_a)^2$ ein Minimum werden, so erhält man, da rechter Hand vom Gleichheitszeichen nur ε variabel ist, sofort zur Bestimmung von 2ε die Gleichung;

$$0 = \{ \Sigma (x_a)^2 - \Sigma (y_a)^2 \} \sin 2\varepsilon - 2 \Sigma (y_a x_a) \cos 2\varepsilon,$$

daher

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{2 \Sigma (x_a y_a)}{\Sigma (x_a)^2 - \Sigma (y_a)^2}. \quad 23)$$

Diese Gleichung gibt für 2ε zwei um 180° verschiedene Winkel, von denen die eine Bestimmung dem hier geforderten Minimum, die andere dem Maximum entspricht; man wird meist leicht auf den ersten Blick entscheiden können, welchen Quadranten man zu wählen hat, jedenfalls wird man also denselben so zu bestimmen haben, dass der Ausdruck:

$$\{ \Sigma (x_a)^2 - \Sigma (y_a)^2 \} \cos 2\varepsilon + 2 \Sigma (x_a y_a) \sin 2\varepsilon$$

positiv wird. Diese Bedingung kann man aber einfach dadurch ausdrücken, dass man sagt, dass $\cos 2\varepsilon$ das Zeichen des Nenners von 23), $\sin 2\varepsilon$ das Zeichen des Zählers erhält; denn dividirt man etwa den letzteren Ausdruck durch den Coefficienten von $\cos 2\varepsilon$, und ersetzt in dem Ausdrücke den so entstandenen Coefficienten durch die Relation 23), so erhält man den Schluss, dass $\cos 2\varepsilon + \operatorname{tg} 2\varepsilon \sin 2\varepsilon = \sec 2\varepsilon$ das Zeichen des Nenners von 23) haben muss.

Ist einmal ε bestimmt, so folgt leicht aus dem in Betracht kommenden rechtwinkligen sphärischen Dreiecke für die Rectascension des aufsteigenden Knotens II und die Neigung des Aequators J , die stets kleiner als 90° angenommen werden darf:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} J \sin (\alpha_m - II) &= \operatorname{tg} \delta_m \\ \operatorname{tg} J \cos (\alpha_m - II) &= \operatorname{tg} \varepsilon \sec \delta_m \end{aligned} \right\} \quad 24)$$

Für den Abstand (A) des Ausgangspunktes der Zählung in diesem grössten Kreise vom aufsteigenden Knoten wird man aus demselben sphärischen Dreiecke haben:

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} (\alpha_m - II) \sec J. \quad 25)$$

Es wird zunächst das Bedürfniss hervortreten, die Beobachtungen (α, δ) und die rechtwinkligen äquatorealen Coordinaten der Sonne X, Y und Z auf dieses neue Coordinatensystem zu beziehen; man wird hierfür leicht aus den Gleichungen für die Transformation der Coordinaten finden, wenn man mit λ und β die polaren Coordinaten des Normalortes, mit $(X), (Y)$ und (Z) die auf dieses Coordinatensystem bezogenen rechtwinkligen Coordinaten der Sonne bezeichnet:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta \cos (\lambda + A) &= \cos \delta \cos (\alpha - H) \\ \cos \beta \sin (\lambda + A) &= \cos \delta \sin (\alpha - H) \cos J + \sin \delta \sin J \\ \sin \beta &= -\cos \delta \sin (\alpha - H) \sin J + \sin \delta \cos J \end{aligned} \right\} \quad 26)$$

$$\left. \begin{aligned} n \sin N &= \sin A \cos J, & m \sin M &= \sin A \\ n \cos N &= \cos A, & m \cos M &= \cos A \cos J \end{aligned} \right\} \quad 27)$$

$$\left. \begin{aligned} (X) &= n \cos (N + H) \cdot X + n \sin (N + H) \cdot Y + \sin A \sin J \cdot Z \\ (Y) &= -m \sin (M + H) \cdot X + m \cos (M + H) \cdot Y + \cos A \cos J \cdot Z \\ (Z) &= \sin H \sin J \cdot X - \cos H \sin J \cdot Y + \cos J \cdot Z \end{aligned} \right\} \quad 28)$$

Schliesslich wird man die der Rechnung zu Grunde gelegten Elemente, die ebenfalls auf den Aequator bezogen angenommen werden, auf dieses Coordinatensystem zu übertragen haben. Sei Q', i', ω' beziehungsweise der Knoten, die Neigung und der Abstand des Perihels vom Knoten bezogen auf den Aequator; $(Q), (i)$ und (ω) die analogen Grössen in Bezug auf das neue Coordinatensystem, so wird man haben:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} (i) \sin \frac{1}{2} (\sigma + \sigma') &= \sin \frac{1}{2} (Q' - H) \sin \frac{1}{2} (i' + J) \\ \sin \frac{1}{2} (i) \cos \frac{1}{2} (\sigma + \sigma') &= \cos \frac{1}{2} (Q' - H) \sin \frac{1}{2} (i' - J) \\ \cos \frac{1}{2} (i) \sin \frac{1}{2} (\sigma - \sigma') &= \sin \frac{1}{2} (Q' - H) \cos \frac{1}{2} (i' + J) \\ \cos \frac{1}{2} (i) \cos \frac{1}{2} (\sigma - \sigma') &= \cos \frac{1}{2} (Q' - H) \cos \frac{1}{2} (i' - J) \\ (\omega) &= \omega' - \sigma' \\ (Q) &= \sigma - A \end{aligned} \right\} \quad 29)$$

Zur Berechnung der heliocentrischen Coordinaten hat man dann:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin a \sin (A' + v) \\ y &= r \sin b \sin (B' + v) \\ z &= r \sin c \sin (C' + v) \end{aligned} \right\} \quad 30)$$

wobei gesetzt ist:

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos (Q) & \sin b \sin B &= \sin (Q) \\ \sin a \cos A &= -\cos (i) \sin (Q) & \sin b \cos B &= \cos (Q) \cos (i) \\ A' &= A + (\omega) & C' &= (\omega) \\ B' &= B + (\omega) & \sin c &= \sin (i) \end{aligned} \right\} \quad 31)$$

und zur Berechnung der geocentrischen Coordinaten wird sein:

$$\left. \begin{aligned} A \cos \lambda \cos \beta &= x + (X) \\ A \sin \lambda \cos \beta &= y + (Y) \\ A \sin \beta &= z + (Z) \end{aligned} \right\} \quad 32)$$

Man wird durch Anwendung vorstehender Formeln zur Kenntniss der Fehler gelangen, die das der Untersuchung zu Grunde gelegte Elementensystem in den Beobachtungen übrig lässt, wobei der Strenge halber für die Fehler in λ , $\cos \beta \delta \lambda$ zu setzen sein wird, wenngleich sich $\cos \beta$ der getroffenen Wahl des Coordinatensystems wegen nicht wesentlich von der Einheit unterscheiden kann.

Um nun alle Bedingungsgleichungen aufstellen zu können, wird es nöthig sein, die Formeln hinzuschreiben, welche die Bestimmung der Grössen x_0 , y_0 , z_0 , ξ_0 , η_0 und ζ_0 für die gewählte Ausgangsepoche gestatten. Für die Berechnung der Coordinaten sind die nöthigen Formeln bereits oben angeführt; für die Berechnung der Geschwindigkeiten wird man haben (vergl. pag. 95):

$$\left. \begin{aligned} \gamma \sin I &= \sin v_0 \\ \gamma \cos I &= \cos v_0 + \sin q_0 \\ \xi_0 &= \frac{\gamma}{V p_0} \sin a \cos (A' + I) \\ \eta_0 &= \frac{\gamma}{V p_0} \sin b \cos (B' + I) \\ \zeta_0 &= \frac{\gamma}{V p_0} \sin c \cos (C' + I) \end{aligned} \right\} \quad 33$$

Hiermit sind alle Hilfsmittel zusammengestellt, um die Bedingungsgleichungen zwischen den gewählten Elementen (Coordinaten und Geschwindigkeiten) und den geocentrischen Orten herzustellen; die Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate wird also die wahrscheinlichsten Werthe für diese Elemente finden lassen; es seien dieselben x_1 , y_1 , z_1 , ξ_1 , η_1 und ζ_1 . Um aus diesen Werthen die Elemente in der gewöhnlichen Form herzustellen, eine Form, die für die Bestimmung der Coordinaten für eine beliebige Zeit nöthig wird, muss man den Uebergang auf die gewöhnlichen Elemente nach den folgenden Formeln ausführen (vergl. pag. 103), die den früher gegebenen Ausdrücken für den Uebergang auf osculirende Elemente bei Encke's Methode der Störungsrechnung völlig entsprechen:

$$\left. \begin{aligned} V\bar{p} \cos (i) &= x_1 \eta_1 - y_1 \xi_1 \\ V\bar{p} \sin (i) \sin (\Omega) &= y_1 \zeta_1 - z_1 \eta_1 \\ V\bar{p} \sin (i) \cos (\Omega) &= x_1 \zeta_1 - z_1 \xi_1 \\ r \cos u &= x_1 \cos (\Omega) + y_1 \sin (\Omega) \\ r \sin u &= -x_1 \sin (\Omega) \cos (i) + y_1 \cos (\Omega) \cos (i) + z_1 \sin (i) \\ \sin \varphi \sin v &= \frac{V\bar{p}}{r} \{ x_1 \xi_1 + y_1 \eta_1 + z_1 \zeta_1 \} \\ \sin \varphi \cos v &= \frac{p}{r} - 1 \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} E &= \cotg (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \\ M &= E - \frac{\sin \varphi}{\sin 1''} \sin E \\ (\omega) &= u - v \quad , \quad a = p \sec \varphi^2 \\ (\pi) &= (\omega) + (\Omega) \quad , \quad \mu = k'' a^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \right\} \quad 34$$

Um schliesslich die gefundenen Elemente auf die Fundamentalebene des Aequators zu übertragen, dienen die folgenden Gleichungen :

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= A + (\Omega) \\ \cos \frac{1}{2} i' \sin \frac{1}{2} (\Omega' - H + \sigma') &= \sin \frac{1}{2} \sigma \cos \frac{1}{2} \{ (i) - J \} \\ \cos \frac{1}{2} i'' \cos \frac{1}{2} (\Omega' - H + \sigma') &= \cos \frac{1}{2} \sigma \cos \frac{1}{2} \{ (i) + J \} \\ \sin \frac{1}{2} i' \sin \frac{1}{2} (\Omega' - H - \sigma') &= \sin \frac{1}{2} \sigma \sin \frac{1}{2} \{ (i) - J \} \\ \sin \frac{1}{2} i'' \cos \frac{1}{2} (\Omega' - H - \sigma') &= \cos \frac{1}{2} \sigma \sin \frac{1}{2} \{ (i) + J \} \\ \omega' &= (\omega) + \sigma' . \end{aligned} \right\} 35,$$

Ich nehme Umgang von einer für die Anwendung geordneten Zusammenstellung der Formeln, indem das folgende Beispiel die sichere Leitung bei der Rechnung gewähren wird; das Beispiel entlehne ich dem Planeten ⁽¹⁵³⁾ Hilda. Es wurden nach den Rechnungen des Herrn Kühnert, Assistenten bei der k. k. Gradmessung, die folgenden Normalorte und zugehörigen Sonnencoordinaten, die sich auf den mittleren Aequator 1875.0 beziehen, angenommen:

	mittl. Berl. Zeit	α	δ	$\log X$	$\log Y$	$\log Z$
1.	1875 Nov. 4.500000	45° 2' 16".06	+17° 26' 31".59	9 _n 8661938	9 _n 7853712	9 _n 4227537
2.	» 22.517315	42 11 21.04	+16 15 23.54	9 _n 6894747	9 _n 8957301	9 _n 5331075
3.	Dec. 19.441574	39 15 53.49	+14 51 49.38	8 _n 6085560	9 _n 9550137	9 _n 5923907
4.	» 30.335914	38 49 59.06	+14 33 3.84	9.1743212	9 _n 9501404	9 _n 5875199

Die nächste Aufgabe besteht nun darin, die Lage des zu wählenden Coordinatensystemes zu bestimmen, hierzu genügt aber eine genäherte Rechnung; nach 20) (pag. 434) erhielt man für α_m und δ_m :

$$\alpha_m = 41^\circ 19' 9 \quad \delta_m = + 15^\circ 46' 7 .$$

nach 21) (pag. 434) wurde erhalten, wenn man als Einheit die Bogenminute einführt und sich mit der Mitnahme der Zehntheile derselben begnügt:

$$\begin{aligned} \log x_1 &= 2.3305 & \log y_1 &= 1.9991 \\ \text{» } x_2 &= 1.6951 & \text{» } y_2 &= 1.4579 \\ \text{» } x_3 &= 2.0767 & \text{» } y_3 &= 1.7396 \\ \text{» } x_4 &= 2.1591 & \text{» } y_4 &= 1.8669 \end{aligned}$$

darnach ist:

$$\begin{aligned} \Sigma (x_a)^2 &= + 8.331 \\ \Sigma (y_a)^2 &= + 1.921 \\ \Sigma (x_a y_a) &= + 3.995 \end{aligned}$$

Die Bestimmung des Winkels ε nach 23) (pag. 435) stellt sich unter Beachtung der Regel, dass der Sinus von 2ε das Zeichen von $\Sigma (x_a y_a)$ erhält, wie folgt:

$$\begin{aligned} \log 2 \Sigma (x_a y_a) &= 0.9025 \\ \log \{ \Sigma (x_a)^2 - \Sigma (y_a)^2 \} &= 0.8069 \\ 2\varepsilon &= 51^\circ 15' 4 \\ \varepsilon &= 25^\circ 37.7 \end{aligned}$$

Für J , H und A wird nach 24) und 25) (pag. 435) zu rechnen sein:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon &= 9.6810 & H &= 11^{\circ}47'2 \\ \operatorname{tg} J \sin (\alpha_m - H) &= 9.4511 & J &= 29^{\circ}49'0 \\ &9.9395 & \cos J &= 9.9384 \\ \operatorname{tg} J \cos (\alpha_m - H) &= 9.6977 & \operatorname{tg} (\alpha_m - H) &= 9.7534 \\ (\alpha_m - H) &= 29^{\circ}32'7 & A &= 33^{\circ}8'9 \end{aligned}$$

Hiermit erscheint die Lage des zu wählenden Coordinatensystems bestimmt und von nun ab ist die Rechnung absolut streng zu führen, wobei also die für H , J und A gefundenen Werthe als völlig genau gegeben zu betrachten sind. Man wird zunächst mit Hilfe der Formeln 26) (pag. 436) die Normalorte auf dieses Coordinatensystem übertragen und, indem man annimmt:

$$\begin{aligned} \cos J & 9.9383300 & \cos A & 9.9228592 & \sin H & 9.3102009 \\ \sin J & 9.6965541 & \sin A & 9.7378352 & \cos H & 9.9907449 \end{aligned}$$

erhalten:

	1	2	3	4
$\alpha - H$	33°15' 4"06	30°24' 9"04	27°28'41"49	27° 2'47"06
$\cos (\alpha - H)$	9.9223493	9.9357548	9.9480150	9.9497015
$\cos \delta$	9.9795577	9.9822793	9.9852192	9.9858413
$\sin (\alpha - H)$	9.7390259	9.7042120	9.6640879	9.6577364
$\cos \delta \sin (\alpha - H)$	9.7185836	9.6864913	9.6493071	9.6435777
$\sin \delta$	9.4767477	9.4470628	9.4091226	9.4000936
$\cos \delta \sin (\alpha - H) \cos J$	9.6569136	9.6248213	9.5876371	9.5819077
$\sin \delta \sin J$	9.1733018	9.1436169	9.1056767	9.0966477
Add.	0.1233252	0.1239215	0.1237340	0.1229183
$-\cos \delta \sin (\alpha - H) \sin J$	9.4151377	9.3830454	9.3458612	9.3401318
$\sin \delta \cos J$	9.4150777	9.3853928	9.3474526	9.3384236
Add.	3.8595...	2.26602..	2.43522..	2.40438..
$\cos \beta \sin (\lambda + A)$	9.7802388	9.7487428	9.7113711	9.7048260
	9.9019069	9.9180345	9.9332343	9.9355429
$\cos \beta \cos (\lambda + A)$	9.9019070	9.9180341	9.9332342	9.9355428
$\sin \beta$	5.55556...	7.11703..	6.91064..	6.93404..
$\lambda + A$	37° 4'38"01	34° 6'19"27	30°57'46"52	30°27' 0"37
λ	3 55 44.01	0 57 25.27	-2 11 7.48	-2 41 53.63
β	— 7.41	+ 4 30.05	+ 2 47.91	— 2 57.20

nach 27) (pag. 436) wird sein:

$$\begin{aligned} n \sin N & 9.6761652 & m \sin M & 9.7378352 \\ & 9.9395356 & & 9.9025181 \\ n \cos N & 9.9228592 & m \cos M & 9.8611892 \\ N & 29^{\circ}32'15"19 & M & 36^{\circ}58'13"08 \\ \log n & 9.9833236 & \log m & 9.9586711 \end{aligned}$$

Die Berechnung der constanten Coëfficienten in 28) (pag. 436) wird:

$$\begin{array}{ll} N + II & 41^{\circ}19'27''19 \\ \sin (N + II) & 9.8197539 \\ \cos (N + II) & 9.8756313 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} M + II & 48^{\circ}45'25''08 \\ \sin (M + II) & 9.8761716 \\ \cos (M + II) & 9.8190530 \end{array}$$

damit findet sich weiter:

$$\begin{array}{l} n \cos (N + II) = (x' x) = 9.8589549 \\ n \sin (N + II) = (x' y) = 9.8030775 \\ \sin A \sin J = (x' z) = 9.4343893 \\ - \sin (M + II) = (y' x) = 9.8348427 \\ m \cos (M + II) = (y' y) = 9.7777241 \\ \cos A \sin J = (y' z) = 9.6194133 \\ \sin II \sin J = (z' x) = 9.0067550 \\ - \cos II \sin J = (z' y) = 9.6872990 \\ \cos J = (z' z) = 9.9383300 \end{array}$$

man erhält also für die Transformation der Coordinaten:

	1	2	3	4
$(x' y) X$	— 0.5310662	— 0.3535327	— 0.0293434	+ 0.1079633
$(x' y) Y$	— 0.3876579	— 0.4998131	— 0.5729163	— 0.5665235
$(x' z) Z$	— 0.0719686	— 0.0927891	— 0.1063604	— 0.1051742
(X)	— 0.9906927	— 0.9461349	— 0.7086201	— 0.5637344
$(y' x) X$	+ 0.5023848	+ 0.3344394	+ 0.0277587	— 0.1021325
$(y' y) Y$	— 0.3656750	— 0.4714701	— 0.5404280	— 0.5343977
$(z' z) Z$	— 0.1101963	— 0.1420760	— 0.1628561	— 0.1610398
(Y)	+ 0.0265135	— 0.2791067	— 0.6755254	— 0.7975690
$(z' x) X$	— 0.0746361	— 0.0496855	— 0.0041239	+ 0.0151732
$(z' y) Y$	+ 0.2969410	+ 0.3828504	+ 0.4388466	+ 0.4339497
$(z' z) Z$	— 0.2296591	— 0.2960994	— 0.3394070	— 0.3356216
(Z)	— 0.0073542	+ 0.0370655	+ 0.0953157	+ 0.1135013

Stellt man also die bis jetzt gewonnenen Resultate zusammen, so erhält man als Grundlage für die weiteren Rechnungen:

mittl. Berl. Zeit	λ	β	(X)	(Y)	(Z)
1. Nov. 4.500000	+3°55'44"01	— 0' 7"41	— 0.9906927	+ 0.0265135	— 0.0073542
2. " 22.517315	+0 57 25.27	+4 30.05	— 0.9461349	— 0.2791067	+ 0.0370655
3. Dec. 19.441574	— 2 11 7.48	+2 47.91	— 0.7086201	— 0.6755254	+ 0.0953157
4. " 30.335911	— 2 41 53.63	— 2 57.20	— 0.5637344	— 0.7975690	+ 0.1135013

Als Ausgangselemente wurden angenommen;

(153) Hilda

Epoche 1875 Dec. 2.0 mittl. Berl. Zeit.

$$\begin{array}{lcl} M = 107^{\circ}45'18''.66 \\ r' = 283 \ 48 \ 18.52 \\ \varpi' = 341 \ 50 \ 37.72 \\ i' = 19 \ 6 \ 23.94 \\ \varphi = 9 \ 23 \ 15.50 \\ \mu = 451''9050 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} M \\ r' \\ \varpi' \\ i' \\ \varphi \\ \mu \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{mittl. Aequator} \\ 1875.0 \end{array}$$

Die Uebertragung der die Bahnlage bestimmenden Elemente auf das obige Coordinatensystem ist nach 29) (pag. 436) auszuführen; die Rechnung hierfür gestaltet sich wie folgt:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} i' & 9^{\circ}33'11''.97 \\ \frac{1}{2} J & 14 \ 54 \ 30.00 \\ \frac{1}{2} (i' + J) & 24 \ 27 \ 41.97 \\ \frac{1}{2} (i' - J) & -5 \ 21 \ 18.03 \\ \varpi' - II & 330 \ 3 \ 25.72 \\ \frac{1}{2} (\varpi' - II) & 165 \ 1 \ 42.86 \\ \sin \frac{1}{2} (i' \sin \frac{1}{2} (\sigma + \sigma')) & 9.0292759 \\ & 9.8834598 \\ \sin \frac{1}{2} (i' \cos \frac{1}{2} (\sigma + \sigma')) & 8.9550067 \\ \frac{1}{2} (\sigma + \sigma') & 49^{\circ}52'31''.45 \\ \sin \frac{1}{2} (i) & 9.1458161 \\ \frac{1}{2} (i) & 8^{\circ} \ 2'31''.31 \\ (i) & 16 \ 5' \ 2''.62 \\ \omega' & 301 \ 57 \ 40.80 \\ - \sigma' & 116 \ 23 \ 11.40 \\ \sin \frac{1}{2} (i' + J) & 9.6170887 \\ \sin \frac{1}{2} (\varpi' - II) & 9.4121872 \\ \cos \frac{1}{2} (i' + J) & 9.9591552 \\ \sin \frac{1}{2} (i' - J) & 8.9700050 \\ \cos \frac{1}{2} (\varpi' - II) & 9.9850017 \\ \cos \frac{1}{2} (i' - J) & 9.9981004 \\ \cos \frac{1}{2} (i' \sin \frac{1}{2} (\sigma - \sigma')) & 9.3713424 \\ & 9.9873943 \\ \cos \frac{1}{2} (i' \cos \frac{1}{2} (\sigma - \sigma')) & 9.9831021 \\ \frac{1}{2} (\sigma - \sigma') & 166^{\circ}15'42''.85 \\ \cos \frac{1}{2} (i) & 9.9957078 \\ \sigma & 216^{\circ} \ 8'14.30 \\ (\varpi) & 182 \ 59 \ 20.30 \\ (\omega) & 58 \ 20 \ 52.20 \\ (\pi) & 241^{\circ}20'12''.50 \end{array}$$

Um nun die Darstellung der obigen Orte nach diesen Elementen zu finden, rechnet man nach 31) (pag. 436) die Hilfsgrößen:

$$\begin{array}{ll} \sin (\varpi) & 8.7172022 \\ \cos (i) & 9.9826584 \\ \cos (\varpi) & 9.9994088 \\ & 9.9994541 \\ \sin a \cos A & 8.6998606 \\ A & 272^{\circ}52'19''.82 \\ \sin a & 9.9999547 \\ A' & 331^{\circ}13'12''.02 \\ \sin c & 9.4425540 \\ C' & 58^{\circ}20'52''.30 \\ \sin b \sin B & 8.7172022 \\ & 9.9993597 \\ \sin b \cos B & 9.9820672 \\ B & 183^{\circ} \ 6'37''.81 \\ \sin b & 9.9827075 \\ B' & 241^{\circ}27'30''.01 \end{array}$$

Die Rechnung gestaltet sich nach 30) und 32) (pag. 436) für die vier Normalorte wie folgt:

	1	2	3	4
M	104°18'11"27	106°33'53"39	109°56'40"59	111°18'43"80
E	112 54 41.48	115 1 57.54	118 10 56.49	119 27 0.85
$\sin E$	9.9643102	9.9571602	9.9451972	9.9399100
$\cos E$	9 _n 5902917	9 _n 6264786	9 _n 6741990	9 _n 6916715
Add.	0.1519766	0.1416026	0.1288431	0.1244243
$\cos E - e$	9 _n 7422713	9 _n 7680812	9 _n 8030421	9 _n 8160958
$r \sin v$	0.5550943	0.5479443	0.5359813	0.5306941
	9.9317164	9.9223192	9.9071117	9.9005512
$r \cos v$	0 _n 3389110	0 _n 3647209	0 _n 3996818	0 _n 4127355
v	121°17'40"25	123°15'25"84	126° 9'11"43	127°18'46"43
$\log r$	0.6233779	0.6256251	0.6288696	0.6301429
$A' + e$	92°30'52"27	94°28'37"86	97°22'23"45	98°31'58"45
$B' + e$	2 45 10.26	4 42 55.85	7 36 41.44	8 46 16.44
$C' + e$	179 38 32.45	181 36 18.04	184 30 3.63	185 39 38.63
$r \sin a$	0.6233326	0.6255798	0.6288243	0.6300976
$\sin (A' + e)$	9.9995816	9.9986727	9.9963941	9.9951659
x	+4.1967606	+4.2097135	+4.2190864	+4.2195243
X	-0.9906927	-0.9461349	-0.7086201	-0.5637344
$r \sin b$	0.6060854	0.6083326	0.6115771	0.6128504
$\sin (B' + e)$	8.6814928	8.9149160	9.1220701	9.1832404
y	+0.1939002	+0.3336173	+0.5415607	+0.6253034
Y	+0.0265135	-0.2791067	-0.6755254	-0.7975690
$r \sin c$	0.0659319	0.0681791	0.0714236	0.0726969
$\sin (C' + e)$	7.7953361	8 _n 4472986	8 _n 8947404	8 _n 9940431
z	+0.0072655	-0.0327701	-0.0925047	-0.1166111
Z	-0.0073542	+0.0370655	+0.0953157	+0.1135013
$A \sin \lambda \cos \beta$	9.3432386	8.7364809	9 _n 1269904	9 _n 2361986
	9.9989761	9.9999394	9.9996840	9.9995184
$A \cos \lambda \cos \beta$	0.5059727	0.5136941	0.5453648	0.5629812
$A \sin \beta$	5 _n 94792..	7.63300..	7.44886..	7 _n 49273..
$A \cos \beta$	0.5069966	0.5137547	0.5456808	0.5634628
λ	3°55'58"20	0°57'24"86	-2°11' 7"56	-2°41'52"28
β	- 0 5.69	+ 4 31.44	+ 2 45.05	- 2 55.27
$\log A$	0.50700	0.51375	0.54568	0.56346
$\cos \beta \delta \lambda$	- 14"19	+ 0"41	+ 0"08	- 1"35
$\delta \beta$	- 1.72	- 1.39	+ 2.86	- 1.93

Um nun die Differentialquotienten zur Ausgleichung der Elemente entwickeln zu können, wird man sich vorerst über die Ausgangsepoche zu entscheiden haben:

da das Datum 1876 Dec. 2.0 der Zeit nach nahe in die Mitte fällt, so wähle ich diesen Zeitpunkt hierfür und es wird sich daher als nächste Aufgabe stellen, für diese Epoche die Coordinaten nach 30) und 32) (pag. 436) und die Geschwindigkeiten nach 33) (pag. 437) zu berechnen; man erhält darnach:

M_0	107°45'18"66	$\cos v_0$	9 _n 7507149
E_0	116 8 40.80	Add.	0.148 4870
$\sin E_0$	9.953 1237	$\gamma \sin I$	9.917 1243
$\cos E_0$	9 _n 644 0830		9.954 2484
Add.	0.136 7757	$\gamma \cos I$	9 _n 602 2279
$\cos E_0 - e$	9 _n 780 8587	I	115°50'25"24
$r_0 \sin v_0$	0.543 9078	$\log \gamma$	9.962 8759
	9.917 1243	$V \overline{p_0}$	0.292 4642
$r_0 \cos v_0$	0.377 4984	$\gamma' = \gamma : V \overline{p_0}$	9.670 4117
v_0	124°16'55"52	$A' + I$	87° 3'37"26
$\log r_0$	0.626 7835	$B' + I$	357 17 55.25
$A' + v_0$	95°30' 7"54	$C' + I$	174 11 17.44
$B' + v_0$	5 44 25.53	$\cos (A' + I)$	8.709 9824
$C' + v_0$	182 37 47.72	$\gamma' \sin a$	9.670 3664
$\sin (A' + v_0)$	9.997 9944	$\cos (B' + I)$	9.999 5171
$r \sin a$	0.626 7382	$\gamma' \sin b$	9.653 1192
$\sin (B' + v_0)$	9.000 0946	$\cos (C' + I)$	9 _n 997 7619
$r \sin b$	0.609 4910	$\gamma' \sin c$	9.112 9657
$\sin (C' + v_0)$	8 _n 661 6678		
$r \sin c$	0.069 3375		
x_0	+4.214 3692	ξ_0	+0.024 0076
y_0	+0.406 9918	η_0	+0.449 4033
z_0	-0.053 8276	ζ_0	-0.129 0410

Jetzt kann an die Berechnung der Differentialquotienten geschritten werden, für welche eine fünfstellige Rechnung mehr als ausreichend ist. Zunächst findet sich nach 6) (pag. 430) und 13) (pag. 432):

$\sin v_0 \sin \varphi$	9.12961	$2 : r_0$	9.67425
$V \overline{p_0}$	0.29246	$1 : a$	9.40336
$\log (dr_0 : dr)$	8.83715	Subtr.	9.93747
$\log (dr_0 : dr)^2$	7.67430	$\log g^2$	9.34083 ;

ferner erhält man nach 8) (pag. 430) mit Rücksicht auf 7) (pag. 430) oder was bequemer ist, durch Anwendung der in der Anmerkung angeführten Form, wobei für die Berechnung von A_1 die Zahlen in Einheiten der zehnten Decimale angesetzt sind:

$1 : r_0$	9.37322	$\log g^2 : r_0^5$	6.20691
$1 : r_0^2$	8.74643	$\log \left(\frac{dr_0}{dr} \right)^2 : r_0^5$	4.54038
$1 : r_0^3$	8.11965	(1)	+201290

$1 : r_0^4$	7.49287	(2)	—21690
$1 : r_0^5$	6.86608	(3)	—144583
$1 : r_0^6$	6.23930	A_4	+35017
$\log A_2$	7.81862	$\log A_4$	4.54428
$\log A_3$	6.02899		
$\log B_3$	7.34150		
$\log B_4$	5.72796		

nach 17) pag 433) fand sich:

$\log \alpha_2$	7.04217	$\log \beta_3$	6.56505
$\log \alpha_3$	8.43222	$\log \beta_4$	8.60831
$\frac{4}{r_0}$	9.97528	$\log \gamma_4$	6.26202
$35 \left(\frac{dr_0}{dt} \right)^2$	9.21837		
Add.	0.07004		
	0.04532		
$5 g^2$	0.03980		
Subtr.	8.10700		
$\log \alpha_4$	8.13680		

Mit Hilfe dieser Zahlen stellt sich nun die Rechnung von a und b nach 9) pag. 430) und von α , β und γ nach 17) pag. 433) wie folgt, wenn man beachtet, dass $\tau = k t$ und $\log k = 8.23558$ anzunehmen ist.

	1	2	3	4
t	—27.50000	—9.48269	+17.44157	+28.33591
$\log t$	1.43933	0.97693	1.24159	1.45234
$\log \tau$	9.67491	9.21251	9.47717	9.68792
$\log \tau^2$	9.34982	8.42502	8.95434	9.37584
$\log \tau^3$	9.02473	7.63753	8.43151	9.06376
$\log \tau^4$	8.69964	6.85004	7.90868	8.75168
<hr/>				
$A_2 \tau^2$	— 0.00147	—0.00018	—0.00059	—0.00156
$A_3 \tau^3$	— 1	0	0	+ 1
$A_4 \tau^4$	0	0	0	0
a	+ 0.99852	+0.99982	+0.99941	+0.99845
<hr/>				
$B_3 \tau^2$	— 0.00049	—0.00006	—0.00020	—0.00052
$B_4 \tau^3$	— 1	0	0	+ 1
$\log \{ \dots \}$	9.99978	9.99998	9.99991	9.99978
$\log b$	9.67469	9.21249	9.47708	9.68770

	1	2	3	4
$\alpha_3 \tau$	+0.01280	+0.00441	-0.00812	-0.01319
$\alpha_4 \tau^2$	+1	0	+1	+1
$\log \{ \dots \}$	0.00553	0.00191	9.99646	9.99424
$\alpha_2 \tau^2$	6.39199	5.46719	5.99651	6.41801
$\log \alpha$	6.39752	5.46910	5.99297	6.41225
$\log (1 + \beta_4 \tau)$	0.00826	0.00286	9.99468	9.99132
$\beta_3 \tau^3$	5 _n 58978	4 _n 20258	4.99656	5.62881
$\log \beta$	5 _n 59804	4 _n 20544	4.99124	5.62013
$\log \gamma$	4.96366	3.11406	4.17270	5.01570 .

Nun werden die Differentialquotienten von a und b nach den gewählten Elementen nach 18) (pag. 433) zu entwickeln sein; schreibt man sich für die folgende Rechnung die Logarithmen der Coordinaten und Geschwindigkeiten für die 4 Orte auf den unteren Rand eines Zettels, so erhält man leicht:

	1	2	3	4
αx_0	7.02225	6.09383	6.61770	7.03698
$\beta \xi_0$	3 _n 97839	2 _n 58579	3.37159	4.00048
Add.	9.99961	9.99987	0.00025	0.00041
$\delta a : \delta x_0$	7.02186	6.09370	6.61795	7.03739
αy_0	6.00711	5.07869	5.60256	6.02184
$\beta \eta_0$	5 _n 25068	3 _n 85808	4.64388	5.27277
Add.	9.91634	9.97305	0.04532	0.07123
$\delta a : \delta y_0$	5.92345	5.05174	5.64788	6.09307
αz_0	5 _n 12853	4 _n 20011	4 _n 72398	5 _n 14326
$\beta \zeta_0$	4.70877	3.31617	4 _n 10197	4 _n 73086
Add.	9.79211	9.93920	0.09299	0.14205
$\delta a : \delta z_0$	4 _n 92064	4 _n 13931	4 _n 81697	5 _n 28531
βx_0	6 _n 22277	4 _n 83017	5.61597	6.24486
$\gamma \xi_0$	3.34401	1.49441	2.55305	3.39605
Add.	9.99943	9.99980	0.00038	0.00062
$\delta b : \delta x_0$	6 _n 22220	4 _n 82997	5.61635	6.24548 $\delta a : \delta \xi_0$
βy_0	5 _n 20763	3 _n 81503	4.60083	5.22972
$\gamma \eta_0$	4.61630	2.76670	3.82534	4.66834
Add.	9.87142	9.95930	0.06733	0.10536
$\delta b : \delta y_0$	5 _n 07905	3 _n 77433	4.66816	5.33508 $\delta a : \delta \eta_0$
βz_0	4.32905	2.93645	3 _n 72225	4 _n 35114
$\gamma \zeta_0$	4 _n 07439	2 _n 22479	3 _n 28343	4 _n 12643
Add.	9.90171	9.90621	0.13484	0.20305
$\delta b : \delta z_0$	3.97610	2.84266	3 _n 85709	4 _n 55419 $\delta a : \delta \zeta_0$

	1	2	3	4
$\partial b : \partial \xi_0$	5.58839	3.73879	4.79743	5.64043
$\partial b : \partial \eta_0$	4.57325	2.72365	3.78229	4.62529
$\partial b : \partial \zeta_0$	3 _n 69467	1 _n 84507	2 _n 90371	3 _n 74671 .

Indem man nun die hier bestimmten Differentialquotienten zur Erleichterung der folgenden Rechnungen auf den unteren Rand eines Zettels schreibt, erhält man die Aenderungen der Coordinaten durch die Variationen der Elemente nach 10) (pag. 431) durch die folgenden Zahlen:

	1	2	3	4
$x_0 (\partial a : \partial x_0)$	+0.00443	+0.00052	+0.00175	+0.00459
$\xi_0 (\partial b : \partial x_0)$	0	0	0	0
$\partial x : \partial x_0$	+1.00295	+1.00034	+1.00116	+1.00304
$\log (\partial x : \partial x_0)$	0.00128	0.00015	0.00050	0.00132
$x_0 (\partial a : \partial y_0)$	6.54818	5.67647	6.27261	6.71780
$\xi_0 (\partial b : \partial y_0)$	3 _n 45940	2 _n 15468	3.04851	3.71543
Add.	9.99964	9.99987	0.00026	0.00043
$\log (\partial x : \partial y_0)$	6.54782	5.67634	6.27287	6.71823
$x_0 (\partial a : \partial z_0)$	5 _n 54537	4 _n 76404	5 _n 44170	5 _n 91004
$\xi_0 (\partial b : \partial z_0)$	2.35645	1.22301	2 _n 23744	2 _n 93454
Add.	9.99972	9.99988	0.00027	0.00046
$\log (\partial x : \partial z_0)$	5 _n 54509	4 _n 76392	5 _n 44197	5 _n 91050
$x_0 (\partial a : \partial \xi_0)$	-0.00070	-0.00003	+0.00017	+0.00074
$\xi_0 (\partial b : \partial \xi_0)$	0	0	0	0
$\partial x : \partial \xi_0$	-0.47351	-0.16314	+0.30014	+0.48793
$\log (\partial x : \partial \xi_0)$	9 _n 67533	9 _n 21256	9.47733	9.68836
$x_0 (\partial a : \partial \eta_0)$	5 _n 70378	4 _n 39906	5.29289	5.95981
$\xi_0 (\partial b : \partial \eta_0)$	2.95360	1.10400	2.16264	3.00564
Add.	9.99923	9.99978	0.00032	0.00048
$\log (\partial x : \partial \eta_0)$	5 _n 70301	4 _n 39884	5.29321	5.96029
$x_0 (\partial a : \partial \zeta_0)$	4.60083	3.46739	4 _n 48182	5 _n 17892
$\xi_0 (\partial b : \partial \zeta_0)$	2 _n 07502	0 _n 22542	1 _n 28406	2 _n 12706
Add.	9.99870	9.99975	0.00028	0.00039
$\log (\partial x : \partial \zeta_0)$	4.59953	3.46714	4 _n 48210	5 _n 17931
$y_0 (\partial a : \partial x_0)$	6.63145	5.70329	6.22754	6.64698
$\eta_0 (\partial b : \partial x_0)$	5 _n 87484	4 _n 48261	5.26899	5.89812
Add.	9.91638	9.97305	0.04533	0.07125
$\log (\partial y : \partial x_0)$	6.54783	5.67634	6.27287	6.71823

	1	2	3	4
$y_0 (\partial a : \partial y_0)$	+0.00003	0.00000	+0.00002	+0.00005
$\eta_0 (\partial b : \partial y_0)$	-0.00001	0.00000	0.00000	+0.00001
$\log (\partial y : \partial y_0)$	9.99937	9.99992	9.99975	9.99935
$y_0 (\partial a : \partial z_0)$	4 _n 53023	3 _n 74890	4 _n 42656	4 _n 89490
$\eta_0 (\partial b : \partial z_0)$	3.62874	2.19530	3 _n 50973	4 _n 20683
Add.	9.94178	9.97508	0.04965	0.08102
$\log (\partial y : \partial z_0)$	4 _n 47201	3 _n 72398	4 _n 47621	4 _n 97592
$y_0 (\partial a : \partial \xi_0)$	5 _n 83179	4 _n 43956	5.22594	5.85507
$\eta_0 (\partial b : \partial \xi_0)$	5.24103	3.39143	4.45007	5.29307
Add.	9.87123	9.95927	0.06727	0.10522
$\log (\partial y : \partial \xi_0)$	5 _n 70302	4 _n 39883	5.29321	5.96029
$y_0 (\partial a : \partial \eta_0)$	0.00000	0.00000	0.00000	+0.00001
$\eta_0 (\partial b : \partial \eta_0)$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\log (\partial y : \partial \eta_0)$	9 _n 67469	9 _n 21249	9.47708	9.68771
$y_0 (\partial a : \partial \zeta_0)$	3.58569	2.45225	3 _n 46668	4 _n 16378
$\eta_0 (\partial b : \partial \zeta_0)$	3 _n 34731	1 _n 49771	2 _n 55635	3 _n 39935
Add.	9.86411	9.94888	0.05035	0.06893
$\log (\partial y : \partial \zeta_0)$	3.21142	2.40113	3 _n 51703	4 _n 23271
$z_0 (\partial a : \partial x_0)$	5 _n 75287	4 _n 82471	5 _n 34896	5 _n 76840
$\zeta_0 (\partial b : \partial x_0)$	5.33293	3.94070	4 _n 72708	5 _n 35621
Add.	9.79222	9.93921	0.09302	0.14210
$\log (\partial z : \partial x_0)$	5 _n 54509	4 _n 76392	5 _n 44198	5 _n 91050
$z_0 (\partial a : \partial y_0)$	4 _n 65446	3 _n 78275	4 _n 37889	4 _n 82408
$\zeta_0 (\partial b : \partial y_0)$	4.18978	2.88506	3 _n 77889	4 _n 44581
Add.	9.81755	9.94123	0.09732	0.15184
$\log (\partial z : \partial y_0)$	4 _n 47201	3 _n 72398	4 _n 47621	4 _n 97592
$z_0 (\partial a : \partial z_0)$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\zeta_0 (\partial b : \partial z_0)$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\log (\partial z : \partial z_0)$	9.99936	9.99992	9.99974	9.99932
$z_0 (\partial a : \partial \xi_0)$	4.95321	3.56098	4 _n 34736	4 _n 97649
$\zeta_0 (\partial b : \partial \xi_0)$	4 _n 69912	2 _n 84952	3 _n 90816	4 _n 75116
Add.	9.90043	9.90616	0.13473	0.20282
$\log (\partial z : \partial \xi_0)$	4.59955	3.46714	4 _n 48209	5 _n 17931
$z_0 (\partial b : \partial \eta_0)$	3.81006	2.50534	3 _n 39917	4 _n 06609
$\zeta_0 (\partial b : \partial \eta_0)$	3 _n 68398	1 _n 83438	2 _n 89302	3 _n 73602
Add.	9.52743	9.89580	0.11786	0.16663
$\log (\partial z : \partial \eta_0)$	3.21141	2.40114	3 _n 51703	4 _n 23272

	1	2	3	4
$z_0 (\partial a : \partial \zeta_0)$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\zeta_0 (\partial b : \partial \zeta_0)$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\log (\partial z : \partial \zeta_0)$	$9_n 67469$	$9_n 21249$	9.47708	9.68770

Nun ermittelt man die in 19) (pag. 434) auftretenden Coëfficienten und findet:

	1	2	3	4
$\sin \lambda$	8.83581	8.22278	$8_n 58131$	$8_n 67279$
$\sin \beta$	$5_n 55560$	7.11703	6.91064	$6_n 93404$
$\cos \lambda$	9.99898	9.99994	9.99968	9.99952
$\cos \beta$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\cos \lambda \sin \beta$	$5_n 55458$	7.11697	6.91032	$6_n 93356$
$\sin \lambda \sin \beta$	$4_n 39141$	5.33981	$5_n 49195$	5.60683
\mathcal{A}	0.50700	0.51375	0.54568	0.56346
$\cos \beta \partial \lambda : \partial x$	$8_n 32881$	$7_n 70903$	8.03563	8.10933
$\cos \beta \partial \lambda : \partial y$	9.49198	9.48619	9.45400	9.43606
$\partial \beta : \partial x$	5.04758	$6_n 60322$	$6_n 36464$	6.37010
$\partial \beta : \partial y$	3.88441	$4_n 82606$	4.94627	$5_n 04337$
$\partial \beta : \partial z$	9.49300	9.48625	9.45432	9.43654

Ersetzt man nun ∂x durch:

$$\partial x = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right) \partial x_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} \right) \partial y_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} \right) \partial z_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta_0} \right) \partial \zeta_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta_0} \right) \partial \eta_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta_0} \right) \partial \zeta_0$$

und analog ∂y und ∂z , und vereinigt die zu der gleichen Variation in 10) (pag. 431) ermittelten Coëfficienten, so hat man schliesslich noch die folgende Operation durchzuführen, wobei man die früher ermittelten Differentialquotienten auf den unteren Rand eines Papieres schreiben wird; die nöthigen Multiplicationen werden dann durch entsprechendes Rücken des Zettels sehr übersichtlich durchgeführt werden können:

	1	2	3	4
$\cos \beta \partial \lambda : \partial x \quad (\partial x : \partial x_0)$	$8_n 33009$	$7_n 70918$	8.03613	8.11065
$(\cos \beta \partial \lambda : \partial y) \quad (\partial y : \partial x_0)$	6.03981	5.16253	5.72687	6.15429
Add.	9.99777	9.99877	0.00212	0.00477
$\cos \beta \partial \lambda : \partial x_0$	$8_n 3279$	$7_n 7079$	8.0383	8.1154
$(\cos \beta \partial \lambda : \partial x) \quad (\partial x : \partial y_0)$	$4_n 87663$	$3_n 38537$	4.30850	4.82756
$(\cos \beta \partial \lambda : \partial y) \quad (\partial y : \partial y_0)$	9.49137	9.48611	9.45375	9.43541
Add.	9.99999	0.00000	0.00000	9.99999
$\cos \beta \partial \lambda : \partial y_0$	9.4914	9.4861	9.4537	9.4354
$\cos \beta \partial \lambda : \partial x \quad (\partial x : \partial z_0)$	3.87390	2.47295	$3_n 47760$	$4_n 01983$
$(\cos \beta \partial \lambda : \partial y) \quad (\partial y : \partial z_0)$	$3_n 96399$	$3_n 21017$	$3_n 93021$	$4_n 41198$
Add.	9.36272	9.91215	0.13120	0.14779
$\cos \beta \partial \lambda : \partial z_0$	$3_n 2366$	$3_n 1223$	$4_n 0614$	$4_n 5598$

	I	2	3	4
$(\cos \beta \, \delta \lambda : \delta x) (\delta x : \delta \xi_0)$	8.00414	6.92159	7.51296	7.79769
$(\cos \beta \, \delta \lambda : \delta y) (\delta y : \delta \xi_0)$	5 _n 19500	3 _n 88502	4.74721	5.39635
Add.	9.99933	9.99960	0.00074	0.00172
$\cos \beta \, \delta \lambda : \delta \xi_0$	8.0035	6.9212	7.5137	7.79941
$(\cos \beta \, \delta \lambda : \delta x) (\delta x : \delta \eta_0)$	4.03182	2.10787	3.32884	4.06962
$(\cos \beta \, \delta \lambda : \delta y) (\delta y : \delta \eta_0)$	9 _n 16667	8 _n 69868	8.93108	9.12377
Add.	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\cos \beta \, \delta \lambda : \delta \eta_0$	9 _n 1667	8 _n 6987	8.9311	9.1238
$(\cos \beta \, \delta \lambda : \delta x) (\delta x : \delta \zeta_0)$	2 _n 92834	1 _n 17617	2 _n 51773	3 _n 28864
$(\cos \beta \, \delta \lambda : \delta y) (\delta y : \delta \zeta_0)$	2.70340	1.88732	2 _n 97103	3 _n 66877
Add.	9.83160	9.90608	0.13102	0.15133
$\cos \beta \, \delta \lambda : \delta \zeta_0$	2 _n 5350	1.7934	3 _n 1020	3 _n 8201
$(\delta \beta : \delta x) (\delta x : \delta x_0)$	5.04886	6 _n 60337	6 _n 36514	6.37142
$(\delta \beta : \delta y) (\delta y : \delta x_0)$	0.43224	0 _n 50240	1.21914	1 _n 76160
$(\delta \beta : \delta z) (\delta z : \delta x_0)$	5 _n 03809	4 _n 25017	4 _n 89630	5 _n 34704
Add.	0.00001	0.00000	0.00000	9.99999
{I + II}	5.04887	6 _n 60337	6 _n 36514	6.37141
Add.	8.40020	0.00192	0.01451	9.95687
$\delta \beta : \delta x_0$	3.4383	6 _n 6053	6 _n 3796	6.3283
$(\delta \beta : \delta x) (\delta x : \delta y_0)$	1.59540	2 _n 27956	2 _n 63751	3.08833
$(\delta \beta : \delta y) (\delta y : \delta y_0)$	3.88378	4 _n 82598	4.94602	5 _n 04272
$(\delta \beta : \delta z) (\delta z : \delta y_0)$	3 _n 96501	3 _n 21023	3 _n 93053	4 _n 41246
Add.	0.00223	0.00123	9.99786	9.99515
{I + II}	3.88601	4 _n 82721	4.94388	5 _n 03787
Add.	9.29994	0.01037	9.95570	0.09234
$\delta \beta : \delta y_0$	3 _n 1859	4 _n 8376	4.8996	5 _n 1302
$(\delta \beta : \delta x) (\delta x : \delta z_0)$	0 _n 59267	1.36714	1.80661	2 _n 28061
$(\delta \beta : \delta y) (\delta y : \delta z_0)$	8 _n 35642 *)	8.55004	9 _n 42248	0.01929
$(\delta \beta : \delta z) (\delta z : \delta z_0)$	9.49236	9.48617	9.45406	9.43586
Add.	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\delta \beta : \delta z_0$	9.4924	9.4862	9.4541	9.4359
$(\delta \beta : \delta x) (\delta x : \delta \xi_0)$	4 _n 72291	5.81578	5 _n 84197	6.05846
$(\delta \beta : \delta y) (\delta y : \delta \xi_0)$	9 _n 58743	9.22489	0.23948	1 _n 00366
$(\delta \beta : \delta z) (\delta z : \delta \xi_0)$	4.09255	2.95339	3 _n 93641	4 _n 61585
Add.	9.88410	0.00060	0.00536	9.98404
$\delta \beta : \delta \xi_0$	4 _n 6070	5.8164	5 _n 8473	6.0425

*) Der Strich über der Charakteristik zeigt an, dass dieselbe um 20 Einheiten zu vermindern ist, während die übrigen nur um 10 Einheiten vermindert verstanden sind.

	1	2	3	4
$(\partial \beta : \partial x) (\partial x : \partial \eta_0)$	0 _n 75059	1.00206	1 _n 65785	2.33039
$(\partial \beta : \partial y) (\partial y : \partial \eta_0)$	3 _n 55910	4.03855	4.42335	4 _n 73108
$(\partial \beta : \partial z) (\partial z : \partial \eta_0)$	2.70441	1.88739	2 _n 97135	3 _n 66926
Add.	0.00067	0.00040	9.99925	9.99827
{I + II}	3 _n 55977	4.03895	4.42260	4 _n 72935
Add.	9.93474	0.00305	9.98436	0.03626
$\partial \beta : \partial \eta_0$	3 _n 4945	4.0420	4.4070	4 _n 7656
<hr/>				
$(\partial \beta : \partial x) (\partial x : \partial \xi_0)$	9.64711	0.07036	0.84674	1 _n 54941
$(\partial \beta : \partial y) (\partial y : \partial \xi_0)$	7.09583	7 _n 22719	8 _n 46330	9.27608
$(\partial \beta : \partial z) (\partial z : \partial \xi_0)$	9 _n 16769	8 _n 69874	8.93140	9.12424
$\partial \beta : \partial \xi_0$	9 _n 1677	8 _n 6987	8.9314	9.1242.

Hiermit ist die Rechnung der Differentialquotienten beendet; sie fordert zwar etwas mehr Mühe, als die bei den früheren Methoden entwickelten Ausdrücke, doch macht sich die Rechnung wegen der zahlreichen kleinen Coëfficienten sehr schnell und einfach; letztere veranlassen es auch, dass eine ganz wesentliche Vereinfachung bei der Bildung der Normalgleichungen eintritt, welcher Vortheil die etwas mühsamere Rechnung der obigen Coëfficienten mehr als aufwiegt. Von der Richtigkeit der entwickelten Differentialformeln kann man sich leicht durch willkürliche Variation der Elemente und Vergleichung der Resultate der directen Rechnung und der oben hingestellten Differentialformeln überzeugen.

Um diese Control-Rechnungen möglichst einfach zu gestalten, wird man x_0 , y_0 , z_0 , ξ_0 , η_0 und ζ_0 willkürlich variiren und zwar um solche Beträge, dass wenn man den grössten Coëfficienten der eben ermittelten Differentialquotienten einer jeden Unbekannten heraushebt, das Product dieses Coëfficienten in die zugehörige willkürliche Variation für alle 6 Grössen nahe gleichwerthig wird, und ausserdem darauf achten, dass man diese Variationen weder zu klein noch zu gross wählt; meistens wird es genügen, dieselben so zu wählen, dass das Product aus dieser Variation mit dem zugehörigen grössten Coëfficienten in dem geocentrischen Orte eine Aenderung von 20—30" bedingt. Indem man nun den Werth von r_0 , $\frac{dr_0}{dt}$ und g nach

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

$$r_0 \left(\frac{dr_0}{dt} \right) = x_0 \xi_0 + y_0 \eta_0 + z_0 \zeta_0$$

$$g^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2$$

ermittelt, hat die Berechnung der A - und B -Coëfficienten aus 8) (pag. 430) keine Schwierigkeit; bestimmt man nach 9) (pag. 430) für die in Betracht kommenden Orte die a - und b -Coëfficienten und rechnet nach 3) (pag. 429) die geocentrischen Coordinaten, so werden dieselben leicht mit Rücksicht auf 32) (pag. 436) die geocentrischen polaren finden lassen. Die durch diese Rechnung erhaltenen Aenderungen in den geocentrischen Orten müssen innerhalb der Unsicherheit der Rechnung mit den durch die obigen Differentialquotienten gefundenen stimmen.

Sammelt man alle gewonnenen Coëfficienten und setzt auch die früher in den Orten gefundenen Fehler an. so erhält man die folgenden logarithmisch angesetzten Bedingungsgleichungen, in welchen die aus dem ersten Orte resultirenden zwei Gleichungen mit der Präcision $\sqrt{3}$ durchmultiplieirt erscheinen; es wurde nämlich dem ersten Orte als Normalort das Gewicht 3 ertheilt.

Längen

$$\begin{aligned} 1_n3906 &= 8_n5665 \delta x_0 + 9.7300 \delta y_0 + 3_n4752 \delta z_0 + 8.2421 \delta \xi_0 + 9_n4053 \delta \eta_0 + 2_n7736 \delta \zeta_0 \\ 9.6128 &= 7_n7079 & 9.4861 & 3_n1223 & 6.0212 & 8_n6987 & 1.7934 \\ 8.9031 &= 8.0383 & 9.4537 & 4_n0614 & 7.5137 & 8.9311 & 3_n1020 \\ 0_n1303 &= 8.1154 & 9.4354 & 4_n5598 & 7.7994 & 9.1238 & 3_n8201 \end{aligned}$$

Breiten

$$\begin{aligned} 0_n4741 &= 3.6769 \delta x_0 + 3_n4245 \delta y_0 + 9.7310 \delta z_0 + 4_n8456 \delta \xi_0 + 3_n7331 \delta \eta_0 + 9_n4063 \delta \zeta_0 \\ 0_n1430 &= 6_n6053 & 4_n8376 & 9.4862 & 5.8164 & 4.0420 & 8_n6987 \\ 0.4564 &= 6_n3796 & 4.8996 & 9.4541 & 5_n8473 & 4.4070 & 8.9314 \\ 0_n2856 &= 6.3283 & 5_n1302 & 9.4359 & 6.0425 & 4_n7656 & 9.1242. \end{aligned}$$

Vor Allem wird man diese Coëfficienten dadurch für die Methode der kleinsten Quadrate vorbereiten, dass man dieselben durch Einführung anderer Unbekannten möglichst homogen (pag. 318) macht. Setzt man also:

$$\begin{aligned} a &= 8.5665 \delta x_0 & d &= 8.2421 \delta \xi_0 \\ b &= 9.7300 \delta y_0 & e &= 9.4053 \delta \eta_0 \\ c &= 9.7310 \delta z_0 & f &= 9.4063 \delta \zeta_0 \end{aligned}$$

$$\log \text{Fehlereinheit} = 1.3906,$$

so erhält man zur Bildung der Normalgleichungen das folgende Schema (vergl. pag. 319), in welchem bereits die Prüfungscoefficienten s ihre Aufnahme gefunden haben:

log Coëff.	a	0_n0000	9_n1414	9.4718	9.5489	5.1104	8_n0388	7_n8131	7.7618
»	b	0.0000	9.7561	9.7237	9.7054	3_n6945	5_n1076	5.1696	5_n4002
»	c	3_n7442	3_n3913	4_n3304	4_n8288	0.0000	9.7552	9.7231	9.7049
»	d	0.0000	8.6791	9.2716	9.5573	6_n6035	7.5743	7_n6052	7.8004
»	e	0_n0000	9_n2934	9.5258	9.7185	4_n3278	4.6367	5.0017	5_n3603
»	f	3_n3673	2.3871	3_n6957	4_n4138	0_n0000	9_n2924	9.5251	9.7179
»	n	0_n0000	8.2222	7.5125	8_n7397	9_n0835	8_n7524	9.0658	8_n8950
»	s	0_n0000	9.4768	0.1307	0.2279	9_n0850	9.4904	9.9865	$9.9835.$

Ehe ich an die Bildung der Normalgleichungen gehe, will ich noch bemerken, dass die Fehler oben in Bogensekunden angesetzt sind, während der Natur der Sache nach die Correctionen der Coordinaten und Geschwindigkeiten in Einheiten des Radius verstanden werden; will man demnach die aus den folgenden Auflösungen gefundenen Werthe der Unbekannten unmittelbar zur Bestimmung der Correctionen der Elemente verwerthen, so muss man ausserdem, dass man jede Unbekannte durch den Homogenitätsfactor dividirt, und dieselbe mit der oben ange-

nommenen Fehlereinheit multiplicirt, noch mit dem Sinus einer Bogensekunde multipliciren; man wird also für diesen Uebergang haben (logarithmisch):

$$(\partial x_0) = 7.5097 a$$

$$(\partial y_0) = 6.3462 b$$

$$(\partial z_0) = 6.3452 c$$

$$(\partial \xi_0) = 7.8341 d$$

$$(\partial \eta_0) = 6.6709 e$$

$$(\partial \zeta_0) = 6.6699 f$$

welche Coëfficienten ich als Uebertragungs-Coëfficienten bezeichnen will.

Ich setze die Bildung der Normalgleichungen hier vollständig an, um die grossen Vortheile anschaulich zu machen, welche diese Methode in der Anwendung gewährt; etwa die Hälfte der Coëfficienten verschwindet. Man erhält so:

<i>aa</i>	<i>ab</i>	<i>ac</i>	<i>ad</i>	<i>ae</i>	<i>af</i>	<i>an</i>	<i>as</i>	<i>bb</i>	<i>bc</i>	<i>bd</i>	
+1.0000	—1.0000	o	—1.0000	+1.0000	o	+1.0000	+1.0000	+1.0000	o	+1.0000	
+0.0191	—0.0790	o	—0.0066	+0.0272	o	—0.0023	—0.0415	+0.3252	o	+0.0272	
+0.0878	+0.1568	o	+0.0554	+0.0994	o	+0.0010	+0.4004	+0.2801	o	+0.0989	
+0.1253	+0.1796	o	+0.1277	+0.1851	o	—0.0194	+0.5981	+0.2575	o	+0.1831	
o.0000	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	
+	1	o	—0.0062	o	o	+0.0021	+	6	—	34	
o	o	o	—0.0034	o	o	—0.0022	—	8	—	63	
o	o	o	+0.0029	o	o	+0.0030	—	5	+	56	
<hr/>											
+1.2323	—0.7426	—o.0067	—0.8235	+1.3117	+0.0029	+0.9786	+1.9529	+1.8628	o	+1.3092	
<i>be</i>	<i>bf</i>	<i>bn</i>	<i>bs</i>	<i>ce</i>	<i>cd</i>	<i>ce</i>	<i>cf</i>	<i>en</i>	<i>es</i>	<i>dd</i>	<i>de</i>
—1.0000	o	—1.0000	—1.0000	o	o	o	o	o	o	+1.0000	—1.0000
—0.1121	o	+0.0095	+0.1710	o	o	o	o	o	o	+0.0023	—0.0094
+0.1776	o	+0.0017	+0.7152	o	o	o	o	o	o	+0.0349	+o.0627
+0.2654	o	—0.0279	+0.8576	o	o	o	o	o	o	+0.1302	+0.1887
o	o	o	o	+1.0000	—0.0004	o	—1.0000	—0.01212	—0.1216	o	o
o	o	o	o	+0.3239	+0.0021	o	—0.1116	—0.0322	+0.1760	o	o
o	o	o	o	+0.2794	—0.0021	o	+0.1771	+0.0615	+0.5124	o	o
o	o	o	o	+0.2569	+0.0032	o	+0.2648	—0.0398	+0.4880	o	o
<hr/>											
—0.6691	o	—1.0167	+0.7438	+1.8602	+0.0028	o	—0.6697	—0.1317	+1.0548	+1.1674	—0.7580
<i>df</i>	<i>dn</i>	<i>ds</i>	<i>ee</i>	<i>ef</i>	<i>en</i>	<i>es</i>	<i>ff</i>	<i>fn</i>	<i>fs</i>	<i>nn</i>	
o	—1.0000	—1.0000	+1.0000	o	+1.0000	+1.0000	o	o	o	+1.0000	
o	+	8	+0.0142	+0.0386	o	—0.0033	—0.0589	o	o	o	+0.0003
o	+	6	+0.2525	+0.1126	o	+0.0011	+0.4534	o	o	o	o.0000
o	—0.0198	+0.6099	+0.2735	o	—0.0287	+0.8838	o	o	o	o	+0.0030
+0.0004	o	o	o	o	o	o	+1.0000	+0.1212	+0.1216	+0.0147	
—0.0007	—	2	+	12	o	o	o	+0.0384	+0.0111	—0.0606	+0.0032
—0.0013	—	5	—	39	o	o	o	+0.1123	+0.0390	+0.3248	+0.0135
+0.0033	—	5	+	61	o	o	o	+0.2728	—o.0410	+0.5028	+0.0062
<hr/>											
+0.0017	—1.0196	—0.1200	+1.4247	o	+0.9691	+2.2783	+1.4235	+0.1303	+0.8886	+1.0409	

Ordnet man nun die Unbekannten nach der Reihe *b, c, e, f, a* und *d*, so gestaltet sich die Elimination bis *f* inclusive fortgeführt, wie folgt (vergl. pag. 340):

	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>n</i>	<i>s</i>
	+1.8628	0.0000	—0.6691	0.0000	—0.7426	+1.3092	—1.0167	+0.7436
<i>E.</i>	0.27016	— ∞	9 _n 82549	— ∞	9 _n 87075	0.11701	0 _n 00719	9.87134
	+1.8602	0.0000	—0.6697	—0.0067	+0.0028	—0.1317	+1.0549	
	0	0	0	0	0	0	0	0
	+1.8602	0.0000	—0.6697	—0.0067	+0.0028	—0.1317	+1.0549	
<i>E.</i>	0.26956	— ∞	9 _n 82588	7 _n 82607	7.44716	9 _n 11959	0.02321	
	+1.4247	0.0000	+1.3117	—0.7580	+0.9691	+2.2784		
	+0.24034	0	+0.26674	—0.47027	+0.36519	—0.26710		
	+1.18436	0.00000	+1.04496	—0.28773	+0.60391	+2.54550		
	0	0	0	0	0	0	0	0
	+1.18436	0.00000	+1.04496	—0.28773	+0.60391	+2.54550		
<i>E.</i>	0.07348	— ∞	0.01910	9 _n 45898	9.78098	0.40577		
	+1.4235	+0.0029	+0.0017	+0.1303	+0.8887			
	0	0	0	0	0	0	0	0
	+1.4235	+0.0029	+0.0017	+0.1303	+0.8887			
[<i>nn</i> 1]	0.4860	+0.24110	+0.00241	—0.00101	+0.04741	—0.37978		
[<i>nn</i> 2]	0.4767	+1.18240	+0.00049	+0.00271	+0.08289	+1.26848		
[<i>nn</i> 3]	0.1688	0	0	0	0	0	0	0
[<i>nn</i> 4]	0.1630	+1.18240	+0.0049	+0.00271	+0.08289	+1.26849		
<i>E.</i>	6.07276	6.69020	7.43297	8.91850	0.10329.			

Man wird bemerken, dass auch die Auflösung der Normalgleichungen wegen der kleinen Coëfficienten sehr merklich erleichtert erscheint. Würde es sich in diesem Falle nur um die Ermittlung der wahrscheinlichsten Elemente allein handeln, und sollte hier nicht ein Beispiel durchgeführt werden, wo zwei Unbekannte einer besonderen Unsicherheit unterworfen sind, so könnte die Elimination zu Ende geführt werden, ohne allzugrosse Unsicherheit. Diesen Vortheil verdankt man nur der zweckmässigen Wahl der Elemente.

Bestimmt man sich aus der letzten mit *E* bezeichneten Gleichung die Unbekannte *f* als Function von *a*, *d* und den Beobachtungsfehlern, so erhält man sofort (logarithmisch) :

$$f = 8.84574 + 6_n61744a + 7_n36021d ;$$

führt man diesen Werth in der vorletzten obigen Gleichung *E* ein, so findet man leicht :

$$e = 9.70750 + 9_n94562a + 9.38550d$$

und so weiter durch Rücksubstitution:

$$c = 8_n65858 + 7.53798a + 7_n36693d$$

$$b = 9_n55948 + 8.91239a + 9_n78927d ;$$

mit Rücksicht auf die Uebertragungscöefficienten (pag. 452) erhält man als Relationen zwischen den Elementen (logarithmisch) :

$$\left. \begin{aligned} \delta z_0 &= 5.5156 + 5_n 7776 \delta x_0 + 6_n 1960 \delta_0 \\ \delta v_0 &= 6.3784 + 9_n 1068 \delta x_0 + 8.2223 \delta \xi_0 \\ \delta z_0 &= 5_n 0038 + 6.3735 \delta x_0 + 5_n 8780 \delta \xi_0 \\ \delta y_0 &= 5_n 9057 + 7.7489 \delta x_0 + 8_n 3014 \delta \xi_0 \end{aligned} \right\} A_1)$$

Hiermit sind die Formen 2) (pag. 364) erlangt. Um nun den Uebergang auf 4) (pag. 365) zu machen, hat man diese Relationen in die ursprünglichen Bedingungsgleichungen einzusetzen, und man wird, um Alles in Bogensekunden zu erhalten, die obigen Coëfficienten vor deren Substitution durch $\sin 1''$ dividiren; ansserdem habe ich, um den Zusammenhang zwischen den Elementen und den Orten möglichst klar zu legen, die zwei Gleichungen für den ersten Ort ohne Berücksichtigung ihres Gewichtes benützt; man erhält so die neuen Bedingungsgleichungen, indem man die von δx_0 und $\delta \xi_0$ freien Glieder mit den Fehlern in den Orten verbindet:

$$\left. \begin{aligned} &\lambda \\ - 1''807 &= - 157''5 \delta x_0 + 293''9 \delta \xi_0 \\ + 7.957 &= + 619.5 \quad \quad - 1264.4 \quad \quad \\ + 0.593 &= + 330.9 \quad \quad - 206.8 \quad \quad \\ - 3.382 &= - 502.2 \quad \quad + 632.4 \quad \quad \\ &\beta \\ - 0.078 &= + 17.04 \delta x_0 - 0.91 \delta \xi_0 \\ - 0.415 &= - 67.61 \quad \quad + 10.40 \quad \quad \\ + 2.875 &= - 36.70 \quad \quad - 21.73 \quad \quad \\ - 2.262 &= + 55.71 \quad \quad + 14.22 \quad \quad \end{aligned} \right\} A_2)$$

welche Gleichungen nun die Form der Gleichungen 8) (pag. 366) haben.

Hier findet nun die in 7) (pag. 366) angezeigte Prüfung statt. Bildet man die Summe der Fehlerquadrate (also von n') und addirt dieselben, nachdem man die für den ersten Ort geltenden Quadrate, dem Gewichte entsprechend, mit 3 multiplicirt hat, so erhält man:

$$[n' n'] = 98''4;$$

oben fand sich $[nn_4] = 0.1630$, was in Verbindung mit der Fehlereinheit ergibt:

$$[nn_4] = 98''5$$

in guter Uebereinstimmung mit dem obigen Werthe. Uebrigens erscheinen die Coëfficienten von δx_0 und $\delta \xi_0$ durch die Controle nicht geprüft und müssen besonders revidirt werden. Die obigen Gleichungen können nun zur Bestimmung von δx_0 und $\delta \xi_0$ verwerthet werden, da in der That die Coëfficienten der beiden Unbekannten nicht allzu klein sind (vergl. pag. 366); gibt man wieder dem ersten Orte das Gewicht 3 und macht die Coëfficienten homogen durch:

$$\begin{aligned} 2.7920 \delta x_0 &= p \\ 3.1019 \delta \xi_0 &= q \\ \log \text{Fehlereinheit} &= 0.9007 \end{aligned}$$

so erhält man (logarithmisch) :

$$\begin{array}{rcl}
 9_n5949 & = & 9_n6439 \, p + 9.6049 \, q \\
 0.0000 & = & 0.0000 \quad 0_n0000 \\
 8.8724 & = & 9.7277 \quad 9_n2137 \\
 9_n6285 & = & 9_n9089 \quad 9.6991 \\
 8_n2300 & = & 8.6780 \quad 7_n0957 \\
 8_n7173 & = & 9_n0380 \quad 7.9151 \\
 9.5579 & = & 8_n7727 \quad 8_n2352 \\
 9_n4538 & = & 8.9540 \quad 8.0510 ,
 \end{array}$$

aus welchen Gleichungen sich die folgenden Eliminationsgleichungen ergeben :

$$\left. \begin{array}{l} + 2.1625 \, p - 1.6692 \, q = + 1.5157 \\ + 0.1511 \, q = - 0.2231 . \end{array} \right\} \quad \alpha)$$

Die Summe der Fehlerquadrate beträgt in der hier gewählten Einheit 1.5555. Aus der ersten Gleichung allein leitet man ab (logarithmisch) :

$$p = 9.8456 + 9.8875 \, q ,$$

oder mit Rücksicht auf die oben eingeführten Homogenitätsfactoren (logarithmisch) :

$$\partial x_0 = 7.9543 + 0.1974 \, \partial \xi_0^*) . \quad B)$$

Der eben gefundene Werth für p wäre in die obigen Gleichungen einzuführen, worauf man leicht die Formen 18) (pag. 368) erhalten würde, doch ist die Auflösung in dem vorliegenden Falle aus den letzteren Eliminationsgleichungen für die Bestimmung der Unbekannten hinreichend sicher; man erhält so:

$$\log q = 0_n1693$$

oder

$$\log \partial \xi_0 = 7_n9681 . \quad C)$$

Die Summe der Fehlerquadrate geht herab auf:

$$[nn6] = 0.1638 ,$$

oder mit Rücksicht auf die oben eingeführte Fehlereinheit:

$$[nn6] = 10''_4 .$$

Substituiert man den Werth von $C)$ in $B)$ und $A)$, so erhält man die wahrscheinlichsten Correctionen der angewandten Elemente, und zwar:

$$\begin{array}{l}
 \partial x_0 = - 0.005 \, 6375 \\
 \partial y_0 = + 0.000 \, 0739 \\
 \partial z_0 = - 0.000 \, 0107 \\
 \partial \xi_0 = - 0.009 \, 2920 \\
 \partial \eta_0 = + 0.000 \, 8050 \\
 \partial \zeta_0 = + 0.000 \, 0346 .
 \end{array}$$

*) Da der Coëfficient von $\partial \xi_0$ grösser als die Einheit ist, so kann man daraus den Schluss ziehen, dass es etwas zweckmässiger gewesen wäre, ∂x_0 als die letzte Unbekannte zu wählen.

Die Einführung dieser Correctionen in die Bedingungsgleichungen ergibt als übrigbleibende minimale Fehler:

	$\cos \beta \delta \lambda$	$\delta \beta$	Gewicht	
1	+ 0''04	+ 0''01	3	} D)
2	— 0.30	— 0.70	1	
3	+ 0.54	+ 2.47	1	
4	— 0.34	— 1.82	1	

Die Summe der Fehlerquadrate ist in der That 10''4, wodurch eine sehr gute Controlle erreicht ist.

Bringt man die hier gefundenen Correctionen an die oben (pag. 443) ermittelten Ausgangswerthe an, so erhält man:

$$\begin{aligned} x_1 &= + 4.208 \ 7317, & \xi_1 &= + 0.014 \ 7156 \\ y_1 &= + 0.407 \ 0657, & \eta_1 &= + 0.450 \ 2083 \\ z_1 &= - 0.053 \ 8383, & \zeta_1 &= - 0.129 \ 0064; \end{aligned}$$

aus diesen Coordinaten und Geschwindigkeiten sind die osculirenden Elemente nach 34) (pag. 437) abzuleiten; die Rechnung stellt sich wie folgt:

$\log x_1$	0.624 1513	$V\bar{p} \sin(i) \sin(\Omega)$	8 _n 451 4142
$\log y_1$	9.609 6645		9 _n 999 4101
$\log z_1$	8 _n 731 0913	$V\bar{p} \sin(i) \cos(\Omega)$	6 _n 734 1285
$\log \xi_1$	8.167 7780	$V\bar{p} \sin(i)$	9.734 7184
$\log \eta_1$	9.653 4135	$V\bar{p} \cos(i)$	0.276 1896
$\log \zeta_1$	9 _n 110 6113	$V\bar{p}$	0.293 4265
$x_1 \eta_1$	0.277 5648	p	0.586 8530
$y_1 \xi_1$	7.777 4425	i	16° 2' 10'' 04
Subtr.	0 001 3752	(Ω)	182 59 7 71
$y_1 \zeta_1$	8 _n 720 2758	$\cos(\Omega)$	9 _n 999 4101
$z_1 \eta_1$	8 _n 384 5048	$\sin(\Omega)$	8 _n 716 6940
Subtr.	0.268 8634	$\cos(i)$	9.982 7631
$x_1 \zeta_1$	9 _n 734 7626	$\sin(i)$	9.441 2918
$z_1 \xi_1$	6 _n 898 8693	$\cos(\Omega) \cos(i)$	9 _n 982 1732
Subtr.	0.000 6341	— $\sin(\Omega) \cos(i)$	8.699 4571
$x_1 \xi_1$	8.791 9293	$y_1 \cos(\Omega) \cos(i)$	9 _n 591 8377
$y_1 \eta_1$	9.263 0780	— $x_1 \sin(\Omega) \cos(i)$	9.323 6084
Add.	0.126 4396	Add.	0.336 5119
{I + II}	9.389 5176	{I + II}	9 _n 255 3258
$z_1 \zeta_1$	7.841 7026	$z_1 \sin(i)$	8 _n 172 3831
Add.	0.012 1308	Add.	0.034 4739
$\sin \varphi \sin v \frac{r}{V\bar{p}}$	9.401 6484	$x_1 \cos(\Omega)$	0 _n 623 5614
		$y_1 \sin(\Omega)$	8 _n 326 3585
		Add.	0.002 1852

$r \sin u$	9 _n 289 7997	$\sin q \sin v$	9.068 8665
	9 _n 999 5382		9.905 3147
$r \cos u$	0 _n 625 7466	$\sin q \cos v$	8 _n 937 6909
u	182°38'29''78	v	126°28'32''70
r	0.626 2084	$\sin q$	9.163 5518
$r : p$	9.960 6446	q	8°22'46''59
$\sqrt{p} : r$	9.667 2181	$45^\circ + \frac{1}{2} q$	49°11'23.29
<hr/>			
$\frac{1}{2} v$	63°14'16.35	ω	56°9'57''08
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v$	0.297 3051	π	239°9' 4''79
$\operatorname{cotg} (45^\circ + \frac{1}{2} q)$	9.936 2560	$\cos q^2$	9.990 6774
$\frac{1}{2} E$	59°42'48''86	a	0.596 1756
E	119 25 37.73	\sqrt{a}	0.298 0878
$\sin E$	9.940 0086	$a^{\frac{3}{2}}$	0.894 2634
$\sin q : \sin 1''$	4.477 9769	$\log \mu$	2.655 7432
$e'' \sin E$	7°16'20''96	μ	452''6299
M	112° 9'16''77		

womit die Rechnung der Elemente vollendet erscheint. Ueberträgt man weiter die Elemente nach 35) (pag. 438) auf den Aequator als Fundamentalebene, und diese nach den im ersten Bande des Lehrbuches angegebenen Formeln (I pag. 11) auf die Ekliptik, so finden sich die wahrscheinlichsten Elemente in der gewöhnlichen Form:

(153) Hilda.

Epoche 1875 Dec. 2.0 mittl. Berl. Zeit.

mittleres Aequinoctium 1875.0

L	34°58'54''95
M	112 9 16.77
π	282 49 38.18
Ω	228 20 0.73
i	7 48 0.22
q	8 22 46.59
μ	452''6299
$\log a$	0.596 1756 .

Rechnet man nun aus diesen Elementen die Darstellung der Orte bezogen auf das früher gewählte Coordinatensystem, so ergibt die directe siebenstellige Rechnung hierfür:

	$\cos \beta \delta \lambda$	$\delta \beta$
1875 Nov. 4	+ 0''09	0.00
» 22	— 0.32	— 0.71
Dec. 19	+ 0.57	+ 2.55
» 30	— 0.31	— 1.82 ,

welche Werthe mit den in D (pag. 456) angesetzten in befriedigender Weise stimmen, so dass die bisherigen Rechnungen einer sehr scharfen Controle unterzogen erscheinen.

Wenn es sich blos darum handelt, die wahrscheinlichsten Elemente für einen kleinen Planeten aus den Beobachtungen einer Opposition zu erhalten, so erscheinen hiernit die Rechnungen vollendet; es knüpft sich aber häufig genug auch die Frage an diese Bestimmungen, innerhalb welcher Grenzen man die Elemente variiren darf, ohne den Beobachtungen geradezu zu widersprechen, und zur Erledigung dieser Frage eignet sich die hier aufgestellte Methode im besonderen Maasse, da in der That der Zusammenhang zwischen den Variationen der Elemente und den Aenderungen in den geocentrischen Orten, innerhalb der in Betracht kommenden Grenzen ein fast völlig linearer ist.

Wir nehmen zu diesem Ende die Gleichung *B*) (pag. 455) vor und substituiren dieselbe einerseits in *A*₁) und *A*₂); denkt man sich dann unter $\delta \xi$ die Variation des wahrscheinlichsten Werthes von ξ_0 , so ist es klar, dass man in den Gleichungen *A*₁) und *B*) (pag. 454, 455) für die constanten Coëfficienten Null zu setzen hat, wenn man unter $\delta \zeta$, $\delta \eta$, δz , δy und δx die Variationen der wahrscheinlichsten Elemente verstehen soll, bedingt durch die Variationen von $\delta \xi$ und ebenso hat man linker Hand in *A*₂) statt der dort angesetzten Fehler die aus *D*) (pag. 456) resultirenden einzufügen; man findet dann logarithmisch:

$$\begin{aligned}\delta x &= 0.1974 \delta \xi \\ \delta y &= 8_n 0484 \delta \xi \\ \delta z &= 6.4725 \delta \xi \\ \delta \eta &= 9_n 2666 \delta \xi \\ \delta \zeta &= 6_n 4001 \delta \xi.\end{aligned}$$

Beachtet man, dass die übrig bleibenden Fehler in *D*) (pag. 456) identisch sind mit $v_1, v_2 \dots$ der Formel 25) (pag. 369) und bezeichnet man mit $f_1, f_2 \dots$ die Fehler, welche übrig bleiben, wenn man den wahrscheinlichsten Werth von ξ um den Betrag $\delta \xi$ variirt, so erhält man aus der Substitution in *B*) leicht:

$$\begin{aligned}f_1 &= + 0''04 - 45''8 \delta \xi, & f_5 &= + 0''01 - 25''9 \delta \xi \\ f_2 &= - 0.30 + 288.4 \delta \xi, & f_6 &= - 0.70 + 96.1 \delta \xi \\ f_3 &= + 0.54 - 314.5 \delta \xi, & f_7 &= + 2.47 + 79.5 \delta \xi \\ f_4 &= - 0.34 + 158''8 \delta \xi, & f_8 &= - 1.82 - 102.0 \delta \xi.\end{aligned}$$

Bedenkt man überdiess, dass der wahrscheinlichste Werth von x ebenfalls stark variirt werden kann, ohne den Beobachtungen zu widersprechen, und versteht man unter δx die Variation unter der Einschränkung, dass $\delta \xi = 0$ gesetzt ist (pag. 368), so kann man zu diesem Zwecke unmittelbar die Coëfficienten von δx_0 aus *A*₁) und *A*₂) hinschreiben, wobei nur zu beachten ist, dass man in den letzteren das Zeichen wegen der Umsetzung auf die andere Seite des Gleichheitszeichens zu ändern hat und erhält so (logarithmisch:

$$\left. \begin{aligned}\delta x &= 0.1974 \delta \xi \\ \delta y &= 7.7489 \delta x + 8_n 0484 \delta \xi \\ \delta z &= 6.3735 \delta x + 6.4725 \delta \xi \\ \delta y &= 9_n 1068 \delta x + 9_n 2666 \delta \xi \\ \delta \zeta &= 5_n 7776 \delta x + 6_n 4001 \delta \xi,\end{aligned} \right\} E)$$

und ausserdem für die Fehler in den Orten:

$$\begin{array}{cc} \cos \beta \, \delta \lambda & \delta \beta \\ f_1 = + 0''04 + 157''5 \, \delta x - 45''8 \, \delta \xi, & f_5 = + 0''01 - 17''0 \, \delta x - 25''9 \, \delta \xi \\ f_2 = - 0 \, 30 - 619.5 \, \delta x + 288.4 \, \delta \xi, & f_6 = - 0.70 + 67.5 \, \delta x + 96.1 \, \delta \xi \\ f_3 = + 0.54 - 330.9 \, \delta x + 314.5 \, \delta \xi, & f_7 = + 2.47 + 36.7 \, \delta x + 79.5 \, \delta \xi \\ f_4 = - 0.34 + 502.2 \, \delta x + 158.8 \, \delta \xi, & f_8 = - 1.82 - 55.7 \, \delta x - 102.0 \, \delta \xi \end{array} \quad F)$$

womit also die durch die Gleichung 25) (pag. 369) verlangte Form hergestellt erscheint. Die Relation 26) (pag. 369) ergibt also mit diesen Zahlen:

$$[ff] = 10''4 + \overline{5.9190} \, \delta x^2 + \overline{5.3830} \, \delta \xi^2, \quad G)$$

wobei die Coëfficienten logarithmisch verstanden und in Bogensekunden angesetzt sind; sie sind also in der That nichts anderes als die entsprechenden Quadratsummen der in $F)$ enthaltenen Zahlen, wobei jedoch die aus den Gleichungen resultirenden Werthe von f_1 und f_5 dem Gewichte entsprechend mit 3 multiplicirt wurden. Die Ermittlung dieser Coëfficienten kann aber viel einfacher aus den Zahlen der Gleichung α (pag. 455) erhalten werden, denn der Coëfficient von p in der ersten Gleichung ist einfach mit dem Quadrate des Homogenitätsfactors der Logarithmus des Factors ist daselbst angenommen 2.7920) zu multipliciren und gibt den obigen Coëfficienten von δx^2 , ebenso ist der Factor von q in der zweiten Gleichung zu behandeln (log Factor 3.1019), der dann den Factor von $\delta \xi^2$ finden lässt; es wird der Controle halber erwünscht sein, die Coëfficienten der Gleichung $G)$ auf beiden Wegen zu ermitteln.

Man wird vorerst sich über die Grenzen, über die man bei der Bestimmung der Grenzelemente wohl nicht hinauszugehen braucht, zu einigen haben; eine Ansicht der Gleichungen $F)$ zeigt wohl, dass ein Werth von $[ff]$, der etwa bei $100''$ liegt, keine grosse Wahrscheinlichkeit für sich in Anspruch nehmen kann; es wird also eine Vergrösserung der minimalen Fehlerquadrate ($10''4$) um $89''6$ wenig wahrscheinlich sein; um aber mit einer fast an die Gewissheit grenzenden Wahrscheinlichkeit die äussersten Grenzelemente zu erhalten, wollen wir die Vermehrung um den vierfachen Betrag als noch möglich in Betracht ziehen, daher $[ff]$ die Form geben:

$$[ff] = 10''4 + 358''4 \, n^2, \quad H)$$

für $n = \frac{1}{2}$, wird also die Summe der Fehlerquadrate $100''$, für $n = 1$ erreicht dieselbe den Werth $368''8$. Setzt man nach 27) (pag. 370):

$$\begin{aligned} \sqrt{358.4} \, n \sin N &= \overline{2.9595} \, dx \\ \sqrt{358.4} \, n \cos N &= \overline{2.6915} \, d\xi, \end{aligned}$$

also:

$$\left. \begin{aligned} n \sin N &= \overline{1.6823} \, dx \\ n \cos N &= \overline{1.4143} \, d\xi \end{aligned} \right\} \quad J,$$

und führt statt der beiden Unbekannten $d\xi$ und dx die Unbekannten n und N der Gleichung J) entsprechend ein, so ist die Summe der Fehlerquadrate nach G) (pag. 459):

$$[ff] = 10''^4 + 358''^4 n^2.$$

Für gleiche Werthe von n wird demnach die Summe der Fehlerquadrate den gleichen Werth erhalten, also, da die wahrscheinlichen Fehler der Unbekannten nur von der Fehlerquadratsumme abhängig sind Systeme, von gleicher Wahrscheinlichkeit (vergl. pag. 370) für jeden beliebigen Werth des Winkels N ergeben. Nach den obigen Betrachtungen kann man wohl als die obere Grenze für n die Einheit annehmen, da für diesen Werth die Darstellung der Beobachtungen ganz unbefriedigend ist; der Werth $n = 0$ führt auf das wahrscheinlichste System. Indem für den Winkel N die Peripherie in 8 Theile getheilt wurde und für n einmal der Werth $\frac{1}{2}$ und dann 1 substituirt wurde, erhielt man aus E) (pag. 458) 16 verschiedene Systeme der Coordinaten und Geschwindigkeiten, aus denen nach 34) (pag. 437) die Elemente abgeleitet wurden. Es seien die für 8 Punkte der Peripherie ermittelten Werthe einer Funktion bezeichnet durch $Y_0, Y_1 \dots Y_7$, so wird es ein leichtes sein, dieselben numerisch in eine periodische Funktion zu verwandeln; man erhält 5 Cosinus-Coëfficienten und 3 Sinus-Coëfficienten, die der vorgelegten Funktion die Gestalt geben:

$$E = c_0 + c_1 \cos N + c_2 \cos 2N + c_3 \cos 3N + c_4 \cos 4N \\ + s_1 \sin N + s_2 \sin 2N + s_3 \sin 3N.$$

Seien durch die obigen Y -Funktionen die acht Incremente dargestellt, die unter einer bestimmten Annahme für n (hier entweder 0.5 oder 1.0) irgend ein Element gegen den wahrscheinlichsten Werth erfährt, wenn N der Reihe nach die Werthe 0, 45°, 90° ... 315° annimmt, und bezeichnet weiter symbolisch:

$$\begin{array}{ll} (0.4) = Y_0 + Y_4 & (\frac{0}{4}) = Y_0 - Y_4 \\ (1.5) = Y_1 + Y_5 & (\frac{1}{5}) = Y_1 - Y_5 \\ (2.6) = Y_2 + Y_6 & (\frac{2}{6}) = Y_2 - Y_6 \\ (3.7) = Y_3 + Y_7 & (\frac{3}{7}) = Y_3 - Y_7 \end{array}$$

dann ist offenbar:

$$\begin{array}{ll} 4(c_0 + c_4) = (0.4) + (2.6), & 2(c_1 + c_3) = (\frac{0}{4}) \quad , \quad 2(s_1 + s_3) = \{(\frac{1}{5}) + (\frac{3}{7})\} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 4(c_0 - c_4) = (1.5) + (3.7), & 2(c_1 - c_3) = \{(\frac{1}{5}) - (\frac{3}{7})\} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 2(s_1 - s_3) = (\frac{2}{6}) \\ 4c_2 = (0.4) - (2.6), & 4s_2 = (1.5) - (3.7). \end{array}$$

Die Anlage der Rechnung stellt sich also wie folgt:

Y_0	Y_2	Y_1	Y_3	
Y_4	Y_6	Y_5	Y_7	
(0.4)	(1.5)	($\frac{1}{5}$)	($\frac{1}{5}$) — ($\frac{3}{7}$)	$\log \{ (\frac{1}{5}) - (\frac{3}{7}) \}$
(2.6)	(3.7)	($\frac{3}{7}$)	($\frac{1}{5}$) + ($\frac{3}{7}$)	$\log \{ (\frac{1}{5}) + (\frac{3}{7}) \}$
(0.4) + (2.6)		($\frac{0}{4}$)	$\{ (\frac{1}{5}) + (\frac{3}{7}) \} \frac{1}{\sqrt{2}}$	
(1.5) + (3.7)		$\{ (\frac{1}{5}) - (\frac{3}{7}) \} \frac{1}{\sqrt{2}}$	($\frac{2}{6}$)	
$8c_0$	$4c_2$	$4c_1$	$4s_1$	
$8c_4$	$4s_2$	$4c_3$	$4s_3$	

Man erhält so für $n = \frac{1}{2}$ und indem man statt (π) und φ die einen lineareren Charakter aufweisenden Elemente:

$$(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{\sin 1''} \sin (\pi)$$

$$(\psi) = \frac{\sin \varphi}{\sin 1''} \cos (\pi)$$

einführt, die folgenden Zahlen nach 34) (pag. 437):

	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
x	+4.2390745	+4.2377345	+4.2191222	+4.1946232	+4.1783888	+4.1799288	+4.1983412	+4.2228401
y	+0.4068504	+0.4069546	+0.4071240	+0.4072591	+0.4072810	+0.4071767	+0.4070074	+0.4068722
z	—0.0538326	—0.0538325	—0.0538338	—0.0538406	—0.0538440	—0.0538441	—0.0538407	—0.0538360
ξ	+0.0339747	+0.0283338	+0.0147156	+0.0010973	—0.0045435	+0.0010973	+0.0147156	+0.0283338
η	+0.4466499	+0.4467525	+0.4488795	+0.4517848	+0.4537666	+0.4536640	+0.4515371	+0.4486317
ζ	—0.1290112	—0.1290102	—0.1290070	—0.1290033	—0.1290015	—0.1290025	—0.1290058	—0.1290094

(Q)	182°59'14"18	182°59'15"05	182°59'11"63	182°59' 5"86	182°59' 1"14	182°59' 0"25	182°59' 3"77	182°59' 9"53
(Q)	16°11'33"52	16°10'43"86	16° 4'52"71	15°57'31"34	15°52'57"12	15°53'44"97	15°59'28"20	16° 6'51"33
(π)	242°15' 7"95	240°53'17"39	238°10'34"54	234°56'13"02	233°50'48"53	236°34' 2"51	240° 8'24"19	242° 5'37"13
φ	10°32'38"65	9°57'14"70	8°27' 5"74	6°55'38"73	6°15'19"24	6°48'58"73	8°18'37"47	9.51'43"85
(Φ)	—33404"31	—31150"50	—25758"31	—20363"16	—18146"89	—20430"18	—25854"90	—31220"53
(Ψ)	—17573"22	—17346"58	—15985"61	—14291"86	—13258"76	—13487"90	—14843"19	—16534"85
(L)	346°43'28"34	348° 4'37"82	351°19'17"69	354°32' 4"49	355°50'34"51	354°30'12"91	351°17'25"34	348° 3'50"71
μ	449"6879	450"8328	452"7368	453"6152	453"6484	453"4862	452"5279	450"6672

Daraus resultirt:

$$n = \frac{1}{2}$$

$$(L) = 351^{\circ}18'21''56 - 40''08 - 16414''08 \cos N - 40''05 \cos 2N + 1''00 \cos 3N - 0''00 \cos 4N$$

$$+ 56.14 \sin N - 16.12 \sin 2N - 0.03 \sin 3N$$

$$(\varphi) = -25866''53 + 15''44 - 7628''80 \cos N + 15''50 \cos 2N + 0''09 \cos 3N - 0''01 \cos 4N$$

$$+ 48.36 \sin N + 0.76 \sin 2N + 0.07 \sin 3N$$

$$(\psi) = -15413''51 - 1''74 - 2157''25 \cos N - 0''79 \cos 2N + 0''02 \cos 3N + 0''05 \cos 4N$$

$$- 571.23 \sin N - 1.94 \sin 2N - 0.01 \sin 3N$$

$$\begin{aligned}
 100\mu &= 45262''99 - 17''96 - 198''03 \cos N - 48''21 \cos 2N + 0''01 \cos 3N - 0''01 \cos 4N \\
 &\quad + 10.43 \sin N + 0.91 \sin 2N - 0.01 \sin 3N \\
 (\Omega) &= 182^{\circ}59'7''71 - 0.03 + 6''52 \cos N - 0''02 \cos 2N - 0''00 \cos 3N - 0''00 \cos 4N \\
 &\quad + 3.93 \sin N - 0.02 \sin 2N \\
 (i) &= 16^{\circ}2'10''04 + 2''84 + 558''21 \cos N + 2''43 \cos 2N - 0''01 \cos 3N - 0''00 \cos 4N \\
 &\quad + 162.25 \sin N + 1.54 \sin 2N + 0.00 \sin 3N
 \end{aligned}$$

Führt man nun dieselben Rechnungen aus unter der Annahme $n = 1$, so findet sich in ganz ähnlicher Weise:

$$\begin{aligned}
 n &= 1 \\
 (L) &= 351^{\circ}18'21''56 - 160''21 - 32810''44 \cos N - 159''94 \cos 2N + 7''96 \cos 3N + 0''08 \cos 4N \\
 &\quad + 112.11 \sin N - 64.42 \sin 2N - 0.25 \sin 3N \\
 (\Phi) &= -35806''53 + 61''70 - 15255''83 \cos N + 62''00 \cos 2N + 0''65 \cos 3N - 0''00 \cos 4N \\
 &\quad - 97.16 \sin N + 3.05 \sin 2N + 0.58 \sin 3N \\
 (P) &= -15413''51 + 6''98 - 4314''03 \cos N - 3''02 \cos 2N + 0''12 \cos 3N + 0''01 \cos 4N \\
 &\quad - 1142.36 \sin N - 7.77 \sin 2N + 0.17 \sin 3N \\
 100\mu &= 45262''99 - 191''66 - 395''66 \cos N - 192''68 \cos 2N + 0''22 \cos 3N + 0''06 \cos 4N \\
 &\quad + 20.82 \sin N + 3.69 \sin 2N - 0.11 \sin 3N \\
 (\Omega) &= 182^{\circ}59'7''71 - 0''12 + 13''05 \cos N - 0''08 \cos 2N - 0''00 \cos 3N + 0''00 \cos 4N \\
 &\quad + 7.87 \sin N - 0.09 \sin 2N + 0.01 \sin 3N \\
 (i) &= 16^{\circ}2'10''04 + 11''47 + 1116''65 \cos N + 9''74 \cos 2N + 0''05 \cos 3N + 0''00 \cos 4N \\
 &\quad + 324.58 \sin N + 6.18 \sin 2N + 0.07 \sin 3N.
 \end{aligned}$$

Rechnet man mit irgend einem dieser äussersten Grenzsysteeme die Darstellung der Orte direct siebenstellig, so wird man durchaus eine befriedigende Uebereinstimmung mit der aus den Differentialformeln abgeleiteten aus J und F) (pag. 459) erhalten, welche die Unsicherheit der siebenstelligen Rechnung kaum überschreitet; man leitet daraus den Schluss ab, dass in der That die hier getroffene Wahl der Elemente den Forderungen der Methode der *kleinsten Quadrate (linearer Zusammenhang) in fast unerwartet befriedigendem Maasse entspricht.

Bedenkt man, dass die obigen Formen für die Elemente nichts anderes sind, als die empirische Entwicklung derselben nach den Potenzen von $n \sin N$ und $n \cos N$, so wird man sofort einsehen, dass die mit geraden Vielfachen von N verbundenen Coëfficienten nur gerade Potenzen von n , die mit ungeraden verbundenen nur ungerade enthalten können; die niedrigste Potenz von n kann aber nicht kleiner sein, als der Factor von N . Mit Hilfe dieser Bemerkungen sieht man daher sofort ein, dass man den Elementen demnach die folgende Form ertheilen kann:

(153) Hilda.

Epoche 1875 Dec. 2.0 mittl. Berl. Zeit.

$$\begin{aligned}
 (L) &= 351^{\circ}18'21''56 + (-160''38 n^2 + 0''17 n^4) & + (-32834''08 n + 23''64 n^3) \cos N \\
 &\quad + (+112''34 n - 0''23 n^3) \sin N & + (-160''26 n^2 + 0''32 n^4) \cos 2N \\
 &\quad + (-64''49 n^2 + 0''08 n^4) \sin 2N & + 7''96 n^3 \cos 3N \\
 &\quad - 0''25 n^3 \sin 3N & + 0''08 n^4 \cos 4N
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\vartheta) &= -25806''53 + (+61''77 n^2 - 0''07 n^4) & + (-15258''20 n + 2''37 n^3 \cos N \\
 &+ (+96''59 n + 0''57 n^3) \sin N & + (+62''01 n^2 - 0''01 n^4) \cos 2 N \\
 &+ (+3''06 n^2 - 0''01 n^4) \sin 2 N & + 0''65 n^3 \cos 3 N \\
 &+ 0''58 n^3 \sin 3 N & + 0''00 n^4 \cos 4 N \\
 (\varphi) &= -15413''51 + (-6''93 n^2 - 0''05 n^4) & + (-4314''65 n + 0''62 n^3) \cos N \\
 &+ (-1142''51 n + 0''15 n^3) \sin N & + (-3''23 n^2 + 0''21 n^4) \cos 2 N \\
 &+ (-7''77 n^2 + 0''00 n^4) \sin 2 N & + 0''12 n^3 \cos 3 N \\
 &+ 0''17 n^3 \sin 3 N & + 0''01 n^4 \cos 4 N \\
 100\mu &= 45262''99 + (-191''89 n^2 + 0''23 n^4) & + (-396''19 n + 0''53 n^3) \cos N \\
 &+ (+20''87 n - 0''05 n^3) \sin N & + (-192''89 n^2 + 0''21 n^4) \cos 2 N \\
 &+ (+3''65 n^2 + 0''04 n^4) \sin 2 N & + 0''22 n^3 \cos 3 N \\
 &- 0''11 n^3 \sin 3 N & + 0''06 n^4 \cos 4 N \\
 (\varrho) &= 182^{\circ}59'7''71 + (-0''11 n^2 + 0''02 n^4) & + (+13''05 n + 0''00 n^3) \cos N \\
 &+ (+7''86 n + 0''01 n^3) \sin N & + (-0''08 n^2 + 0''00 n^4) \cos 2 N \\
 &+ (-0''09 n^2 + 0''00 n^4) \sin 2 N & + 0''00 n^3 \cos 3 N \\
 &+ 0''01 n^3 \sin 3 N & + 0''00 n^4 \cos 4 N \\
 (i) &= 16^{\circ}2'10''04 + (+11''33 n^2 + 0''14 n^4) & + (+1116''34 n + 0''31 n^3) \cos N \\
 &+ (+324''47 n + 0''11 n^3) \sin N & + (+9''73 n^2 + 0''01 n^4) \cos 2 N \\
 &+ (+6''15 n^2 + 0''03 n^4) \sin 2 N & + 0''05 n^3 \cos 3 N \\
 &+ 0''07 n^3 \sin 3 N & + 0''00 n^4 \cos 4 N .
 \end{aligned}$$

Die Summe der Fehlerquadrate ist nach II) (pag. 459):

$$[ff] = 10''4 + 358''4 n^2 .$$

die Darstellung der Orte (nach J) und F) (pag. 459):

$$\begin{array}{rcll}
 & \cos \beta \, \delta \lambda & & \\
 1875 \text{ Nov. } 4 & + 0.04 & - 1''76 n \cos N & + 3''27 n \sin N \\
 \text{» } 22 & - 0.30 & + 11.11 n \cos N & - 12.87 n \sin N \\
 \text{Dec. } 19 & + 0.54 & - 12.12 n \cos N & - 6.88 n \sin N \\
 \text{» } 30 & - 0.34 & + 6.12 n \cos N & + 10.44 n \sin N
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 & \delta \beta & & \\
 1875 \text{ Nov. } 4 & + 0''01 & - 1''00 n \cos N & - 0''35 n \sin N \\
 \text{» } 22 & - 0.70 & + 3.70 n \cos N & + 1.41 n \sin N \\
 \text{Dec. } 19 & + 2.47 & + 3.06 n \cos N & + 0.76 n \sin N \\
 \text{» } 30 & - 1.82 & - 3.93 n \cos N & - 1.16 n \sin N ,
 \end{array}$$

wobei zu bemerken ist, dass bei dem eminent linearen Charakter der eingeführten Funktionen die Uebereinstimmung in einer der siebenstelligen Rechnung nahe adäquaten Genauigkeit bis $n = 1$ hervortreten muss; für ein gleiches n erhält man bei beliebiger Wahl von N Systeme gleicher Wahrscheinlichkeit, für $n = 0$ das wahrscheinlichste System.

C. Anschluss der Elemente an die Beobachtungen mit genäherter Berücksichtigung der Principien der Methode der kleinsten Quadrate.

§ 1. Die Lambert'sche Gleichung.

Bevor ich an die Lösung der in diesem Abschnitte gestellten Aufgaben schreite, muss ich vorerst mehrer Entwicklungen ausführen, die für die folgenden Ableitungen nöthig sein werden, und vor Allem nehme ich die Lambert'sche Gleichung vor, die eine sehr merkwürdige und wichtige Relation aufstellt, welche zwischen der Sehne s , den umschliessenden Radienvectoren r und r' , und der grossen Halbachse a einerseits und der Zwischenzeit $(t' - t)$ andererseits besteht und von der ein Specialfall ($a = \infty$) bereits im ersten Bande (Euler'sche Gleichung I pag. 101) erhalten wurde.

Lässt man die XY -Ebene eines Coordinatensystemes mit der Bahnebene zusammenfallen und verlegt den Anfangspunkt desselben in den Sonnenmittelpunkt, so ist der Abstand zweier Punkte s , deren Coordinaten x, y , und x', y' sind, bestimmt durch:

$$s^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 . \quad 1)$$

Legt man nun die positive Achse in die Richtung des Perihels und gehören die beiden in Betracht gezogenen Punkte einer bestimmten Bahn an, so kann man auch setzen:

$$\begin{aligned} x &= r \cos v , & x' &= r' \cos v' \\ y &= r \sin v , & y' &= r' \sin v' , \end{aligned}$$

wo v und v' die zugehörigen wahren Anomalien vorstellen. Ich werde von nun ab die Entwicklungen mit Relationen durchführen, die für die Ellipse reell sind, für die Hyperbel aber imaginäre Beziehungen geben; da im Schlussresultate das Imaginäre eliminirt erscheint, so hat man unmittelbar der Rechnung zugängliche Resultate erhalten, die für alle Kegelschnitte gleichmässige Giltigkeit haben, da man mit dem Imaginären bekanntlich alle Operationen mit derselben Berechnung durchführen kann, wie mit den reellen Grössen.

Es ist nach I pag. 48:

$$r \cos v = a (\cos E - e) , \quad r \sin v = a \cos \varphi \sin E ,$$

wo E die excentrische Anomalie, $e = \sin \varphi$ die Excentricität vorstellt; man hat also für 1):

$$s^2 = a^2 (\cos E' - \cos E)^2 + a^2 \cos^2 \varphi (\sin E' - \sin E)^2 .$$

Setzt man also (wie I pag. 218):

$$g = \frac{1}{2} (E' - E) , \quad G = \frac{1}{2} (E' + E) ,$$

so erhält man sofort:

$$s^2 = 4 a^2 \sin^2 g (1 - e^2 \cos^2 G) . \quad 2)$$

Führt man nun mittelst der Relation

$$e \cos G = \cos h$$

den Hilfswinkel h ein, so kann man an denselben die willkürliche, aber zulässige Bestimmung knüpfen, dass derselbe stets im ersten oder zweiten Quadranten zu nehmen ist, was mit der Bedingung zusammenfällt, dass $\sin h$ stets positiv wird; die Gleichung 2) (pag. 464) erhält dadurch die einfachere Gestalt:

$$s = 2a \sin g \sin h, \quad 3)$$

in welcher Gleichung s stets positiv angenommen ist; das Product $a \sin g$ hat auch in der That dieses Zeichen. Für die Radienvectoren (I pag. 48) kann weiter gesetzt werden:

$$(r + r') = a(1 - \cos E) + a(1 - \cos E') = 2a(1 - \cos g \cos h); \quad 4)$$

setzt man noch überdiess:

$$\left. \begin{aligned} h - g &= \delta \\ h + g &= \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad 5)$$

so gehen die Gleichungen 3) und 4) über in:

$$\begin{aligned} s &= -a \cos \varepsilon + a \cos \delta \\ r + r' &= 2a - a \cos \delta - a \cos \varepsilon, \end{aligned}$$

und es wird demnach:

$$\left. \begin{aligned} r + r' + s &= 2a(1 - \cos \varepsilon) = 4a \sin \frac{1}{2} \varepsilon^2 \\ r + r' - s &= 2a(1 - \cos \delta) = 4a \sin \frac{1}{2} \delta^2 \end{aligned} \right\} \quad 6)$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \varepsilon^2 &= \frac{r + r' + s}{4a} \\ \sin \frac{1}{2} \delta^2 &= \frac{r + r' - s}{4a} \end{aligned} \right\} \quad 7)$$

Zählt man die mittlere Anomalie M von der Zeit des Perihels aus, so bestehen bekanntlich, wenn die Masse vernachlässigt wird, die Relationen:

$$M = \frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}}, \quad M' = \frac{kt'}{a^{\frac{3}{2}}},$$

und es wird somit:

$$\frac{k(t' - t)}{a^{\frac{3}{2}}} = M' - M = E' - e \sin E' - E + e \sin E,$$

oder:

$$\frac{k(t' - t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2 \sin g \cos h = 2g - \sin \varepsilon + \sin \delta \quad 8,$$

also schliesslich:

$$k(t' - t) = a^{\frac{3}{2}} \{ (\varepsilon - \sin \varepsilon) - (\delta - \sin \delta) \}. \quad 9$$

Die Gleichung 9) in Verbindung mit den Gleichungen 7) enthält die Lösung des vorgelegten Problems: da aber die Bestimmung von δ und ε aus den Gleichungen 7) wegen der quadratischen Form derselben in doppelter Weise vorgenommen werden kann, je nachdem man das positive oder das negative Zeichen wählt, so könnte auf den ersten Blick eine vierfache Lösung möglich erscheinen. Allein nach 5) ist ε durch die Summe zweier Bogen bestimmt, die einerseits durch die Voraussetzung über h , andererseits in Folge der Annahme, dass der Himmelskörper nicht mehr als einen Umlauf vollendet hat, niemals grösser als 180° angenommen

werden darf. Es wird also $\frac{1}{2}\varepsilon$ stets im ersten oder zweiten Quadranten liegen und demnach für $\sin \frac{1}{2}\varepsilon$ stets der positive Werth angenommen werden dürfen; allerdings bleibt die Bestimmung von h insoweit zweifelhaft, dass noch zu unterscheiden ist, ob man den Bogen h oder $180-h$ wählen soll, und in der That bedingt dieser Umstand eine doppelte Lösung, die übrigens für die hier folgenden Entwicklungen, bei welchen der Werth $\sin \frac{1}{2}\varepsilon$ unmittelbar Verwendung findet, ohne Bedeutung ist.

Man hat weiter nach (I pag. 48):

$$\begin{aligned}\sqrt{r} \sin \frac{1}{2}v &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2}E, & \sqrt{r'} \sin \frac{1}{2}v' &= \sqrt{a(1+e')} \sin \frac{1}{2}E' \\ \sqrt{r} \cos \frac{1}{2}v &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2}E, & \sqrt{r'} \cos \frac{1}{2}v' &= \sqrt{a(1-e')} \cos \frac{1}{2}E',\end{aligned}$$

woraus durch entsprechende Multiplication und Addition folgt:

$$\sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2}(v'-v) = a \cos \frac{1}{2}(E'-E) - ae \cos \frac{1}{2}(E'+E) = a(\cos g - \cos h),$$

oder weiters unmittelbar die Gleichung:

$$\sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2}(v'-v) = 2a \sin \frac{1}{2}\delta \sin \frac{1}{2}\varepsilon \quad 10)$$

resultirt.

Da die bisherigen Entwicklungen der Bedeutung der Buchstaben nach für die Ellipse gelten, also a positiv ist, da ferner $\sqrt{rr'}$ stets positiv vorausgesetzt wird und den obigen Bemerkungen gemäss auch für $\sin \frac{1}{2}\varepsilon$ das positive Vorzeichen in Anspruch genommen wird, so resultirt aus der Gleichung 10), dass $\sin \frac{1}{2}\delta$ stets mit $\cos \frac{1}{2}(v'-v)$ dasselbe Vorzeichen haben muss, d. h. $\sin \frac{1}{2}\delta$ ist positiv zu nehmen, wenn die heliocentrische Bewegung kleiner als 180° ist, dagegen negativ, wenn dieselbe zwischen die Grenzen 180° und 360° fällt.

So vorbereitet soll die Gleichung 9) (pag. 465) durch Reihenentwicklungen der Rechnung zugänglicher gemacht werden; denn da in den hier in Betracht kommenden Fällen ε und δ fast nothwendig mässig grosse Bogen sein werden, so wird die Bestimmung des Ueberschusses des Bogens über den Sinus in der hier hingeschriebenen Form ohne weitere Hilfsmittel, als die gewöhnlichen Logarithmentafeln, ziemlich misslich werden.

Um nun diesen Ueberschuss zu ermitteln, so soll derselbe in eine Reihe entwickelt werden, die entsprechend den Ausdrücken in 7) (pag. 465) nach Potenzen von $\sin \frac{1}{2}\varepsilon$ und $\sin \frac{1}{2}\delta$ geordnet sein soll; naturgemäss gestalten sich die Entwicklungen für beide Bogen ganz gleichmässig; ich werde die Entwicklung deshalb allgemein für den Bogen χ durchführen.

Es ist:

$$\sin \chi = 2 \sin \frac{1}{2}\chi \cos \frac{1}{2}\chi = 2 \sin \frac{1}{2}\chi (1 - \sin^2 \frac{1}{2}\chi);$$

setzt man also zur Abkürzung:

$$\sigma = \sin \frac{1}{2}\chi, \quad 11)$$

so gibt die Entwicklung von $\sin \chi$ nach Potenzen von σ :

$$\sin \chi = 2\sigma \left\{ 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\sigma^4 - \dots \right\} = 2\sigma - \sigma^3 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{4 \cdot 6 \dots 2n} \sigma^{2n+1}; \quad 12)$$

andererseits gibt die bekannte Reihe für $\arcsin x$:

$$\operatorname{arc} \sin x = x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^5 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^7 + \dots$$

Diese Reihe gilt nur, wenn $\sin x$ kleiner als die Einheit, somit der Bogen im ersten Quadranten zu nehmen ist; daraus resultirt, dass die unten folgenden Reihen nur mit der einen Lösung übereinkommen, wo $\sin \frac{1}{2} \varepsilon$ (vergl. oben pag. 466) im ersten Quadranten genommen wurde. Es ist also:

$$\frac{1}{2} \chi = \sigma + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sigma^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sigma^5 + \dots$$

oder

$$\chi = 2\sigma + \frac{1}{3} \sigma^3 + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \sigma^{2n+1}; \quad (13)$$

die Verbindung der Gleichungen 12) und 13) gibt also:

$$\chi - \sin \chi = \frac{4}{3} \sigma^3 + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2)} \sigma^{2n+1}; \quad (14)$$

führt man diese Relation in 9) (pag. 465) ein und beachtet, dass nach 7) (pag. 465):

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \varepsilon &= + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r+r'+s}{a}} \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r+r'-s}{a}} \end{aligned}$$

zu setzen ist, wo das obere Zeichen gilt, wenn die heliocentrische Bewegung kleiner, das untere, wenn dieselbe grösser als 180° ist, so folgt sofort die Lambert'sche Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} k(t' - t) &= \frac{1}{6} \left\{ (r+r'+s)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}} \right\} + \\ &+ \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} \left\{ \frac{(r+r'+s)^{\frac{5}{2}}}{a} \mp \frac{(r+r'-s)^{\frac{5}{2}}}{a} \right\} + \\ &+ \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^5} \left\{ \frac{(r+r'+s)^{\frac{7}{2}}}{a^2} \mp \frac{(r+r'-s)^{\frac{7}{2}}}{a^2} \right\} + \\ &+ \frac{1}{9} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2^7} \left\{ \frac{(r+r'+s)^{\frac{9}{2}}}{a^3} \mp \frac{(r+r'-s)^{\frac{9}{2}}}{a^3} \right\} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

in welcher Gleichung für jeden Kegelschnitt alle Zahlen reell bleiben; für die Ellipse wird $\frac{1}{a}$ positiv, für die Hyperbel negativ, für die Parabel Null.

Es würde höchst unbequem sein, diese Reihe von Fall zu Fall direct zu berechnen, besonders wenn der grossen Halbachse a kein allzu bedeutender Werth zukömmt; man kann die Rechnung indess leicht bequemer gestalten; setzt man nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r+r'+s}{4a} &= S, \quad \frac{r+r'-s}{4a} = D \\ Q_s &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} S + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} S^2 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} S^3 + \dots \right\}, \\ Q_d &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} D + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} D^2 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} D^3 + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

so geht die Gleichung 15) (pag. 467) über in:

$$k(t' - t) = (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} Q_s \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}} Q_d. \quad (17)$$

Da die Reihen für Q_s und Q_d vollkommen gleich gebaut sind, so wird sich leicht eine Tafel rechnen lassen, aus welcher man, mit dem Argumente S oder D eingehend, den Werth von Q_s und Q_d sofort erhält. Es ist klar, dass sich die Ausdrücke für Q_s und Q_d auch in geschlossener Form darstellen lassen; man hat nämlich unter Berücksichtigung der früher gegebenen Relationen:

$$Q_s = \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{8 \sin \frac{1}{2} \varepsilon^3}, \quad Q_d = \frac{\delta - \sin \delta}{8 \sin \frac{1}{2} \delta^3},$$

welche Gleichungen eine interessante Beziehung auf die von Gauss aufgestellte Gleichung (I pag. 191) enthalten.

Herr F. K. Ginzl hat die Logarithmen der Q -Funktionen nach der oben gegebenen Reihe mit dem Argumente $A = \frac{r + r' \pm s}{4a}$ sorgfältig neunstellig berechnet und in eine Tafel gebracht; diese Tafel findet sich auf sieben Stellen abgekürzt als Tafel XVII diesem Werke angehängt; dieselbe gibt mit dem Argumente $\frac{r + r' + s}{4a}$

den Logarithmus von Q_s , und mit dem Argumente $\frac{r + r' - s}{4a}$ den Logarithmus von Q_d für jeden Tausendtheil des Argumentes. Die Grenzen des Argumentes sind -0.25 und 0.25 und zwar gehören die negativen Argumente der Hyperbel, die positiven der Parabel an. Die Grenzen der Tafel werden wohl selbst für die Bahnen der Kometen von kurzer Umlaufszeit kaum jemals überschritten werden.

Zu der Gleichung 17) ist zu bemerken, dass dieselbe bei kurzen Zwischenzeiten sich für die Rechnung unbequem gestaltet (vergl. I pag. 101 § 4); doch würde es bei dem seltenen Gebrauche, den man bei sehr kurzen Zwischenzeiten von diesen Formeln machen wird, kaum der Mühe lohnen, entsprechende Reihenentwickelungen vorzunehmen und die für solche Fälle nöthigen ziemlich ausgedehnten Hilfstafeln zu construiren; doch soll hier ein Näherungsausdruck aufgestellt werden, welcher sich bei grossen Werthen von a für die Rechnung recht bequem gestaltet und bloss Grössen vernachlässigt von der Ordnung: »dritte Potenz der Sehne in die zweiten und höheren Potenzen des reciproken Werthes der grossen Achse«: derselbe ist also unabhängig von der Annahme, dass s klein ist, wird aber, da man von diesem Ausdrucke nur Gebrauch machen wird, wenn s einen mässigen Werth hat, selbst bei nicht ganz grossen Werthen von a eine sehr befriedigende Annäherung gewähren. Entwickelt man, um diesen Ausdruck zu erhalten, die Lambert'sche Gleichung 15) (pag. 467), indem man naturgemäss nur das obere Zeichen berücksichtigt, nach Potenzen von:

$$\beta = \frac{s}{r + r'}, \quad (18)$$

so erhält man leicht die folgenden Reihen, bei welchen ich, um das Gesetz des Fortschreitens leichter kenntlich zu machen, jeden einzelnen Factor mit dem Vorzeichen eingeführt habe.

$$\begin{aligned}
 k(t' - t) &= \frac{1}{2} (r + r')^{\frac{3}{2}} \beta \left\{ 1 + \frac{1 \cdot -1}{4 \cdot 6} \beta^2 + \frac{1 \cdot -1 \cdot -3 \cdot -5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \beta^4 + \dots \right\} + \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} \frac{(r + r')^{\frac{5}{2}}}{a} \beta \left\{ 1 + \frac{3 \cdot +1}{4 \cdot 6} \beta^2 + \frac{3 \cdot +1 \cdot -1 \cdot -3}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \beta^4 + \dots \right\} + \\
 &+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^5} \frac{(r + r')^{\frac{7}{2}}}{a} \beta \left\{ 1 + \frac{5 \cdot +3}{4 \cdot 6} \beta^2 + \frac{5 \cdot +3 \cdot +1 \cdot -1}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \beta^4 + \dots \right\} + \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

Ordnet man nach Potenzen von β und setzt der Kürze halber:

$$\gamma = \frac{r + r'}{4a} \quad 19)$$

so erhält man:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{2k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}} &= \beta \left\{ 1 + \frac{1}{2} \gamma + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \gamma^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \gamma^3 + \dots \right\} \\
 &- \frac{1}{4 \cdot 6} \beta^3 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \gamma - \frac{45}{8} \gamma^2 - \dots \right\} \\
 &- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \beta^5 \left\{ 1 - \frac{3}{10} \gamma + \dots \right\} \\
 &- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} \beta^7 \left\{ 1 - \dots \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad 20)$$

Man wird leicht bemerken, dass der Coëfficient von β mit $(1 - \gamma)^{-\frac{1}{2}}$ identisch ist; setzt man für β den Werth aus 18) ein, so kann man, nachdem man beiderseits mit $(1 - \gamma)^{\frac{3}{2}}$ multiplicirt hat, statt der Gleichung 20) nahe richtig schreiben:

$$2k(t' - t) \left(\frac{1 - \gamma'}{r + r'} \right)^{\frac{3}{2}} = s \left(\frac{1 - \gamma'}{r + r'} \right) - \frac{1}{4 \cdot 6} s^3 \left(\frac{1 - \gamma'}{r + r'} \right)^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} s^5 \left(\frac{1 - \gamma'}{r + r'} \right)^5 - \dots \quad 21)$$

hierbei ist also der Coëfficient von β in der Gleichung 20) vollständig berücksichtigt; für den Coëfficienten von β^3 findet das mit γ multiplicirte Glied noch Berücksichtigung, während in demselben die höheren Potenzen von γ schon andere Coëfficienten erhalten; für die übrigen Potenzen, von β^5 angefangen, finden nur die von γ freien Glieder vollständige Berücksichtigung. Der Ausdruck 21) schliesst sich also dem wahren Werthe innerhalb der oben bezeichneten Vernachlässigungen an. Für die Parabel ist $\gamma = 0$, man hat daher für dieselbe den Ausdruck:

$$\frac{2k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}} = \frac{s}{r + r'} - \frac{1}{4 \cdot 6} \left(\frac{s}{r + r'} \right)^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \left(\frac{s}{r + r'} \right)^5 - \dots \quad 22)$$

so dass beide Formelsysteme identisch werden, wenn man nur anstatt $(r + r')$ in der letzten Formel $\frac{r + r'}{1 - \gamma'}$ setzt. Eine Reihe von der Form 22) ist, wie dies Encke gezeigt hat (vergl. I pag. 101), summirbar, und von demselben in eine Tafel gebracht worden, die mit dem Argumente:

$$\eta = \frac{2k(t' - t)}{(r + r')^{\frac{3}{2}}}$$

und mit Hilfe der μ -Tafel (Band I Tafel VIII pag. 334) für s den Werth gibt:

$$s = \frac{2k(t' - t)}{\sqrt{r + r'}} \mu.$$

Man wird also die von Encke gegebenen Hilfsmittel hier ohne Weiteres benützen dürfen und nur zu setzen haben:

$$\left. \begin{aligned} q + q' &= \frac{r + r'}{1 - \frac{r + r'}{4a}} \\ l &= \frac{2k(t' - t)}{(q + q')^{\frac{3}{2}}} \\ s &= \frac{2k(t' - t)}{\sqrt{q + q'}} \mu \end{aligned} \right\} \quad 23)$$

womit also mit meist hinreichender Näherung die Berechnung der Sehne aus der Lambert'schen Gleichung mit Bequemlichkeit möglich ist. Der Ausdruck wird in jenen Fällen, wo gleichzeitig s und $\frac{1}{a}$ klein sind, sehr genaue Werthe geben.

Man könnte durch Einführung weiterer Transformationen, ohne allzusehr an Bequemlichkeit der Rechnung zu verlieren, die Formeln 23) noch mehr an die strengen Werthe annähern, doch wird in jenen Fällen, wo die Formeln 23) nicht mehr ausreichen sollten, stets die Benützung der Formel 17) hinreichend bequem und sicher sein. Wir wollen diese Formeln durch ein Beispiel erläutern. Es sei $a = 100$, $r = 0.8950000$, $r' = 0.9050000$, $s = 0.10000000$; dann findet sich nach 17) (pag. 468) nach einer strengen 9stelligen Rechnung:

$$\log 2k(t' - t) = 9.1285602.$$

Es stellt sich nun die Rechnung nach 23) wie folgt:

$$\begin{aligned} (r + r') &= 0.2552725 \\ \log \left(1 - \frac{r + r'}{4a} \right) &= 9.9980413 \\ q + q' &= 0.2572312 \\ \sqrt{q + q'} &= 0.1286156 \\ (q + q')^{\frac{3}{2}} &= 0.3858468 \\ l &= 0.055299 \\ \mu &= 0.0000554 \quad (\text{Tafel VIII des ersten Bandes}) \\ 2k(t' - t) : \sqrt{q + q'} &= 9.9999446 \\ \log s &= 9.0000000. \end{aligned}$$

Die Uebereinstimmung mit der ursprünglichen Annahme ist somit eine vollständige.

Die Lambert'sche Gleichung wird in der Folge noch eine wesentliche Verwendung darin finden, dass, wenn die Radienvectoren, die Sehne und die Zwischenzeit gegeben sind, dieselbe zur Bestimmung der grossen Achse verwerthet werden kann; es stellt sich nämlich als höchst zweckmässig heraus, bei nahezu parabolischen Bahnen dieses Element zuerst zu bestimmen; in diesem Falle wird auch die Convergenz der Reihe eine so bedeutende sein, dass man mit den vier ersten Gliedern derselben ausreicht; setzt man der Kürze halber die nunmehr völlig bekannten Grössen:

$$\left. \begin{aligned} 80 \{ k (t' - t) &= \frac{1}{6} [(r + r' + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}}] \} = A \\ \{ (r + r' + s)^{\frac{5}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{5}{2}} \} &= B \\ \frac{15}{112} \{ (r + r' + s)^{\frac{7}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{7}{2}} \} &= C \\ \frac{25}{1152} \{ (r + r' + s)^{\frac{9}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{9}{2}} \} &= D \\ \frac{175}{45056} \{ (r + r' + s)^{\frac{11}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{11}{2}} \} &= E \end{aligned} \right\} \quad 24)$$

so stellt sich die Lambert'sche Gleichung, wie folgt:

$$A = B \cdot \frac{1}{a} + C \cdot \frac{1}{a^2} + D \cdot \frac{1}{a^3} + E \cdot \frac{1}{a^4} + \dots$$

Setzt man also weiter:

$$\frac{A}{B} = \alpha, \quad -\frac{C}{B} = \beta, \quad -\frac{D}{B} = \gamma, \quad -\frac{E}{B} = \delta \dots \quad 25)$$

und kehrt die Reihe um, so findet man sofort für $\frac{1}{a}$ den Ausdruck:

$$\frac{1}{a} = \alpha + \alpha^2 \beta + \alpha^3 \{ 2 \beta^2 + \gamma \} + \alpha^4 \{ 5 \beta^3 + 5 \beta \gamma + \delta \} + \dots \quad 26)$$

Hierbei wird man beachten, dass eine Lösung, die einen genauen Werth für a gibt, in den hier in Betracht kommenden Fällen aus leicht begreiflichen Gründen nicht möglich ist. Sollte dieser Ausdruck sich als nicht ausreichend erweisen, wenn a nicht gross ist, so wird eine mit diesem Näherungswerthe ausgeführte versuchsweise Lösung mit Hilfe der Gleichung 17) alles Erforderliche erreichen lassen.

Schliesslich muss noch erwähnt werden, dass die Differentiation der Lambert'schen Gleichung nach der Zeit auf geschlossene, für die Rechnung bequeme Ausdrücke hinführt, die in der Folge Verwendung finden.

Differentiirt man die Gleichung 9) (pag. 465) nach den mit der Zeit veränderlichen Grössen, so erhält man:

$$\begin{aligned} k dt &= a^{\frac{3}{2}} \{ (1 - \cos \varepsilon) d\varepsilon - (1 - \cos \delta) d\delta \} \\ &= \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} \tan \frac{1}{2} \varepsilon d(r + r' + s) - \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} \tan \frac{1}{2} \delta d(r + r' - s) \end{aligned}$$

oder mit Benützung der in 16) eingeführten Symbole, nämlich:

$$\begin{aligned} S &= \frac{r + r' + s}{4a}, \quad D = \frac{r + r' - s}{4a} \\ + k dt &= \frac{\sqrt{r + r' + s}}{\sqrt{1 - S}} d(r + r' + s) \mp \frac{\sqrt{r + r' - s}}{\sqrt{1 - D}} d(r + r' - s), \quad 27) \end{aligned}$$

wobei die Zeichenunsicherheit, die durch die Einführung der Wurzelgrössen entsteht, den früheren Auseinandersetzungen gemäss zu beheben ist. In dem Ausdrucke 27) sind alle Wurzeln ihrem absoluten, positiven Werthe nach zu nehmen; das obere Zeichen gilt für heliocentrische Bewegungen, die kleiner sind als 180° , das untere für jene, die zwischen 180° und 360° liegen.

§ 2. Ableitung der Elemente aus zwei heliocentrischen Orten.

Die Ableitung der Elemente aus zwei heliocentrischen Orten ist der Hauptsache nach bereits im ersten Bande dieses Werkes (I pag. 221 und 226) erledigt worden, nur wird der Umstand, dass bei der hier in Frage kommenden Lösung häufig sehr grosse heliocentrische Bogen in Betracht kommen, während dort hauptsächlich die Fälle der ersten Bahnbestimmung mit mässigen Bogen berücksichtigt wurden, gewisse Aenderungen bedingen; ausserdem werde ich hier für nahezu parabolische Bahnen völlig andere Vorschriften angeben. Obgleich die im ersten Bande gegebenen Methoden auch hier in der Regel eine sehr bequeme Anwendung gestatten, da selbst bei sehr grossen heliocentrischen Bogen die Grösse $x = \frac{m}{r^2} - l$ klein bleibt, so bedingt doch häufig der Umstand, dass die zur bequemen Lösung der Aufgabe nöthige Tafel IX des ersten Bandes oft nicht ausreicht, den Nachtheil, dass die cubische Gleichung:

$$h = \frac{(\eta - 1) \eta^2}{\eta + \frac{1}{\eta}}$$

in diesem Falle ohne Zuhilfenahme der oben genannten Tafel gelöst werden muss.

Zunächst wird man aus den beiden heliocentrischen Orten die Bahnlage ableiten; sind l und l' die beiden heliocentrischen Längen, b und b' die beiden heliocentrischen Breiten, so ist nach den bekannten Formeln (vergl. I pag. 142), die Neigung i und der Knoten Ω bestimmt durch:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} i \sin (l - \Omega) &= \operatorname{tang} b \\ \operatorname{tang} i \cos (l - \Omega) &= \frac{\operatorname{tang} b' - \operatorname{tang} b \cos (l' - l)}{\sin (l' - l)} \end{aligned} \right\} \quad \text{I)}$$

wobei i im ersten Quadranten anzunehmen, also $\operatorname{tang} i$ positiv ist bei directer Bewegung, im zweiten Quadranten dagegen (also $\operatorname{tang} i$ negativ) bei retrograder Bewegung. Die Argumente der Breite u und u' finden unter allen Umständen eine sichere Bestimmung durch:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} u &= \frac{\sin (l - \Omega) \cos i + \operatorname{tg} b \sin i}{\cos (l - \Omega)} \\ \operatorname{tang} u' &= \frac{\sin (l' - \Omega) \cos i + \operatorname{tg} b' \sin i}{\cos (l' - \Omega)} \end{aligned} \right\} \quad \text{II)}$$

Der Quadrant, in welchem u zu nehmen ist, bestimmt sich leicht nach der Regel, dass der Sinus das Zeichen des Zählers, der Cosinus das Zeichen des Nenners hat.

Die Rechnung nach dieser Formel ist in der That nicht unbequem, da der Additionslogarithmus für beide Fälle gleich ist; es ist nämlich das Argument für denselben entweder $\operatorname{tang} i^2$ oder $\operatorname{cotg} i^2$. Die Bestimmung der Grösse f kann zur Controle leicht direct aus den heliocentrischen Coordinaten erhalten werden. Aus der Relation:

$$\cos 2f = \sin b \sin b' + \cos b \cos b' \cos (l' - l)$$

ergeben sich leicht folgende Ausdrücke für die Berechnung von f :

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} (t' - t) \sqrt{\cos b \cos b'} &= p \sin P \\ \sin \frac{1}{2} (b - b') &= p \cos P \\ \cos \frac{1}{2} (t' - t) \sqrt{\cos b \cos b'} &= q \sin Q \\ \sin \frac{1}{2} (b' + b) &= q \cos Q \\ \operatorname{tang} f &= \pm \frac{p}{q} \end{aligned} \right\} \text{IIIa)}$$

Bei der Ermittlung von Bahnen mit nahezu parabolischem Charakter wird man ausser den Radienvectoren r und r' auch noch den Werth der Sehne kennen, welche die Endpunkte der Radienvectoren verbindet; dann wird man $\operatorname{tang} f$ einfacher rechnen können (vergl. I pag. 143) nach:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{2} (r + r' + s) \\ \operatorname{tang} f &= \pm \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{r'}{\Sigma}\right) \left(1 - \frac{r}{\Sigma}\right)}{\left(1 - \frac{s}{\Sigma}\right)}} \end{aligned} \right\} \text{IIIaa)}$$

wobei die Formeln so angesetzt sind, dass dieselben sich bei der Anwendung von Subtractionslogarithmen besonders bequem gestalten, doch ist die erste Form sicherer, wenn $2f$ nahe an 180° liegt.

Ist $(t' - t)$ die Zwischenzeit in Sonnentagen, k die Constante des Sonnensystemes (I pag. 45), so wird sich nunmehr die Rechnung verschieden gestalten, je nach dem Charakter der Bahnen. Für Bahnen mit mässiger Excentricität wird man rechnen:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= k (t' - t) \\ m &= \frac{\tau^2}{\{2 \cos f \sqrt{rr'}\}^3} \\ \operatorname{tang} (45 + \omega) &= \sqrt[4]{\frac{r'}{r}} \\ l &= \frac{\sin \frac{1}{2} f^2 + \operatorname{tg} 2 \omega^2}{\cos f} \end{aligned} \right\} \text{IVa)}$$

Ist nun der heliocentrische Bogen mässig, so dass die Differenz der excentrischen Anomalien ($2g$) 60° nicht wesentlich überschreitet, so wird man, indem ξ aus der Tafel X des ersten Bandes mit dem aus genäherten Elementen (sind diese nicht vorhanden, so wird man in der ersten Näherung $\xi = 0$ nehmen) abzuleitenden Argumente:

$$x = \sin \frac{1}{2} g^2$$

entlehnt wird, rechnen:

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{m}{\eta^2 + l + \xi} \\ x &= \frac{m}{\eta^2} - l \\ \sin \frac{1}{2} g^2 &= x \end{aligned} \right\} \text{Va)}$$

wobei $\log \eta^2$ mit dem Argumente h aus der Tafel IX des ersten Bandes (vergl. I pag. 195) zu entnehmen ist; mit dem so erhaltenen Werthe von x wird nöthigenfalls

die Rechnung zu wiederholen sein, wenn eine Aenderung von x gegen die ursprüngliche Annahme eine Aenderung in ξ bedingen sollte.

Ist der heliocentrische Bogen und somit in dem vorgelegten Falle auch die Differenz der excentrischen Anomalien gross, so wird man mit Hilfe genäherter Werthe von g (vergl. I pag. 191) die folgenden Gleichungen durch Versuche lösen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} \\ \beta &= l + \sin \frac{1}{2} g^2 \\ m &= (\alpha\beta + 1)^2 \beta; \end{aligned} \right\} \text{Vaa)}$$

ist der Werth von g ermittelt, welcher der dritten Gleichung völlig genügt, so rechnet man noch:

$$\eta = \alpha\beta + 1$$

welche Grösse bei den folgenden Rechnungen als Controle benützt werden kann; die eben hingeschriebenen Formeln können indess, wenn die heliocentrische Bewegung nahe 180° ist, in der Anwendung sehr unsicher werden. Wenn nun dieser Fall auch in den hier in Betracht kommenden Fällen aus anderen Gründen ausgeschlossen ist, so dürfte es doch angenehm sein, hier diejenigen Abänderungen kennen zu lernen, die man in einem solchen Falle eintreten lassen muss. Die Rechnung der Grösse α bleibt unverändert. Multiplicirt man die letzte Gleichung in Vaa) beiderseits mit $\cos f^3$, so erhält man:

$$m \cos f^3 = \{\alpha\beta \cos f + \cos f\}^2 \beta \cos f;$$

setzt man also, wenn man auf die Bedeutung der Grössen m und l zurückgeht (vergl. I pag. 189):

$$\begin{aligned} m' &= \frac{r^2}{\{2\sqrt{rr'}\}^3} \\ \beta' &= \sin \frac{1}{2} f^2 + \tan 2\omega^2 + \sin \frac{1}{2} g^2 \cos f, \end{aligned}$$

so wird die durch Versuche aufzulösende Gleichung die Form haben:

$$m' = (\alpha\beta' + \cos f)^2 \beta'$$

die nunmehr von dem bemerkten Nachtheile frei ist. Ist also g durch eine der eben angeführten Methoden bekannt, so stellt sich die weitere Rechnung der Elemente wie folgt (vergl. I pag. 218 u. f. f.):

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} (F - G) \cos \frac{1}{2} q (\gamma')^2 &= \cos \frac{1}{2} (f + g) \tan 2\omega \\ \cos \frac{1}{2} (F - G) \cos \frac{1}{2} q (\gamma')^2 &= \sin \frac{1}{2} (f + g) \sec 2\omega \\ \sin \frac{1}{2} (F + G) \sin \frac{1}{2} q (\gamma')^2 &= \cos \frac{1}{2} (f - g) \tan 2\omega \\ \cos \frac{1}{2} (F + G) \sin \frac{1}{2} q (\gamma')^2 &= \sin \frac{1}{2} (f - g) \sec 2\omega \end{aligned} \right\} \text{VIa)}$$

$$\text{Probe: } (\gamma')^2 = \frac{1}{r} \frac{2m \cos f}{r}$$

$$\left. \begin{aligned} v' &= F + f, & E' &= G + g \\ v &= F - f, & E &= G - g \\ \pi &= u + \Omega - v = u' + \Omega - v' \end{aligned} \right\} \text{VIIa)}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } \tan \frac{1}{2} v &= \tan \frac{1}{2} E \tan (45^\circ + \frac{1}{2} q) \\ \tan \frac{1}{2} v' &= \tan \frac{1}{2} E' \tan (45^\circ + \frac{1}{2} q) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 e'' &= \sin q : \sin i'' \\
 M &= E - e'' \sin E \\
 M' &= E' - e'' \sin E' \\
 \mu &= \frac{M' - M}{t' - t} \\
 a^3 &= \frac{k''}{\mu} \\
 \log k'' &= 3.5500066 \\
 \text{Probe : } p &= \left(\frac{r r' \sin 2f}{r} \right)^2 \\
 a &= p \sec^2 q
 \end{aligned} \right\} \text{VIII a)}$$

wobei aber in der Regel der für a aus der Probe erhaltene Werth minder genau ist.

Für nahezu parabolische Bahnen setze ich vorerst voraus, dass der Werth der halben grossen Achse a bekannt sei, eine Annahme, die in diesen Fällen erlaubt ist; denn entweder ist in einer der folgenden Methoden schon eine Annahme über diese Grösse gemacht, oder man kann dieselbe leicht durch die Gleichung 26) (pag. 471) erlangen; es stellt sich nunmehr die Aufgabe, alle Elemente direct aus den beiden heliocentrischen Orten und dem bekannten Werthe von a zu ermitteln.

Im Bande I findet sich auf pag. 190 eine zwischen den Gleichungen 5) und 6) stehende Relation angeführt, die nach einer einfachen Umsetzung lautet:

$$2a \sin g^2 = r + r' - 2 \cos g \cos f \sqrt{r r'}, \quad 1)$$

aus dieser Gleichung kann offenbar $\sin g^2$ bestimmt werden. Setzt man:

$$z = a \sin g^2, \quad 2)$$

so wird z unter allen Umständen eine positive Grösse sein, da für hyperbolische Bahnen a und $\sin g^2$ gleichzeitig negativ sind. Man erhält aus 1) zunächst durch Quadrirung:

$$\{2z - (r + r')\}^2 = 4 \cos^2 f r r' \left\{1 - \frac{z}{a}\right\}$$

oder

$$z^2 - \left(r + r' - \frac{r r' \cos^2 f}{a}\right) z = -\frac{1}{4} \{ (r + r')^2 - 4 r r' \cos^2 f \}.$$

Beachtet man, dass, wenn wie oben mit s die Sehne zwischen den beiden heliocentrischen Orten bezeichnet wird, der Klammerausdruck rechts vom Gleichheitszeichen mit s^2 identisch wird, da ja

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos 2f$$

ist, so gibt, wenn man zur Abkürzung

$$\zeta = (r + r') - \frac{r r' \cos^2 f}{a} \quad 3)$$

setzt, die Lösung der quadratischen Gleichung für z sofort den Werth

$$z = \frac{1}{2} \zeta \mp \frac{1}{2} \sqrt{\zeta^2 - s^2}$$

Vor Allem wird man bemerken, dass eine doppelte Lösung für z stattfindet; das obere Zeichen gilt, wenn die heliocentrische Bewegung kleiner, das untere, wenn dieselbe grösser als 180° ist, eine Entscheidung, die sich sofort durch die

Gleichung 1) rechtfertigt, unter dem Vorbehalte, dass $\cos g$ als eine stets positive Grösse angesehen wird, was in den hier in Betracht kommenden Fällen, wo g stets ein sehr kleiner Bogen sein wird, zutrifft. Die Berechnung von z vereinfacht sich sehr durch die folgende offenkundige Transformation:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= (r + r') - \frac{r r' \cos f^2}{a} \\ \frac{s}{\zeta} &= \sin \alpha \\ 2f &< 180^\circ & 2f > 180^\circ \\ z &= \zeta \sin \frac{1}{2} \alpha^2 & z = \zeta \cos \frac{1}{2} \alpha^2. \end{aligned} \right\} \text{IVb)}$$

Diese Formeln können in jenen Fällen, wo $2f$ nahe an 180° liegt, besonders unsicher werden, was sich durch die Einführung der Sehne s erklärt, die in solchen Fällen kein sicheres Maass für den Winkel $2f$ abgibt. Wenn auch, wie schon oben bemerkt wurde, diese Fälle sich aus anderen Gründen von der Betrachtung ausschliessen, so wird es doch erwünscht sein, sofort jene Abänderungen angegeben zu finden, die man in solchen Fällen eintreten lassen muss.

Behält man den Winkel f , der aus II) und III) (pag. 472, 473) stets mit genügender Sicherheit resultirt, in den Gleichungen bei, so findet sich leicht:

$$z = \frac{1}{2} \zeta - \cos f \sqrt{r r' \left\{ 1 - \frac{r + r'}{2a} + \frac{r r' \cos f^2}{4a^2} \right\}} \quad \text{IVbb)}$$

wobei der Wurzel Ausdruck stets positiv zu nehmen ist, da $\cos f$ selbst die Entscheidung über das Zeichen bringt; da die Berechnung von z nach dieser zweiten Form nicht wesentlich erschwert ist, so dürfte sich die Rechnung nach derselben zur Controle empfehlen.

Es hätte nun keine Schwierigkeit, die Grösse $x = \sin \frac{1}{2} g^2$ als Argument für die ξ -Tafel direct zu erhalten, und von da ab auf die Berechnung der Formeln Va) einzugehen, wenn nicht ein anderer Weg den Vorzug verdienen würde; ich werde demnach nur kurz auf die Ableitung von x aus z hinweisen.

Es wird sein:

$$\sin g^2 = 4 \sin \frac{1}{2} g^2 \cos \frac{1}{2} g^2;$$

man hat also mit Eliminirung des Imaginären sofort:

$$\frac{z}{a} = 4x(1-x)$$

wo x leicht durch eine quadratische Gleichung aus z bestimmt werden könnte, doch wird die indirecte Lösung in der Form:

$$x = \frac{z}{4a(1-x)}$$

bei der vorausgesetzten Kleinheit von x rascher und bequemer das Ziel erreichen lassen.

Ist z ermittelt, so kann die Bestimmung der übrigen Elemente in der folgenden Weise erlangt werden. Aus den Gleichungen (I pag. 48):

$$\begin{aligned}\sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E \\ \sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E \\ \sqrt{r'} \cos \frac{1}{2} v' &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E' \\ \sqrt{r'} \sin \frac{1}{2} v' &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E'\end{aligned}$$

folgt, wenn man das Product der zweiten und dritten Gleichung von dem Producte der ersten und vierten abzieht, und wie früher:

$$\begin{aligned}2f &= v' - v \\ 2g &= E' - E\end{aligned}$$

setzt, sofort:

$$a \sin g \sqrt{1-e^2} = \sqrt{rr'} \sin f; \quad 6)$$

berücksichtigt man, dass:

$$p = a \cos q^2 = a(1-e^2)$$

ist, so resultirt:

$$p = \frac{rr' \sin f^2}{z}. \quad \text{Vb)}$$

Auch die Bestimmung der Excentricität ist jetzt unmittelbar möglich; denn man erhält leicht aus 6):

$$\left. \begin{array}{ll} a \text{ positiv:} & a \text{ negativ:} \\ \frac{\sin f \sqrt{rr'}}{\sqrt{za}} = \sin \gamma & \frac{\sin f \sqrt{rr'}}{\sqrt{-za}} = \tan \gamma' \\ e = \cos \gamma & e = \sec \gamma' \\ 1-e = 2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2 & e-1 = 2 \sin \frac{1}{2} \gamma'^2 \sec \gamma' \\ \varepsilon = \frac{1-e}{1+e} = \tan^2 \frac{1}{2} \gamma^2 & \varepsilon = \frac{1-e}{1+e} = -\tan^2 \frac{1}{2} \gamma'^2 \end{array} \right\} \quad 7)$$

wobei die Berechnung des Unterschiedes von e gegen die Einheit und des Ausdruckes für ε deshalb besonders angeführt ist, weil die genaue Kenntniss dieser Werthe bisweilen erwünscht sein kann; doch werden sich leicht Formeln finden, durch welche die Rechnung noch bequemer gestaltet wird.

Nach der bekannten Polargleichung der Kegelschnitte ist:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1+e \cos v}{p} \\ \frac{1}{r'} &= \frac{1+e \cos v'}{p};\end{aligned}$$

wenn man also zur Abkürzung:

$$\frac{1}{2}(v+v') = F$$

setzt, so erhält man durch Addition und Subtraction:

$$\left. \begin{aligned}\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} &= \frac{2e}{p} \sin f \sin F \\ \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} &= \frac{2}{p} + \frac{2e}{p} \cos f \cos F;\end{aligned} \right\} \quad 8)$$

ersetzt man den Parameter in der ersten Gleichung durch den Werth aus Vb), so findet sich:

$$2ez \sin F = (r' - r) \sin f; \quad 9)$$

multipliziert man die zweite Gleichung in 8) beiderseits mit $\cos f$, so wird zunächst

$$\frac{r+r'}{rr'} \cos f = \frac{2 \cos f}{p} + \frac{2e \cos F}{p} - \frac{2e}{p} \sin^2 f \cos F;$$

ersetzt man im letzten Gliede $\frac{\sin^2 f}{p}$ nach der Gleichung Vb) durch $\frac{z}{rr'}$ und multiplicirt beiderseits mit rr' , so findet sich weiter:

$$2ez \cos F = - (r+r') \cos f + \frac{2(\cos f + e \cos F) rr'}{p};$$

man ist aber nach I pag. 188 Gleichung 2):

$$\cos f + e \cos F = \frac{p}{\sqrt{rr'}} \cos g;$$

wenn man also, um Imaginäres zu vermeiden

$$\cos g = \sqrt{1 - \frac{z}{a}}$$

setzt, so erhält man schliesslich:

$$2ez \cos F = 2 \sqrt{rr' \left(1 - \frac{z}{a}\right)} - (r+r') \cos f. \quad 10)$$

Man hat demnach zur Berechnung von F und $2ez$, welche letztere Grösse, da sie stets positiv ist, die Bestimmung des Quadranten von F ermöglicht, und zudem, da z bekannt, eine Bestimmung der Grösse e ergibt, die folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 2ez \sin F &= (r' - r) \sin f \\ 2ez \cos F &= 2 \sqrt{rr' \left(1 - \frac{z}{a}\right)} - (r+r') \cos f \\ v &= F - f \\ v' &= F + f \\ q &= \frac{p}{1+e} \\ 1-e &= \frac{q}{a} \\ \pi &= u + \Omega - v = u' + \Omega - v' \end{aligned} \right\} \text{VIb)}$$

Aus v und v' kann die Perihelzeit nach irgend einer für nahezu parabolische Bahnen (I pag. 55 f. f.) geltenden Methode ermittelt werden; doch werden geeignet construirte Hilfstafeln die Rechnung wesentlich erleichtern. Führt man die I pag. 60 angezeigte Integration durch Reihen aus, so erhält man sofort, wenn man:

$$\theta = \frac{1-e}{1+e} \tan^2 \frac{1}{2} v^2$$

setzt, und die Zeit vom Perihel aus zählt:

$$\frac{k t \sqrt{1+e}}{2 q^2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \left\{ 1 - \frac{2}{3} \theta + \frac{3}{5} \theta^2 - \frac{1}{7} \theta^3 + \dots \right\} + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3 \left\{ 1 - \frac{6}{5} \theta + \frac{3}{7} \theta^2 - \frac{1}{9} \theta^3 + \dots \right\},$$

Diese Reihen können mit dem Argumente θ leicht in Tafeln gebracht werden. Herr F. K. Ginzel hat eine solche Tafel sorgfältig neunstellig berechnet, und ich theile dieselbe auf 7 Stellen abgekürzt als Tafel XVIII mit; diese Tafel gibt mit dem Argumente θ die Werthe der obigen Reihen, noch mit dem Factor $\frac{2}{k}$ multiplicirt, so dass

$$\frac{t \sqrt{1+e}}{q^{\frac{3}{2}}} = P_1 \tan \frac{1}{2} v + P_3 \tan \frac{1}{2} v^3$$

ist, wobei für k der bekannte Gauss'sche Werth benützt wurde.

Man hat daher zur Bestimmung der Perihelzeit T zunächst:

$$\theta = \frac{1-e}{1+e} \tan \frac{1}{2} v^2;$$

zu bestimmen und die Tafel XVIII gibt mit θ als Argument die Werthe von $\log P_1$ und $\log P_3$; dann ist:

$$T = t - \frac{q^{\frac{3}{2}}}{1+e} \left\{ P_1 \tan \frac{1}{2} v + P_3 \tan \frac{1}{2} v^3 \right\}. \quad \text{VIIb)}$$

Diese Formel muss, wenn dieselbe auch auf v' angewendet wird, innerhalb der Unsicherheit der Rechnung denselben Werth für T finden lassen, welche werthvolle Controle auszuführen niemals unterlassen werden sollte.

Man wird bemerken, dass man die eben gegebenen Formelsysteme wohl auch für die Rechnung parabolischer Elemente benützen kann; es ergeben sich hierbei einige interessante Relationen. Zunächst ist offenbar (vergl. I pag. 475):

$$2z = r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos f,$$

und hiermit der Perihelabstand und das Mittel der wahren Anomalien:

$$q = \frac{rr' \sin f^2}{2z}$$

$$\operatorname{tg} F = \frac{(r' - r) \sin f}{2\sqrt{rr'} - (r + r') \cos f},$$

wobei der Quadrant von F wieder so zu wählen ist, dass $\sin F$ das Zeichen des Zählers, $\cos F$ das Zeichen des Nenners erhält. Doch wird man für die Parabel auch die in I pag. 143 angeführten Methoden zur Ermittlung der Elemente mit Vortheil verwenden können.

Schliesslich möge noch der Zusammenhang der Grösse z mit dem in den Gauss'schen Entwicklungen eine so wichtige Rolle spielenden Verhältnisse des Sectors zum Dreiecke, η angeführt werden; es ist nach I pag. 188:

$$\eta^2 = \frac{r^2 p}{4(rr')^2 \sin^2 f \cos f^2};$$

führt man für den Parameter den Werth aus Vb) (pag. 477) ein, so findet sich sofort:

$$\eta = \frac{r}{2 \cos f \sqrt{rr' z}}.$$

§ 3. Variation der Distanzen.

Es wird nicht immer nöthig sein, die in dem Abschnitte B vorgetragenen Methoden, die den Anschluss der Elemente an die Beobachtungen mit strenger Berücksichtigung der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermöglichen, anzuwenden. Man wird sich häufig genug mit solchen Elementen begnügen können, die nur näherungsweise den durch die Methode der kleinsten Quadrate gestellten Forderungen entsprechen. Eine derartige Methode ist bereits im ersten Bande (I pag. 146 § 12) erwähnt worden; ich werde mich aber darauf beschränken, nur wenige Methoden vorzunehmen, die als sicher und bequem empfohlen werden können und die sich sowohl vom theoretischen, als auch vom practischen Standpunkte bewährt haben.

Es seien die vorhandenen Beobachtungen eines Himmelskörpers in eine entsprechende Anzahl von Normalorten zusammengefasst; man wähle zwei der Normalorte unter Berücksichtigung gewisser weiter unten näher zu erörternder Umstände; diese zwei Orte wird man durch ein System von Elementen vollständig darstellen, während an die übrigen Orte nur ein Anschluss nach den Principien der Wahrscheinlichkeit erreicht werden soll. Dieser Forderung wird am bequemsten entsprochen werden, wenn man vorerst ein Elementensystem herstellt, welches den zwei gewählten Orten und zugleich denjenigen geocentrischen Distanzen entspricht, die sich aus den besten vorhandenen Näherungselementen für diese beiden Orte ergeben. Seien diese letzteren q und q' , so wird man zunächst die geocentrischen Coordinaten des Himmelskörpers rechnen nach:

$$\begin{aligned}\xi &= q \cos \lambda \cos \beta, & \xi' &= q' \cos \lambda' \cos \beta' \\ \eta &= q \sin \lambda \cos \beta, & \eta' &= q' \sin \lambda' \cos \beta' \\ \zeta &= q \sin \beta, & \zeta' &= q' \sin \beta',\end{aligned}$$

wobei es dem Ermessen des Rechners überlassen bleibt, welches Coordinatensystem er der Rechnung zu Grunde legen will; es wird sich wohl empfehlen, das System des Aequators oder der Ekliptik als maassgebend zu betrachten, und namentlich wird das erstere den Vorzug verdienen, insbesondere, wenn die Anzahl der Normalorte gross ist. Nun macht man den Uebergang auf die heliocentrischen Orte mittelst der Formeln:

$$\begin{aligned}r \cos l \cos b &= \xi - X, & r' \cos l' \cos b' &= \xi' - X' \\ r \sin l \cos b &= \eta - Y, & r' \sin l' \cos b' &= \eta' - Y' \\ r \sin b &= \zeta - Z, & r' \sin b' &= \zeta' - Z',\end{aligned}$$

in welchen Ausdrücken die grossen römischen Buchstaben die geocentrischen Sonnen-coordinaten bezogen auf die gewählte Fundamentalebene vorstellen. Man erhält so zwei heliocentrische Orte und die zugehörigen Radienvectoren, aus welchen in Verbindung mit der bekannten Zwischenzeit nach den angegebenen Methoden leicht Elemente ermittelt werden können. Diese so erhaltenen Elemente haben die Eigenschaft, dass dieselben den zwei ausgewählten Normalorten völlig genügen und es

wird sich stets empfehlen, zur Controle der durchgeführten Rechnungen die Darstellung der Orte durch die gefundenen Elemente zu rechnen; man muss innerhalb der Unsicherheit der Rechnung die der Berechnung zu Grunde gelegten Werthe ϱ , λ , β und ϱ' , λ' , β' wieder erhalten. Ueberdiess rechnet man die geocentrischen Orte, welche diese Elemente für die übrigen Normalorte finden lassen. Es werden sich im Allgemeinen Unterschiede zwischen den Normalorten und den so gerechneten geocentrischen Orten ergeben, die mit $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2$, ... $\delta\beta_1$, $\delta\beta_2$... bezeichnet, und im Sinne: Beobachtung — Rechnung angesetzt werden sollen; ausserdem ist zu beachten, dass man für die Rectascensionen, eventuell Längen, die gefundenen Unterschiede durch Multiplication mit dem Cosinus der Declination, eventuell der Breite, auf den Parallel zu reduciren hätte. Es wird übrigens auf diesen Umstand später gehörig Rücksicht genommen werden.

Die aus diesen Elementen gefundenen geocentrischen Coordinaten selbst sollen mit A_1^0 , A_2^0 , ... B_1^0 , B_2^0 ... bezeichnet werden, wobei also der untere Index auf den Normalort, der obere auf die Hypothese hinweist, wenn man die zu Grunde gelegten geocentrischen Distanzen als hypothetische Annahmen gelten lässt, was sie thatsächlich sind.

Die diesem ersten Elementensysteme zu Grunde gelegten geocentrischen Entfernungen werden von dem wahren Werthe mehr oder weniger abweichen; denkt man sich demnach die erste Distanz mit einem von der Einheit wenig verschiedenen Factor multiplicirt, so wird dies bedingen, dass der zu Grunde gelegte Logarithmus von ϱ einen etwas veränderten Werth erhält; man wird also in einer zweiten Hypothese annehmen:

für den Logarithmus der ersten geocentrischen Entfernung $\log \varrho + \delta x$,
 » » » » zweiten » » $\log \varrho'$,

d. h. für ϱ' den Werth der ersten Hypothese verwenden. Rechnet man unter diesen Annahmen wieder ein Elementensystem, und mit diesem die Darstellung der Orte, so werden sich für die übrigen Normalorte die geocentrischen Coordinaten:

$$A_1^1, A_2^1 \dots B_1^1, B_2^1 \dots$$

ergeben: bildet man nun die Unterschiede

$$\begin{array}{r} A_1^1 - A_1^0 \\ A_2^1 - A_2^0 \\ \vdots \\ B_1^1 - B_1^0 \\ B_2^1 - B_2^0 \\ \vdots \end{array}$$

so wird man, wenn δx nicht allzu gross genommen wurde, annehmen dürfen, dass beispielsweise die Grösse:

$$\frac{A_1^1 - A_1^0}{\delta x}$$

den Differentialquotienten der ersten geocentrischen Rectascension (Länge) in Bezug auf die Variation des Logarithmus der ersten geocentrischen Distanz mit ge-

nügender Annäherung darstellt, wobei als Einheit für δx die oben angenommene Aenderung zu betrachten ist. Man hat hiermit auf empirischem Wege die Differentialquotienten zwischen den geocentrischen polaren Coördinaten und dem Logarithmus der ersten geocentrischen Distanz hergestellt. Es soll daher mit Rücksicht auf die angenommene Einheit geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}_1^1 - \mathcal{A}_1^0 &= \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}, & B_1^1 - B_1^0 &= \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \\ \mathcal{A}_2^1 - \mathcal{A}_2^0 &= \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}, & B_2^1 - B_2^0 &= \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \\ \mathcal{A}_3^1 - \mathcal{A}_3^0 &= \frac{\partial \lambda_3}{\partial x}, & B_3^1 - B_3^0 &= \frac{\partial \beta_3}{\partial x} \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots & \quad \quad \quad \vdots & \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \right\} \quad A)$$

Diese empirische Bestimmung der Differentialquotienten weist bereits auf die notwendigen Beschränkungen hin, die man bei der Wahl von δx zu beachten hat. Wählt man δx sehr klein, so wird man sich allerdings der theoretischen Forderung des Differentialquotienten sehr annähern, dagegen werden aber die Differenzen für die einzelnen Orte berechnet nach den beiden Systemen sehr gering werden und dieselben werden wesentlich kleiner ausfallen, als die Variationen der Distanzen, namentlich in jenen Fällen, wo man diese Methode gewöhnlich anwendet, d. h. in den Fällen verhältnissmässig kleiner heliocentrischer Bogen.

Wählt man also δx zu klein, so werden diese Differenzen allzusehr von den unvermeidlichen Fehlern der Rechnung beeinflusst erscheinen, und somit können in diesem Falle die gefundenen Werthe der Differentialquotienten völlig illusorisch werden. Nimmt man dagegen für δx grosse Werthe an, so werden die dadurch bedingten Aenderungen in den geocentrischen Orten im Allgemeinen beträchtlich werden, es wird daher von dieser Seite die Sicherheit der Bestimmung wenig zu wünschen übrig lassen, dagegen entfernt man sich beträchtlich von der theoretischen Forderung des Differentialquotienten. Man kann aber in Bezug auf die obere Grenze jedenfalls sehr weit gehen, ohne die letztere Forderung allzusehr zu schädigen. Bei kleinen Planeten etwa, für welche die Elemente aus einer Opposition abgeleitet werden sollen, wird man ohne Bedenken für δx eine, ja auch zwei Einheiten der dritten Decimale des $\log q$ annehmen dürfen, ohne den vorausgesetzten linearen Charakter des Differentialquotienten allzusehr zu benachtheiligen. Bei Kometen, die sehr verschiedene Verhältnisse bieten, lässt sich im Allgemeinen diesfalls keine bestimmte Annahme machen; nur so viel kann man etwa bemerken, dass man die Aenderungen wohl immer grösser annehmen soll, als die zu erwartenden Correctionen voraussichtlich betragen werden; doch bedarf es zur Abschätzung der letzteren einer durch zahlreiche Erfahrungen erlangten Uebung, die unter Umständen wohl auch nicht immer ausreicht. Man kann als allgemeine Regel indessen festhalten, die Aenderungen lieber zu gross, als zu klein anzunehmen.

Führt man nun eine dritte Hypothese durch, indem man:

für den Logarithmus der ersten geocentrischen Entfernung $\log q$
 » » » » zweiten » » $\log q' + \delta y$

annimmt, wobei für δy dieselben Bemerkungen wie oben gelten, so gelangt man zu einem dritten Elementensysteme, welches für die übrigen, dieser Rechnung nicht zu Grunde gelegten Orte, die geocentrischen Coordinaten:

$$A_1^2, A_2^2, \dots B_1^2, B_2^2, \dots$$

finden lassen wird; man erhält also wie oben:

$$\left. \begin{aligned} A_1^2 - A_1^0 &= \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}, & B_1^2 - B_1^0 &= \frac{\partial \beta_1}{\partial y} \\ A_2^2 - A_2^0 &= \frac{\partial \lambda_2}{\partial y}, & B_2^2 - B_2^0 &= \frac{\partial \beta_2}{\partial y} \\ A_3^2 - A_3^0 &= \frac{\partial \lambda_3}{\partial y}, & B_3^2 - B_3^0 &= \frac{\partial \beta_3}{\partial y} \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \end{aligned} \right\} \quad B)$$

und hat daher für die Bestimmung der Unbekannten $\mathcal{A}x$ und $\mathcal{A}y$ aus $A)$ und $B)$ die Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \delta \lambda_1 &= \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right) \mathcal{A}x + \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \right) \mathcal{A}y \\ \delta \lambda_2 &= \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right) \mathcal{A}x + \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial y} \right) \mathcal{A}y \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \delta \beta_1 &= \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) \mathcal{A}x + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial y} \right) \mathcal{A}y \\ \delta \beta_2 &= \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x} \right) \mathcal{A}x + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial y} \right) \mathcal{A}y \end{aligned} \right\} \quad C)$$

in welchen Gleichungen die partiellen Differentialquotienten mit Rücksicht auf die Gleichungen $A)$ und $B)$ bekannte Grössen sind. Ehe man diese Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate auflöst, wird man aber die ersteren die zu den Rectascensionen (Längen) gehören, mit denen der zweiten Gruppe homogen machen, indem man dieselben durch die Multiplication mit dem Cosinus der Declination (Breite) auf den Parallel reducirt. Haben die Gleichungen selbst verschiedene Gewichte, so wird diese Multiplication mit der Quadratwurzel der Gewichte vereinigt durchgeführt werden können.

Man erlangt dann durch die Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe von $\mathcal{A}x$ und $\mathcal{A}y$, welche beziehungsweise an die ursprünglichen Werthe von $\log \varrho$ und $\log \varrho'$ angebracht, die nunmehr definitiven Werthe von $\log \varrho$ und $\log \varrho'$ geben. Mit Zugrundelegung dieser so verbesserten Distanzen und der beiden zugehörigen Normalorte ist es nun leicht, die definitiven Elemente zu rechnen. Der sonst häufig zu findende Vorschlag, dieses neue Elementensystem durch Interpolation zwischen den vorigen drei Systemen abzuleiten, scheint in denjenigen Fällen, für welche diese Methode gewöhnlich in Anwendung kommt, aus leicht begreiflichen Gründen nicht empfehlenswerth zu sein, weil die Elemente bei kleinen heliocentrischen Bogen vielfach grössere Aenderungen erfahren, als die eingeführten Variationen δx und δy , und demnach der lineare Charakter leicht verloren geht; wendet man aber diese

Methode an, wenn grosse heliocentrische Bogen zur Verfügung stehen und die Aenderungen in den Elementen gering sind, so wird man wohl das letzt erwähnte Verfahren einschlagen können. Bezeichnet man etwa mit E_0 , E_1 , E_2 die beziehungsweise in der ersten, zweiten und dritten Hypothese gefundenen Werthe für irgend eines der Elemente, so wird der neue, der vierten Hypothese entsprechende Werth E dieses Elementes gegeben sein durch:

$$E = E_0 + (E_1 - E_0) \Delta x + (E_2 - E_0) \Delta y,$$

wenn man durch Δx und Δy die durch die obigen Gleichungen bestimmten Werthe in Einheiten der angenommenen Aenderungen δx und δy darstellt.

Bei der Auswahl der zwei der Rechnung zu Grunde zu legenden Orte muss man bedacht sein, dieselben nicht allzu nahe an einander zu wählen, da sonst die kleinen, den Orten anhaftenden Fehler allzu nachtheilig hervortreten würden. Man wird daher, wenn es nur irgend möglich ist, die äussersten Orte als diejenigen annehmen, welche vollkommen dargestellt werden sollen. Doch wird man bisweilen von dieser Bestimmung absehen müssen, da in der Regel der erste und letzte Ort in Folge der hierbei obwaltenden Beobachtungsverhältnisse wesentlich unsicherer sein kann, als andere Normalorte; man wird indessen von dieser Wahl nur dann abgehen, wenn die vermuthete Unsicherheit eine sehr beträchtliche ist.

Die Methode wird aber auch dann unsichere Resultate gewähren, wenn die zu den beiden geocentrischen Orten gehörenden heliocentrischen Orte nahe zusammen-treffen oder um 180° von einander abstehen. Es ist klar, dass in diesem Falle eine genaue Bestimmung der Bahnlage unthunlich wird, und man wird demnach bei der Auswahl der Beobachtungen auf diesen Umstand möglichst Rücksicht nehmen; übrigens findet derselbe unter den hier obwaltenden Verhältnissen gewöhnlich schon durch die Wahl der äussersten Orte ausreichende Berücksichtigung, da der Fall, wo die heliocentrische Bewegung nahezu 180° oder deren Vielfache beträgt, bei Anwendung dieser Methode selten genug auftreten wird. Indess wird man sich diese Umstände bei der Wahl der Beobachtungen doch stets gegenwärtig halten und in einem der letzteren Fälle lieber zwei Orte wählen, deren scheinbarer heliocentrischer Abstand etwa 90° beträgt.

Ich will die vorstehende Methode durch ein Beispiel erläutern und übrigens noch bemerken, dass sich später im § 5 des vorliegenden Abschnittes (pag. 507 ff.) noch ein hierher gehöriges Beispiel findet.

Für den Planeten Concordia \S waren die folgenden auf den mittleren Aequator bezogenen geocentrischen Positionen und Sonnencoordinaten angenommen worden:

mittl. Berl. Zeit	α	δ	X	Y	Z
1. 1860 März 24.5	$180^\circ 28' 18''$	$9 + 2^\circ 51' 25''$	$+0.9948582$	$+0.0725170$	$+0.0314716$
2. April 13.5	$177^\circ 1' 32''$	$5 + 4^\circ 53' 10''$	$+0.9158787$	$+0.3776846$	$+0.1638895$
3. " 25.5	$175^\circ 48' 20''$	$8 + 5^\circ 36' 9''$	$+0.8154794$	$+0.5419252$	$+0.2351599$
4. Mai 18.5	$175^\circ 52' 21''$	$9 + 5^\circ 43' 42''$	$+0.5341899$	$+0.7887986$	$+0.3422870$

Der erste Ort beruht auf einer einzigen Beobachtung, die übrigen Orte sind

gut bestimmte Normalorte; es wird sich daher nicht empfehlen, den ersten Ort als einen der beiden Orte zu wählen, die völlig dargestellt werden sollen, da man bei einer Einzelbeobachtung, abgesehen von dem ihr anhaftenden unvermeidlichen Beobachtungsfehler, nie mit Sicherheit voraussetzen kann, dass dieselbe nicht durch irgend ein Versehen besonders entstellt ist. Man wird deshalb mit Vortheil wohl den zweiten und vierten Ort als diejenigen annehmen, die völlig dargestellt werden sollen. Nach genäherten Elementen waren als geocentrische Distanzen für diese Orte angenommen worden:

$$\log \varrho = 0.221\ 0390$$

$$\log \varrho' = 0.297\ 4660;$$

für δx wurde für die zweite Hypothese der Werth -0.0001 , und ebenso für δy der Werth -0.0001 angenommen. Diese Aenderungen sind wohl etwas zu klein gewählt und hätten wohl zehnmal grösser angenommen werden sollen; doch war die hier gemachte Annahme theilweise gerechtfertigt, weil, wie man sieht, das System der ersten Hypothese nur ganz unbedeutende Fehler in der Darstellung der Orte übrig liess. Die Hauptmomente der Rechnung finden sich für die einzelnen Hypothesen nachstehend übersichtlich neben einander gestellt. Die Epoche der Elemente ist 1860 April 13.5.

Hypothese	0	1	2
$\log \varrho$	0.2210390	0.2209390	0.2210390
$\log \varrho'$	0.2974660	0.2974660	0.2973660
l	186°28'24"09	186°28'29"08	186°28'24"09
l'	194°29'19"15	194°29'19"15	294°29'30"73
$d^{**})$	—0°29'29"03	—0°29'31"89	—0°29'29"03
d'	—3°11'41"03	—3°11'41"03	—3°11'46"57
$\log r$	0.4128389	0.4127756	0.4128389
$\log r'$	0.4131410	0.4131410	0.4130695
M	2°22'41"14	3°47'14"80	0°49'46"78
μ'	183°58' 7"58	182°26'31"30	185°39' 5"31
Ω'	5° 1'32"67	5° 1'28"62	5° 1'33"57
i'	18°45' 7"05	18°45' 0"48	18°45'18"71
q	2°22'23"36	2°20'46"31	2°24' 3"60
μ	800"2500	801"0869	799"5989
λ	177° 1'32"49	177° 1'32"49	177° 1'32"53
λ'	175°52'21"82	175°52'21"86	175°52'21"89
β	+4°53'10"70	+4°53'10"70	+4°53'10"69
β'	+5°43'42"81	+5°43'42"85	+5°43'42"82
A_1	180°28'12"33	180°28'16"85	180°28' 9"63

*) Heliocentrische Rectascensionen.

**) Heliocentrische Declinationen.

***) Durch diese Zahlen ist die Richtigkeit der Rechnung controlirt.

Hypothese	0	1	2
B_1	$+2^{\circ}51'31''34$	$+2^{\circ}51'28''66$	$+2^{\circ}51'33''04$
A_2	$175^{\circ}48'21''12$	$175^{\circ}48'20''60$	$175^{\circ}48'21''29$
B_2	$+5^{\circ}36'7''63$	$+5^{\circ}36'7''97$	$-5^{\circ}36'7''49$

Mit Rücksicht auf B_1 pag. 483) stellen sich die Gleichungen C_j wie folgt:

- 1) $+6''57 = +4''52 \Delta x - 2''70 \Delta y$
- 2) $-0.32 = -0.52 \Delta x + 0.17 \Delta y$
- 3) $-6.24 = -2.68 \Delta x + 1.70 \Delta y$
- 4) $+1.57 = +0.34 \Delta x - 0.14 \Delta y$.

Die Kleinheit der Aenderungen in den Orten zeigt, dass es zweckmässiger gewesen wäre, δx und δy wesentlich grösser anzunehmen.

Den aus dem zweiten Orte folgenden Bedingungsgleichungen wird das Gewicht 4 ertheilt, weil dieser Ort ein Normalort ist, während der erste Ort nur auf einer einzelnen Beobachtung beruht; es müssen also die Gleichungen 2) und 4) (pag. 314) mit 2 durchmultipliziert werden, bevor die Methode der kleinsten Quadrate zur Anwendung kommt; ausserdem aber sind die Gleichungen 1) und 2) (pag. 483) beziehungsweise mit $\cos B'$ und $\cos B''$ zu multipliciren, um die Bogengrössen auf den Parallel zu beziehen. Dadurch nehmen die Bedingungsgleichungen (logarithmisch) die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} 0.8171 &= 0.6546 \Delta x + 0.4309 \Delta y \\ 9.8040 &= 0.0149 \Delta x + 9.5293 \Delta y \\ 0.7952 &= 0.4281 \Delta x + 0.2304 \Delta y \\ 0.4969 &= 9.8325 \Delta x + 9.4471 \Delta y \end{aligned}$$

Macht man dieselben homogen (vergl. pag. 318), indem man:

$$\begin{aligned} x &= \overline{0.6546} \Delta x \\ y &= \overline{0.4309} \Delta y \end{aligned}$$

$$\log \text{ der Fehlereinheit} = 0.8171$$

annimmt, so stellen sich die Gleichungen wie folgt:

$$\begin{aligned} 0.0000 &= 0.0000 x + 0.0000 y \\ 8.9869 &= 9.3603 x + 9.0984 y \\ 9.9781 &= 9.7735 x + 9.7995 y \\ 9.6798 &= 9.1779 x + 9.0162 y \end{aligned}$$

und man hat:

an	bn	au	ab	bb
$+1.0000$	-1.0000	$+1.0000$	-1.0000	$+1.0000$
$+0.0222$	-0.0122	$+0.0525$	-0.0288	$+0.0157$
$+0.5644$	-0.5992	$+0.3524$	-0.3741	$+0.3972$
$+0.0721$	-0.0497	$+0.0327$	-0.0156	$+0.0108$
$+1.6587$	-1.6611	$+1.4276$	-1.4185	$+1.4237$

Die Auflösung stellt sich nimmehr in folgender Art:

x	y	z
+1.4276 0.15461	—1.4185 0 _n 15183	+1.6587 0.21977
9 _n 99722	+1.4237	—1.6611
	+1.4095	—1.6481
	+0.0142 8.15229	—0.0130 8 _n 11394

und es folgt:

$$\log y = 9_n96165$$

$$\log x = 9.40181 ,$$

oder mit Rücksicht auf die Homogenitätsfactoren und die Einheit für Δx und Δy :

$$\Delta x = - 0.0000367$$

$$\Delta y = + 0.0002227 .$$

Die schliesslichen Werthe für die Logarithmen der geocentrischen Distanzen sind also :

$$\log \varrho = 0.221 \ 0023$$

$$\log \varrho' = 0 \ 297 \ 6887 ,$$

und die Darstellung der Orte nach den Differentialformeln wird:

	$\cos \delta \delta \alpha$	$\delta \delta$
1)	— 1''1	— 1''5
3)	+ 0''2	+ 1''1 .

Rechnet man aus den so gefundenen Werthen für $\log \varrho$ und $\log \varrho'$ die Elemente und aus diesen die Darstellung der Orte, so findet sich dieselbe:

1)	— 1''3	— 1''4
3)	— 0''1	+ 1''3

genügend mit den aus den Differentialformeln abgeleiteten Werthen übereinstimmend. Die kleinen Unterschiede erklären sich völlig durch die Unsicherheit der siebenstelligen Rechnung, welche natürlich auch auf die Genauigkeit der obigen Werthe der Differentialquotienten Einfluss nimmt.

§ 4. Variation des Verhältnisses der Distanzen.

α . Parabolische Elemente.

Benützt man die Methode der Variation des Verhältnisses der Distanzen zur Bahnverbesserung, so knüpft sich daran unmittelbar die Bemerkung, dass aus dem

angenommenen Verhältnisse der Distanzen allein ohne weitere Voraussetzungen noch kein Schluss auf die Bahn selbst gemacht werden kann. In der That vermittelt aber die Annahme $a = \infty$ eine Lösung und ist dieselbe bereits, wenn auch nur andeutungsweise, im ersten Bande (I pag. 146) behandelt worden. Es soll hier auf diese Lösung nochmals zurückgegangen werden.

Handelt es sich um die Auswerthung einer parabolischen Bahn ($a = \infty$), so wird man mit der besten Annahme, die man über das Verhältniss der Distanzen M für zwei Normalorte (bei deren Auswahl wird man dieselben Vorsichtsmaassregeln zu befolgen haben, wie bei der Methode der Variation der Distanzen) (vgl. pag. 484) machen kann, parabolische Elemente berechnen, die in den übrigen Orten etwa die Fehler $\delta\lambda_1, \delta\lambda_2 \dots \delta\beta_1, \delta\beta_2 \dots$ übrig lassen. Die durch die Elemente selbst berechneten Positionen der nicht zu Grunde gelegten Normalorte seien $A_1^0, A_2^0, \dots B_1^0, B_2^0 \dots$. Hierauf variirt man M , oder was noch bequemer ist $\log M$ in $\log M + \delta x$, wobei δx eine den Verhältnissen entsprechende Grösse ist, und wiederholt die Rechnung. Diese neuen Elemente werden für die übrigen Normalorte die Positionen $A_1^1, A_2^1, \dots B_1^1, B_2^1 \dots$ ergeben. Man hat also ähnlich, wie bei der vorausgehenden Methode die empirische Bestimmung der Differentialquotienten zwischen den Coordinaten des Normalortes und der Variation von $\log M$ hergestellt und hat hierfür:

$$\begin{array}{rcl} A_1^1 - A_1^0 & = & \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}, \quad B_1^1 - B_1^0 = \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \\ A_2^1 - A_2^0 & = & \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}, \quad B_2^1 - B_2^0 = \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \\ : & : & : \quad : \quad : \quad : \end{array}$$

wobei für δx als Einheit die angenommene Variation von $\log M$ zu betrachten ist. Man erhält also, wenn man sofort die Reduction auf den Parallel ausführt, als Bedingungsgleichungen, die nach der Methode der kleinsten Quadrate leicht aufgelöst werden können:

$$\begin{array}{rcl} \cos \beta_1 \delta \lambda_1 & = & \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right) \cos \beta_1 \mathcal{A} x \\ \cos \beta_2 \delta \lambda_2 & = & \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right) \cos \beta_2 \mathcal{A} x \\ : & : & : \quad : \\ \delta \beta_1 & = & \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) \mathcal{A} x \\ \delta \beta_2 & = & \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x} \right) \mathcal{A} x \\ : & : & : \quad : \end{array}$$

Multiplieirt man jede dieser Bedingungsgleichungen mit der Quadratwurzel ihres Gewichtes, und bezeichnet dann der Kürze halber die links vom Gleichheitszeichen stehenden Werthe mit $n_1, n_2, n_3 \dots$, die Coëfficienten von $\mathcal{A} x$ mit $a_1, a_2, a_3 \dots$, so wird man nach der Methode der kleinsten Quadrate für den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten haben:

$$\mathcal{A}x = \frac{[an]}{[aa]},$$

wobei also $\mathcal{A}x$ in Einheiten von δx ausgedrückt erscheint.

Man kann nun mit dem Werthe $\log M + \delta x$ neue Elemente ableiten, oder man interpolirt, was bei dem oft grossen heliocentrischen Bogen vortheilhafter ist, unmittelbar die Elemente aus den beiden vorher ermittelten Systemen. Es wird nämlich:

$$E = E_0 + (E_1 - E_0) \mathcal{A}x.$$

Wir wollen diese Vorschriften durch ein ausführliches Beispiel erläutern und gleichzeitig die Formeln anführen, deren man zur Berechnung der auftretenden Grössen bedarf, die Ableitung derselben übergehe ich aber, da das Nöthige bereits im ersten Bande erläutert ist.

Ich wähle als Beispiel den 1. Kometen des Jahres 1847; die Mittheilung der Normalorte und der Sonnenkoordinaten verdanke ich Herrn Professor Hornstein, Director der Prager Sternwarte. Dieselben sind bezogen auf die mittlere Ekliptik 1847.0, wie folgt:

Mittl. Berl. Zeit.	λ	β	L	$\log R$
I 1847 Febr. 18.0	26°21'16"43	+62°44' 5"18	329°13'31.05	9.9951324
II " 26.0	22 49 8.25	+54 29 31.07	337 16 24.50	9.9959194
III März 4.0	20 59 23.75	+47 35 53.42	343 17 13.98	9.9965726
IV " 10.0	19 20 22.28	+39 53 7.72	349 17 0.68	9.9972759
V " 16.0	17 27 10.54	+30 58 26.60	355 15 45.52	9.9980025
VI " 20.0	15 47 38.00	+24 1 38.24	359 14 16.82	9.9984879
VII April 24.0	44 18 54.19	+16 35 5.41	33 37 41.36	0.0027526

Als völlig darzustellende Normalorte werden der erste und der letzte Ort gewählt, für $\log M$ war aus genäherten Annahmen über die Elemente der Werth 0.2262773 gefunden worden, und da die zu Grunde gelegten Elemente schon sehr genau waren, indem sich dieselben nahezu allen Beobachtungen recht gut anschliessen, so wurde δx verhältnissmässig klein mit + 0.000 3000 angenommen. Es sind demnach zwei Systeme parabolischer Elemente abzuleiten, die den obigen äussersten Normalorten genügen und für welche einmal $\log M = \log \frac{q'}{q} = 0.226 2773$, das andere Mal $\log M = \log \left(\frac{q'}{q} \right) = 0.226 5773$ gesetzt ist. Ich unterscheide die aus der zweiten Annahme resultirenden Werthe dadurch, dass ich die analogen Buchstaben in Klammern ansetze.

Zuerst wird man die Berechnung jener Werthe vornehmen, die von der Annahme über M unabhängig sind. Man hat zu rechnen:

$$\left. \begin{aligned} g \cos (G - L) &= R' \cos (L' - L) - R \\ g \sin (G - L) &= R' \sin (L' - L) \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi &= \cos (\lambda - L) \cos \beta, & \cos \psi' &= \cos (\lambda' - L') \cos \beta' \\ \sin \psi \cos P &= \sin (\lambda - L) \cos \beta, & \sin \psi' \cos P' &= \sin (\lambda' - L') \cos \beta' \\ \sin \psi \sin P &= \sin \beta, & \sin \psi' \sin P' &= \sin \beta', \end{aligned} \right\} \quad \text{I)}$$

wobei g , $\sin \psi$ und $\sin \psi'$ stets positiv genommen werden.

Die Rechnung ergab:

$$\begin{aligned} G &= 90^\circ 37' 43'' 08 & R \sin \psi &= 9.981\,2753 & R' \sin \psi' &= 9.529\,4070 \\ \log g &= 0.026\,6750 & R \cos \psi &= 9.390\,6985 & R' \cos \psi' &= 9.976\,6998. \end{aligned}$$

Jetzt sind jene Hilfsgrößen zu rechnen, welche die Darstellung von r , r' und s (Sohne) als Funktionen von q vermitteln; man hat demnach für jede der Annahmen von M zu rechnen:

$$\left. \begin{aligned} f &= R \cos \psi, & B &= R \sin \psi \\ f' &= \frac{R' \cos \psi'}{M}, & B' &= \frac{R' \sin \psi'}{M} \\ h \cos \zeta \cos (H - \lambda') &= M \cos \beta' - \cos (\lambda' - \lambda) \cos \beta \\ h \cos \zeta \sin (H - \lambda') &= \sin (\lambda' - \lambda) \cos \beta \\ h \sin \zeta &= M \sin \beta' - \sin \beta \\ h \text{ und } \cos \zeta &\text{ stets positiv} \\ \cos \varphi &= \cos \zeta \cos (G - H) \\ \sin \varphi \cos Q &= \cos \zeta \sin (G - H) \\ \sin \varphi \sin Q &= \sin \zeta \\ \sin \varphi &\text{ stets positiv.} \\ \gamma &= \frac{g}{h} \cos \varphi \\ A &= \frac{g}{h} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad \text{II)}$$

Es fanden sich aus den obigen Zahlen:

f	+0.2458660	(f)	+0.2458660
f'	+0.5628887	(f')	+0.5625000
$\log B$	9.9812753	$\log (B)$	9.9812753
$\log B'$	9.3031297	$\log (B')$	9.3028297
H	51° 0' 13" 23	(H)	51° 8' 50" 16
$\cos \zeta$	9.9756926	$\cos (\zeta)$	9.9757729
$\sin \zeta$	9.95124515	$\sin (\zeta)$	9.95117733
$\log h$	0.0985225	$\log (h)$	0.0988473
$\cos \varphi$	9.8632550	$\cos (\varphi)$	9.8632954
$\sin \varphi$	9.8347822	$\sin (\varphi)$	9.8347364
γ	+0.6185966	(γ)	+0.6181916
$\log A$	9.7629347	$\log (A)$	9.7625641
$\log g \sin \varphi$	9.8614572	$\log (g \sin \varphi)$	9.8614114

Nun ist q so zu bestimmen, dass der Euler'schen Gleichung:

$$6k(t' - t) = (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}}, \quad \log 6k = 9.0137327$$

genügt wird; das obere Zeichen gilt, wenn die heliocentrische Bewegung kleiner, das untere, wenn dieselbe grösser als 180° ist; das letztere ist im vorliegenden Beispiele der Fall. Da bei der Anwendung dieser Methode im Allgemeinen grosse heliocentrische Bogen auftreten, so wird die Anwendung der Encke'schen μ Tafel (Tafel VIII des ersten Bandes) nicht empfohlen werden können; vielmehr wird man von einem Werthe von q ausgehen, der den vorhandenen nahe richtigen Elementen zu entnehmen ist. Man berechnet also unter einer Annahme über q :

$$\left. \begin{aligned} \text{tag } \theta &= \frac{q-f}{B}, & r &= R \sin \psi \sec \theta \\ \text{tang } \theta' &= \frac{q-f'}{B'}, & r' &= R' \sin \psi' \sec \theta' \\ \text{tang } \vartheta &= \frac{q-\gamma}{A}, & s &= g \sin \varphi \sec \vartheta \\ 6k(t' - t) &= (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad \text{III}$$

und sieht nach, wie weit der letzteren Relation genügt wird, und zwar sei A der Fehler im Logarithmus von $6k(t' - t)$ im Sinne: Wahrer Werth — Berechneter Werth.

Es würde nicht angemessen sein, durch empirische Variation und nachherige Interpolation den wahren Werth von q zu ermitteln; man wird vielmehr die noch nöthige Correction sofort auf differentiellen Wege zu ermitteln trachten. Mit Rücksicht auf Gleichung 27 (pag. 471) und den I pag. 127 aufgestellten Differentialquotienten wird man leicht die folgende Relation finden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{N} &= \left(\frac{r+r'+s}{1-\frac{r+r'+s}{4a}} \right)^{\frac{1}{2}} (\sin \theta + M \sin \theta' + h \sin \vartheta) \mp \\ &\quad \mp \left(\frac{r+r'-s}{1-\frac{r+r'-s}{4a}} \right)^{\frac{1}{2}} (\sin \theta + M \sin \theta' - h \sin \vartheta) \\ \delta q &= \left(\frac{4h}{\text{Mod}} \right) (t' - t) N \cdot A, \quad \log \left(\frac{4k}{\text{Mod}} \right) = 9.1999 \end{aligned} \right\} \quad \text{IV)}$$

und zwar ist in dieser Formel für den gegenwärtigen Fall $a = \infty$ zu setzen.

Man wird mit dem durch diesen Ausdruck ermittelten corrigirten Werthe von q die Rechnung wiederholen, um sich durch die Uebereinstimmung der Werthe die Ueberzeugung von der Richtigkeit der Rechnung zu verschaffen. Es wird aber auch für die zweite Annahme von M die entsprechende Aenderung von q sofort auf differentiellen Wege ermittelt werden können, und man wird auf diese Weise den wahren Werth gleich im ersten Versuche mit genügender Annäherung erhalten. Mit Rücksicht darauf, dass für den letzteren Fall auch M variabel ist, werden die I pag. 127 aufgestellten Ausdrücke dr , dr' und ds geschrieben werden müssen:

$$\begin{aligned} dr &= \sin \theta \, dq \\ dr' &= M \sin \theta' \, dq + q \sin \theta' \, dM \\ ds &= h \sin \vartheta \, dq + \left(\frac{ds}{dM} \right) dM; \end{aligned}$$

um den in dem letzteren Ausdrucke vorkommenden Differentialquotienten zu erhalten, nehme ich den Ausdruck (I pag. 105)

$$s^2 = q^2 h^2 + g^2 - 2 q h g \cos \zeta \cos (G - H)$$

vor und differentiire denselben nach M . Mit Rücksicht auf die erste Gleichung 1) (I pag. 105) erhält man, wenn für ξ , und ξ_m die polaren Coordinaten mit der hier abgeänderten Indexbezeichnung eingeführt, und alle Längen vom Punkte G aus gezählt werden, sofort:

$$h \cos \zeta \cos (G - H) = M \cos \beta' \cos (\lambda' - G) - \cos \beta \cos (\lambda - G).$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach M findet sich:

$$\frac{d(h \cos \zeta \cos (G - H))}{dM} = \cos \beta' \cos (G - \lambda')$$

hierdurch wird:

$$s \frac{ds}{dM} = q^2 h \left(\frac{dh}{dM} \right) - q g \cos (G - \lambda') \cos \beta';$$

aus den Gleichungen 3) (I pag. 106) ergibt sich aber auch:

$$\frac{dh}{dM} = \cos \zeta \cos (H - \lambda') \cos \beta' + \sin \zeta \sin \beta',$$

und hiermit stellt sich, wenn man beachtet, dass in beiden Lösungen die Zwischenzeiten dargestellt werden, also:

$$0 = \left(\frac{r + r' + s}{1 - \frac{r + r' + s}{4a}} \right)^{\frac{1}{2}} (dr + dr' + ds) \mp \left(\frac{r + r' - s}{1 - \frac{r + r' - s}{4a}} \right)^{\frac{1}{2}} (dr + dr' - ds)$$

sein muss, die Rechnung wie folgt:

$$\begin{aligned} P &= \frac{q}{s} \left\{ g \cos \beta' \cos (G - \lambda') - q [h \cos \zeta \cos (H - \lambda') \cos \beta' + h \sin \zeta \sin \beta'] \right\} \\ Q &= \frac{1}{\text{Mod}} \left\{ \left(\frac{r + r' + s}{1 - \frac{r + r' + s}{4a}} \right)^{\frac{1}{2}} (P - q \sin \theta') \pm \left(\frac{r + r' - s}{1 - \frac{r + r' - s}{4a}} \right)^{\frac{1}{2}} (P + q \sin \theta') \right\} \\ \delta q &= N \cdot M \cdot Q \delta \log M, \end{aligned} \quad \text{V)}$$

wobei in der Formel für Q das obere Zeichen gilt, wenn die heliocentrische Bewegung kleiner, das untere, wenn dieselbe grösser als 180° ist, und wobei N seinem Werthe nach aus IV) (pag. 491) zu entnehmen ist, überdiess aber für die Parabel $a = \infty$ gesetzt werden muss.

Ich werde, um die obigen Formeln durch Beispiele zu erläutern, die Versuche hier ausführlich durchführen, dieselben aber der Raumersparniss wegen, nicht nach einander, wie sie thatsächlich ausgeführt wurden, sondern neben einander ansetzen. Der erste der drei Versuche entspricht dem ersten Werthe von M und ist mit einer genäherten Annahme über q , welche den vorhandenen Näherungen entlehnt wurde, durchgeführt; für den zweiten Versuch ist der durch Anwendung der Formeln IV verbesserte Werth von q benützt und die Durchführung des Versuches zeigt, dass der wahre Werth bereits erreicht ist. Der dritte Versuch ist für die zweite Annahme von M durchgeführt und dabei nur jener Werth von q in Anwendung gezogen worden, der sich durch die Benützung der Formeln V) ergibt.

Versuch	M		(M)
	1	2	1
q	+ 1.0530000	+ 1.0530458	+ 1.0525217
$\log (q-f)$	9.9069457	9.9069703	9.9066882
$\log (q-f')$	9.6902947	9.6903353	9.6902153
$\log (q-\gamma)$	9.6378932	9.6379390	9.6378199
$\text{tang } \theta$	9.9256704	9.9256950	9.9254129
$\text{tang } \theta'$	0.3871650	0.3872056	0.3873856
$\text{tang } \vartheta$	9.8749585	9.8750043	9.8752558
$\cos \theta$	9.8834848	9.8834746	9.8835917
$\cos \theta'$	9.5790876	9.5790528	9.5788987
$\cos \vartheta$	9.9031269	9.9031105	9.9030199
r	0.0977905	0.0978007	0.0976836
r'	9.9503194	9.9503542	9.9505083
Add.	0.2335241	0.2335344	0.2336472
$r+r'$	0.3313146	0.3313351	0.3313308
s	9.9583303	9.9583467	9.9583915
Add.	0.1534058	0.1534045	0.1534191
Subtr.	0.2393199	0.2393169	0.2393530
$(r+r'+s)$	0.4847204	0.4847396	0.4847499
$(r+r'+s)^{\frac{1}{2}}$	0.2423602	0.2423698	0.2423749
$(r+r'-s)$	0.0919947	0.0920182	0.0919778
$(r+r'-s)^{\frac{1}{2}}$	0.0459973	0.0460091	0.0459889
$(r+r'+s)^{\frac{3}{2}}$	0.7270806	0.7271094	0.7271248
$(r+r'-s)^{\frac{3}{2}}$	0.1379920	0.1380273	0.1379667
Add.	0.0995354	0.0995368	0.0995212
$\log (6kt)$	0.8266160	0.8266462	0.8266460

Vergleicht man das Resultat des ersten Versuches für $\log (6kt)$ mit dem strengen aus den Zwischenzeiten abgeleiteten Werthe, nämlich $\log 6kt = 0.8266461$, so ergibt sich im Sinne: Strenger Werth — Berechneter Werth ein Fehler $\mathcal{A} = + 301$ Einheiten der siebenten Decimale. Diese Differenz wird verwerthet, um nach den Formeln IV) (pag. 491) den definitiven Werth von q zu erhalten. Die Rechnung stellt sich wie folgt:

$\sin \theta$	9.8092	$\sin \theta + M \sin \theta' + h \sin \vartheta$	0.4706
$M \sin \theta'$	0.1925	$\sin \theta + M \sin \theta' - h \sin \vartheta$	0.1613
Add.	0.1504	$\log I$	0.7130
$\sin \theta + M \sin \theta'$	0.3429	$\log II$	0.2073
$h \sin \vartheta$	9.8766	Add.	0.1180
Add.	0.1277	$\log N$	9.1690
Subtr.	9.8184	$\log \left(\frac{4k}{\text{Mod.}} \right) (t' - t)$	1.0128

Es besteht also die Relation (logarithmisch) :

$$\delta q = \overline{0.1818} \mathcal{A} ,$$

woraus folgt, dass mit dem obigen Werthe von \mathcal{A} die Correction von $\delta q = + 458$ Einheiten der siebenten Decimale beträgt; mit dem so resultirenden Werthe von $q = + 1.0530458$ ist der zweite Versuch durchgeführt, der für \mathcal{A} den Werth -1 finden lässt, also eine völlige Uebereinstimmung innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung. Es wurde aber mit Rücksicht darauf, dass die Kleinheit der Aenderungen die Differentialformeln fast streng erscheinen lässt, für die definitive Lösung gleichsam das Mittel der beiden Versuche benützt und $q = + 1.0530457$ gesetzt.

Um nun für den Werth (M) sofort eine hinreichende Annäherung einzuführen, wurde nach V) (pag. 492) gerechnet:

$G - \lambda'$	$-46^{\circ}18'8$	Subtr.	0.1556
$\cos (G - \lambda')$	9.8393	Add.	0.1208
$g \cos \beta'$	0.0082	$P - q \sin \theta'$	$0_n 1443$
$h \cos \zeta \cos (H - \lambda') \cos \beta'$	0.0527	$P + q \sin \theta'$	9.7439
$h \sin \zeta \sin \beta'$	$9_n 0665$	$\log \{I\}$	$0_n 3867$
Add.	9.9527	$\log \{II\}$	9.7899
$\log [\dots]$	0.0054	Add.	0.0980
$\log I$	9.8475	$\lg \{I - II\}$	$0_n 4847$
$\log q [\dots]$	0.0278	Q	$0_n 8469$
Subtr.	9.7115	$N. M$	9.3953
$\log \{\dots\}$	$9_n 5590$	$\delta q : \delta \log M$	$0_n 2422$
$q : s$	0.0641	$\delta x = \delta \log M$	3.4771
P	$9_n 6231$	δq	-5240
$q \sin \theta'$	9.9887		

Es war also für die zweite Annahme über M im ersten Versuche zu setzen:

$$q = 1.0530457 - 0.0005240 ,$$

welcher Werth, wie die Zahlen der dritten Columnne zeigen, in der That eine fast völlige Uebereinstimmung ergab; es wurde für die weitere Rechnung der Elemente einem Fehler $\mathcal{A} = + 0.5$ entsprechend

$$q = 1.0525217$$

angenommen. Der Uebergang auf die heliocentrischen Orte wurde ausgeführt nach den Formeln :

$$\left. \begin{aligned} q' &= Mq \\ r \cos b \cos (l - L) &= q \cos (\lambda - L) \cos \beta - R, & r' \cos b' \cos (l' - L') &= q' \cos (\lambda' - L') \cos \beta' - R' \\ r \cos b \sin (l - L) &= q \sin (\lambda - L) \cos \beta, & r' \cos b' \sin (l' - L') &= q' \sin (\lambda' - L') \cos \beta' \\ r \sin b &= q \sin \beta, & r' \sin b' &= q' \sin \beta' \end{aligned} \right\} \text{VI)}$$

und ergab für die beiden Annahmen von M durchgeführt:

$\log r$	0.0978007	$\log (r)$	0.0976836
l	120° 5' 39" 11	(l)	120° 6' 38" 47
$\text{tang } b$	0.0510135	$\text{tang } (b)$	0.0507892
$\log r'$	9.9503541	$\log (r')$	9.9505085
l'	59° 2' 2" 48	(l')	59° 1' 39" 06
$\text{tang } b'$	9.8382382	$\text{tang } (b')$	9.8381343

Die Uebereinstimmung der so gefundenen Radienvectoren mit den Werthen, die sich aus den Versuchen ergaben, erweist sich als genügend. Nach I), II) (pag. 472) und III b) (pag. 473) findet sich:

Ω	21° 43' 23" 19	(Ω)	21° 42' 28" 9.4
i	48 39 42.85	(i)	48 38 58.33
u	95 33 4.88	(u)	95 34 25.72
u'	49 5 5.61	(u')	49 5 12.19
$\frac{1}{2} (u' - u)$	156 46 0.36	$(\frac{1}{2} (u' - u))$	156 45 23.23
f	156 46 0.31	(f)	156 45 23.22

Nach V) und VI) (I pag. 143 und 144) ergab sich:

$\log q$	8.6287758	$\log (q)$	8.6291866
v	—158° 45' 40" 38	(v)	—158° 44' 53" 37
v'	154 46 20.35	(v')	154 45 53.10
ω	254 18 45.26	(ω)	254 19 19.09
π	276 2 8.45	(π)	276 1 48.03

und nach VII) (I pag. 144):

1847 März	1847 März
T aus v 30.32270	(T) aus (v) 30.30868
T aus v' 30.32273	(T) aus (v') 30.30865
T 30.322715	(T) 30.308665

Man hat daher die zwei Elementensysteme, bei welchen die Perihelzeit T sich auf den Monat März 1847 bezieht:

System	0	1
$\log M$	0.2262773	0.2265773
T	30.322715	30.308665
$\log q$	8.6287758	8.6291866
π	276° 2' 8" 45	276° 1' 48" 03
Ω	21 43 23.19	21 42 28.94
i	48 39 42.85	48 38 58.33

Rechnet man aus diesen Elementen die für die Zeiten der Normalorte folgenden geocentrischen Positionen nach den bekannten Methoden, so erhält man:

	A^0	B^0	A^1	B^1
1)	26° 21' 16" 36	+ 62° 44' 5" 14	26° 21' 16" 44	+ 62° 44' 5" 15
2)	22 49 6.82	+ 54 29 41.57	22 48 44.68	+ 54 29 23.06
3)	20 59 14.40	+ 47 36 8.49	20 58 38.95	+ 47 35 32.39

	A^0	B^0	A^1	B^1
4)	19°20'22"25	+ 39°53'32"85	19°19'33"25	+ 39°52'35"23
5)	17 27 16.39	+ 30 59 2.31	17 26 11.65	+ 30 57 37.80
6)	15 47 48.13	+ 24 2 23.20	15 46 30.24	+ 24 0 36.72
7)	44 18 54.20	+ 16 35 5.42	44 18 54.20	+ 16 35 5.42

Die Darstellung der beiden äussersten Orte durch die Elemente ist eine befriedigende. Es sind also (vergl. pag. 488) die Bedingungsgleichungen, die sich aus den übrigen Normalorten ergaben:

$$\begin{aligned}
 + 1''43 \cos \beta_2 &= - 22''14 \cos \beta_2 \mathcal{A}x \\
 + 9.35 \cos \beta_3 &= - 35.45 \cos \beta_3 \mathcal{A}x \\
 + 0.03 \cos \beta_4 &= - 49.00 \cos \beta_4 \mathcal{A}x \\
 - 5.85 \cos \beta_5 &= - 64.74 \cos \beta_5 \mathcal{A}x \\
 - 10.07 \cos \beta_6 &= - 77.89 \cos \beta_6 \mathcal{A}x \\
 - 10''50 &= - 18.51 \mathcal{A}x \\
 - 15.07 &= - 36.10 \mathcal{A}x \\
 - 25.13 &= - 57.62 \mathcal{A}x \\
 - 35.71 &= - 84.51 \mathcal{A}x \\
 - 44.96 &= - 106.48 \mathcal{A}x .
 \end{aligned}$$

Setzt man diese Gleichungen logarithmisch an und macht die auftretenden Coëfficienten dadurch homogen, dass man den Logarithmus der Fehlereinheit 1.6528 und ausserdem:

$$\log x = 2.0273 + \log \mathcal{A}x$$

setzt, so erhält man, wenn man allen Gleichungen gleiches Gewicht gibt:

Längen	Breiten
8.2666 = $9_n 0820 x$	9 _n 3684 = $9_n 2401 x$
9.1469 = $9_n 3512 x$	9 _n 5253 = $9_n 5302 x$
6.7093 = $9_n 5479 x$	9 _n 7474 = $9_n 7333 x$
9 _n 0476 = $9_n 7171 x$	9 _n 9000 = $9_n 8996 x$
9 _n 3108 = $9_n 8247 x$	0 _n 0000 = $0_n 0000 x$

Da demnach

$$[an] = + 2.2480, \quad [aa] = + 2.9752$$

ist, so folgt:

$$\begin{aligned}
 \log x &= 9.8783 \\
 \log \mathcal{A}x &= 9.5038 .
 \end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth von $\mathcal{A}x$ in die obigen Gleichungen ein, so bleiben für die wahrscheinlichste Parabel die folgenden Fehler in den Normalorten übrig, wobei $\cos \beta \delta \lambda$ angesetzt erscheint, um sogleich einen Ueberblick über die absolute Grösse der Fehler zu erlangen:

	$\cos \beta \delta \lambda$	$\delta \beta$
1.	0"00	0"00
2.	+ 4.93	— 4.60
3.	+13.94	— 3.55
4.	+12.02	— 6.75
5.	+12.69	— 8.75
6.	+13.49	—10.99
7.	0.00	0.00 .

Die Fehler zeigen, dass die Parabel den Beobachtungen nicht völlig genügt. Ohne jedoch vorerst diese Unterschiede, die durch die Einführung eines Werthes der Excentricität, der von der Einheit verschieden ist, wesentlich verkleinert werden können, weiter zu beachten, will ich die wahrscheinlichsten parabolischen Elemente ableiten. Die Vergleichung der beiden Systeme gibt:

$E_1 - E_0$	$(E_1 - E_0) \Delta x$
$T - 14050$	—4481
$\log q + 4108$	+1310
$\pi - 20''42$	— 6"51
$\Omega - 54.25$	—17.31
$i - 44.52$	—14.20 ;

es sind also die wahrscheinlichsten parabolischen Elemente die folgenden:

$$\begin{array}{l}
 \text{☾ I 1847} \\
 T = \text{März } 30.318234 \text{ mittl. Berl. Zeit} \\
 \log q = 8.6289068 \\
 \left. \begin{array}{l} \pi = 276^\circ 2' 1''94 \\ \Omega = 21 \ 43 \ 5.88 \\ i = 48 \ 39 \ 28.65 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{mittl. Aequinoct.} \\ 1847,0 . \end{array}
 \end{array}$$

Die directe Nachrechnung der Orte mit diesen Elementen zeigt in der That innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung eine völlige Uebereinstimmung mit der oben aus den Differentialformeln angegebenen Darstellung der Orte. Wenn auch in dem vorliegenden Falle die Parabel den Beobachtungen nicht völlig genügt, so entspricht die hier durchgeführte Rechnung einem geeigneten Rechnungsbeispiele und es können die hier gegebenen Methoden auf jeden Kometen ohne Abänderung angewendet werden.

β . Bestimmte Annahme über a .

Die Variation des Verhältnisses der Distanzen wird auch noch in jenen Fällen mit Vortheil angewendet werden können, wo man eine bestimmte Annahme über a zu machen in der Lage ist, ein Fall, der dann eintreten wird, wenn die in der ersten Näherung abgeleiteten parabolischen Elemente eine auffallende Aehnlichkeit mit den Elementen eines früher erschienenen Kometen zeigen. Man wird sich dann zunächst mit Hilfe dieser ersten parabolischen Elemente (vergl. I pag. 150), wenn

sonst keine besseren Näherungen bekannt sind, einen möglichst genauen Werth von M verschaffen und alle Formeln bis zur Auflösung der Lambert'schen Gleichung eventuell gleichzeitig mit einem entsprechend variirten Werthe von M durchrechnen. Hierbei ist wohl zu beachten, dass die für M gemachten Näherungsannahmen von der Natur des Kegelschnittes unabhängig sind; es wird also, wenn man in M nur die aus den Zwischenzeiten folgende Näherung einsetzt, der betreffende Himmelskörper zur Zeit der mittleren Beobachtung bis auf kleine Grössen derselben Ordnung in dem gewählten grössten Kreise stehen, mag man über die grosse Achse der Bahn eine beliebige Annahme machen.

Es sei die gefundene Perihelzeit T , die dem anderen Kometen mit ähnlichen Elementen angehörige Perihelzeit τ ; dann kann die Umlaufzeit:

$$T - \tau, \frac{T - \tau}{2}, \frac{T - \tau}{3}, \text{ u. s. f.}$$

sein und demgemäss wird die grosse Halbachse, wenn man den so gefundenen Zeitunterschied in Einheiten des siderischen Jahres ansetzt, sein können:

$$a = (T - \tau)^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{T - \tau}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{T - \tau}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ u. s. f.}$$

Man wird gewöhnlich mit dem grössten Werthe von a beginnen, q entsprechend der Lambert'schen Gleichung mit Hilfe der sehr bequemen Relation 17) (pag. 468) und unter Benützung der Formel IV (pag. 491) bestimmen, dann die Elemente nach den obigen Formeln (§ 2 pag. 472 ff.) ableiten und die Darstellung des mittleren Ortes suchen. Man wird wohl bald denjenigen Werth der Halbachse erkennen, der den Beobachtungen am besten zu entsprechen scheint. Für diesen Werth wird man mit dem variirten Werthe von M die Rechnung wiederholen, um die möglichst beste Darstellung zu erreichen. Waren aber die Zwischenzeiten nicht gross, so dass die in M eingeführten Näherungen hinreichend zutreffen, so wird man mit Rücksicht auf die oben gemachte Bemerkung, dass die Richtigkeit von M nicht durch die Wahl von a beeinflusst wird, von einer Variation von M Abstand nehmen können.

Ich gebe für diese Methode kein Beispiel, da dieselbe ganz nach den für die Parabel geltenden Vorschriften durchgeführt werden kann, nur mit dem Unterschiede, dass man statt der Euler'schen Gleichung die Lambert'sche und zwar in der Form 17) (pag. 468) anwendet.

γ . Uebergang von der Parabel auf nahezu parabolische Bahnen.

Hornstein's Methode.)

Zeigt sich bei dem Anschlusse parabolischer Elemente an die Beobachtungen, dass die Parabel nicht völlig genügt, so kann man nach Hornstein's Vorschläge (Bestimmung der Bahn des ersten Kometen vom Jahre 1847, nebst Bemerkungen über den Uebergang von der Parabel zur Ellipse oder Hyperbel, Märzheft 1854 der Sitzungsberichte der math.-natnrw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften

in Wien) in sehr bequemer und zweckmässiger Weise mit Benützung der vorhandenen Rechnungen den Uebergang auf den wahrscheinlichsten Kegelschnitt ausführen; ich werde übrigens im folgenden Paragraphen (§ 5 pag. 507) noch eine andere Methode anführen, die bisweilen in mancher Beziehung noch bequemer erscheint.

Macht man über M dieselbe Annahme, wie in der ersten Hypothese bei der Ermittlung einer parabolischen Bahn und lässt an die Stelle der Euler'schen Gleichung die Lambert'sche (pag. 468) treten, so wird man mit Hilfe derselben eine Lösung erhalten, sobald man eine bestimmte Annahme über $\frac{1}{a} = y$ macht. Man wird für y einen kleinen Werth, etwa 0,01 oder 0,02 annehmen. Die Zahl der Versuche bei der Lösung der Lambert'schen Gleichung kann durch Benützung der Differentialformeln wieder wesentlich vermindert werden. Vergleicht man nämlich die Euler'sche und Lambert'sche Gleichung:

$$\begin{aligned} k(t' - t) &= \frac{1}{6} (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} \mp \frac{1}{6} (r + r' - s)^{\frac{3}{2}} \\ k(t' - t) &= (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} Q_s \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}} Q_d \end{aligned}$$

so erhält man durch Subtraction den Unterschied:

$$(r + r' + s)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{6} - Q_s \right) \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{6} - Q_d \right) = \Delta \quad \text{IVb)}$$

zwischen $k(t' - t)$, der sich ergeben würde, wenn man in der Ellipse die für die Parabel geltenden Werthe einführt. Mit Benützung der Formeln IV) (pag. 491) oder was hier bequemer ist, ohne Anwendung des logarithmischen Incrementes erhält man alle jene Aenderungen, die man mit Beibehaltung des Werthes von M , an den für die Parabel gefundenen Werth von q anbringen muss, um der bestimmten Halbachse zu genügen. Es ist (vergl. 27) pag. 471):

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} &= (\sin \theta + M \sin \theta') \left\{ \left(\frac{r + r' + s}{1 - \frac{r + r' + s}{4a}} \right)^{\frac{1}{2}} \mp \left(\frac{r + r' - s}{1 - \frac{r + r' - s}{4a}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} + \\ &\quad + h \sin \theta \left\{ \left(\frac{r + r' + s}{1 - \frac{r + r' + s}{4a}} \right)^{\frac{1}{2}} \pm \left(\frac{r + r' - s}{1 - \frac{r + r' - s}{4a}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad \text{IVc)} \\ \delta q &= \pm \Delta N. \end{aligned}$$

wo wieder das obere Zeichen für heliocentrische Bewegungen, die kleiner, das untere Zeichen für solche, die grösser als 180° sind, gilt.

Diese so ermittelten Coëfficienten wird man bei allenfalls auftretenden Unterschieden auch für die weiteren Verbesserungen benützen dürfen. Ist dann derjenige Werth von q ermittelt, der einerseits unter Benützung des angenommenen Werthes von $\frac{1}{a} = y$ der Lambert'schen Gleichung, andererseits dem zu Grunde gelegten Werthe von M genügt, so rechnet man aus diesem nach den oben angeführten Methoden die Elemente und mit diesen die Darstellung der Orte. Von diesen Orten müssen die der Rechnung zu Grunde gelegten Normalorte völlig dargestellt werden,

welcher Umstand eine Controle für die Richtigkeit der Rechnung abgibt. Wenn, dann für die übrigen nicht völlig dargestellten Normalorte $A_1^2, A_2^2 \dots B_1^2, B_2^2 \dots$ die aus diesen Elementen folgenden geocentrischen Coordinaten sind, so erhält man auf empirischem Wege die Differentialquotienten der Variationen des geocentrischen Ortes durch die Variation des reciproken Werthes der grossen Halbachse y wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} A_1^2 - A_1^0 & = & \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} , \quad B_1^2 - B_1^0 = \frac{\partial \beta_1}{\partial y} \\ A_2^2 - A_2^0 & = & \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} , \quad B_2^2 - B_2^0 = \frac{\partial \beta_2}{\partial y} \\ : & : & : \quad : \quad : \quad : \end{array}$$

wobei wieder der angenommene Werth von y als Einheit für δy gilt. Mit Berücksichtigung der oben (pag. 488) für eine Variation von M erhaltenen Werthe werden nunmehr die Bedingungsgleichungen die Form haben:

$$\begin{array}{rcl} \cos \beta_1 \delta \lambda_1 & = & \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right) \cos \beta_1 \mathcal{A}x + \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \right) \cos \beta_1 \mathcal{A}y \\ \cos \beta_2 \delta \lambda_2 & = & \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right) \cos \beta_2 \mathcal{A}x + \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial y} \right) \cos \beta_2 \mathcal{A}y \\ : & : & : \\ \delta \beta_1 & = & \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) \mathcal{A}x + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial y} \right) \mathcal{A}y \\ \delta \beta_2 & = & \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x} \right) \mathcal{A}x + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial y} \right) \mathcal{A}y \\ : & : & : \end{array}$$

Aus diesen Gleichungen leitet man, nachdem man dieselben noch vorher mit den Quadratwurzeln ihrer Gewichte durchmultipliziert hat nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe für $\mathcal{A}x$ und $\mathcal{A}y$ ab; $\mathcal{A}x$ gibt die erforderliche Aenderung in M in Einheiten der angenommenen Aenderung, $\mathcal{A}y$ gibt den reciproken Werth der grossen Halbachse in Einheiten der obigen Annahme, wobei man auf eine Hyperbel geführt würde, falls $\mathcal{A}y$ negativ gefunden wird. Man kann nun mit den Werthen:

$$\begin{aligned} \log M &= \log M_0 + \mathcal{A}x \\ \frac{1}{a} &= \frac{1}{a_0} + \mathcal{A}y \end{aligned}$$

neue Elemente ableiten, oder dieselben auch nach der oben (pag. 484) angegebenen nunmehr auf zwei Variable zu erweiternden Interpolationsmethode erhalten, welche in den meisten Fällen, besonders, wenn die heliocentrischen Bogen gross sind, ebenfalls genügend genaue Resultate geben wird. Es wird für jedes Element

$$E = E_0 + (E_1 - E_0) \mathcal{A}x + (E_2 - E_0) \mathcal{A}y .$$

Ist aber die Abweichung von der Parabel sehr bedeutend, so wird diese Methode erst nach mehrfachen Versuchen zum Ziele führen; indem man vorerst einen Näherungswerth von a erhält, wird man diesen benützen, um mit zwei Annahmen über M mit Beibehaltung des Näherungswerthes von a einerseits, und einem abgeänderten Werthe von a andererseits das Verfahren fortzusetzen. Indess wird es sich

in diesen Fällen der stärkeren Abweichung mehr empfehlen, direct nach einer der im ersten Bande entwickelten Methoden aus den 3 zu Grunde gelegten Orten genäherte Elemente abzuleiten, auf welche man dann die in dem betreffenden Falle geeignet erscheinenden Verbesserungsmethoden anwendet.

Es soll znnächst Hornstein's Methode durch ein Beispiel erläutert werden, und ich wähle das früher für die Parabel durchgeführte Beispiel einer Bahnverbesserung für den ersten Cometen des Jahres 1847. Man wird jetzt leicht einsehen, weshalb ich dort ein Beispiel gewählt habe, welches der Parabel nicht völlig genügt.

Zunächst kann man alle Hilfsgrößen benützen, die oben für die Parabel in der ersten Annahme über M berechnet wurden und hat darauf die Lambert'sche Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} k(t' - t) &= (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} Q_s \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}} Q_d \\ Q_s \text{ aus Tafel XVII mit dem Argumente } \frac{r + r' + s}{4a} \\ Q_d \text{ aus Tafel XVII } \text{ » } \text{ » } \text{ » } \frac{r + r' - s}{4a} \end{aligned} \right\} \text{ Vb)}$$

durch Versuche zu lösen. Für die Ermittlung der ersten Näherung von q wird man die Formeln IVb) und IVc) (pag. 499) rechnen; nimmt man $a = \frac{1}{y} = 50$, so folgt:

$r + r' + s$	0.4847	$1 - \frac{r + r' + s}{4a}$	9.9933
$4a$	2.3010	$1 - \frac{r + r' - s}{4a}$	9.9973
$r + r' - s$	0.0020	$\left(1 - \frac{r + r' + s}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$	9.9966
Arg. für Q_s	+0.015266	$\left(1 - \frac{r + r' - s}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$	9.9986
Arg. für Q_d	+0.006180	$\sqrt{r + r' + s}$	0.2424
$\log Q_s$	9.2238496	$\sqrt{r + r' - s}$	0.0460
$\log Q_d$	9.2226559	$Z_s : N_s$	0.2458
Sub_s	2.3376	$Z_d : N_d$	0.0474
Sub_d	2.7312	Add.	0.2131
$\log \left(\frac{1}{6} - Q_s\right)$	6 _n 8862	Subtr.	0.4357
$\log \left(\frac{1}{6} - Q_d\right)$	6 _n 4915	(+)	0.4589
I	7 _n 6133	$\sin \theta + M \sin \theta'$	0.3429
II	6 _n 6295	(-)	9.8101
Add.	0.0429	$h \sin \vartheta$	9.8766
\mathcal{A}	7 _n 6562	$\log I$	0.8018
$4\mathcal{A}$	8 _n 2583	$\log II$	9.6867
N	9.1661	Add.	0.0321

Es ist somit $dq = -0.0026571$, also $q = 1.0503887$. Die Durchführung der Hypothese mit diesem Werthe gibt in $k(t' - t)$ den Fehler $\mathcal{A} = -75$ Einheiten der 7. Decimale. Hieraus ergibt sich in Verbindung mit dem Werthe von N nach der

Formel $d\varrho = \Delta N$ der Werth $\varrho = 1.0503843$, welcher Werth bei der Lösung der Lambert'schen Gleichung in der That eine völlige Uebereinstimmung ergibt. Die Rechnung dieser Versuche stellt sich wie folgt:

$a = 50$		
Versuch	1	2
ϱ	+1.0503887	+1.0503843
$\log (\varrho - f)$	9.9055383	9.9055359
$\log (\varrho - f')$	9.6879746	9.6879707
$\log (\varrho - \gamma)$	9.6352747	9.6352703
$\text{tang } \theta$	9.9242630	9.9242606
$\text{tang } \theta'$	0.3848449	0.3848410
$\text{tang } \vartheta$	9.8723400	9.8723356
$\cos \theta$	9.8840681	9.8840691
$\cos \theta'$	9.5810722	9.5810756
$\cos \vartheta$	9.9040658	9.9040673
r	0.0972072	0.0972062
r'	9.9483348	9.9483314
Add.	0.2329419	0.2329409
$r + r'$	0.3301491	0.3301471
s	9.9573914	9.9573899
Add.	0.1534732	0.1534734
Subtr.	0.2394866	0.2394870
$r + r' + s$	0.4836223	0.4836205
$(r + r' + s)^{\frac{1}{2}}$	0.2418111	0.2418102
$r + r' - s$	0.0906625	0.0906601
$(r + r' - s)^{\frac{1}{2}}$	0.0453312	0.0453300
S	0.0152262	0.0152262
D	0.0061607	0.0061607
$(r + r' + s)^{\frac{3}{2}}$	0.7254334	0.7254307
Q_s	9.2238443	9.2238443
$(r + r' - s)^{\frac{3}{2}}$	0.1359937	0.1359901
Q_d	9.2226533	9.2226533
I	+0.8897698	+0.8897643
II	+0.2283742	+0.2283723
$k(t' - t)$	+1.1181440	+1.1281366
Δ	— 75 —	1

Der Uebergang auf die heliocentrischen Orte mit den Werthen:

$$\log \varrho = 0.0213482$$

$$\log \varrho' = 0.2476255$$

ergab nach den bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} l & 120^{\circ}10'40''61 \\ l' & 59 \quad 7 \quad 10.64 \\ \text{tang } b & 0.0498726 \\ \text{tang } b' & 9.8396016 \\ r & 0.0972062 \\ r' & 9.9483316 ; \end{aligned}$$

hiermit fand sich nach I) und II) pag. 472:

$$\begin{aligned} i & 48^{\circ}36'14''09 \\ \Omega & 21 \quad 34 \quad 53.76 \\ u & 95 \quad 42 \quad 30.61 \\ u' & 49 \quad 17 \quad 6.31 \\ f & 156 \quad 47 \quad 17.85 . \end{aligned}$$

Die Probe nach III b) ergab in guter Uebereinstimmung:

$$f = 156^{\circ}47'17''83 .$$

Die Rechnung der übrigen Elemente nach den Formeln IV b) — VII b) (pag. 476 ff.) setze ich als die erste Anwendung dieser Formeln hier vollständig an. Nach IV b) (pag. 476) und V b) (pag. 477) fand sich mit Rücksicht darauf, dass für a der Werth 50 angenommen wurde:

$$\begin{array}{ll} \cos f^2 & 9.9266828 \qquad \alpha \quad 25^{\circ}19' \quad 2''34 \\ rr' & 0.0455378 \qquad \frac{1}{2} \alpha \quad 12 \quad 39 \quad 31.17 \\ rr' \cos f^2 : a & 8.2732506 \qquad \cos \frac{1}{2} \alpha^2 \quad 9.9786263 \\ r + r' & 0.3301471 \qquad z \quad 0.3049469 \\ \text{Subtr.} & 0.0038265 \qquad rr \sin f^2 \quad 9.2368162 \\ \zeta & 0.3263206 \qquad p \quad 8.9318693 \end{array}$$

durch die Formeln VI b) (pag. 478) ergaben sich die folgenden Zahlen:

$$\begin{array}{ll} \text{Subtr.} & 0.5372767 \qquad 2ez \sin F \quad 9.1555687 \\ r' - r & 9.5599295 \qquad \qquad \qquad 9.9997265 \\ z : a & 8.6059769 \qquad 2ez \cos F \quad 0.6053319 \\ 1 - \frac{z}{a} & 9.9821073 \qquad F \quad -2^{\circ} \quad 1'59''47 \\ rr' \left(1 - \frac{z}{a}\right) & 0.0276451 \qquad 2ez \quad 0.6056054 \\ \sqrt{rr' \left(1 - \frac{z}{a}\right)} & 0.0138225 \qquad 2z \quad 0.6059769 \\ 2 \sqrt{rr' \left(1 - \frac{z}{a}\right)} & 0.3148525 \qquad e \quad 9.9996285 \\ (r + r') \cos f & 0.2934885 \qquad 1 + e \quad 0.3008443 \end{array}$$

Add.	0.2904794	q	8.6310250
v	$-158^{\circ}49'17''32$	$1 - e$	6.9320550
v'	$+154\ 45\ 18.38$	$\frac{1-e}{1+e}$	6.6312107
π	$276\ 6\ 41.69$	$q^{\frac{3}{2}} : \sqrt{1+e}$	7.7961154

Nach VIIb) (pag. 479) stellt sich die Rechnung für die beiden Orte mit Benützung der Tafel XVIII wie folgt:

	1.	2.
$\frac{1}{2} v$	$-79^{\circ}24'38''66$	$+77^{\circ}22'39''19$
$\text{tang } \frac{1}{2} v^2$	1.4565448	1.2997450
θ	$+0.0122393$	$+0.0085301$
$\text{tang } \frac{1}{2} v$	$0_n7282724$	0.6498725
P_1	2.0619293	2.0629908
$\text{tang } \frac{1}{2} v^3$	$2_n1848172$	1.9496175
P_3	1.5819853	1.5838996
I	$2_n7902017$	2.7128633
II	$3_n7668025$	3.5335171
Add.	0.0435727	0.0611238
{...}	$3_n8103752$	3.5946409
Δt	$+40.41016$	-24.58987
$T = \text{März } 30.41016$		30.41013
	$T = 30.410145$	

Stellt man daher die gefundenen Elemente zusammen, so erhält man das System:

$$\begin{aligned}
 & 2. \\
 & T = 1847 \text{ März } 30.410145 \\
 & \log q = 8.6310250 \\
 & \frac{1}{a} = 0.0200000 \\
 & \left. \begin{aligned} \pi &= 276^{\circ} 6' 41'' 69 \\ \Omega &= 21\ 34\ 53.76 \\ i &= 48\ 36\ 14.09 \end{aligned} \right\} \text{ mittl. Aequin. } 1847,0
 \end{aligned}$$

und die geocentrischen polaren Coordinaten für die Zeiten der obigen Normalorte ergeben sich aus diesen Elementen in der bekannten Weise wie folgt:

	A^2	B^2
1)	$26^{\circ}21'16''29$	$+62^{\circ}44' 5''15$
2)	$22\ 51\ 48.16$	$+54\ 30\ 3.06$
3)	$21\ 3\ 29.55$	$+47\ 37\ 13.55$
4)	$19\ 25\ 56.16$	$+39\ 55\ 48.48$
5)	$17\ 34\ 1.56$	$+31\ 3\ 3.58$
6)	$15\ 55\ 23.17$	$+24\ 8\ 4.75$
7)	$44\ 18\ 54.15$	$+16\ 35\ 5.36$

Die Darstellung der beiden äussersten Orte durch die obigen Elemente gibt eine befriedigende Controle für die Richtigkeit der vorausgegangenen Rechnungen. Bildet man nun den obigen Entwicklungen entsprechend (pag. 500) die Differentialquotienten für Δy , und setzt zugleich die bereits oben (pag. 496) ermittelten, für Δx geltenden Coefficienten an, so erhält man nunmehr die Bedingungsgleichungen:

für die Längen:

$$\begin{aligned} + 1''43 \cos \beta_2 &= - 22''14 \cos \beta_2 \Delta x + 161''34 \cos \beta_2 \Delta y \\ + 9.35 \cos \beta_3 &= - 35.45 \cos \beta_3 \Delta x + 255.15 \cos \beta_3 \Delta y \\ + 0.03 \cos \beta_4 &= - 49.00 \cos \beta_4 \Delta x + 333.91 \cos \beta_4 \Delta y \\ - 5.85 \cos \beta_5 &= - 64.74 \cos \beta_5 \Delta x + 405.17 \cos \beta_5 \Delta y \\ - 10.07 \cos \beta_6 &= - 77.89 \cos \beta_6 \Delta x + 455.04 \cos \beta_6 \Delta y \end{aligned}$$

für die Breiten:

$$\begin{aligned} - 10''50 &= - 18''51 \Delta x + 21''49 \Delta y \\ - 15.07 &= - 36.10 \Delta x + 65.06 \Delta y \\ - 25.13 &= - 57.62 \Delta x + 135.63 \Delta y \\ - 35.71 &= - 84.51 \Delta x + 241.27 \Delta y \\ - 44.96 &= - 106.48 \Delta x + 341.55 \Delta y. \end{aligned}$$

Gibt man allen diesen Bedingungsgleichungen gleiches Gewicht und setzt man, um dieselben möglichst homogen zu gestalten, wieder wie oben (pag. 496):

$$\begin{aligned} \log \text{Fehlereinheit} &= 1.6528 \\ \log x &= 2.0273 + \log (\Delta x) \end{aligned}$$

und ausserdem:

$$\log' y = 2.6186 + \log (\Delta y)$$

so erhalten die Normalgleichungen die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} + 2.9752 x - 2.9632 y &= + 2.2480 \\ - 2.9632 x + 3.4485 y &= - 1.7654 \end{aligned}$$

und die Auflösung ergibt:

$$\log \Delta x = 9.8569, \quad \log \Delta y = 9.0129.$$

Wollte man sowohl die Elemente als auch die Darstellung der Orte als Functionen von y darstellen, so würde man die erste der obigen Normalgleichungen hierzu benützen können; doch gehe ich auf diese Darstellung nicht ein, weil schon oben für dieses Verfahren hinreichend erläuternde Beispiele angeführt sind. Durch Einführung dieser Werthe der Unbekannten in die obigen Bedingungsgleichungen erhält man die folgende Darstellung der Orte:

	$\cos \beta \, \delta \lambda$	$\delta \beta$
1.	0''0	0''0
2.	+0.4	+0.6
3.	+5.8	+4.2
4.	+0.7	+2.3
5.	0.9	+0.2
6.	—0.9	—3.5
7.	0.0	0.0

Interpolirt man die Elemente nach der oben (pag. 500) angesetzten Formel, so findet man das folgende, nunmehr als definitiv anzusehende Elementensystem:

$$\begin{aligned}
 & \text{J 1. 1847} \\
 & T = \text{März 30 321616 mittl. Berl. Zeit.} \\
 & \log q = 8.6293030 \\
 & \log a = 2.686 \, 1328 \quad (a = 485.437) \\
 & \left. \begin{aligned} \pi &= 276^{\circ} \, 2' \, 21'' \, 91 \\ \Omega &= 21^{\circ} \, 41' \, 51'' \, 69 \\ i &= 48^{\circ} \, 38' \, 49'' \, 32 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{mittl. Aequinoct.} \\ &1847,0 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Die directe Nachrechnung der Orte aus diesen Elementen gibt gegen die obige aus den Differentialformeln abgeleitete Darstellung derselben eine genügende Uebereinstimmung. Sollte man, wie dies bei der Rechnung aus kleinen helio-centrischen Bogen zu befürchten ist, die Interpolation zwischen den Elementen selbst ihrer Linearität nach für nicht genügend gesichert halten, so wird man die Elemente aus dem verbesserten Werthe von M mit Zugrundelegung des oben gefundenen Werthes von a direct berechnen und dann einen viel besseren Anschluss an die Resultate der Differentialquotienten erhalten. Der Grund dieser Bemerkung ist nach den früher gegebenen Erklärungen (pag. 483) leicht ersichtlich; in dem hier gewählten Beispiele hätte man also anzunehmen:

$$\begin{aligned}
 \log M &= 0.2262773 + 0.0003000 \, \Delta x = 0.2264931, \\
 a &= 485.437;
 \end{aligned}$$

doch führen diese Zahlen in dem vorliegenden Falle innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung aus leicht begreiflichen Gründen auf die oben durch Interpolation erhaltenen Elemente.

§ 5. Variation der Distanzen mit Benützung der Variation des Verhältnisses der Distanzen.

Man kann das durch die Variation des Verhältnissen der Distanzen M erhaltene Resultat noch in anderer Weise zur Ermittlung des wahrscheinlichsten Kegelschnittes verwerthen, und zwar bietet das hier vorgeschlagene Verfahren in jenen Fällen besondere Vortheile, wo durch die Variation von M die beiden geocentrischen Distanzen beeinflusst werden; jene Fälle, in denen bei der Variation von M die eine geocentrische Distanz fast unverändert bleibt, würde sich für die Anwendung dieses Verfahrens nicht eignen; man wird dies leicht durch die vorhandenen Rechnungen entscheiden können.

Es wurde oben (pag. 493) gefunden für die

	erste Parabel	zweite Parabel
$\log \varrho$	0.022 4472	0.022 2311
$\log \varrho'$	0.248 7245	0.248 8084 ;

es ändern sich also die beiden geocentrischen Distanzen in genügender Weise. Rechnet man nun ein Elementensystem, indem man den Werth von ϱ aus der zweiten, den Werth von ϱ' aus der ersten parabolischen Bahn nimmt, so hat diese Bahn als Grundlage die Werthe:

$$\begin{aligned}\log \varrho &= 0.022\ 2311 \\ \log \varrho' &= 0.248\ 7245 .\end{aligned}$$

Betrachtet man die auf diesem Werthe beruhenden Elemente als Ausgangselemente, so hat man das vorliegende Problem auf die Methode der Variation der Distanzen reducirt, die in § 3 (pag. 480 u. ff.) ausführlich behandelt wurde. Das aus diesen letzteren Distanzen abgeleitete System ist also als das System I, die erste Parabel als System II, die zweite Parabel als System III zu betrachten und es ist weiter mit Beibehaltung der dort gewählten Bezeichnung (pag. 481, 482):

$$\begin{aligned}\delta x &= + 0.000\ 2161 \\ \delta y &= + 0.000\ 0839 .\end{aligned}$$

Da hiermit Alles auf eine bereits bekannte Methode zurückgeführt erscheint, so ist weiter für die Durchführung des Beispieles nichts zu bemerken und ich will hier nur beifügen, dass die Vortheile dieser Methode gegen die in § 4 (pag. 498 ff.) auseinandergesetzte nicht unerheblich sind. Man hat nämlich vorerst nicht nöthig, die heliocentrischen Orte von Neuem aus den geocentrischen Distanzen abzuleiten, da die heliocentrischen Orte unverändert den früheren Rechnungen entlehnt werden können; ausserdem hat man nicht nöthig, die Lambert'sche Gleichung durch Versuche, bei denen r , r' und s variabel sind, zu lösen, sondern man gelangt durch die in den meisten Fällen völlig ausreichende Formel 26) (pag. 471) direct zur Kenntniss des Werthes von a , woraus die übrigen Elemente mit Hilfe der oben

gegebenen Vorschriften leicht gefunden werden können. Sollte die versuchsweise Lösung dennoch nothwendig sein, was wohl kaum je der Fall sein wird, so wird die Unveränderlichkeit der Werthe r , r' und s diese Rechnungen wesentlich abkürzen. Ich will nun das Beispiel des Kometen I 1847 nach dieser Methode durchführen.

Nach pag. 495, finden sich die heliocentrischen Orte, und zwar der erste Ort nach der zweiten Hypothese über M , der zweite nach der ersten Hypothese mit den Annahmen:

$$\log \varrho = 0.022\ 2311 \qquad \log \varrho' = 0.248\ 7245$$

für die geocentrischen Entfernungen wie folgt:

$$\begin{array}{ll} \log r & 0.097\ 6836 & \log r' & 9.950\ 3541 \\ l & 120^{\circ}6'38''47 & l' & 59^{\circ}2'2''48 \\ \text{tang } b & 0.050\ 7892 & \text{tang } b' & 9.838\ 2382, \end{array}$$

welche Angaben also der früheren Rechnung unverändert entlehnt sind.

Es sind nach Formel I) und II) (pag. 472):

$$\begin{array}{ll} \Omega & 21^{\circ}42'16''20 & u & 95^{\circ}34'34''14 \\ i & 48^{\circ}38'59''27 & u' & 49^{\circ}5'49''81 \\ \frac{1}{2} (u' - u) = f & = 156^{\circ}45'37''835, \end{array}$$

und die Controlrechnung nach IIIa) (pag. 473) ergab in guter Uebereinstimmung:

$$f = 156^{\circ}45'37''83.$$

Bestimmt man die Sehne s nach der Formel:

$$s^2 = r^2 + r'^2 - r r' \cos 2f,$$

so erhält man:

$$\log s = 9.958\ 3262.$$

Mit Benützung der Formeln 24) und 25) (pag. 471) findet man weiter:

$$\begin{array}{l} \log \alpha = 7.04276 \\ \log \beta = 9.58644; \end{array}$$

die Berechnung von γ erscheint bereits unnöthig; aus den letzteren Werthen erhält man endlich:

$$\frac{1}{a} = + 0.001\ 1029,9 \text{ also } \log a = 2.957\ 4284,$$

wobei es in der Natur der Sache gelegen ist, dass a selbst numerisch nicht genau zu bestimmen ist; für die Darstellung der Beobachtungen aber ist diese Unsicherheit unschädlich. Die Controlrechnung mittelst der Lambert'schen Gleichung nach 17) (pag. 468) ergab eine vollständige Bestätigung für die Richtigkeit der Bestimmung von a .

Weiter wurde ermittelt nach IVb) (pag. 476) und Vb) (pag. 477):

$$\begin{array}{l} \log z = 0.310\ 0819 \\ \log p = 8.930\ 2156 \end{array}$$

dann nach VIb) (pag. 478):

$$\begin{array}{ll} F = -1^{\circ}59'40''52 & v = -158^{\circ}45'18''35 \\ \log e = 9.999\ 9795 & v' = 154^{\circ}45'57''31 \\ \log (1-e) = 5.671\ 7674 & \omega = 254^{\circ}19'52''50 \\ \log q = 8.629\ 1958 & \pi = 270^{\circ}2'8''70; \end{array}$$

endlich fand sich nach VIIb) (pag. 479) die Perihelzeit

$$\begin{array}{ll} \text{aus: } v, & T = \text{März } 30,31734 \\ \text{» } v', & T = \text{März } 30,31740 \\ \text{also im Mittel: } & T = \text{März } 30,317370, \end{array}$$

womit die Rechnung der Elemente, die nach den obigen Vorschriften als Ausgangselemente zu betrachten sind, erledigt ist. Um alles übersichtlich beisammen zu haben, stelle ich die Elemente, die sich aus den voranstehenden und den oben für die beiden Parabeln (pag. 495 ff.) gefundenen Zahlen ergeben, neben einander:

	I	II	III
T	30.317370	30.322715	30.308665
$\log q$	8.6291958	8.6287758	8.6291866
$\frac{1}{a}$	0.0011029.9	0	0
π	276° 2' 8''70	276° 2' 8''45	276° 1'48''03
Ω	21°42'16''20	21°43'23''19	21°42'28''94
i	48°38'59''27	48°39'42''85	48°38'58''33

Die diesen Elementen für die Zeiten der Normalorte entsprechenden geocentrischen Coordinaten, mit Weglassung der äusseren Orte, die als Grundlagen der Rechnung durch alle drei Systeme völlig dargestellt werden, sind:

	I	II	III
A_2	22°48'59''67	22°49' 6''82	22°48'44''68
A_3	20 59 2.84	20 59 14.40	20 58 38.95
A_4	19 20 5.24	19 20 22.25	19 19 33.25
A_5	17 26 51.85	17 27 16.39	17 26 11.65
A_6	15 47 16.86	15 47 48.13	15 46 30.24
B_2	+ 54 29 29.42	+ 54 29 41.57	+ 54 29 23.06
B_3	+ 47 35 46.05	+ 47 36 8.49	+ 47 35 32.39
B_4	+ 39 52 58.78	+ 39 53 32.85	+ 39 52 35.23
B_5	+ 30 58 14.61	+ 30 59 2.31	+ 30 57 37.80
B_6	+ 24 1 25.21	+ 24 2 23.20	+ 24 0 36.72

Mit Rücksicht auf die im § 3 (pag. 480 ff.) auseinandergesetzten Vorschriften stellen sich die Bedingungsgleichungen zur Ermittlung der Correctionen der Logarithmen der geocentrischen Distanzen in folgender Weise:

Für die Längen :

$$\begin{aligned} + 8''58 &= + 7''15 \Delta x - 14''99 \Delta y \\ + 20.91 &= + 11.56 \Delta x - 23.89 \Delta y \\ + 17.04 &= + 17.01 \Delta x - 31.99 \Delta y \\ + 18.69 &= + 24.54 \Delta x - 40.20 \Delta y \\ + 21.20 &= + 31.27 \Delta x - 46.62 \Delta y \end{aligned}$$

Für die Breiten :

$$\begin{aligned} + 1''65 &= + 12''15 \Delta x - 6''36 \Delta y \\ + 7.37 &= + 22.44 \Delta x - 13.66 \Delta y \\ + 8.94 &= + 34.07 \Delta x - 23.55 \Delta y \\ + 11.99 &= + 47.70 \Delta x - 36.81 \Delta y \\ + 13.03 &= + 57.99 \Delta x - 48.49 \Delta y \end{aligned}$$

Die Bedingungsgleichungen für die Längen sind mit dem Cosinus der Breite, und ausserdem wären alle Gleichungen noch mit den Quadratwurzeln ihrer zugehörigen Gewichte durchzumultipliciren; letzteres entfiel hier, da alle Normalgleichungen gleiches Gewicht erhielten. Führt man, um diese Gleichungen homogen zu machen (vergl. pag. 318), die Relationen ein:

$$\text{Logarithmus der Fehlereinheit} = 1.2869$$

$$\log x = \log \Delta x + 1.7633$$

$$\log y = \log \Delta y + 1.6856 ,$$

so sind nun die neuen, logarithmisch angesetzten Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 9.4107 &= 8.8551 x + 9.2543 y \\ 9.8623 &= 9.1286 x + 9.5215 y \\ 9.8295 &= 9.3524 x + 9.7044 y \\ 9.9179 &= 9.5598 x + 9.8518 y \\ 0.0000 &= 9.6924 x + 9.9436 y \\ 8.9306 &= 9.3213 x + 9.1179 y \\ 9.5806 &= 9.5877 x + 9.4498 y \\ 9.6644 &= 9.7691 x + 9.6864 y \\ 9.7919 &= 9.9152 x + 9.8803 y \\ 9.8280 &= 0.0000 x + 0.0000 y , \end{aligned}$$

die sich in die folgenden Normalgleichungen vereinigen:

$$\begin{aligned} + 2.6639 x + 2.9084 y &= + 2.6801 \\ + 2.9084 x + 3.5843 y &= + 3.5825 . \end{aligned}$$

Die Auflösung gibt:

$$\log x = 9.8731 , \quad \log y = 0.2056 ,$$

und mit Rücksicht auf die Homogenitätsfactoren folgt hieraus:

$$\log \Delta x = 9.8731 , \quad \log \Delta y = 9.8069 .$$

Wollte man nun die Distanzen bestimmen, die man der Ermittlung der neuen Elemente zu Grunde zu legen hätte, so wäre zu beachten, dass die Werthe von Δx und Δy in Einheiten der gewählten Aenderungen zu verstehen sind; letztere wurden oben in Einheiten der siebenten Decimale beziehungsweise $+ 2161$ und $+ 839$ gefunden; die Correctionen für die Distanzen würden also sein:

$$\text{für } \log q = 539$$

$$\text{für } \log q' = 538;$$

doch wird es in dem vorliegenden Falle nicht nöthig sein, die Berechnung der neuen Elemente aus den Distanzen durchzuführen, sondern es wird, da die Aenderungen der Elemente hinreichend klein sind, die Interpolation zwischen den Elementen zu demselben Resultate führen.

Ermittelt man vorerst die übrig bleibenden Fehler, indem man die obigen Werthe von Δx und Δy in die ursprünglichen Bedingungsgleichungen einsetzt, so erhält man die folgende Darstellung der Orte:

	$\cos \beta \delta \lambda$	$\delta \beta$
1.	0"0	0.0
2.	+0.4	+0.6
3.	+5.7	+4.2
4.	+0.6	+2.3
5.	—0.8	+0.3
6.	—0.8	—3.6
7.	0.0	0.0

welche mit jener nach der in § 4 entwickelten Methode (vergl. pag. 506) angeführten Darstellung der Orte so gut wie völlig stimmt.

Die Interpolation der Elemente (vergl. pag. 500) ergibt:

$$\begin{array}{l} \text{J} 1847 \\ T = \text{März } 30.321618 \text{ mittl. Berl. Zeit.} \\ \log q = 8.629 \ 3064 \\ \log a = 2.680 \ 8752 \\ \left. \begin{array}{l} \pi = 276^{\circ} \ 2' \ 22'' \ 01 \\ \Omega = 21^{\circ} 41' 51'' 33 \\ i = 48^{\circ} 38' 49'' 01 \end{array} \right\} \text{mittl. Aeq. } 1847.0 \end{array}$$

Wie man sieht, unterscheiden sich die Elemente um geringe Grössen von den auf pag. 506 angeführten. Der Unterschied in a ist aber beträchtlich, doch erklärt sich derselbe hinreichend durch die Unsicherheit der siebenstelligen Rechnung, da beide Systeme in nahezu völliger Uebereinstimmung die Beobachtungen darstellen. Hätte man die Elemente als Funktionen der Aenderungen des reciproken Werthes der grossen Achse dargestellt (vergl. die Andeutung pag. 505), so würde man in der That finden, dass die Einführung des Unterschiedes in a in den beiden Systemen eine völlige Uebereinstimmung herstellen würde.

Anhang.

Am Schlusse der folgenden Tafelsammlung habe ich eine mir von Herrn R. Sehrum freundlichst zur Verfügung gestellte Tafel als Tafel XIX aufgenommen. Dieselbe hat den Zweck, die Verwandlung grosser Zwischenzeiten in Tage zu erleichtern, indem sie die vorgelegten Daten unmittelbar in Tage der julianischen Periode umzusetzen gestattet, ohne dass man nöthig hätte, sich um die Art des Jahres (ob Schaltjahr oder nicht) zu bekümmern, und dürfte insofern einen Vortheil gegenüber den ähnlichen in der Connaissance und im englischen Nautical-Almanac enthaltenen Tafeln bieten. Die Tafel gibt auf der rechten Seite die Zahl der seit dem Beginne der julianischen Periode verflossenen Tage für den Anfang eines jeden Jahrhunderts sowohl für den julianischen als für den gregorianischen Kalender, und auf der linken Seite die Zahl der seit dem Anfange des Jahrhunderts bis zum Anfange des gegebenen Monats verflossenen Tage; die Summe dieser zwei Zahlen, mehr dem Monatsdatum gibt die verlangte Tageszahl der julianischen Periode; negative Jahreszahlen sind im Sinne der astronomischen Zählweise (Astr: — Hist: = + 1) verstanden. Es ist noch eine Hilfstafel beigelegt, um Stunden, Minuten und Sekunden in Tagesbruchtheile streng zu verwandeln. Weiter ist zu bemerken, dass in der Tafel für die einzelnen Jahre die Anordnung entsprechend jener der Logarithmentafeln so getroffen ist, dass der erste Theil der Zahl abgetrennt und durch einen Strich über der ersten Ziffer des zweiten Theiles angezeigt ist, wann der Uebergang auf die nächsthöheren Anfangsziffern stattfindet; für jene Jahrhunderte, welche bei der gregorianischen Zeitrechnung in Klammern gesetzt sind, ist für das nullte Jahr des betreffenden Säculums die erste ober dem Striche stehende Zeile auf der linken Seite zu benützen. Es soll nun die Anwendung der Tafel durch ein Beispiel erläutert werden; man hätte die Zwischenzeit zwischen — 399 Juni 21, 6^h 9^m 21^s 60 julianisch und 1850 Januar 0, 0^h 0^m 0^s gregorianisch zu bestimmen. Die Rechnung stellt sich wie folgt, wenn man beachtet, dass — 399 = — 400 + 1:

Jahrhundert	— 400 . . .	1574957	1800	2378495
Jahr 1 und Monat Juni	. . .	517	50 Januar . . .	18263
Monatstag 21	. . .	21	0	0
6 ^h 0 ^m 0 ^s . . .		0.25	<hr/>	
9 ^m 21 ^s 60 . . .		65	1850 Jan. 0, 0 ^h 0 ^m 0 ^s 00 =	2396758.00
<hr/>		— 399 Juni 21, 6 ^h 9 ^m 21 ^s 60 =	1575495.2565	

also die Zwischenzeit 821262,7435. Hansen rechnet die Zwischenzeit in dem Supplemente zu seinen Sonnentafeln und findet sie gleich 2248 julianischen Jahren 180,7435 Tagen, was mit dieser Bestimmung identisch ist. Einige der Tafel angehängte Bemerkungen bedürfen kaum einer Erläuterung; so fände man z. B. dass der 21. Juni — 399 ein Samstag und der 0. Januar 1850 ein Montag war, da die erste Tageszahl (1575495) durch 7 dividirt den Rest 5, die zweite (2396758) den Rest 0 gibt. Bezüglich der das Berliner Jahrbuch betreffenden Bemerkung ist es klar, dass für die erstere schon die drei letzten, für die folgende aber schon die zwei letzten Ziffern der Zahl genügen, die Entscheidung zu bringen.

TAFELN.

Tafel I.

 $\log \{N_1^3(n)\}$.

vergl. pag. 18.

$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$
0.000	9 _n 221 849	2	0.050	9 _n 218 579	132	0.100	9 _n 208 620	270	0.150	9 _n 191 497	420	0.200	9 _n 166 331	594
0.001	9 _n 221 847	4	0.051	9 _n 218 447	136	0.101	9 _n 208 350	273	0.151	9 _n 191 077	424	0.201	9 _n 165 737	598
0.002	9 _n 221 843	6	0.052	9 _n 218 311	138	0.102	9 _n 208 077	275	0.152	9 _n 190 653	427	0.202	9 _n 165 139	601
0.003	9 _n 221 837	9	0.053	9 _n 218 173	140	0.103	9 _n 207 802	279	0.153	9 _n 190 226	431	0.203	9 _n 164 538	606
0.004	9 _n 221 828	12	0.054	9 _n 218 033	144	0.104	9 _n 207 523	282	0.154	9 _n 189 795	433	0.204	9 _n 163 932	609
0.005	9 _n 221 816	14	0.055	9 _n 217 889	146	0.105	9 _n 207 241	284	0.155	9 _n 189 362	437	0.205	9 _n 163 323	613
0.006	9 _n 221 802	17	0.056	9 _n 217 743	148	0.106	9 _n 206 957	287	0.156	9 _n 188 925	441	0.206	9 _n 162 710	617
0.007	9 _n 221 785	20	0.057	9 _n 217 595	151	0.107	9 _n 206 670	290	0.157	9 _n 188 484	443	0.207	9 _n 162 093	621
0.008	9 _n 221 765	22	0.058	9 _n 217 444	154	0.108	9 _n 206 380	293	0.158	9 _n 188 041	447	0.208	9 _n 161 472	625
0.009	9 _n 221 743	25	0.059	9 _n 217 290	157	0.109	9 _n 206 087	296	0.159	9 _n 187 594	450	0.209	9 _n 160 847	629
0.010	9 _n 221 718	27	0.060	9 _n 217 133	160	0.110	9 _n 205 791	299	0.160	9 _n 187 144	453	0.210	9 _n 160 218	632
0.011	9 _n 221 691	30	0.061	9 _n 216 973	162	0.111	9 _n 205 492	302	0.161	9 _n 186 691	456	0.211	9 _n 159 586	637
0.012	9 _n 221 661	33	0.062	9 _n 216 811	164	0.112	9 _n 205 190	305	0.162	9 _n 186 235	460	0.212	9 _n 158 949	640
0.013	9 _n 221 628	35	0.063	9 _n 216 647	168	0.113	9 _n 204 885	307	0.163	9 _n 185 775	463	0.213	9 _n 158 309	645
0.014	9 _n 221 593	38	0.064	9 _n 216 479	170	0.114	9 _n 204 578	311	0.164	9 _n 185 312	467	0.214	9 _n 157 664	648
0.015	9 _n 221 555	40	0.065	9 _n 216 309	173	0.115	9 _n 204 267	314	0.165	9 _n 184 845	470	0.215	9 _n 157 016	653
0.016	9 _n 221 515	43	0.066	9 _n 216 136	176	0.116	9 _n 203 953	316	0.166	9 _n 184 375	473	0.216	9 _n 156 363	656
0.017	9 _n 221 472	46	0.067	9 _n 215 960	178	0.117	9 _n 203 637	319	0.167	9 _n 183 902	477	0.217	9 _n 155 707	661
0.018	9 _n 221 426	48	0.068	9 _n 215 782	181	0.118	9 _n 203 318	323	0.168	9 _n 183 425	480	0.218	9 _n 155 046	664
0.019	9 _n 221 378	51	0.069	9 _n 215 601	184	0.119	9 _n 202 995	325	0.169	9 _n 182 945	483	0.219	9 _n 154 382	669
0.020	9 _n 221 327	53	0.070	9 _n 215 417	186	0.120	9 _n 202 670	328	0.170	9 _n 182 462	487	0.220	9 _n 153 713	673
0.021	9 _n 221 274	56	0.071	9 _n 215 231	189	0.121	9 _n 202 342	332	0.171	9 _n 181 975	490	0.221	9 _n 153 040	676
0.022	9 _n 221 218	59	0.072	9 _n 215 042	192	0.122	9 _n 202 010	334	0.172	9 _n 181 485	493	0.222	9 _n 152 364	681
0.023	9 _n 221 159	61	0.073	9 _n 214 850	195	0.123	9 _n 201 676	337	0.173	9 _n 180 992	497	0.223	9 _n 151 683	685
0.024	9 _n 221 098	64	0.074	9 _n 214 655	198	0.124	9 _n 201 339	340	0.174	9 _n 180 495	501	0.224	9 _n 150 998	689
0.025	9 _n 221 034	67	0.075	9 _n 214 457	200	0.125	9 _n 200 999	344	0.175	9 _n 179 994	504	0.225	9 _n 150 309	694
0.026	9 _n 220 967	69	0.076	9 _n 214 257	203	0.126	9 _n 200 655	346	0.176	9 _n 179 490	507	0.226	9 _n 149 615	697
0.027	9 _n 220 898	72	0.077	9 _n 214 054	205	0.127	9 _n 200 309	349	0.177	9 _n 178 983	511	0.227	9 _n 148 918	702
0.028	9 _n 220 826	74	0.078	9 _n 213 849	209	0.128	9 _n 199 960	353	0.178	9 _n 178 472	514	0.228	9 _n 148 216	706
0.029	9 _n 220 752	77	0.079	9 _n 213 640	211	0.129	9 _n 199 607	355	0.179	9 _n 177 958	518	0.229	9 _n 147 510	710
0.030	9 _n 220 675	80	0.080	9 _n 213 429	214	0.130	9 _n 199 252	358	0.180	9 _n 177 440	521	0.230	9 _n 146 800	715
0.031	9 _n 220 595	82	0.081	9 _n 213 215	216	0.131	9 _n 198 894	362	0.181	9 _n 176 919	525	0.231	9 _n 146 085	719
0.032	9 _n 220 513	85	0.082	9 _n 212 999	220	0.132	9 _n 198 532	364	0.182	9 _n 176 394	528	0.232	9 _n 145 366	723
0.033	9 _n 220 428	88	0.083	9 _n 212 779	222	0.133	9 _n 198 168	368	0.183	9 _n 175 866	532	0.233	9 _n 144 643	727
0.034	9 _n 220 340	90	0.084	9 _n 212 557	225	0.134	9 _n 197 800	370	0.184	9 _n 175 334	536	0.234	9 _n 143 916	732
0.035	9 _n 220 250	93	0.085	9 _n 212 332	228	0.135	9 _n 197 430	374	0.185	9 _n 174 798	539	0.235	9 _n 143 184	736
0.036	9 _n 220 157	96	0.086	9 _n 212 104	231	0.136	9 _n 197 056	377	0.186	9 _n 174 259	542	0.236	9 _n 142 448	741
0.037	9 _n 220 061	98	0.087	9 _n 211 873	233	0.137	9 _n 196 679	379	0.187	9 _n 173 717	546	0.237	9 _n 141 707	745
0.038	9 _n 219 963	101	0.088	9 _n 211 640	236	0.138	9 _n 196 300	383	0.188	9 _n 173 171	550	0.238	9 _n 140 962	749
0.039	9 _n 219 862	103	0.089	9 _n 211 404	239	0.139	9 _n 195 917	386	0.189	9 _n 172 621	554	0.239	9 _n 140 213	754
0.040	9 _n 219 759	106	0.090	9 _n 211 165	242	0.140	9 _n 195 531	390	0.190	9 _n 172 067	557	0.240	9 _n 139 459	758
0.041	9 _n 219 653	109	0.091	9 _n 210 923	244	0.141	9 _n 195 141	392	0.191	9 _n 171 510	560	0.241	9 _n 138 701	763
0.042	9 _n 219 544	111	0.092	9 _n 210 679	248	0.142	9 _n 194 749	395	0.192	9 _n 170 950	565	0.242	9 _n 137 938	767
0.043	9 _n 219 433	114	0.093	9 _n 210 431	250	0.143	9 _n 194 354	399	0.193	9 _n 170 385	568	0.243	9 _n 137 171	772
0.044	9 _n 219 319	117	0.094	9 _n 210 181	253	0.144	9 _n 193 955	402	0.194	9 _n 169 817	571	0.244	9 _n 136 399	776
0.045	9 _n 219 202	119	0.095	9 _n 209 928	256	0.145	9 _n 193 553	405	0.195	9 _n 169 246	576	0.245	9 _n 135 623	781
0.046	9 _n 219 083	122	0.096	9 _n 209 672	259	0.146	9 _n 193 148	408	0.196	9 _n 168 670	579	0.246	9 _n 134 842	786
0.047	9 _n 218 961	125	0.097	9 _n 209 413	261	0.147	9 _n 192 740	411	0.197	9 _n 168 091	583	0.247	9 _n 134 056	790
0.048	9 _n 218 836	127	0.098	9 _n 209 152	264	0.148	9 _n 192 329	414	0.198	9 _n 167 508	586	0.248	9 _n 133 266	795
0.049	9 _n 218 709	130	0.099	9 _n 208 888	268	0.149	9 _n 191 915	418	0.199	9 _n 166 922	591	0.249	9 _n 132 471	799
0.050	9 _n 218 579		0.100	9 _n 208 620		0.150	9 _n 191 497		0.200	9 _n 166 331		0.250	9 _n 131 672	

Tafel I.

 $\log \{N_1^{-1}(n)\}$.

$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$
0.000	8 _n 920 819	1	0.050	8 _n 918 642	88	0.100	8 _n 912 045	178	0.150	8 _n 900 822	274	0.200	8 _n 884 607	379
0.001	8 _n 920 818	3	0.051	8 _n 918 554	90	0.101	8 _n 911 867	180	0.151	8 _n 900 548	276	0.201	8 _n 884 228	381
0.002	8 _n 920 815	4	0.052	8 _n 918 464	92	0.102	8 _n 911 687	182	0.152	8 _n 900 272	277	0.202	8 _n 883 847	383
0.003	8 _n 920 811	6	0.053	8 _n 918 372	93	0.103	8 _n 911 505	184	0.153	8 _n 899 995	280	0.203	8 _n 883 464	386
0.004	8 _n 920 805	8	0.054	8 _n 918 279	96	0.104	8 _n 911 321	186	0.154	8 _n 899 715	282	0.204	8 _n 883 078	387
0.005	8 _n 920 797	10	0.055	8 _n 918 183	97	0.105	8 _n 911 135	187	0.155	8 _n 899 433	284	0.205	8 _n 882 691	390
0.006	8 _n 920 787	11	0.056	8 _n 918 086	98	0.106	8 _n 910 948	189	0.156	8 _n 899 149	286	0.206	8 _n 882 301	392
0.007	8 _n 920 776	13	0.057	8 _n 917 988	101	0.107	8 _n 910 759	191	0.157	8 _n 898 863	288	0.207	8 _n 881 909	395
0.008	8 _n 920 763	15	0.058	8 _n 917 887	102	0.108	8 _n 910 568	193	0.158	8 _n 898 575	290	0.208	8 _n 881 514	397
0.009	8 _n 920 748	16	0.059	8 _n 917 785	104	0.109	8 _n 910 375	195	0.159	8 _n 898 285	292	0.209	8 _n 881 117	399
0.010	8 _n 920 732	18	0.060	8 _n 917 681	106	0.110	8 _n 910 180	197	0.160	8 _n 897 993	294	0.210	8 _n 880 718	401
0.011	8 _n 920 714	20	0.061	8 _n 917 575	108	0.111	8 _n 909 983	199	0.161	8 _n 897 699	296	0.211	8 _n 880 317	403
0.012	8 _n 920 694	22	0.062	8 _n 917 467	109	0.112	8 _n 909 784	200	0.162	8 _n 897 403	298	0.212	8 _n 879 914	406
0.013	8 _n 920 672	24	0.063	8 _n 917 358	112	0.113	8 _n 909 584	203	0.163	8 _n 897 105	300	0.213	8 _n 879 508	408
0.014	8 _n 920 648	25	0.064	8 _n 917 246	113	0.114	8 _n 909 381	204	0.164	8 _n 896 805	302	0.214	8 _n 879 100	411
0.015	8 _n 920 623	27	0.065	8 _n 917 133	114	0.115	8 _n 909 177	206	0.165	8 _n 896 503	304	0.215	8 _n 878 689	412
0.016	8 _n 920 596	28	0.066	8 _n 917 019	117	0.116	8 _n 908 971	208	0.166	8 _n 896 199	306	0.216	8 _n 878 277	415
0.017	8 _n 920 568	31	0.067	8 _n 916 902	118	0.117	8 _n 908 763	210	0.167	8 _n 895 893	308	0.217	8 _n 877 862	418
0.018	8 _n 920 537	32	0.068	8 _n 916 784	120	0.118	8 _n 908 553	212	0.168	8 _n 895 585	311	0.218	8 _n 877 444	419
0.019	8 _n 920 505	34	0.069	8 _n 916 664	122	0.119	8 _n 908 341	214	0.169	8 _n 895 274	312	0.219	8 _n 877 025	422
0.020	8 _n 920 471	35	0.070	8 _n 916 542	124	0.120	8 _n 908 127	215	0.170	8 _n 894 962	315	0.220	8 _n 876 603	425
0.021	8 _n 920 436	38	0.071	8 _n 916 418	126	0.121	8 _n 907 912	218	0.171	8 _n 894 647	316	0.221	8 _n 876 178	426
0.022	8 _n 920 398	39	0.072	8 _n 916 292	127	0.122	8 _n 907 694	219	0.172	8 _n 894 331	319	0.222	8 _n 875 752	429
0.023	8 _n 920 359	41	0.073	8 _n 916 165	129	0.123	8 _n 907 475	221	0.173	8 _n 894 012	320	0.223	8 _n 875 323	432
0.024	8 _n 920 318	42	0.074	8 _n 916 036	131	0.124	8 _n 907 254	224	0.174	8 _n 893 692	323	0.224	8 _n 874 891	433
0.025	8 _n 920 276	45	0.075	8 _n 915 905	132	0.125	8 _n 907 030	225	0.175	8 _n 893 369	325	0.225	8 _n 874 458	436
0.026	8 _n 920 231	46	0.076	8 _n 915 773	135	0.126	8 _n 906 805	227	0.176	8 _n 893 044	327	0.226	8 _n 874 022	439
0.027	8 _n 920 185	48	0.077	8 _n 915 638	136	0.127	8 _n 906 578	229	0.177	8 _n 892 717	329	0.227	8 _n 873 583	441
0.028	8 _n 920 137	49	0.078	8 _n 915 502	138	0.128	8 _n 906 349	230	0.178	8 _n 892 388	331	0.228	8 _n 873 142	443
0.029	8 _n 920 088	52	0.079	8 _n 915 364	140	0.129	8 _n 906 119	233	0.179	8 _n 892 057	334	0.229	8 _n 872 699	446
0.030	8 _n 920 036	53	0.080	8 _n 915 224	142	0.130	8 _n 905 886	235	0.180	8 _n 891 723	335	0.230	8 _n 872 253	448
0.031	8 _n 919 983	55	0.081	8 _n 915 082	143	0.131	8 _n 905 651	237	0.181	8 _n 891 388	338	0.231	8 _n 871 805	450
0.032	8 _n 919 928	56	0.082	8 _n 914 939	146	0.132	8 _n 905 414	238	0.182	8 _n 891 050	339	0.232	8 _n 871 355	453
0.033	8 _n 919 872	58	0.083	8 _n 914 793	147	0.133	8 _n 905 176	241	0.183	8 _n 890 711	342	0.233	8 _n 870 902	455
0.034	8 _n 919 814	60	0.084	8 _n 914 646	149	0.134	8 _n 904 935	242	0.184	8 _n 890 369	344	0.234	8 _n 870 447	458
0.035	8 _n 919 754	62	0.085	8 _n 914 497	150	0.135	8 _n 904 693	244	0.185	8 _n 890 025	346	0.235	8 _n 869 989	460
0.036	8 _n 919 692	64	0.086	8 _n 914 347	153	0.136	8 _n 904 449	247	0.186	8 _n 889 679	348	0.236	8 _n 869 529	463
0.037	8 _n 919 628	65	0.087	8 _n 914 194	154	0.137	8 _n 904 202	248	0.187	8 _n 889 331	351	0.237	8 _n 869 066	465
0.038	8 _n 919 563	67	0.088	8 _n 914 040	156	0.138	8 _n 903 954	250	0.188	8 _n 888 980	352	0.238	8 _n 868 601	467
0.039	8 _n 919 496	69	0.089	8 _n 913 884	158	0.139	8 _n 903 704	252	0.189	8 _n 888 628	355	0.239	8 _n 868 154	470
0.040	8 _n 919 427	71	0.090	8 _n 913 726	160	0.140	8 _n 903 452	254	0.190	8 _n 888 273	357	0.240	8 _n 867 664	473
0.041	8 _n 919 356	72	0.091	8 _n 913 566	162	0.141	8 _n 903 198	256	0.191	8 _n 887 916	359	0.241	8 _n 867 191	475
0.042	8 _n 919 284	74	0.092	8 _n 913 404	163	0.142	8 _n 902 942	258	0.192	8 _n 887 557	361	0.242	8 _n 866 716	477
0.043	8 _n 919 210	76	0.093	8 _n 913 241	166	0.143	8 _n 902 684	260	0.193	8 _n 887 196	363	0.243	8 _n 866 239	480
0.044	8 _n 919 134	78	0.094	8 _n 913 075	167	0.144	8 _n 902 424	262	0.194	8 _n 886 833	366	0.244	8 _n 865 759	482
0.045	8 _n 919 056	79	0.095	8 _n 912 908	169	0.145	8 _n 902 162	264	0.195	8 _n 886 467	367	0.245	8 _n 865 277	485
0.046	8 _n 918 977	81	0.096	8 _n 912 739	171	0.146	8 _n 901 898	266	0.196	8 _n 886 100	370	0.246	8 _n 864 792	488
0.047	8 _n 918 896	83	0.097	8 _n 912 568	172	0.147	8 _n 901 632	268	0.197	8 _n 885 730	373	0.247	8 _n 864 304	490
0.048	8 _n 918 813	85	0.098	8 _n 912 396	175	0.148	8 _n 901 364	270	0.198	8 _n 885 357	374	0.248	8 _n 863 814	492
0.049	8 _n 918 728	86	0.099	8 _n 912 221	176	0.149	8 _n 901 094	272	0.199	8 _n 884 983	376	0.249	8 _n 863 322	495
0.050	8 _n 918 642		0.100	8 _n 912 045		0.150	8 _n 900 822		0.200	8 _n 884 607		0.250	8 _n 862 827	

Tafel I.

 $\log \{N_1^{(5)} n\}$.

$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$
0.000	8.522 879	2	0.050	8.518 791	165	0.100	8.506 336	338	0.150	8.484 896	527	0.200	8.453 318	746
0.001	8.522 877	5	0.051	8.518 626	169	0.101	8.505 998	342	0.151	8.484 369	531	0.201	8.452 572	752
0.002	8.522 872	8	0.052	8.518 457	173	0.102	8.505 656	345	0.152	8.483 838	535	0.202	8.451 820	756
0.003	8.522 864	11	0.053	8.518 284	176	0.103	8.505 311	348	0.153	8.483 303	540	0.203	8.451 064	761
0.004	8.522 853	15	0.054	8.518 108	179	0.104	8.504 963	352	0.154	8.482 763	543	0.204	8.450 303	766
0.005	8.522 838	18	0.055	8.517 929	182	0.105	8.504 611	356	0.155	8.482 220	548	0.205	8.449 537	771
0.006	8.522 820	21	0.056	8.517 747	186	0.106	8.504 255	360	0.156	8.481 672	552	0.206	8.448 766	776
0.007	8.522 799	24	0.057	8.517 561	190	0.107	8.503 895	363	0.157	8.481 120	555	0.207	8.447 990	780
0.008	8.522 775	28	0.058	8.517 371	192	0.108	8.503 532	367	0.158	8.480 565	560	0.208	8.447 210	786
0.009	8.522 747	31	0.059	8.517 179	196	0.109	8.503 165	370	0.159	8.480 005	564	0.209	8.446 424	791
0.010	8.522 716	34	0.060	8.516 983	199	0.110	8.502 795	374	0.160	8.479 441	569	0.210	8.445 633	795
0.011	8.522 682	38	0.061	8.516 784	203	0.111	8.502 421	378	0.161	8.478 872	572	0.211	8.444 838	801
0.012	8.522 644	41	0.062	8.516 581	206	0.112	8.502 043	381	0.162	8.478 300	577	0.212	8.444 037	806
0.013	8.522 603	44	0.063	8.516 375	209	0.113	8.501 662	385	0.163	8.477 723	580	0.213	8.443 231	811
0.014	8.522 559	47	0.064	8.516 166	213	0.114	8.501 277	389	0.164	8.477 143	585	0.214	8.442 420	815
0.015	8.522 512	50	0.065	8.515 953	217	0.115	8.500 888	392	0.165	8.476 558	590	0.215	8.441 605	821
0.016	8.522 462	54	0.066	8.515 736	219	0.116	8.500 496	396	0.166	8.475 968	593	0.216	8.440 784	826
0.017	8.522 408	57	0.067	8.515 517	223	0.117	8.500 100	400	0.167	8.475 375	598	0.217	8.439 958	832
0.018	8.522 351	60	0.068	8.515 294	227	0.118	8.499 700	404	0.168	8.474 777	602	0.218	8.439 126	836
0.019	8.522 291	64	0.069	8.515 067	229	0.119	8.499 296	407	0.169	8.474 175	606	0.219	8.438 290	842
0.020	8.522 227	67	0.070	8.514 838	234	0.120	8.498 889	411	0.170	8.473 569	610	0.220	8.437 448	846
0.021	8.522 160	70	0.071	8.514 604	236	0.121	8.498 478	415	0.171	8.472 959	615	0.221	8.436 602	852
0.022	8.522 090	73	0.072	8.514 368	240	0.122	8.498 063	418	0.172	8.472 344	619	0.222	8.435 750	858
0.023	8.522 017	77	0.073	8.514 128	244	0.123	8.497 645	422	0.173	8.471 725	624	0.223	8.434 892	862
0.024	8.521 940	80	0.074	8.513 884	247	0.124	8.497 223	426	0.174	8.471 101	627	0.224	8.434 030	868
0.025	8.521 860	83	0.075	8.513 637	250	0.125	8.496 797	430	0.175	8.470 474	633	0.225	8.433 162	874
0.026	8.521 777	87	0.076	8.513 387	254	0.126	8.496 367	434	0.176	8.469 841	636	0.226	8.432 288	878
0.027	8.521 690	90	0.077	8.513 133	257	0.127	8.495 933	437	0.177	8.469 205	641	0.227	8.431 410	884
0.028	8.521 600	93	0.078	8.512 876	261	0.128	8.495 496	441	0.178	8.468 564	645	0.228	8.430 526	890
0.029	8.521 507	96	0.079	8.512 615	264	0.129	8.495 055	445	0.179	8.467 919	650	0.229	8.429 636	895
0.030	8.521 411	99	0.080	8.512 351	267	0.130	8.494 610	449	0.180	8.467 269	654	0.230	8.428 741	900
0.031	8.521 312	103	0.081	8.512 084	271	0.131	8.494 161	452	0.181	8.466 615	659	0.231	8.427 841	906
0.032	8.521 209	107	0.082	8.511 813	275	0.132	8.493 709	457	0.182	8.465 956	663	0.232	8.426 935	912
0.033	8.521 102	109	0.083	8.511 538	278	0.133	8.493 252	460	0.183	8.465 293	668	0.233	8.426 023	917
0.034	8.520 993	113	0.084	8.511 260	281	0.134	8.492 792	464	0.184	8.464 625	672	0.234	8.425 106	922
0.035	8.520 880	116	0.085	8.510 979	285	0.135	8.492 328	468	0.185	8.463 953	677	0.235	8.424 184	928
0.036	8.520 764	119	0.086	8.510 694	288	0.136	8.491 860	472	0.186	8.463 276	681	0.236	8.423 256	934
0.037	8.520 645	123	0.087	8.510 406	292	0.137	8.491 388	476	0.187	8.462 595	686	0.237	8.422 322	940
0.038	8.520 522	126	0.088	8.510 114	296	0.138	8.490 912	479	0.188	8.461 909	690	0.238	8.421 382	945
0.039	8.520 396	129	0.089	8.509 818	299	0.139	8.490 433	484	0.189	8.461 219	695	0.239	8.420 437	951
0.040	8.520 267	133	0.090	8.509 519	302	0.140	8.489 949	487	0.190	8.460 524	700	0.240	8.419 486	956
0.041	8.520 134	136	0.091	8.509 217	306	0.141	8.489 462	492	0.191	8.459 824	704	0.241	8.418 530	963
0.042	8.519 998	139	0.092	8.508 911	310	0.142	8.488 970	495	0.192	8.459 120	708	0.242	8.417 567	968
0.043	8.519 859	143	0.093	8.508 601	313	0.143	8.488 475	499	0.193	8.458 412	714	0.243	8.416 599	974
0.044	8.519 716	145	0.094	8.508 288	316	0.144	8.487 976	504	0.194	8.457 698	718	0.244	8.415 625	980
0.045	8.519 571	150	0.095	8.507 972	320	0.145	8.487 472	507	0.195	8.456 980	723	0.245	8.414 645	986
0.046	8.519 421	152	0.096	8.507 652	324	0.146	8.486 965	511	0.196	8.456 257	727	0.246	8.413 659	992
0.047	8.519 269	156	0.097	8.507 328	327	0.147	8.486 454	515	0.197	8.455 530	733	0.247	8.412 667	998
0.048	8.519 113	159	0.098	8.507 001	331	0.148	8.485 939	519	0.198	8.454 797	737	0.248	8.411 669	1003
0.049	8.518 954	163	0.099	8.506 670	334	0.149	8.485 420	524	0.199	8.454 060	742	0.249	8.410 666	1010
0.050	8.518 791		0.100	8.506 336		0.150	8.484 896		0.200	8.453 318		0.250	8.409 656	

Tafel I.

 $\log \{N_1^6(n)\}$.

$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$
0.000	8.045 757	1	0.050	8.043 037	111	0.100	8.034 795	222	0.150	8.020 789	342	0.200	8.000 579	472
0.001	8.045 756	3	0.051	8.042 926	112	0.101	8.034 573	225	0.151	8.020 447	344	0.201	8.000 107	475
0.002	8.045 753	5	0.052	8.042 814	115	0.102	8.034 348	227	0.152	8.020 103	346	0.202	7.999 632	477
0.003	8.045 748	8	0.053	8.042 699	116	0.103	8.034 121	229	0.153	8.019 757	349	0.203	7.999 155	480
0.004	8.045 740	10	0.054	8.042 583	119	0.104	8.033 892	232	0.154	8.019 408	352	0.204	7.998 675	482
0.005	8.045 730	12	0.055	8.042 464	122	0.105	8.033 660	234	0.155	8.019 056	354	0.205	7.998 193	486
0.006	8.045 718	14	0.056	8.042 342	123	0.106	8.033 426	236	0.156	8.018 702	356	0.206	7.997 707	488
0.007	8.045 704	16	0.057	8.042 219	126	0.107	8.033 190	239	0.157	8.018 346	359	0.207	7.997 219	491
0.008	8.045 688	19	0.058	8.042 093	128	0.108	8.032 951	241	0.158	8.017 987	362	0.208	7.996 728	494
0.009	8.045 669	20	0.059	8.041 965	130	0.109	8.032 710	243	0.159	8.017 625	364	0.209	7.996 234	497
0.010	8.045 649	23	0.060	8.041 835	132	0.110	8.032 467	246	0.160	8.017 261	366	0.210	7.995 737	500
0.011	8.045 626	25	0.061	8.041 703	134	0.111	8.032 221	248	0.161	8.016 895	369	0.211	7.995 237	502
0.012	8.045 601	27	0.062	8.041 569	137	0.112	8.031 973	250	0.162	8.016 526	372	0.212	7.994 735	505
0.013	8.045 574	29	0.063	8.041 432	139	0.113	8.031 723	253	0.163	8.016 154	374	0.213	7.994 230	508
0.014	8.045 545	32	0.064	8.041 293	141	0.114	8.031 470	255	0.164	8.015 780	377	0.214	7.993 722	511
0.015	8.045 513	34	0.065	8.041 152	144	0.115	8.031 215	257	0.165	8.015 403	379	0.215	7.993 211	514
0.016	8.045 479	35	0.066	8.041 008	145	0.116	8.030 958	260	0.166	8.015 024	382	0.216	7.992 697	517
0.017	8.045 444	38	0.067	8.040 863	148	0.117	8.030 698	262	0.167	8.014 642	384	0.217	7.992 180	519
0.018	8.045 406	40	0.068	8.040 715	150	0.118	8.030 436	265	0.168	8.014 258	387	0.218	7.991 661	522
0.019	8.045 366	43	0.069	8.040 565	153	0.119	8.030 171	266	0.169	8.013 871	389	0.219	7.991 139	526
0.020	8.045 323	45	0.070	8.040 412	154	0.120	8.029 905	269	0.170	8.013 482	392	0.220	7.990 613	528
0.021	8.045 278	46	0.071	8.040 258	157	0.121	8.029 636	272	0.171	8.013 090	395	0.221	7.990 085	531
0.022	8.045 232	49	0.072	8.040 101	159	0.122	8.029 364	274	0.172	8.012 695	397	0.222	7.989 554	534
0.023	8.045 183	51	0.073	8.039 942	161	0.123	8.029 090	276	0.173	8.012 298	400	0.223	7.989 020	536
0.024	8.045 132	53	0.074	8.039 781	164	0.124	8.028 814	279	0.174	8.011 898	402	0.224	7.988 484	540
0.025	8.045 079	56	0.075	8.039 617	166	0.125	8.028 535	281	0.175	8.011 496	405	0.225	7.987 944	543
0.026	8.045 023	58	0.076	8.039 451	168	0.126	8.028 254	283	0.176	8.011 091	408	0.226	7.987 401	545
0.027	8.044 965	59	0.077	8.039 283	170	0.127	8.027 971	286	0.177	8.010 683	410	0.227	7.986 856	549
0.028	8.044 906	62	0.078	8.039 113	172	0.128	8.027 685	288	0.178	8.010 273	413	0.228	7.986 307	551
0.029	8.044 844	65	0.079	8.038 941	175	0.129	8.027 397	290	0.179	8.009 860	415	0.229	7.985 756	555
0.030	8.044 779	66	0.080	8.038 766	177	0.130	8.027 107	293	0.180	8.009 445	418	0.230	7.985 201	557
0.031	8.044 713	68	0.081	8.038 589	179	0.131	8.026 814	295	0.181	8.009 027	421	0.231	7.984 644	561
0.032	8.044 645	71	0.082	8.038 410	182	0.132	8.026 519	298	0.182	8.008 606	423	0.232	7.984 083	563
0.033	8.044 574	73	0.083	8.038 228	183	0.133	8.026 221	300	0.183	8.008 183	426	0.233	7.983 520	566
0.034	8.044 501	75	0.084	8.038 045	186	0.134	8.025 921	303	0.184	8.007 757	428	0.234	7.982 954	570
0.035	8.044 426	77	0.085	8.037 859	189	0.135	8.025 618	305	0.185	8.007 329	432	0.235	7.982 384	572
0.036	8.044 349	80	0.086	8.037 670	190	0.136	8.025 313	307	0.186	8.006 897	434	0.236	7.981 812	576
0.037	8.044 269	82	0.087	8.037 480	193	0.137	8.025 006	310	0.187	8.006 463	436	0.237	7.981 236	578
0.038	8.044 187	83	0.088	8.037 287	195	0.138	8.024 696	312	0.188	8.006 027	439	0.238	7.980 658	582
0.039	8.044 104	86	0.089	8.037 092	197	0.139	8.024 384	314	0.189	8.005 588	442	0.239	7.980 076	584
0.040	8.044 018	89	0.090	8.036 895	200	0.140	8.024 070	317	0.190	8.005 146	445	0.240	7.979 492	588
0.041	8.043 929	90	0.091	8.036 695	202	0.141	8.023 753	320	0.191	8.004 701	447	0.241	7.978 904	590
0.042	8.043 839	93	0.092	8.036 493	204	0.142	8.023 433	322	0.192	8.004 254	450	0.242	7.978 314	594
0.043	8.043 746	94	0.093	8.036 289	207	0.143	8.023 111	324	0.193	8.003 804	452	0.243	7.977 720	597
0.044	8.043 652	97	0.094	8.036 082	208	0.144	8.022 787	327	0.194	8.003 352	456	0.244	7.977 123	600
0.045	8.043 555	100	0.095	8.035 874	211	0.145	8.022 460	329	0.195	8.002 896	458	0.245	7.976 523	603
0.046	8.043 455	101	0.096	8.035 663	214	0.146	8.022 131	332	0.196	8.002 438	461	0.246	7.975 920	606
0.047	8.043 354	104	0.097	8.035 449	215	0.147	8.021 799	334	0.197	8.001 977	463	0.247	7.975 314	609
0.048	8.043 250	105	0.098	8.035 234	218	0.148	8.021 465	337	0.198	8.001 514	466	0.248	7.974 705	613
0.049	8.043 145	108	0.099	8.035 016	221	0.149	8.021 128	339	0.199	8.001 048	469	0.249	7.974 092	615
0.050	8.043 037		0.100	8.034 795		0.150	8.020 789		0.200	8.000 579		0.250	7.973 477	

Tafel I.

 $\log \{N_1^7(n)\}.$

$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$
0.000	7n853 872		0.050	7n849 421	180	0.100	7n835 854	368	0.150	7n812 487	575	0.200	7n778 030	815
0.001	7n853 870	2	0.051	7n849 241	185	0.101	7n835 486	372	0.151	7n811 912	579	0.201	7n777 215	821
0.002	7n853 865	5	0.052	7n849 056	187	0.102	7n835 114	376	0.152	7n811 333	584	0.202	7n776 394	826
0.003	7n853 856	9	0.053	7n848 869	192	0.103	7n834 738	380	0.153	7n810 749	588	0.203	7n775 568	831
0.004	7n853 844	12	0.054	7n848 677	195	0.104	7n834 358	384	0.154	7n810 161	593	0.204	7n774 737	837
0.005	7n853 828	16	0.055	7n848 482	199	0.105	7n833 974	388	0.155	7n809 568	597	0.205	7n773 900	842
0.006	7n853 808	20	0.056	7n848 283	202	0.106	7n833 586	391	0.156	7n808 971	602	0.206	7n773 058	847
0.007	7n853 785	23	0.057	7n848 081	206	0.107	7n833 195	396	0.157	7n808 369	606	0.207	7n772 211	853
0.008	7n853 758	27	0.058	7n847 875	210	0.108	7n832 799	400	0.158	7n807 763	610	0.208	7n771 358	858
0.009	7n853 728	30	0.059	7n847 665	213	0.109	7n832 399	403	0.159	7n807 153	616	0.209	7n770 500	864
		33												
0.010	7n853 695	38	0.060	7n847 452	218	0.110	7n831 996	408	0.160	7n806 537	619	0.210	7n769 636	870
0.011	7n853 657	41	0.061	7n847 234	220	0.111	7n831 588	411	0.161	7n805 918	625	0.211	7n768 766	874
0.012	7n853 616	44	0.062	7n847 014	225	0.112	7n831 177	416	0.162	7n805 293	628	0.212	7n767 892	881
0.013	7n853 572	48	0.063	7n846 789	228	0.113	7n830 761	419	0.163	7n804 665	634	0.213	7n767 011	886
0.014	7n853 524	51	0.064	7n846 561	232	0.114	7n830 342	424	0.164	7n804 031	638	0.214	7n766 125	891
0.015	7n853 473	55	0.065	7n846 329	235	0.115	7n829 918	428	0.165	7n803 393	643	0.215	7n765 234	897
0.016	7n853 418	59	0.066	7n846 094	239	0.116	7n829 490	431	0.166	7n802 750	647	0.216	7n764 337	903
0.017	7n853 359	62	0.067	7n845 855	243	0.117	7n829 059	436	0.167	7n802 103	652	0.217	7n763 434	908
0.018	7n853 297	66	0.068	7n845 612	247	0.118	7n828 623	440	0.168	7n801 451	657	0.218	7n762 526	915
0.019	7n853 231	69	0.069	7n845 365	250	0.119	7n828 183	443	0.169	7n800 794	661	0.219	7n761 611	920
		73												
0.020	7n853 162	76	0.070	7n845 115	254	0.120	7n827 740	448	0.170	7n800 133	666	0.220	7n760 691	925
0.021	7n853 089	80	0.071	7n844 861	258	0.121	7n827 292	452	0.171	7n799 467	671	0.221	7n759 766	932
0.022	7n853 013	83	0.072	7n844 603	261	0.122	7n826 840	456	0.172	7n798 796	675	0.222	7n758 834	937
0.023	7n852 933	87	0.073	7n844 342	265	0.123	7n826 384	460	0.173	7n798 121	680	0.223	7n757 897	943
0.024	7n852 850	91	0.074	7n844 077	269	0.124	7n825 924	464	0.174	7n797 441	685	0.224	7n756 954	949
0.025	7n852 763	94	0.075	7n843 808	273	0.125	7n825 460	469	0.175	7n796 756	690	0.225	7n756 005	955
0.026	7n852 672	98	0.076	7n843 535	276	0.126	7n824 991	472	0.176	7n796 066	695	0.226	7n755 050	960
0.027	7n852 578	101	0.077	7n843 259	280	0.127	7n824 519	477	0.177	7n795 371	699	0.227	7n754 090	967
0.028	7n852 480	105	0.078	7n842 979	284	0.128	7n824 042	481	0.178	7n794 672	704	0.228	7n753 123	973
0.029	7n852 379	109	0.079	7n842 695	288	0.129	7n823 561	485	0.179	7n793 968	709	0.229	7n752 150	979
		112												
0.030	7n852 274	116	0.080	7n842 407	291	0.130	7n823 076	489	0.180	7n793 259	714	0.230	7n751 171	984
0.031	7n852 165	119	0.081	7n842 116	296	0.131	7n822 587	493	0.181	7n792 545	719	0.231	7n750 187	991
0.032	7n852 053	123	0.082	7n841 820	299	0.132	7n822 094	497	0.182	7n791 826	724	0.232	7n749 196	997
0.033	7n851 937	126	0.083	7n841 521	302	0.133	7n821 597	502	0.183	7n791 102	728	0.233	7n748 199	1003
0.034	7n851 818	130	0.084	7n841 219	307	0.134	7n821 095	506	0.184	7n790 374	733	0.234	7n747 196	1009
0.035	7n851 695	134	0.085	7n840 912	310	0.135	7n820 589	510	0.185	7n789 640	738	0.235	7n746 187	1016
0.036	7n851 569	137	0.086	7n840 602	315	0.136	7n820 079	515	0.186	7n788 902	744	0.236	7n745 171	1021
0.037	7n851 439	141	0.087	7n840 287	318	0.137	7n819 564	518	0.187	7n788 158	748	0.237	7n744 150	1028
0.038	7n851 305	144	0.088	7n839 969	321	0.138	7n819 046	523	0.188	7n787 410	754	0.238	7n743 122	1035
0.039	7n851 168	148	0.089	7n839 648	326	0.139	7n818 523	527	0.189	7n786 656	759	0.239	7n742 087	1040
		152												
0.040	7n851 027	155	0.090	7n839 322	330	0.140	7n817 996	532	0.190	7n785 897	763	0.240	7n741 047	1047
0.041	7n850 883	159	0.091	7n838 992	333	0.141	7n817 464	535	0.191	7n785 134	769	0.241	7n740 000	1053
0.042	7n850 735	162	0.092	7n838 659	337	0.142	7n816 929	540	0.192	7n784 365	774	0.242	7n738 947	1060
0.043	7n850 583	166	0.093	7n838 322	341	0.143	7n816 389	544	0.193	7n783 591	779	0.243	7n737 887	1066
0.044	7n850 428	170	0.094	7n837 981	345	0.144	7n815 845	549	0.194	7n782 812	784	0.244	7n736 821	1073
0.045	7n850 269	173	0.095	7n837 636	348	0.145	7n815 296	553	0.195	7n782 028	789	0.245	7n735 748	1079
0.046	7n850 107	177	0.096	7n837 288	353	0.146	7n814 743	558	0.196	7n781 239	794	0.246	7n734 669	1086
0.047	7n849 941		0.097	7n836 935	356	0.147	7n814 185	561	0.197	7n780 445	800	0.247	7n733 583	1092
0.048	7n849 771		0.098	7n836 579	361	0.148	7n813 624	566	0.198	7n779 645	805	0.248	7n732 491	1099
0.049	7n849 598		0.099	7n836 218	364	0.149	7n813 058	571	0.199	7n778 840	810	0.249	7n731 392	1106
0.050	7n849 421		0.100	7n835 854		0.150	7n812 487		0.200	7n778 030		0.250	7n730 286	

Tafel I.

 $\log \{N_1^5(n)\}$.

$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$
0.000	7 _n 251 812	1	0.050	7 _n 248 849	120	0.100	7 _n 239 878	243	0.150	7 _n 224 634	371	0.200	7 _n 202 649	513
0.001	7 _n 251 811	4	0.051	7 _n 248 729	122	0.101	7 _n 239 635	244	0.151	7 _n 224 263	375	0.201	7 _n 202 136	516
0.002	7 _n 251 807	6	0.052	7 _n 248 607	125	0.102	7 _n 239 391	247	0.152	7 _n 223 888	377	0.202	7 _n 201 620	519
0.003	7 _n 251 801	8	0.053	7 _n 248 482	127	0.103	7 _n 239 144	250	0.153	7 _n 223 511	379	0.203	7 _n 201 101	522
0.004	7 _n 251 793	11	0.054	7 _n 248 355	129	0.104	7 _n 238 894	252	0.154	7 _n 223 132	383	0.204	7 _n 200 579	525
0.005	7 _n 251 782	13	0.055	7 _n 248 226	132	0.105	7 _n 238 642	255	0.155	7 _n 222 749	385	0.205	7 _n 200 054	528
0.006	7 _n 251 769	15	0.056	7 _n 248 094	135	0.106	7 _n 238 387	257	0.156	7 _n 222 364	388	0.206	7 _n 199 526	531
0.007	7 _n 251 754	18	0.057	7 _n 247 959	137	0.107	7 _n 238 130	260	0.157	7 _n 221 976	391	0.207	7 _n 198 995	534
0.008	7 _n 251 736	20	0.058	7 _n 247 822	139	0.108	7 _n 237 870	263	0.158	7 _n 221 585	393	0.208	7 _n 198 461	537
0.009	7 _n 251 716	22	0.059	7 _n 247 683	141	0.109	7 _n 237 607	265	0.159	7 _n 221 192	396	0.209	7 _n 197 924	540
0.010	7 _n 251 694	25	0.060	7 _n 247 542	144	0.110	7 _n 237 342	267	0.160	7 _n 220 796	399	0.210	7 _n 197 384	544
0.011	7 _n 251 669	27	0.061	7 _n 247 398	147	0.111	7 _n 237 075	270	0.161	7 _n 220 397	401	0.211	7 _n 196 840	546
0.012	7 _n 251 642	30	0.062	7 _n 247 251	149	0.112	7 _n 236 805	272	0.162	7 _n 219 996	405	0.212	7 _n 196 294	549
0.013	7 _n 251 612	32	0.063	7 _n 247 102	151	0.113	7 _n 236 533	275	0.163	7 _n 219 591	407	0.213	7 _n 195 745	553
0.014	7 _n 251 580	34	0.064	7 _n 246 951	154	0.114	7 _n 236 258	278	0.164	7 _n 219 184	409	0.214	7 _n 195 192	555
0.015	7 _n 251 546	37	0.065	7 _n 246 797	156	0.115	7 _n 235 980	280	0.165	7 _n 218 775	413	0.215	7 _n 194 637	559
0.016	7 _n 251 509	39	0.066	7 _n 246 641	158	0.116	7 _n 235 700	283	0.166	7 _n 218 362	415	0.216	7 _n 194 078	562
0.017	7 _n 251 470	41	0.067	7 _n 246 483	161	0.117	7 _n 235 417	285	0.167	7 _n 217 947	418	0.217	7 _n 193 516	564
0.018	7 _n 251 429	44	0.068	7 _n 246 322	164	0.118	7 _n 235 132	288	0.168	7 _n 217 529	421	0.218	7 _n 192 952	568
0.019	7 _n 251 385	46	0.069	7 _n 246 158	166	0.119	7 _n 234 844	290	0.169	7 _n 217 108	424	0.219	7 _n 192 384	571
0.020	7 _n 251 339	49	0.070	7 _n 245 992	168	0.120	7 _n 234 554	293	0.170	7 _n 216 684	427	0.220	7 _n 191 813	575
0.021	7 _n 251 290	51	0.071	7 _n 245 824	171	0.121	7 _n 234 261	295	0.171	7 _n 216 257	429	0.221	7 _n 191 238	577
0.022	7 _n 251 239	53	0.072	7 _n 245 653	173	0.122	7 _n 233 966	298	0.172	7 _n 215 828	432	0.222	7 _n 190 661	580
0.023	7 _n 251 186	55	0.073	7 _n 245 480	175	0.123	7 _n 233 668	301	0.173	7 _n 215 396	435	0.223	7 _n 190 081	584
0.024	7 _n 251 131	58	0.074	7 _n 245 305	178	0.124	7 _n 233 367	303	0.174	7 _n 214 961	437	0.224	7 _n 189 497	587
0.025	7 _n 251 073	61	0.075	7 _n 245 127	181	0.125	7 _n 233 064	306	0.175	7 _n 214 524	441	0.225	7 _n 188 910	590
0.026	7 _n 251 012	62	0.076	7 _n 244 946	183	0.126	7 _n 232 758	308	0.176	7 _n 214 083	443	0.226	7 _n 188 320	593
0.027	7 _n 250 950	65	0.077	7 _n 244 763	185	0.127	7 _n 232 450	311	0.177	7 _n 213 640	446	0.227	7 _n 187 727	597
0.028	7 _n 250 885	68	0.078	7 _n 244 578	188	0.128	7 _n 232 139	314	0.178	7 _n 213 194	449	0.228	7 _n 187 130	599
0.029	7 _n 250 817	70	0.079	7 _n 244 390	190	0.129	7 _n 231 825	316	0.179	7 _n 212 745	452	0.229	7 _n 186 531	603
0.030	7 _n 250 747	72	0.080	7 _n 244 200	193	0.130	7 _n 231 509	318	0.180	7 _n 212 293	455	0.230	7 _n 185 928	606
0.031	7 _n 250 675	75	0.081	7 _n 244 007	195	0.131	7 _n 231 191	322	0.181	7 _n 211 838	458	0.231	7 _n 185 322	609
0.032	7 _n 250 600	77	0.082	7 _n 243 812	197	0.132	7 _n 230 869	324	0.182	7 _n 211 380	460	0.232	7 _n 184 713	613
0.033	7 _n 250 523	79	0.083	7 _n 243 615	200	0.133	7 _n 230 545	326	0.183	7 _n 210 920	463	0.233	7 _n 184 100	616
0.034	7 _n 250 444	82	0.084	7 _n 243 415	203	0.134	7 _n 230 219	329	0.184	7 _n 210 457	466	0.234	7 _n 183 484	619
0.035	7 _n 250 362	84	0.085	7 _n 243 212	205	0.135	7 _n 229 890	332	0.185	7 _n 209 991	469	0.235	7 _n 182 865	622
0.036	7 _n 250 278	87	0.086	7 _n 243 007	207	0.136	7 _n 229 558	335	0.186	7 _n 209 522	472	0.236	7 _n 182 243	626
0.037	7 _n 250 191	89	0.087	7 _n 242 800	210	0.137	7 _n 229 223	337	0.187	7 _n 209 050	475	0.237	7 _n 181 617	629
0.038	7 _n 250 102	91	0.088	7 _n 242 590	213	0.138	7 _n 228 886	340	0.188	7 _n 208 575	478	0.238	7 _n 180 988	632
0.039	7 _n 250 011	93	0.089	7 _n 242 377	214	0.139	7 _n 228 546	342	0.189	7 _n 208 097	480	0.239	7 _n 180 356	635
0.040	7 _n 249 918	96	0.090	7 _n 242 163	218	0.140	7 _n 228 204	345	0.190	7 _n 207 617	484	0.240	7 _n 179 721	639
0.041	7 _n 249 822	99	0.091	7 _n 241 945	220	0.141	7 _n 227 859	348	0.191	7 _n 207 133	486	0.241	7 _n 179 082	642
0.042	7 _n 249 723	101	0.092	7 _n 241 725	222	0.142	7 _n 227 511	350	0.192	7 _n 206 647	490	0.242	7 _n 178 440	646
0.043	7 _n 249 622	103	0.093	7 _n 241 503	225	0.143	7 _n 227 161	353	0.193	7 _n 206 157	492	0.243	7 _n 177 794	648
0.044	7 _n 249 519	106	0.094	7 _n 241 278	227	0.144	7 _n 226 808	355	0.194	7 _n 205 665	495	0.244	7 _n 177 146	653
0.045	7 _n 249 413	108	0.095	7 _n 241 051	230	0.145	7 _n 226 453	359	0.195	7 _n 205 170	498	0.245	7 _n 176 493	655
0.046	7 _n 249 305	110	0.096	7 _n 240 821	232	0.146	7 _n 226 094	361	0.196	7 _n 204 672	502	0.246	7 _n 175 838	659
0.047	7 _n 249 195	113	0.097	7 _n 240 589	235	0.147	7 _n 225 733	363	0.197	7 _n 204 170	504	0.247	7 _n 175 179	662
0.048	7 _n 249 082	115	0.098	7 _n 240 354	237	0.148	7 _n 225 370	367	0.198	7 _n 203 666	507	0.248	7 _n 174 517	666
0.049	7 _n 248 967	118	0.099	7 _n 240 117	239	0.149	7 _n 225 003	369	0.199	7 _n 203 159	510	0.249	7 _n 173 851	669
0.050	7 _n 248 849		0.100	7 _n 239 878		0.150	7 _n 224 634		0.200	7 _n 202 649		0.250	7 _n 173 182	

Tafel I.

 $\log \{N_1^9(n)\}.$

$\pm n$	N	—/	$\pm n$	N	—/	$\pm n$	N	—/	$\pm n$	N	—/	$\pm n$	N	—/
0.000	7.200 659	1	0.050	7.196 004	189	0.100	7.181 811	385	0.150	7.157 357	602	0.200	7.121 271	855
0.001	7.200 658	6	0.051	7.195 815	192	0.101	7.181 426	389	0.151	7.156 755	606	0.201	7.120 416	860
0.002	7.200 652	9	0.052	7.195 623	197	0.102	7.181 037	394	0.152	7.156 149	611	0.202	7.119 556	865
0.003	7.200 643	13	0.053	7.195 426	200	0.103	7.180 643	397	0.153	7.155 538	616	0.203	7.118 691	871
0.004	7.200 630	17	0.054	7.195 226	204	0.104	7.180 246	402	0.154	7.154 922	621	0.204	7.117 820	877
0.005	7.200 613	20	0.055	7.195 022	208	0.105	7.179 844	405	0.155	7.154 301	625	0.205	7.116 943	882
0.006	7.200 593	24	0.056	7.194 814	212	0.106	7.179 439	410	0.156	7.153 676	630	0.206	7.116 061	888
0.007	7.200 569	28	0.057	7.194 602	216	0.107	7.179 029	414	0.157	7.153 046	634	0.207	7.115 173	894
0.008	7.200 541	32	0.058	7.194 386	219	0.108	7.178 615	418	0.158	7.152 412	640	0.208	7.114 279	900
0.009	7.200 509	35	0.059	7.194 167	223	0.109	7.178 197	423	0.159	7.151 772	644	0.209	7.113 379	905
0.010	7.200 474	39	0.060	7.193 944	227	0.110	7.177 774	426	0.160	7.151 128	649	0.210	7.112 474	911
0.011	7.200 435	43	0.061	7.193 717	231	0.111	7.177 348	431	0.161	7.150 479	653	0.211	7.111 563	917
0.012	7.200 392	46	0.062	7.193 486	235	0.112	7.176 917	435	0.162	7.149 826	659	0.212	7.110 646	923
0.013	7.200 346	50	0.063	7.193 251	238	0.113	7.176 482	439	0.163	7.149 167	663	0.213	7.109 723	928
0.014	7.200 296	54	0.064	7.193 013	243	0.114	7.176 043	443	0.164	7.148 504	668	0.214	7.108 795	935
0.015	7.200 242	57	0.065	7.192 770	246	0.115	7.175 600	447	0.165	7.147 836	673	0.215	7.107 860	940
0.016	7.200 185	62	0.066	7.192 524	250	0.116	7.175 153	452	0.166	7.147 163	678	0.216	7.106 920	946
0.017	7.200 123	65	0.067	7.192 274	254	0.117	7.174 701	456	0.167	7.146 485	682	0.217	7.105 974	953
0.018	7.200 058	68	0.068	7.192 020	258	0.118	7.174 245	460	0.168	7.145 803	688	0.218	7.105 021	958
0.019	7.199 990	73	0.069	7.191 762	262	0.119	7.173 785	464	0.169	7.145 115	692	0.219	7.104 063	965
0.020	7.199 917	76	0.070	7.191 500	266	0.120	7.173 321	469	0.170	7.144 423	698	0.220	7.103 098	970
0.021	7.199 841	80	0.071	7.191 234	270	0.121	7.172 852	473	0.171	7.143 725	702	0.221	7.102 128	977
0.022	7.199 761	83	0.072	7.190 964	273	0.122	7.172 379	477	0.172	7.143 023	707	0.222	7.101 151	982
0.023	7.199 678	88	0.073	7.190 691	277	0.123	7.171 902	482	0.173	7.142 316	713	0.223	7.100 169	989
0.024	7.199 590	91	0.074	7.190 414	282	0.124	7.171 420	486	0.174	7.141 603	717	0.224	7.099 180	995
0.025	7.199 499	95	0.075	7.190 132	285	0.125	7.170 934	490	0.175	7.140 886	722	0.225	7.098 185	1001
0.026	7.199 404	98	0.076	7.189 847	289	0.126	7.170 444	494	0.176	7.140 164	728	0.226	7.097 184	1008
0.027	7.199 306	102	0.077	7.189 558	293	0.127	7.169 950	499	0.177	7.139 436	732	0.227	7.096 176	1013
0.028	7.199 204	106	0.078	7.189 265	297	0.128	7.169 451	503	0.178	7.138 704	738	0.228	7.095 163	1020
0.029	7.199 098	110	0.079	7.188 968	301	0.129	7.168 948	508	0.179	7.137 966	742	0.229	7.094 143	1027
0.030	7.198 988	114	0.080	7.188 667	305	0.130	7.168 440	512	0.180	7.137 224	748	0.230	7.093 116	1033
0.031	7.198 874	117	0.081	7.188 362	309	0.131	7.167 928	516	0.181	7.136 476	753	0.231	7.092 083	1039
0.032	7.198 757	121	0.082	7.188 053	313	0.132	7.167 412	520	0.182	7.135 723	758	0.232	7.091 044	1045
0.033	7.198 636	125	0.083	7.187 740	317	0.133	7.166 892	525	0.183	7.134 965	763	0.233	7.089 999	1052
0.034	7.198 511	128	0.084	7.187 423	320	0.134	7.166 367	530	0.184	7.134 202	768	0.234	7.088 947	1059
0.035	7.198 383	132	0.085	7.187 103	325	0.135	7.165 837	534	0.185	7.133 434	774	0.235	7.087 888	1065
0.036	7.198 251	136	0.086	7.186 778	329	0.136	7.165 303	538	0.186	7.132 660	779	0.236	7.086 823	1072
0.037	7.198 115	140	0.087	7.186 449	332	0.137	7.164 765	543	0.187	7.131 881	784	0.237	7.085 751	1078
0.038	7.197 975	143	0.088	7.186 117	337	0.138	7.164 222	547	0.188	7.131 097	789	0.238	7.084 673	1085
0.039	7.197 832	148	0.089	7.185 780	341	0.139	7.163 675	552	0.189	7.130 308	795	0.239	7.083 588	1092
0.040	7.197 684	151	0.090	7.185 439	344	0.140	7.163 123	556	0.190	7.129 513	800	0.240	7.082 496	1098
0.041	7.197 533	155	0.091	7.185 095	349	0.141	7.162 567	561	0.191	7.128 713	805	0.241	7.081 398	1105
0.042	7.197 378	158	0.092	7.184 746	353	0.142	7.162 006	565	0.192	7.127 908	811	0.242	7.080 293	1112
0.043	7.197 220	162	0.093	7.184 393	356	0.143	7.161 441	570	0.193	7.127 097	816	0.243	7.079 181	1119
0.044	7.197 058	166	0.094	7.184 037	361	0.144	7.160 871	574	0.194	7.126 281	821	0.244	7.078 062	1125
0.045	7.196 892	170	0.095	7.183 676	365	0.145	7.160 297	579	0.195	7.125 460	827	0.245	7.076 937	1133
0.046	7.196 722	174	0.096	7.183 311	369	0.146	7.159 718	583	0.196	7.124 633	832	0.246	7.075 804	1139
0.047	7.196 548	178	0.097	7.182 942	373	0.147	7.159 135	588	0.197	7.123 801	838	0.247	7.074 665	1147
0.048	7.196 370	181	0.098	7.182 569	377	0.148	7.158 547	593	0.198	7.122 963	844	0.248	7.073 518	1153
0.049	7.196 189	185	0.099	7.182 192	381	0.149	7.157 954	597	0.199	7.122 119	848	0.249	7.072 365	1160
0.050	7.196 004		0.100	7.181 811		0.150	7.157 357		0.200	7.121 271		0.250	7.071 205	

Tafel I.

 $\log \{N_1^{10}(u)\}$

$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$
0.000	6.501 689	1	0.050	6.498 591	125	0.100	6.489 208	253	0.150	6.473 269	389	0.200	6.450 285	537
0.001	6.501 688	4	0.051	6.498 466	128	0.101	6.488 955	256	0.151	6.472 880	391	0.201	6.449 748	539
0.002	6.501 684	6	0.052	6.498 338	131	0.102	6.488 699	259	0.152	6.472 489	394	0.202	6.449 209	543
0.003	6.501 678	8	0.053	6.498 207	133	0.103	6.488 440	261	0.153	6.472 095	397	0.203	6.448 666	545
0.004	6.501 670	11	0.054	6.498 074	135	0.104	6.488 179	264	0.154	6.471 698	400	0.204	6.448 121	549
0.005	6.501 659	14	0.055	6.497 939	138	0.105	6.487 915	266	0.155	6.471 298	403	0.205	6.447 572	552
0.006	6.501 645	16	0.056	6.497 801	141	0.106	6.487 649	269	0.156	6.470 895	405	0.206	6.447 020	555
0.007	6.501 629	19	0.057	6.497 660	143	0.107	6.487 380	272	0.157	6.470 490	409	0.207	6.446 465	558
0.008	6.501 610	21	0.058	6.497 517	146	0.108	6.487 108	274	0.158	6.470 081	411	0.208	6.445 907	562
0.009	6.501 589	23	0.059	6.497 371	148	0.109	6.486 834	277	0.159	6.469 670	414	0.209	6.445 345	564
0.010	6.501 566	26	0.060	6.497 223	151	0.110	6.486 557	280	0.160	6.469 256	417	0.210	6.444 781	568
0.011	6.501 540	29	0.061	6.497 072	153	0.111	6.486 277	282	0.161	6.468 839	420	0.211	6.444 213	571
0.012	6.501 511	31	0.062	6.496 919	156	0.112	6.485 995	285	0.162	6.468 419	423	0.212	6.443 642	574
0.013	6.501 480	33	0.063	6.496 763	158	0.113	6.485 710	287	0.163	6.467 996	425	0.213	6.443 068	578
0.014	6.501 447	36	0.064	6.496 605	160	0.114	6.485 423	290	0.164	6.467 571	429	0.214	6.442 490	581
0.015	6.501 411	38	0.065	6.496 445	164	0.115	6.485 133	293	0.165	6.467 142	431	0.215	6.441 909	584
0.016	6.501 373	41	0.066	6.496 281	166	0.116	6.484 840	296	0.166	6.466 711	434	0.216	6.441 325	587
0.017	6.501 332	43	0.067	6.496 115	168	0.117	6.484 544	298	0.167	6.466 277	437	0.217	6.440 738	590
0.018	6.501 289	46	0.068	6.495 947	171	0.118	6.484 246	301	0.168	6.465 840	440	0.218	6.440 148	594
0.019	6.501 243	48	0.069	6.495 776	173	0.119	6.483 945	304	0.169	6.465 400	443	0.219	6.439 554	597
0.020	6.501 195	51	0.070	6.495 603	176	0.120	6.483 641	306	0.170	6.464 957	446	0.220	6.438 957	600
0.021	6.501 144	53	0.071	6.495 427	179	0.121	6.483 335	309	0.171	6.464 511	449	0.221	6.438 357	603
0.022	6.501 091	56	0.072	6.495 248	181	0.122	6.483 026	312	0.172	6.464 062	452	0.222	6.437 754	607
0.023	6.501 035	58	0.073	6.494 067	183	0.123	6.482 714	314	0.173	6.463 610	454	0.223	6.437 147	610
0.024	6.500 977	61	0.074	6.494 884	186	0.124	6.482 400	317	0.174	6.463 156	458	0.224	6.436 537	613
0.025	6.500 916	63	0.075	6.494 698	189	0.125	6.482 083	320	0.175	6.462 698	460	0.225	6.435 924	617
0.026	6.500 853	66	0.076	6.494 509	191	0.126	6.481 763	322	0.176	6.462 238	464	0.226	6.435 307	620
0.027	6.500 787	68	0.077	6.494 318	194	0.127	6.481 441	325	0.177	6.461 774	466	0.227	6.434 687	624
0.028	6.500 719	70	0.078	6.494 124	197	0.128	6.481 116	328	0.178	6.461 308	470	0.228	6.434 063	626
0.029	6.500 649	73	0.079	6.493 927	199	0.129	6.480 788	331	0.179	6.460 838	472	0.229	6.433 437	630
0.030	6.500 576	76	0.080	6.493 728	201	0.130	6.480 457	333	0.180	6.460 366	475	0.230	6.432 807	634
0.031	6.500 500	78	0.081	6.493 527	204	0.131	6.480 124	336	0.181	6.459 891	479	0.231	6.432 173	637
0.032	6.500 422	81	0.082	6.493 323	207	0.132	6.479 788	339	0.182	6.459 412	481	0.232	6.431 536	640
0.033	6.500 341	83	0.083	6.493 116	209	0.133	6.479 449	341	0.183	6.458 931	484	0.233	6.430 896	644
0.034	6.500 258	85	0.084	6.492 907	212	0.134	6.479 108	344	0.184	6.458 447	488	0.234	6.430 252	647
0.035	6.500 173	88	0.085	6.492 695	214	0.135	6.478 764	347	0.185	6.457 959	490	0.235	6.429 605	650
0.036	6.500 085	91	0.086	6.492 481	217	0.136	6.478 417	350	0.186	6.457 469	493	0.236	6.428 955	654
0.037	6.499 994	93	0.087	6.492 264	220	0.137	6.478 067	352	0.187	6.456 976	497	0.237	6.428 301	657
0.038	6.499 901	95	0.088	6.492 044	222	0.138	6.477 715	356	0.188	6.456 479	499	0.238	6.427 644	661
0.039	6.499 806	98	0.089	6.491 822	224	0.139	6.477 359	358	0.189	6.455 980	503	0.239	6.426 983	664
0.040	6.499 708	100	0.090	6.491 598	228	0.140	6.477 001	360	0.190	6.455 477	505	0.240	6.426 319	668
0.041	6.499 608	103	0.091	6.491 370	229	0.141	6.476 641	364	0.191	6.454 972	509	0.241	6.425 651	671
0.042	6.499 505	106	0.092	6.491 141	233	0.142	6.476 277	366	0.192	6.454 463	511	0.242	6.424 980	674
0.043	6.499 399	108	0.093	6.490 908	235	0.143	6.475 911	369	0.193	6.453 953	515	0.243	6.424 306	678
0.044	6.499 291	110	0.094	6.490 673	238	0.144	6.475 542	372	0.194	6.453 437	518	0.244	6.423 628	682
0.045	6.499 181	113	0.095	6.490 435	240	0.145	6.475 170	375	0.195	6.452 919	520	0.245	6.422 946	685
0.046	6.499 068	116	0.096	6.490 195	243	0.146	6.474 795	377	0.196	6.452 399	524	0.246	6.422 261	689
0.047	6.498 952	118	0.097	6.489 952	245	0.147	6.474 418	380	0.197	6.451 875	527	0.247	6.421 572	692
0.048	6.498 834	120	0.098	6.489 707	248	0.148	6.474 038	383	0.198	6.451 348	530	0.248	6.420 880	696
0.049	6.498 714	123	0.099	6.489 459	251	0.149	6.473 655	386	0.199	6.450 818	533	0.249	6.420 184	699
0.050	6.498 591		0.100	6.489 208		0.150	6.473 269		0.200	6.450 285		0.250	6.419 485	

Tafel II.

$$\log \{M_1^3(m)\}.$$

vergl. pag. 19.

$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$
0.000	8 _n 619 789		0.050	8 _n 606 560	543	0.100	8 _n 564 271	1192	0.150	8 _n 483 112	2155	0.200	8 _n 335 792	4037
0.001	8 _n 619 783	6	0.051	8 _n 606 017	554	0.101	8 _n 563 079	1207	0.151	8 _n 480 957	2179	0.201	8 _n 331 755	4096
0.002	8 _n 619 768	15	0.052	8 _n 605 463	566	0.102	8 _n 561 872	1222	0.152	8 _n 478 778	2205	0.202	8 _n 327 659	4155
0.003	8 _n 619 742	26	0.053	8 _n 604 897	577	0.103	8 _n 560 650	1238	0.153	8 _n 476 573	2231	0.203	8 _n 323 504	4217
0.004	8 _n 619 705	37	0.054	8 _n 604 320	589	0.104	8 _n 559 412	1254	0.154	8 _n 474 342	2256	0.204	8 _n 319 287	4278
0.005	8 _n 619 658	47	0.055	8 _n 603 731	601	0.105	8 _n 558 158	1269	0.155	8 _n 472 086	2284	0.205	8 _n 315 009	4343
0.006	8 _n 619 601	57	0.056	8 _n 603 130	612	0.106	8 _n 556 889	1285	0.156	8 _n 469 802	2310	0.206	8 _n 310 666	4408
0.007	8 _n 619 533	68	0.057	8 _n 602 518	625	0.107	8 _n 555 604	1301	0.157	8 _n 467 492	2337	0.207	8 _n 306 258	4476
0.008	8 _n 619 455	78	0.058	8 _n 601 893	635	0.108	8 _n 554 303	1317	0.158	8 _n 465 155	2365	0.208	8 _n 301 782	4543
0.009	8 _n 619 366	89	0.059	8 _n 601 258	648	0.109	8 _n 552 986	1333	0.159	8 _n 462 790	2393	0.209	8 _n 297 239	4614
		99												
0.010	8 _n 619 267	109	0.060	8 _n 600 610	660	0.110	8 _n 551 653	1349	0.160	8 _n 460 397	2422	0.210	8 _n 292 625	4685
0.011	8 _n 619 158	120	0.061	8 _n 599 950	671	0.111	8 _n 550 304	1366	0.161	8 _n 457 975	2450	0.211	8 _n 287 940	4759
0.012	8 _n 619 038	131	0.062	8 _n 599 279	684	0.112	8 _n 548 938	1383	0.162	8 _n 455 525	2480	0.212	8 _n 283 181	4835
0.013	8 _n 618 907	141	0.063	8 _n 598 595	695	0.113	8 _n 547 555	1399	0.163	8 _n 453 045	2509	0.213	8 _n 278 346	4913
0.014	8 _n 618 766	152	0.064	8 _n 597 900	708	0.114	8 _n 546 156	1416	0.164	8 _n 450 536	2539	0.214	8 _n 273 433	4992
0.015	8 _n 618 614	162	0.065	8 _n 597 192	720	0.115	8 _n 544 740	1434	0.165	8 _n 447 997	2569	0.215	8 _n 268 441	5073
0.016	8 _n 618 452	172	0.066	8 _n 596 472	732	0.116	8 _n 543 306	1450	0.166	8 _n 445 428	2601	0.216	8 _n 263 368	5158
0.017	8 _n 618 280	183	0.067	8 _n 595 740	744	0.117	8 _n 541 856	1468	0.167	8 _n 442 827	2632	0.217	8 _n 258 210	5244
0.018	8 _n 618 097	194	0.068	8 _n 594 996	756	0.118	8 _n 540 388	1486	0.168	8 _n 440 195	2664	0.218	8 _n 252 966	5332
0.019	8 _n 617 903	204	0.069	8 _n 594 240	769	0.119	8 _n 538 902	1503	0.169	8 _n 437 531	2696	0.219	8 _n 247 634	5424
0.020	8 _n 617 699	215	0.070	8 _n 593 471	782	0.120	8 _n 537 399	1521	0.170	8 _n 434 835	2729	0.220	8 _n 242 210	5518
0.021	8 _n 617 484	225	0.071	8 _n 592 689	794	0.121	8 _n 535 878	1539	0.171	8 _n 432 106	2763	0.221	8 _n 236 692	5613
0.022	8 _n 617 259	236	0.072	8 _n 591 895	806	0.122	8 _n 534 339	1557	0.172	8 _n 429 343	2797	0.222	8 _n 231 079	5714
0.023	8 _n 617 023	247	0.073	8 _n 591 089	820	0.123	8 _n 532 782	1576	0.173	8 _n 426 546	2831	0.223	8 _n 225 365	5815
0.024	8 _n 616 776	257	0.074	8 _n 590 269	832	0.124	8 _n 531 206	1594	0.174	8 _n 423 715	2866	0.224	8 _n 219 550	5922
0.025	8 _n 616 519	268	0.075	8 _n 589 437	844	0.125	8 _n 529 612	1613	0.175	8 _n 420 849	2902	0.225	8 _n 213 628	6030
0.026	8 _n 616 251	278	0.076	8 _n 588 593	858	0.126	8 _n 527 999	1632	0.176	8 _n 417 947	2938	0.226	8 _n 207 598	6142
0.027	8 _n 615 973	290	0.077	8 _n 587 735	870	0.127	8 _n 526 367	1651	0.177	8 _n 415 009	2974	0.227	8 _n 201 456	6258
0.028	8 _n 615 683	300	0.078	8 _n 586 865	884	0.128	8 _n 524 716	1670	0.178	8 _n 412 035	3013	0.228	8 _n 195 198	6377
0.029	8 _n 615 383	310	0.079	8 _n 585 981	897	0.129	8 _n 523 046	1690	0.179	8 _n 409 022	3050	0.229	8 _n 188 821	6502
0.030	8 _n 615 073	322	0.080	8 _n 585 084	909	0.130	8 _n 521 356	1710	0.180	8 _n 405 972	3089	0.230	8 _n 182 319	6629
0.031	8 _n 614 751	332	0.081	8 _n 584 175	923	0.131	8 _n 519 646	1729	0.181	8 _n 402 883	3129	0.231	8 _n 175 690	6761
0.032	8 _n 614 419	343	0.082	8 _n 583 252	937	0.132	8 _n 517 917	1750	0.182	8 _n 399 754	3168	0.232	8 _n 168 929	6898
0.033	8 _n 614 076	354	0.083	8 _n 582 315	950	0.133	8 _n 516 167	1770	0.183	8 _n 396 586	3210	0.233	8 _n 162 031	7039
0.034	8 _n 613 722	365	0.084	8 _n 581 365	963	0.134	8 _n 514 397	1791	0.184	8 _n 393 376	3251	0.234	8 _n 154 992	7187
0.035	8 _n 613 357	376	0.085	8 _n 580 402	977	0.135	8 _n 512 606	1811	0.185	8 _n 390 125	3293	0.235	8 _n 147 805	7339
0.036	8 _n 612 981	386	0.086	8 _n 579 425	990	0.136	8 _n 510 795	1832	0.186	8 _n 386 832	3337	0.236	8 _n 140 466	7497
0.037	8 _n 612 595	398	0.087	8 _n 578 435	1005	0.137	8 _n 508 963	1854	0.187	8 _n 383 495	3380	0.237	8 _n 132 969	7661
0.038	8 _n 612 197	408	0.088	8 _n 577 430	1018	0.138	8 _n 507 109	1875	0.188	8 _n 380 115	3426	0.238	8 _n 125 308	7832
0.039	8 _n 611 789	420	0.089	8 _n 576 412	1032	0.139	8 _n 505 234	1897	0.189	8 _n 376 689	3470	0.239	8 _n 117 476	8010
0.040	8 _n 611 369	430	0.090	8 _n 575 380	1046	0.140	8 _n 503 337	1919	0.190	8 _n 373 219	3518	0.240	8 _n 109 466	8195
0.041	8 _n 610 939	442	0.091	8 _n 574 334	1060	0.141	8 _n 501 418	1942	0.191	8 _n 369 701	3564	0.241	8 _n 101 271	8387
0.042	8 _n 610 497	453	0.092	8 _n 573 274	1075	0.142	8 _n 499 476	1964	0.192	8 _n 366 137	3613	0.242	8 _n 092 884	8588
0.043	8 _n 610 044	464	0.093	8 _n 572 109	1088	0.143	8 _n 497 512	1986	0.193	8 _n 362 524	3663	0.243	8 _n 084 296	8798
0.044	8 _n 609 580	475	0.094	8 _n 571 111	1104	0.144	8 _n 495 526	2010	0.194	8 _n 358 861	3713	0.244	8 _n 075 498	9017
0.045	8 _n 609 105	486	0.095	8 _n 570 007	1117	0.145	8 _n 493 516	2033	0.195	8 _n 355 148	3764	0.245	8 _n 066 481	9246
0.046	8 _n 608 619	498	0.096	8 _n 568 890	1133	0.146	8 _n 491 483	2057	0.196	8 _n 351 384	3817	0.246	8 _n 057 235	9487
0.047	8 _n 608 121	509	0.097	8 _n 567 757	1147	0.147	8 _n 489 426	2080	0.197	8 _n 347 567	3870	0.247	8 _n 047 748	9738
0.048	8 _n 607 612	520	0.098	8 _n 566 610	1162	0.148	8 _n 487 346	2105	0.198	8 _n 343 697	3924	0.248	8 _n 038 010	10002
0.049	8 _n 607 092	532	0.099	8 _n 565 448	1177	0.149	8 _n 485 241	2129	0.199	8 _n 339 773	3981	0.249	8 _n 028 008	10279
0.050	8 _n 606 560		0.100	8 _n 564 271		0.150	8 _n 483 112		0.200	8 _n 335 792		0.250	8 _n 017 729	

Tafel II.

 $\log \{M_1^4 m\}$.

$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$
0.000	9 _n 318 759	1	0.050	9 _n 317 889	35	0.100	9 _n 315 270	70	0.150	9 _n 310 870	106	0.200	9 _n 304 634	144
0.001	9 _n 318 758	1	0.051	9 _n 317 854	36	0.101	9 _n 315 200	71	0.151	9 _n 310 764	107	0.201	9 _n 304 490	145
0.002	9 _n 318 757	1	0.052	9 _n 317 818	36	0.102	9 _n 315 129	72	0.152	9 _n 310 657	107	0.202	9 _n 304 345	145
0.003	9 _n 318 756	3	0.053	9 _n 317 782	38	0.103	9 _n 315 057	72	0.153	9 _n 310 549	109	0.203	9 _n 304 200	146
0.004	9 _n 318 753	3	0.054	9 _n 317 744	38	0.104	9 _n 314 985	74	0.154	9 _n 310 440	110	0.204	9 _n 304 054	147
0.005	9 _n 318 750	4	0.055	9 _n 317 706	38	0.105	9 _n 314 911	74	0.155	9 _n 310 330	110	0.205	9 _n 303 907	148
0.006	9 _n 318 746	4	0.056	9 _n 317 668	40	0.106	9 _n 314 837	74	0.156	9 _n 310 220	111	0.206	9 _n 303 759	149
0.007	9 _n 318 742	5	0.057	9 _n 317 628	40	0.107	9 _n 314 763	76	0.157	9 _n 310 109	111	0.207	9 _n 303 610	149
0.008	9 _n 318 737	6	0.058	9 _n 317 588	40	0.108	9 _n 314 687	76	0.158	9 _n 309 998	113	0.208	9 _n 303 461	150
0.009	9 _n 318 731	7	0.059	9 _n 317 548	42	0.109	9 _n 314 611	77	0.159	9 _n 309 885	113	0.209	9 _n 303 311	151
0.010	9 _n 318 724	7	0.060	9 _n 317 506	42	0.110	9 _n 314 534	77	0.160	9 _n 309 772	114	0.210	9 _n 303 160	152
0.011	9 _n 318 717	8	0.061	9 _n 317 464	43	0.111	9 _n 314 457	78	0.161	9 _n 309 658	114	0.211	9 _n 303 008	152
0.012	9 _n 318 709	9	0.062	9 _n 317 421	43	0.112	9 _n 314 379	79	0.162	9 _n 309 544	116	0.212	9 _n 302 856	153
0.013	9 _n 318 700	9	0.063	9 _n 317 378	45	0.113	9 _n 314 300	80	0.163	9 _n 309 428	116	0.213	9 _n 302 703	154
0.014	9 _n 318 691	10	0.064	9 _n 317 333	45	0.114	9 _n 314 220	81	0.164	9 _n 309 312	117	0.214	9 _n 302 549	155
0.015	9 _n 318 681	11	0.065	9 _n 317 288	45	0.115	9 _n 314 139	81	0.165	9 _n 309 195	117	0.215	9 _n 302 394	155
0.016	9 _n 318 670	12	0.066	9 _n 317 243	47	0.116	9 _n 314 058	82	0.166	9 _n 309 078	119	0.216	9 _n 302 239	157
0.017	9 _n 318 658	12	0.067	9 _n 317 196	47	0.117	9 _n 313 976	82	0.167	9 _n 308 959	119	0.217	9 _n 302 082	157
0.018	9 _n 318 646	13	0.068	9 _n 317 149	48	0.118	9 _n 313 894	83	0.168	9 _n 308 840	120	0.218	9 _n 301 925	158
0.019	9 _n 318 633	13	0.069	9 _n 317 101	48	0.119	9 _n 313 811	84	0.169	9 _n 308 720	120	0.219	9 _n 301 767	158
0.020	9 _n 318 620	14	0.070	9 _n 317 053	49	0.120	9 _n 313 727	85	0.170	9 _n 308 600	121	0.220	9 _n 301 609	160
0.021	9 _n 318 606	15	0.071	9 _n 317 004	50	0.121	9 _n 313 642	86	0.171	9 _n 308 479	122	0.221	9 _n 301 449	160
0.022	9 _n 318 591	16	0.072	9 _n 316 954	51	0.122	9 _n 313 556	86	0.172	9 _n 308 357	123	0.222	9 _n 301 289	161
0.023	9 _n 318 575	16	0.073	9 _n 316 903	51	0.123	9 _n 313 470	87	0.173	9 _n 308 234	124	0.223	9 _n 301 128	162
0.024	9 _n 318 559	17	0.074	9 _n 316 852	52	0.124	9 _n 313 383	87	0.174	9 _n 308 110	124	0.224	9 _n 300 966	162
0.025	9 _n 318 542	18	0.075	9 _n 316 800	53	0.125	9 _n 313 296	88	0.175	9 _n 307 986	125	0.225	9 _n 300 804	164
0.026	9 _n 318 524	19	0.076	9 _n 316 747	53	0.126	9 _n 313 208	89	0.176	9 _n 307 861	126	0.226	9 _n 300 640	164
0.027	9 _n 318 505	19	0.077	9 _n 316 694	54	0.127	9 _n 313 119	90	0.177	9 _n 307 735	126	0.227	9 _n 300 476	165
0.028	9 _n 318 486	20	0.078	9 _n 316 640	55	0.128	9 _n 313 029	91	0.178	9 _n 307 609	128	0.228	9 _n 300 311	165
0.029	9 _n 318 466	20	0.079	9 _n 316 585	56	0.129	9 _n 312 938	91	0.179	9 _n 307 481	128	0.229	9 _n 300 146	167
0.030	9 _n 318 446	21	0.080	9 _n 316 529	56	0.130	9 _n 312 847	92	0.180	9 _n 307 353	128	0.230	9 _n 299 979	167
0.031	9 _n 318 425	22	0.081	9 _n 316 473	57	0.131	9 _n 312 755	93	0.181	9 _n 307 225	130	0.231	9 _n 299 812	168
0.032	9 _n 318 403	23	0.082	9 _n 316 416	57	0.132	9 _n 312 662	93	0.182	9 _n 307 095	130	0.232	9 _n 299 644	169
0.033	9 _n 318 380	23	0.083	9 _n 316 359	59	0.133	9 _n 312 569	94	0.183	9 _n 306 965	131	0.233	9 _n 299 475	170
0.034	9 _n 318 357	24	0.084	9 _n 316 300	59	0.134	9 _n 312 475	95	0.184	9 _n 306 834	132	0.234	9 _n 299 305	170
0.035	9 _n 318 333	25	0.085	9 _n 316 241	60	0.135	9 _n 312 380	95	0.185	9 _n 306 702	133	0.235	9 _n 299 135	171
0.036	9 _n 318 308	25	0.086	9 _n 316 181	60	0.136	9 _n 312 285	97	0.186	9 _n 306 569	133	0.236	9 _n 298 964	172
0.037	9 _n 318 283	26	0.087	9 _n 316 121	61	0.137	9 _n 312 188	97	0.187	9 _n 306 436	134	0.237	9 _n 298 792	173
0.038	9 _n 318 257	27	0.088	9 _n 316 060	62	0.138	9 _n 312 091	97	0.188	9 _n 306 302	135	0.238	9 _n 298 619	174
0.039	9 _n 318 230	27	0.089	9 _n 315 998	63	0.139	9 _n 311 994	99	0.189	9 _n 306 167	135	0.239	9 _n 298 445	174
0.040	9 _n 318 203	29	0.090	9 _n 315 935	63	0.140	9 _n 311 895	99	0.190	9 _n 306 032	137	0.240	9 _n 298 271	175
0.041	9 _n 318 174	29	0.091	9 _n 315 872	64	0.141	9 _n 311 796	100	0.191	9 _n 305 895	137	0.241	9 _n 298 096	176
0.042	9 _n 318 145	29	0.092	9 _n 315 808	65	0.142	9 _n 311 696	101	0.192	9 _n 305 758	138	0.242	9 _n 297 920	177
0.043	9 _n 318 116	30	0.093	9 _n 315 743	65	0.143	9 _n 311 595	101	0.193	9 _n 305 620	138	0.243	9 _n 297 743	178
0.044	9 _n 318 086	31	0.094	9 _n 315 678	66	0.144	9 _n 311 494	102	0.194	9 _n 305 482	140	0.244	9 _n 297 565	178
0.045	9 _n 318 055	32	0.095	9 _n 315 612	67	0.145	9 _n 311 392	103	0.195	9 _n 305 342	140	0.245	9 _n 297 387	180
0.046	9 _n 318 023	32	0.096	9 _n 315 545	68	0.146	9 _n 311 289	104	0.196	9 _n 305 202	141	0.246	9 _n 297 207	180
0.047	9 _n 317 991	33	0.097	9 _n 315 477	68	0.147	9 _n 311 185	104	0.197	9 _n 305 061	141	0.247	9 _n 297 027	180
0.048	9 _n 317 958	34	0.098	9 _n 315 409	69	0.148	9 _n 311 081	105	0.198	9 _n 304 920	143	0.248	9 _n 296 847	182
0.049	9 _n 317 924	35	0.099	9 _n 315 340	70	0.149	9 _n 310 976	106	0.199	9 _n 304 777	143	0.249	9 _n 296 665	183
0.050	9 _n 317 889		0.100	9 _n 315 270		0.150	9 _n 310 870		0.200	9 _n 304 634		0.250	9 _n 296 482	

Tafel II.

log $\{M_1^5 m\}$.

$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$
0.000	7.670 941	6	0.050	7.656 243	603	0.100	7.609 239	1326	0.150	7.518 822	2406	0.200	7.352 986	4594
0.001	7.670 935	17	0.051	7.655 640	616	0.101	7.607 913	1342	0.151	7.516 416	2434	0.201	7.348 392	4664
0.002	7.670 918	29	0.052	7.655 024	629	0.102	7.606 571	1360	0.152	7.513 982	2464	0.202	7.343 728	4735
0.003	7.670 889	40	0.053	7.654 395	642	0.103	7.605 211	1377	0.153	7.511 518	2492	0.203	7.338 993	4808
0.004	7.670 849	52	0.054	7.653 753	655	0.104	7.603 834	1394	0.154	7.509 026	2523	0.204	7.334 185	4883
0.005	7.670 797	64	0.055	7.653 098	667	0.105	7.602 440	1412	0.155	7.506 503	2552	0.205	7.329 302	4961
0.006	7.670 733	75	0.056	7.652 431	680	0.106	7.601 028	1429	0.156	7.503 951	2583	0.206	7.324 341	5039
0.007	7.670 658	87	0.057	7.651 751	694	0.107	7.599 599	1447	0.157	7.501 368	2614	0.207	7.319 302	5121
0.008	7.670 571	99	0.058	7.651 057	707	0.108	7.598 152	1465	0.158	7.498 754	2646	0.208	7.314 181	5203
0.009	7.670 472	110	0.059	7.650 350	719	0.109	7.596 687	1483	0.159	7.496 108	2677	0.209	7.308 978	5289
0.010	7.670 362	122	0.060	7.649 631	733	0.110	7.595 204	1501	0.160	7.493 431	2709	0.210	7.303 689	5376
0.011	7.670 240	133	0.061	7.648 898	746	0.111	7.593 703	1520	0.161	7.490 722	2743	0.211	7.298 313	5467
0.012	7.670 107	145	0.062	7.648 152	760	0.112	7.592 183	1538	0.162	7.487 979	2776	0.212	7.292 846	5559
0.013	7.669 962	157	0.063	7.647 392	773	0.113	7.590 645	1557	0.163	7.485 203	2809	0.213	7.287 287	5655
0.014	7.669 805	168	0.064	7.646 619	786	0.114	7.589 088	1576	0.164	7.482 394	2844	0.214	7.281 632	5753
0.015	7.669 637	180	0.065	7.645 833	800	0.115	7.587 512	1595	0.165	7.479 550	2879	0.215	7.275 879	5853
0.016	7.669 457	192	0.066	7.645 033	813	0.116	7.585 917	1615	0.166	7.476 671	2915	0.216	7.270 026	5957
0.017	7.669 265	204	0.067	7.644 220	827	0.117	7.584 302	1633	0.167	7.473 756	2950	0.217	7.264 069	6065
0.018	7.669 061	215	0.068	7.643 393	841	0.118	7.582 669	1654	0.168	7.470 806	2987	0.218	7.258 004	6176
0.019	7.668 846	227	0.069	7.642 552	855	0.119	7.581 015	1673	0.169	7.467 819	3024	0.219	7.251 828	6289
0.020	7.668 619	238	0.070	7.641 697	868	0.120	7.579 342	1693	0.170	7.464 795	3062	0.220	7.245 539	6407
0.021	7.668 381	251	0.071	7.640 829	883	0.121	7.577 649	1713	0.171	7.461 733	3100	0.221	7.239 132	6529
0.022	7.668 130	262	0.072	7.639 946	896	0.122	7.575 936	1734	0.172	7.458 633	3139	0.222	7.232 603	6654
0.023	7.667 868	274	0.073	7.639 050	910	0.123	7.574 202	1754	0.173	7.455 494	3180	0.223	7.225 949	6784
0.024	7.667 594	285	0.074	7.638 140	925	0.124	7.572 448	1775	0.174	7.452 314	3219	0.224	7.219 165	6917
0.025	7.667 309	298	0.075	7.637 215	939	0.125	7.570 673	1797	0.175	7.449 095	3260	0.225	7.212 248	7058
0.026	7.667 011	310	0.076	7.636 276	953	0.126	7.568 876	1817	0.176	7.445 835	3303	0.226	7.205 190	7201
0.027	7.666 701	321	0.077	7.635 323	967	0.127	7.567 059	1839	0.177	7.442 532	3345	0.227	7.197 989	7350
0.028	7.666 380	333	0.078	7.634 356	982	0.128	7.565 220	1860	0.178	7.439 187	3388	0.228	7.190 639	7505
0.029	7.666 047	346	0.079	7.633 374	997	0.129	7.563 360	1883	0.179	7.435 799	3433	0.229	7.183 134	7666
0.030	7.665 701	357	0.080	7.632 377	1011	0.130	7.561 477	1904	0.180	7.432 366	3477	0.230	7.175 468	7832
0.031	7.665 344	369	0.081	7.631 366	1026	0.131	7.559 573	1927	0.181	7.428 889	3523	0.231	7.167 636	8006
0.032	7.664 975	382	0.082	7.630 340	1041	0.132	7.557 646	1950	0.182	7.425 366	3570	0.232	7.159 630	8186
0.033	7.664 593	393	0.083	7.629 299	1056	0.133	7.555 696	1973	0.183	7.421 796	3617	0.233	7.151 444	8370
0.034	7.664 200	405	0.084	7.628 243	1071	0.134	7.553 723	1995	0.184	7.418 179	3666	0.234	7.143 070	8550
0.035	7.663 795	418	0.085	7.627 172	1085	0.135	7.551 728	2019	0.185	7.414 513	3715	0.235	7.134 500	8774
0.036	7.663 377	429	0.086	7.626 087	1101	0.136	7.549 709	2043	0.186	7.410 798	3766	0.236	7.125 726	8987
0.037	7.662 948	442	0.087	7.624 986	1117	0.137	7.547 666	2067	0.187	7.407 032	3817	0.237	7.116 739	9211
0.038	7.662 506	454	0.088	7.623 869	1132	0.138	7.545 599	2091	0.188	7.403 215	3870	0.238	7.107 528	9443
0.039	7.662 052	466	0.089	7.622 737	1147	0.139	7.543 508	2115	0.189	7.399 345	3922	0.239	7.098 085	9687
0.040	7.661 586	478	0.090	7.621 590	1163	0.140	7.541 393	2140	0.190	7.395 423	3978	0.240	7.088 398	9943
0.041	7.661 108	491	0.091	7.620 427	1179	0.141	7.539 253	2166	0.191	7.391 445	4033	0.241	7.078 455	10211
0.042	7.660 617	503	0.092	7.619 248	1194	0.142	7.537 087	2190	0.192	7.387 412	4090	0.242	7.068 244	10494
0.043	7.660 114	516	0.093	7.618 054	1211	0.143	7.534 897	2217	0.193	7.383 322	4149	0.243	7.057 750	10791
0.044	7.659 598	528	0.094	7.616 843	1226	0.144	7.532 680	2243	0.194	7.379 173	4208	0.244	7.046 959	11105
0.045	7.659 070	540	0.095	7.615 617	1243	0.145	7.530 437	2268	0.195	7.374 965	4268	0.245	7.035 854	11433
0.046	7.658 530	553	0.096	7.614 374	1259	0.146	7.528 169	2296	0.196	7.370 697	4331	0.246	7.024 421	11786
0.047	7.657 977	565	0.097	7.613 115	1276	0.147	7.525 873	2323	0.197	7.366 366	4395	0.247	7.012 635	12151
0.048	7.657 412	578	0.098	7.611 839	1292	0.148	7.523 550	2350	0.198	7.361 971	4459	0.248	7.000 484	12545
0.049	7.656 834	591	0.099	7.610 547	1308	0.149	7.521 200	2378	0.199	7.357 512	4526	0.249	6.987 939	12962
0.050	7.656 243		0.100	7.609 239		0.150	7.518 822		0.200	7.352 986		0.250	6.974 977	

Tafel II.

 $\log \{M_1^6(m)\}.$

$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$
0.000	8.652 877	0	0.050	8.651 702	47	0.100	8.648 165	95	0.150	8.642 224	143	0.200	8.633 813	194
0.001	8.652 877	1	0.051	8.651 655	49	0.101	8.648 070	96	0.151	8.642 081	145	0.201	8.633 619	195
0.002	8.652 875	2	0.052	8.651 606	49	0.102	8.647 974	97	0.152	8.641 936	146	0.202	8.633 424	196
0.003	8.652 873	3	0.053	8.651 557	50	0.103	8.647 877	98	0.153	8.641 790	146	0.203	8.633 228	197
0.004	8.652 870	4	0.054	8.651 507	52	0.104	8.647 779	99	0.154	8.641 644	148	0.204	8.633 031	198
0.005	8.652 866	6	0.055	8.651 455	52	0.105	8.647 680	99	0.155	8.641 496	149	0.205	8.632 833	199
0.006	8.652 860	6	0.056	8.651 403	53	0.106	8.647 580	101	0.156	8.641 347	149	0.206	8.632 634	201
0.007	8.652 854	7	0.057	8.651 350	54	0.107	8.647 479	102	0.157	8.641 198	151	0.207	8.632 433	201
0.008	8.652 847	8	0.058	8.651 296	55	0.108	8.647 377	103	0.158	8.641 047	152	0.208	8.632 232	202
0.009	8.652 839	9	0.059	8.651 241	56	0.109	8.647 274	103	0.159	8.640 895	152	0.209	8.632 030	204
0.010	8.652 830	10	0.060	8.651 185	57	0.110	8.647 171	105	0.160	8.640 743	154	0.210	8.631 826	204
0.011	8.652 820	10	0.061	8.651 128	58	0.111	8.647 066	106	0.161	8.640 589	155	0.211	8.631 622	205
0.012	8.652 810	12	0.062	8.651 070	59	0.112	8.646 960	106	0.162	8.640 434	155	0.212	8.631 417	207
0.013	8.652 798	13	0.063	8.651 011	60	0.113	8.646 854	108	0.163	8.640 279	157	0.213	8.631 210	207
0.014	8.652 785	13	0.064	8.650 951	61	0.114	8.646 746	109	0.164	8.640 122	158	0.214	8.631 003	209
0.015	8.652 772	15	0.065	8.650 890	61	0.115	8.646 637	109	0.165	8.639 964	158	0.215	8.630 794	209
0.016	8.652 757	16	0.066	8.650 829	63	0.116	8.646 528	111	0.166	8.639 806	160	0.216	8.630 585	211
0.017	8.652 741	16	0.067	8.650 766	64	0.117	8.646 417	111	0.167	8.639 646	160	0.217	8.630 374	212
0.018	8.652 725	17	0.068	8.650 702	64	0.118	8.646 306	113	0.168	8.639 486	162	0.218	8.630 162	212
0.019	8.652 708	19	0.069	8.650 638	66	0.119	8.646 193	113	0.169	8.639 324	163	0.219	8.629 950	214
0.020	8.652 689	19	0.070	8.650 572	66	0.120	8.646 080	114	0.170	8.639 161	163	0.220	8.629 736	215
0.021	8.652 670	20	0.071	8.650 506	67	0.121	8.645 966	116	0.171	8.638 998	165	0.221	8.629 521	216
0.022	8.652 650	21	0.072	8.650 439	69	0.122	8.645 850	116	0.172	8.638 833	165	0.222	8.629 305	217
0.023	8.652 629	22	0.073	8.650 370	69	0.123	8.645 734	117	0.173	8.638 668	167	0.223	8.629 088	218
0.024	8.652 607	23	0.074	8.650 301	70	0.124	8.645 617	119	0.174	8.638 501	168	0.224	8.628 870	219
0.025	8.652 584	24	0.075	8.650 231	71	0.125	8.645 498	119	0.175	8.638 333	168	0.225	8.628 651	220
0.026	8.652 560	25	0.076	8.650 160	73	0.126	8.645 379	120	0.176	8.638 165	170	0.226	8.628 431	221
0.027	8.652 535	26	0.077	8.650 087	73	0.127	8.645 259	121	0.177	8.637 995	171	0.227	8.628 210	222
0.028	8.652 509	27	0.078	8.650 014	74	0.128	8.645 138	122	0.178	8.637 824	171	0.228	8.627 988	223
0.029	8.652 482	27	0.079	8.649 940	75	0.129	8.645 016	123	0.179	8.637 653	173	0.229	8.627 765	224
0.030	8.652 455	29	0.080	8.649 865	76	0.130	8.644 893	125	0.180	8.637 480	174	0.230	8.627 541	226
0.031	8.652 426	30	0.081	8.649 789	77	0.131	8.644 768	125	0.181	8.637 306	174	0.231	8.627 315	226
0.032	8.652 396	30	0.082	8.649 712	77	0.132	8.644 643	126	0.182	8.637 132	176	0.232	8.627 089	228
0.033	8.652 366	32	0.083	8.649 635	79	0.133	8.644 517	127	0.183	8.636 956	177	0.233	8.626 861	228
0.034	8.652 334	32	0.084	8.649 556	80	0.134	8.644 390	128	0.184	8.636 779	178	0.234	8.626 633	230
0.035	8.652 302	34	0.085	8.649 476	81	0.135	8.644 262	129	0.185	8.636 601	178	0.235	8.626 403	230
0.036	8.652 268	34	0.086	8.649 395	81	0.136	8.644 133	130	0.186	8.636 423	180	0.236	8.626 173	232
0.037	8.652 234	35	0.087	8.649 314	83	0.137	8.644 003	131	0.187	8.636 243	181	0.237	8.625 941	233
0.038	8.652 199	36	0.088	8.649 231	84	0.138	8.643 872	132	0.188	8.636 062	182	0.238	8.625 708	234
0.039	8.652 163	37	0.089	8.649 147	84	0.139	8.643 740	132	0.189	8.635 880	182	0.239	8.625 474	235
0.040	8.652 126	38	0.090	8.649 063	86	0.140	8.643 608	134	0.190	8.635 698	184	0.240	8.625 239	236
0.041	8.652 088	39	0.091	8.648 977	86	0.141	8.643 474	135	0.191	8.635 514	185	0.241	8.625 003	237
0.042	8.652 049	40	0.092	8.648 891	87	0.142	8.643 339	136	0.192	8.635 329	186	0.242	8.624 766	238
0.043	8.652 009	41	0.093	8.648 804	89	0.143	8.643 203	137	0.193	8.635 143	187	0.243	8.624 528	239
0.044	8.651 968	42	0.094	8.648 715	89	0.144	8.643 066	138	0.194	8.634 956	188	0.244	8.624 289	240
0.045	8.651 926	43	0.095	8.648 626	91	0.145	8.642 928	138	0.195	8.634 768	189	0.245	8.624 049	241
0.046	8.651 883	44	0.096	8.648 535	91	0.146	8.642 790	140	0.196	8.634 579	190	0.246	8.623 808	243
0.047	8.651 839	44	0.097	8.648 444	92	0.147	8.642 650	141	0.197	8.634 389	191	0.247	8.623 565	243
0.048	8.651 795	46	0.098	8.648 352	93	0.148	8.642 509	142	0.198	8.634 198	192	0.248	8.623 322	245
0.049	8.651 749	47	0.099	8.648 259	94	0.149	8.642 367	143	0.199	8.634 006	193	0.249	8.623 077	245
0.050	8.651 702	47	0.100	8.648 165	94	0.150	8.642 224	143	0.200	8.633 813	193	0.250	8.622 832	245

Tafel II.

 $\log \{M_1^2(m)\}$.

$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$
0.000	6 _n 843 572	6	0.050	6 _n 828 344	625	0.100	6 _n 779 638	1374	0.150	6 _n 685 855	2498	0.200	6 _n 513 122	4806
0.001	6 _n 843 566	18	0.051	6 _n 827 719	638	0.101	6 _n 778 263	1392	0.151	6 _n 683 357	2528	0.201	6 _n 508 316	4880
0.002	6 _n 843 548	30	0.052	6 _n 827 081	652	0.102	6 _n 776 872	1409	0.152	6 _n 680 829	2558	0.202	6 _n 503 436	4956
0.003	6 _n 843 518	42	0.053	6 _n 826 429	664	0.103	6 _n 775 463	1427	0.153	6 _n 678 271	2589	0.203	6 _n 498 480	5034
0.004	6 _n 843 476	54	0.054	6 _n 825 765	679	0.104	6 _n 774 036	1445	0.154	6 _n 675 682	2620	0.204	6 _n 493 446	5115
0.005	6 _n 843 422	66	0.055	6 _n 825 086	691	0.105	6 _n 772 591	1463	0.155	6 _n 673 062	2651	0.205	6 _n 488 331	5197
0.006	6 _n 843 356	78	0.056	6 _n 824 395	705	0.106	6 _n 771 128	1482	0.156	6 _n 670 411	2683	0.206	6 _n 483 134	5282
0.007	6 _n 843 278	90	0.057	6 _n 823 690	719	0.107	6 _n 769 646	1499	0.157	6 _n 667 728	2716	0.207	6 _n 477 852	5368
0.008	6 _n 843 188	102	0.058	6 _n 822 971	732	0.108	6 _n 768 147	1519	0.158	6 _n 665 012	2748	0.208	6 _n 472 484	5458
0.009	6 _n 843 086	114	0.059	6 _n 822 239	745	0.109	6 _n 766 628	1537	0.159	6 _n 662 264	2782	0.209	6 _n 467 026	5549
0.010	6 _n 842 972	126	0.060	6 _n 821 494	760	0.110	6 _n 765 091	1557	0.160	6 _n 659 482	2815	0.210	6 _n 461 477	5644
0.011	6 _n 842 846	139	0.061	6 _n 820 734	773	0.111	6 _n 763 534	1575	0.161	6 _n 656 667	2850	0.211	6 _n 455 833	5740
0.012	6 _n 842 707	150	0.062	6 _n 819 961	787	0.112	6 _n 761 959	1595	0.162	6 _n 653 817	2885	0.212	6 _n 450 093	5840
0.013	6 _n 842 557	162	0.063	6 _n 819 174	801	0.113	6 _n 760 364	1614	0.163	6 _n 650 932	2921	0.213	6 _n 444 253	5943
0.014	6 _n 842 395	175	0.064	6 _n 818 373	814	0.114	6 _n 758 750	1634	0.164	6 _n 648 011	2956	0.214	6 _n 438 310	6049
0.015	6 _n 842 220	186	0.065	6 _n 817 559	829	0.115	6 _n 757 116	1654	0.165	6 _n 645 055	2993	0.215	6 _n 432 261	6158
0.016	6 _n 842 034	199	0.066	6 _n 816 730	843	0.116	6 _n 755 462	1673	0.166	6 _n 642 062	3030	0.216	6 _n 426 103	6270
0.017	6 _n 841 835	210	0.067	6 _n 815 887	857	0.117	6 _n 753 789	1694	0.167	6 _n 639 032	3068	0.217	6 _n 419 833	6387
0.018	6 _n 841 625	223	0.068	6 _n 815 030	871	0.118	6 _n 752 095	1715	0.168	6 _n 635 964	3106	0.218	6 _n 413 446	6506
0.019	6 _n 841 402	235	0.069	6 _n 814 159	885	0.119	6 _n 750 380	1734	0.169	6 _n 632 858	3145	0.219	6 _n 406 940	6631
0.020	6 _n 841 167	248	0.070	6 _n 813 274	900	0.120	6 _n 748 646	1756	0.170	6 _n 629 713	3185	0.220	6 _n 400 309	6758
0.021	6 _n 840 919	259	0.071	6 _n 812 374	914	0.121	6 _n 746 890	1777	0.171	6 _n 626 528	3225	0.221	6 _n 393 551	6890
0.022	6 _n 840 660	272	0.072	6 _n 811 460	929	0.122	6 _n 745 113	1797	0.172	6 _n 623 303	3266	0.222	6 _n 386 661	7028
0.023	6 _n 840 388	283	0.073	6 _n 810 531	943	0.123	6 _n 743 316	1820	0.173	6 _n 620 037	3308	0.223	6 _n 379 634	7169
0.024	6 _n 840 105	298	0.074	6 _n 809 588	958	0.124	6 _n 741 496	1841	0.174	6 _n 616 729	3351	0.224	6 _n 372 463	7316
0.025	6 _n 839 808	308	0.075	6 _n 808 630	973	0.125	6 _n 739 655	1862	0.175	6 _n 613 378	3393	0.225	6 _n 365 148	7468
0.026	6 _n 839 500	321	0.076	6 _n 807 657	988	0.126	6 _n 737 793	1885	0.176	6 _n 609 985	3438	0.226	6 _n 357 680	7626
0.027	6 _n 839 179	333	0.077	6 _n 806 669	1002	0.127	6 _n 735 908	1907	0.177	6 _n 606 547	3483	0.227	6 _n 350 054	7790
0.028	6 _n 838 846	345	0.078	6 _n 805 667	1018	0.128	6 _n 734 001	1930	0.178	6 _n 603 064	3528	0.228	6 _n 342 264	7960
0.029	6 _n 838 501	358	0.079	6 _n 804 649	1033	0.129	6 _n 732 071	1952	0.179	6 _n 599 536	3575	0.229	6 _n 334 304	8138
0.030	6 _n 838 143	370	0.080	6 _n 803 616	1048	0.130	6 _n 730 119	1976	0.180	6 _n 595 961	3622	0.230	6 _n 326 166	8322
0.031	6 _n 837 773	382	0.081	6 _n 802 568	1063	0.131	6 _n 728 143	1999	0.181	6 _n 592 339	3670	0.231	6 _n 317 844	8514
0.032	6 _n 837 391	395	0.082	6 _n 801 505	1078	0.132	6 _n 726 144	2022	0.182	6 _n 588 669	3719	0.232	6 _n 309 330	8714
0.033	6 _n 836 996	408	0.083	6 _n 800 427	1094	0.133	6 _n 724 122	2046	0.183	6 _n 584 950	3770	0.233	6 _n 300 616	8923
0.034	6 _n 836 588	419	0.084	6 _n 799 333	1110	0.134	6 _n 722 076	2071	0.184	6 _n 581 180	3821	0.234	6 _n 291 693	9142
0.035	6 _n 836 169	433	0.085	6 _n 798 223	1125	0.135	6 _n 720 005	2094	0.185	6 _n 577 359	3873	0.235	6 _n 282 551	9369
0.036	6 _n 835 736	445	0.086	6 _n 797 098	1141	0.136	6 _n 717 911	2120	0.186	6 _n 573 486	3926	0.236	6 _n 273 182	9608
0.037	6 _n 835 291	458	0.087	6 _n 795 957	1157	0.137	6 _n 715 791	2144	0.187	6 _n 569 560	3980	0.237	6 _n 263 574	9860
0.038	6 _n 834 833	470	0.088	6 _n 794 800	1173	0.138	6 _n 713 647	2169	0.188	6 _n 565 580	4037	0.238	6 _n 253 714	10120
0.039	6 _n 834 363	483	0.089	6 _n 793 627	1189	0.139	6 _n 711 478	2196	0.189	6 _n 561 543	4092	0.239	6 _n 243 594	10397
0.040	6 _n 833 880	496	0.090	6 _n 792 438	1205	0.140	6 _n 709 282	2220	0.190	6 _n 557 451	4151	0.240	6 _n 233 197	10686
0.041	6 _n 833 384	508	0.091	6 _n 791 233	1221	0.141	6 _n 707 062	2248	0.191	6 _n 553 300	4209	0.241	6 _n 222 511	10993
0.042	6 _n 832 876	521	0.092	6 _n 790 012	1238	0.142	6 _n 704 814	2273	0.192	6 _n 549 091	4270	0.242	6 _n 211 518	11313
0.043	6 _n 832 355	534	0.093	6 _n 788 774	1255	0.143	6 _n 702 541	2301	0.193	6 _n 544 821	4332	0.243	6 _n 200 205	11654
0.044	6 _n 831 821	547	0.094	6 _n 787 519	1271	0.144	6 _n 700 240	2327	0.194	6 _n 540 489	4394	0.244	6 _n 188 551	12013
0.045	6 _n 831 274	560	0.095	6 _n 786 248	1288	0.145	6 _n 697 913	2355	0.195	6 _n 536 095	4460	0.245	6 _n 176 538	12394
0.046	6 _n 830 714	573	0.096	6 _n 784 960	1305	0.146	6 _n 695 558	2383	0.196	6 _n 531 635	4525	0.246	6 _n 164 144	12799
0.047	6 _n 830 141	586	0.097	6 _n 783 655	1322	0.147	6 _n 693 175	2411	0.197	6 _n 527 110	4593	0.247	6 _n 151 345	13229
0.048	6 _n 829 555	599	0.098	6 _n 782 333	1339	0.148	6 _n 690 764	2440	0.198	6 _n 522 517	4662	0.248	6 _n 138 116	13686
0.049	6 _n 828 956	612	0.099	6 _n 780 994	1356	0.149	6 _n 688 324	2469	0.199	6 _n 517 855	4733	0.249	6 _n 124 430	14176
0.050	6 _n 828 344		0.100	6 _n 779 638		0.150	6 _n 685 855		0.200	6 _n 513 122		0.250	6 _n 110 254	

Tafel II.

 $\log \{M_1^s m\}$.

$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$
0.000	8 _n 000 457	0	0.050	7 _n 999 129	54	0.100	7 _n 995 129	108	0.150	7 _n 988 413	162	0.200	7 _n 978 908	219
0.001	8 _n 000 457	2	0.051	7 _n 999 075	55	0.101	7 _n 995 021	109	0.151	7 _n 988 251	164	0.201	7 _n 978 689	221
0.002	8 _n 000 455	2	0.052	7 _n 999 020	56	0.102	7 _n 994 912	109	0.152	7 _n 988 087	165	0.202	7 _n 978 468	221
0.003	8 _n 000 453	4	0.053	7 _n 998 964	57	0.103	7 _n 994 803	111	0.153	7 _n 987 922	165	0.203	7 _n 978 247	223
0.004	8 _n 000 449	5	0.054	7 _n 998 907	58	0.104	7 _n 994 692	112	0.154	7 _n 987 757	167	0.204	7 _n 978 024	224
0.005	8 _n 000 444	6	0.055	7 _n 998 849	59	0.105	7 _n 994 580	113	0.155	7 _n 987 590	168	0.205	7 _n 977 800	225
0.006	8 _n 000 438	7	0.056	7 _n 998 790	60	0.106	7 _n 994 467	114	0.156	7 _n 987 422	169	0.206	7 _n 977 575	226
0.007	8 _n 000 431	8	0.057	7 _n 998 730	61	0.107	7 _n 994 353	115	0.157	7 _n 987 253	171	0.207	7 _n 977 349	227
0.008	8 _n 000 423	9	0.058	7 _n 998 669	62	0.108	7 _n 994 238	116	0.158	7 _n 987 082	171	0.208	7 _n 977 122	229
0.009	8 _n 000 414	10	0.059	7 _n 998 607	64	0.109	7 _n 994 122	117	0.159	7 _n 986 911	173	0.209	7 _n 976 893	230
0.010	8 _n 000 404	11	0.060	7 _n 998 543	64	0.110	7 _n 994 005	119	0.160	7 _n 986 738	173	0.210	7 _n 976 663	231
0.011	8 _n 000 393	12	0.061	7 _n 998 479	65	0.111	7 _n 993 886	119	0.161	7 _n 986 565	175	0.211	7 _n 976 432	232
0.012	8 _n 000 381	13	0.062	7 _n 998 414	67	0.112	7 _n 993 767	121	0.162	7 _n 986 390	176	0.212	7 _n 976 200	233
0.013	8 _n 000 368	15	0.063	7 _n 998 347	68	0.113	7 _n 993 646	122	0.163	7 _n 986 214	177	0.213	7 _n 975 967	234
0.014	8 _n 000 353	15	0.064	7 _n 998 279	68	0.114	7 _n 993 524	122	0.164	7 _n 986 037	178	0.214	7 _n 975 733	236
0.015	8 _n 000 338	17	0.065	7 _n 998 211	70	0.115	7 _n 993 402	124	0.165	7 _n 985 859	179	0.215	7 _n 975 497	236
0.016	8 _n 000 321	17	0.066	7 _n 998 141	71	0.116	7 _n 993 278	125	0.166	7 _n 985 680	181	0.216	7 _n 975 261	238
0.017	8 _n 000 304	19	0.067	7 _n 998 070	72	0.117	7 _n 993 153	126	0.167	7 _n 985 499	181	0.217	7 _n 975 023	239
0.018	8 _n 000 285	19	0.068	7 _n 997 998	73	0.118	7 _n 993 027	127	0.168	7 _n 985 318	183	0.218	7 _n 974 784	241
0.019	8 _n 000 266	21	0.069	7 _n 997 925	74	0.119	7 _n 992 900	128	0.169	7 _n 985 135	184	0.219	7 _n 974 543	241
0.020	8 _n 000 245	22	0.070	7 _n 997 851	75	0.120	7 _n 992 772	130	0.170	7 _n 984 951	185	0.220	7 _n 974 302	243
0.021	8 _n 000 223	23	0.071	7 _n 997 776	76	0.121	7 _n 992 642	130	0.171	7 _n 984 766	186	0.221	7 _n 974 059	244
0.022	8 _n 000 200	23	0.072	7 _n 997 700	78	0.122	7 _n 992 512	131	0.172	7 _n 984 580	187	0.222	7 _n 973 815	245
0.023	8 _n 000 177	25	0.073	7 _n 997 622	78	0.123	7 _n 992 381	133	0.173	7 _n 984 393	188	0.223	7 _n 973 570	246
0.024	8 _n 000 152	26	0.074	7 _n 997 544	79	0.124	7 _n 992 248	134	0.174	7 _n 984 205	190	0.224	7 _n 973 324	247
0.025	8 _n 000 126	28	0.075	7 _n 997 465	81	0.125	7 _n 992 114	135	0.175	7 _n 984 015	190	0.225	7 _n 973 077	249
0.026	8 _n 000 098	28	0.076	7 _n 997 384	81	0.126	7 _n 991 979	136	0.176	7 _n 983 825	192	0.226	7 _n 972 828	250
0.027	8 _n 000 070	29	0.077	7 _n 997 303	83	0.127	7 _n 991 843	137	0.177	7 _n 983 633	193	0.227	7 _n 972 578	250
0.028	8 _n 000 041	30	0.078	7 _n 997 220	84	0.128	7 _n 991 706	138	0.178	7 _n 983 440	194	0.228	7 _n 972 328	252
0.029	8 _n 000 011	32	0.079	7 _n 997 136	85	0.129	7 _n 991 568	139	0.179	7 _n 983 246	195	0.229	7 _n 972 076	254
0.030	7 _n 999 979	32	0.080	7 _n 997 051	86	0.130	7 _n 991 429	140	0.180	7 _n 983 051	196	0.230	7 _n 971 822	254
0.031	7 _n 999 947	33	0.081	7 _n 996 965	86	0.131	7 _n 991 289	142	0.181	7 _n 982 855	198	0.231	7 _n 971 568	256
0.032	7 _n 999 914	35	0.082	7 _n 996 879	89	0.132	7 _n 991 147	142	0.182	7 _n 982 657	198	0.232	7 _n 971 312	257
0.033	7 _n 999 879	36	0.083	7 _n 996 790	89	0.133	7 _n 991 005	144	0.183	7 _n 982 459	200	0.233	7 _n 971 055	258
0.034	7 _n 999 843	36	0.084	7 _n 996 701	90	0.134	7 _n 990 861	144	0.184	7 _n 982 259	201	0.234	7 _n 970 797	259
0.035	7 _n 999 807	38	0.085	7 _n 996 611	91	0.135	7 _n 990 717	146	0.185	7 _n 982 058	202	0.235	7 _n 970 538	261
0.036	7 _n 999 769	39	0.086	7 _n 996 520	92	0.136	7 _n 990 571	147	0.186	7 _n 981 856	203	0.236	7 _n 970 277	261
0.037	7 _n 999 730	40	0.087	7 _n 996 428	94	0.137	7 _n 990 424	148	0.187	7 _n 981 653	204	0.237	7 _n 970 016	263
0.038	7 _n 999 690	41	0.088	7 _n 996 334	94	0.138	7 _n 990 276	149	0.188	7 _n 981 449	205	0.238	7 _n 969 753	264
0.039	7 _n 999 649	42	0.089	7 _n 996 240	96	0.139	7 _n 990 127	151	0.189	7 _n 981 244	207	0.239	7 _n 969 489	265
0.040	7 _n 999 607	43	0.090	7 _n 996 144	97	0.140	7 _n 989 976	151	0.190	7 _n 981 037	208	0.240	7 _n 969 224	267
0.041	7 _n 999 564	44	0.091	7 _n 996 047	97	0.141	7 _n 989 825	152	0.191	7 _n 980 829	209	0.241	7 _n 968 957	268
0.042	7 _n 999 520	45	0.092	7 _n 995 950	99	0.142	7 _n 989 673	154	0.192	7 _n 980 620	210	0.242	7 _n 968 689	269
0.043	7 _n 999 475	46	0.093	7 _n 995 851	100	0.143	7 _n 989 519	155	0.193	7 _n 980 410	211	0.243	7 _n 968 420	270
0.044	7 _n 999 429	48	0.094	7 _n 995 751	101	0.144	7 _n 989 364	155	0.194	7 _n 980 199	212	0.244	7 _n 968 150	271
0.045	7 _n 999 381	48	0.095	7 _n 995 650	102	0.145	7 _n 989 209	157	0.195	7 _n 979 987	214	0.245	7 _n 967 879	272
0.046	7 _n 999 333	49	0.096	7 _n 995 548	104	0.146	7 _n 989 052	158	0.196	7 _n 979 773	214	0.246	7 _n 967 607	274
0.047	7 _n 999 284	51	0.097	7 _n 995 444	104	0.147	7 _n 988 894	159	0.197	7 _n 979 559	216	0.247	7 _n 967 333	275
0.048	7 _n 999 233	51	0.098	7 _n 995 340	105	0.148	7 _n 988 735	161	0.198	7 _n 979 343	217	0.248	7 _n 967 058	276
0.049	7 _n 999 182	53	0.099	7 _n 995 235	106	0.149	7 _n 988 574	161	0.199	7 _n 979 126	218	0.249	7 _n 966 782	278
0.050	7 _n 999 129		0.100	7 _n 995 129		0.150	7 _n 988 413		0.200	7 _n 978 908		0.250	7 _n 966 504	

Tafel II.

 $\log \{M_1^y(m)\}.$

$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$
0.000 6.074 376		7	0.050 6.058 878		636	0.100 6.009 301		1398	0.150 5.913 792		2545	0.200 5.737 483		4916
0.001 6.074 369		18	0.051 6.058 242		650	0.101 6.007 903		1417	0.151 5.911 247		2576	0.201 5.732 567		4993
0.002 6.074 351		30	0.052 6.057 592		663	0.102 6.006 486		1434	0.152 5.908 671		2607	0.202 5.727 574		5072
0.003 6.074 321		43	0.053 6.056 929		677	0.103 6.005 052		1453	0.153 5.906 064		2638	0.203 5.722 502		5153
0.004 6.074 278		55	0.054 6.056 252		690	0.104 6.003 599		1471	0.154 5.903 426		2670	0.204 5.717 349		5236
0.005 6.074 223		67	0.055 6.055 562		704	0.105 6.002 128		1490	0.155 5.900 756		2702	0.205 5.712 113		5321
0.006 6.074 156		80	0.056 6.054 858		717	0.106 6.000 638		1508	0.156 5.898 054		2735	0.206 5.706 792		5409
0.007 6.074 076		91	0.057 6.054 141		732	0.107 5.999 130		1527	0.157 5.895 319		2768	0.207 5.701 383		5499
0.008 6.073 985		104	0.058 6.053 409		745	0.108 5.997 603		1546	0.158 5.892 551		2801	0.208 5.695 884		5591
0.009 6.073 881		116	0.059 6.052 664		759	0.109 5.996 057		1565	0.159 5.889 750		2836	0.209 5.690 293		5686
0.010 6.073 765		129	0.060 6.051 905		773	0.110 5.994 492		1585	0.160 5.886 914		2870	0.210 5.684 607		5785
0.011 6.073 636		140	0.061 6.051 132		786	0.111 5.992 907		1604	0.161 5.884 044		2906	0.211 5.678 822		5884
0.012 6.073 496		153	0.062 6.050 346		801	0.112 5.991 303		1623	0.162 5.881 138		2941	0.212 5.672 938		5989
0.013 6.073 343		165	0.063 6.049 545		815	0.113 5.989 680		1644	0.163 5.878 197		2977	0.213 5.666 949		6095
0.014 6.073 178		178	0.064 6.048 730		830	0.114 5.988 036		1663	0.164 5.875 220		3014	0.214 5.660 854		6206
0.015 6.073 000		190	0.065 6.047 900		843	0.115 5.986 373		1684	0.165 5.872 206		3052	0.215 5.654 648		6319
0.016 6.072 810		202	0.066 6.047 057		858	0.116 5.984 689		1704	0.166 5.869 154		3090	0.216 5.648 329		6436
0.017 6.072 608		214	0.067 6.046 199		872	0.117 5.982 985		1725	0.167 5.866 064		3128	0.217 5.641 893		6557
0.018 6.072 394		227	0.068 6.045 327		887	0.118 5.981 260		1745	0.168 5.862 936		3168	0.218 5.635 336		6682
0.019 6.072 167		239	0.069 6.044 440		901	0.119 5.979 515		1766	0.169 5.859 68		3208	0.219 5.628 654		6811
0.020 6.071 928		252	0.070 6.043 539		916	0.120 5.977 749		1788	0.170 5.856 560		3248	0.220 5.621 843		6946
0.021 6.071 676		264	0.071 6.042 623		930	0.121 5.975 961		1809	0.171 5.853 312		3290	0.221 5.614 897		7083
0.022 6.071 412		276	0.072 6.041 693		946	0.122 5.974 152		1831	0.172 5.850 022		3332	0.222 5.607 814		7226
0.023 6.071 136		289	0.073 6.040 747		960	0.123 5.972 321		1852	0.173 5.846 690		3374	0.223 5.600 588		7374
0.024 6.070 847		302	0.074 6.039 787		975	0.124 5.970 469		1875	0.174 5.843 316		3419	0.224 5.593 214		7529
0.025 6.070 545		313	0.075 6.038 812		990	0.125 5.968 594		1897	0.175 5.839 897		3462	0.225 5.585 685		7688
0.026 6.070 232		327	0.076 6.037 822		1005	0.126 5.966 697		1919	0.176 5.836 435		3508	0.226 5.577 997		7854
0.027 6.069 905		339	0.077 6.036 817		1021	0.127 5.964 778		1942	0.177 5.832 927		3554	0.227 5.570 143		8026
0.028 6.069 566		351	0.078 6.035 796		1036	0.128 5.962 836		1965	0.178 5.829 373		3600	0.228 5.562 117		8205
0.029 6.069 215		364	0.079 6.034 760		1050	0.129 5.960 871		1989	0.179 5.825 773		3649	0.229 5.553 912		8392
0.030 6.068 851		377	0.080 6.033 710		1067	0.130 5.958 882		2012	0.180 5.822 124		3696	0.230 5.545 520		8586
0.031 6.068 474		389	0.081 6.032 643		1082	0.131 5.956 870		2035	0.181 5.818 428		3747	0.231 5.536 934		8788
0.032 6.068 085		402	0.082 6.031 561		1098	0.132 5.954 835		2060	0.182 5.814 681		3797	0.232 5.528 146		9000
0.033 6.067 683		415	0.083 6.030 463		1113	0.133 5.952 775		2084	0.183 5.810 884		3849	0.233 5.519 146		9222
0.034 6.067 268		427	0.084 6.029 350		1130	0.134 5.950 691		2109	0.184 5.807 035		3901	0.234 5.509 924		9451
0.035 6.066 841		440	0.085 6.028 220		1145	0.135 5.948 582		2133	0.185 5.803 134		3955	0.235 5.500 473		9693
0.036 6.066 401		453	0.086 6.027 075		1162	0.136 5.946 449		2159	0.186 5.799 179		4010	0.236 5.490 780		9947
0.037 6.065 948		466	0.087 6.025 913		1177	0.137 5.944 290		2184	0.187 5.795 169		4065	0.237 5.480 833		10213
0.038 6.065 482		479	0.088 6.024 736		1194	0.138 5.942 106		2210	0.188 5.791 104		4123	0.238 5.470 620		10492
0.039 6.065 003		491	0.089 6.023 542		1210	0.139 5.939 896		2236	0.189 5.786 981		4181	0.239 5.460 128		10786
0.040 6.064 512		505	0.090 6.022 332		1227	0.140 5.937 660		2262	0.190 5.782 800		4240	0.240 5.449 342		11096
0.041 6.064 007		517	0.091 6.021 105		1244	0.141 5.935 398		2289	0.191 5.778 560		4302	0.241 5.438 246		11423
0.042 6.063 490		531	0.092 6.019 861		1260	0.142 5.933 109		2316	0.192 5.774 258		4363	0.242 5.426 823		11767
0.043 6.062 959		543	0.093 6.018 601		1277	0.143 5.930 793		2344	0.193 5.769 895		4427	0.243 5.415 056		12133
0.044 6.062 416		557	0.094 6.017 324		1294	0.144 5.928 449		2371	0.194 5.765 468		4492	0.244 5.402 923		12519
0.045 6.061 859		570	0.095 6.016 030		1311	0.145 5.926 078		2400	0.195 5.760 976		4559	0.245 5.390 404		12931
0.046 6.061 289		583	0.096 6.014 719		1328	0.146 5.923 678		2428	0.196 5.756 417		4627	0.246 5.377 473		13367
0.047 6.060 706		596	0.097 6.013 391		1346	0.147 5.921 250		2456	0.197 5.751 790		4697	0.247 5.364 106		13833
0.048 6.060 110		609	0.098 6.012 045		1363	0.148 5.918 794		2486	0.198 5.747 093		4768	0.248 5.350 273		14330
0.049 6.059 501		623	0.099 6.010 682		1381	0.149 5.916 308		2516	0.199 5.742 325		4842	0.249 5.335 943		14866
0.050 6.058 878			0.100 6.009 301			0.150 5.913 792			0.200 5.737 483			0.250 5.321 077		

Tafel II.

 $\log \{M_1^{10}(m)\}.$

$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$
0.000	7.357 193	1	0.050	7.355 772	58	0.100	7.351 494	115	0.150	7.344 313	174	0.200	7.334 152	235
0.001	7.357 192	2	0.051	7.355 714	58	0.101	7.351 379	116	0.151	7.344 139	174	0.201	7.333 917	235
0.002	7.357 190	2	0.052	7.355 656	60	0.102	7.351 263	118	0.152	7.343 965	176	0.202	7.333 682	237
0.003	7.357 188	4	0.053	7.355 596	61	0.103	7.351 145	118	0.153	7.343 789	178	0.203	7.333 445	238
0.004	7.357 184	5	0.054	7.355 535	62	0.104	7.351 027	120	0.154	7.343 611	178	0.204	7.333 207	239
0.005	7.357 179	7	0.055	7.355 473	63	0.105	7.350 907	120	0.155	7.343 433	180	0.205	7.332 968	241
0.006	7.357 172	7	0.056	7.355 410	64	0.106	7.350 787	122	0.156	7.343 253	181	0.206	7.332 727	242
0.007	7.357 165	9	0.057	7.355 346	66	0.107	7.350 665	123	0.157	7.343 072	182	0.207	7.332 485	243
0.008	7.357 156	9	0.058	7.355 280	67	0.108	7.350 542	125	0.158	7.342 890	183	0.208	7.332 242	244
0.009	7.357 147	11	0.059	7.355 213	67	0.109	7.350 417	125	0.159	7.342 707	185	0.209	7.331 998	246
0.010	7.357 136	12	0.060	7.355 146	69	0.110	7.350 292	127	0.160	7.342 522	185	0.210	7.331 752	246
0.011	7.357 124	13	0.061	7.355 077	70	0.111	7.350 165	128	0.161	7.342 337	187	0.211	7.331 506	248
0.012	7.357 111	14	0.062	7.355 007	71	0.112	7.350 037	128	0.162	7.342 150	188	0.212	7.331 258	250
0.013	7.357 097	15	0.063	7.354 936	73	0.113	7.349 909	130	0.163	7.341 962	189	0.213	7.331 008	250
0.014	7.357 082	17	0.064	7.354 863	73	0.114	7.349 779	132	0.164	7.341 773	191	0.214	7.330 758	252
0.015	7.357 065	18	0.065	7.354 790	75	0.115	7.349 647	132	0.165	7.341 582	192	0.215	7.330 506	253
0.016	7.357 047	18	0.066	7.354 715	75	0.116	7.349 515	134	0.166	7.341 390	192	0.216	7.330 253	254
0.017	7.357 029	20	0.067	7.354 640	77	0.117	7.349 381	135	0.167	7.341 198	194	0.217	7.329 999	256
0.018	7.357 009	21	0.068	7.354 563	78	0.118	7.349 246	136	0.168	7.341 004	196	0.218	7.329 743	257
0.019	7.356 988	22	0.069	7.354 485	80	0.119	7.349 110	137	0.169	7.340 808	196	0.219	7.329 486	258
0.020	7.356 966	24	0.070	7.354 405	80	0.120	7.348 973	138	0.170	7.340 612	198	0.220	7.329 228	259
0.021	7.356 942	24	0.071	7.354 325	82	0.121	7.348 835	139	0.171	7.340 414	199	0.221	7.328 969	261
0.022	7.356 918	26	0.072	7.354 243	82	0.122	7.348 696	141	0.172	7.340 215	200	0.222	7.328 708	262
0.023	7.356 892	26	0.073	7.354 161	84	0.123	7.348 555	142	0.173	7.340 015	201	0.223	7.328 446	263
0.024	7.356 866	28	0.074	7.354 077	85	0.124	7.348 413	143	0.174	7.339 814	203	0.224	7.328 183	264
0.025	7.356 838	29	0.075	7.353 992	86	0.125	7.348 270	144	0.175	7.339 611	203	0.225	7.327 919	266
0.026	7.356 809	30	0.076	7.353 906	87	0.126	7.348 126	145	0.176	7.339 408	205	0.226	7.327 653	267
0.027	7.356 779	32	0.077	7.353 819	89	0.127	7.347 981	147	0.177	7.339 203	206	0.227	7.327 386	268
0.028	7.356 747	32	0.078	7.353 730	89	0.128	7.347 834	147	0.178	7.338 997	208	0.228	7.327 118	269
0.029	7.356 715	34	0.079	7.353 641	91	0.129	7.347 687	149	0.179	7.338 789	208	0.229	7.326 849	271
0.030	7.356 681	34	0.080	7.353 550	92	0.130	7.347 538	150	0.180	7.338 581	210	0.230	7.326 578	272
0.031	7.356 647	36	0.081	7.353 458	93	0.131	7.347 388	151	0.181	7.338 371	211	0.231	7.326 306	273
0.032	7.356 611	37	0.082	7.353 365	94	0.132	7.347 237	153	0.182	7.338 160	213	0.232	7.326 033	275
0.033	7.356 574	38	0.083	7.353 271	95	0.133	7.347 084	153	0.183	7.337 947	213	0.233	7.325 758	275
0.034	7.356 536	39	0.084	7.353 176	97	0.134	7.346 931	155	0.184	7.337 734	215	0.234	7.325 483	278
0.035	7.356 497	41	0.085	7.353 079	97	0.135	7.346 776	156	0.185	7.337 519	216	0.235	7.325 205	278
0.036	7.356 456	41	0.086	7.352 982	99	0.136	7.346 620	157	0.186	7.337 303	217	0.236	7.324 927	279
0.037	7.356 415	43	0.087	7.352 883	100	0.137	7.346 463	158	0.187	7.337 086	218	0.237	7.324 648	281
0.038	7.356 372	44	0.088	7.352 783	101	0.138	7.346 305	160	0.188	7.336 868	220	0.238	7.324 367	283
0.039	7.356 328	44	0.089	7.352 682	102	0.139	7.346 145	160	0.189	7.336 648	221	0.239	7.324 084	283
0.040	7.356 284	46	0.090	7.352 580	104	0.140	7.345 985	162	0.190	7.336 427	222	0.240	7.323 801	285
0.041	7.356 238	48	0.091	7.352 476	104	0.141	7.345 823	163	0.191	7.336 205	223	0.241	7.323 516	286
0.042	7.356 190	48	0.092	7.352 372	106	0.142	7.345 660	164	0.192	7.335 982	224	0.242	7.323 230	287
0.043	7.356 142	49	0.093	7.352 266	107	0.143	7.345 496	166	0.193	7.335 758	226	0.243	7.322 943	289
0.044	7.356 093	51	0.094	7.352 159	108	0.144	7.345 330	166	0.194	7.335 532	227	0.244	7.322 654	290
0.045	7.356 042	52	0.095	7.352 051	109	0.145	7.345 164	168	0.195	7.335 305	228	0.245	7.322 364	291
0.046	7.355 990	53	0.096	7.351 942	110	0.146	7.344 996	169	0.196	7.335 077	230	0.246	7.322 073	293
0.047	7.355 937	54	0.097	7.351 832	112	0.147	7.344 827	170	0.197	7.334 847	230	0.247	7.321 780	294
0.048	7.355 883	55	0.098	7.351 720	112	0.148	7.344 657	171	0.198	7.334 617	232	0.248	7.321 486	295
0.049	7.355 828	56	0.099	7.351 608	114	0.149	7.344 486	173	0.199	7.334 385	233	0.249	7.321 191	296
0.050	7.355 772		0.100	7.351 494		0.150	7.344 313		0.200	7.334 152		0.250	7.320 895	

Tafel III.

 $\log \{N_2^4(n)\}$.

vergl. pag. 19.

$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$
0.000	8 _n 920 819		0.050	8 _n 914 255	267	0.100	8 _n 893 947	558	0.150	8 _n 857 835	908	0.200	8 _n 801 632	
0.001	8 _n 920 816	3	0.051	8 _n 913 988	273	0.101	8 _n 893 389	558	0.151	8 _n 856 927	915	0.201	8 _n 800 255	1377
0.002	8 _n 920 808	8	0.052	8 _n 913 715	278	0.102	8 _n 892 825	564	0.152	8 _n 856 012	924	0.202	8 _n 798 867	1388
0.003	8 _n 920 795	13	0.053	8 _n 913 437	284	0.103	8 _n 892 255	570	0.153	8 _n 855 088	932	0.203	8 _n 797 467	1400
0.004	8 _n 920 777	18	0.054	8 _n 913 153	289	0.104	8 _n 891 679	576	0.154	8 _n 854 156	939	0.204	8 _n 796 056	1411
0.005	8 _n 920 754	23	0.055	8 _n 912 864	295	0.105	8 _n 891 096	583	0.155	8 _n 853 217	948	0.205	8 _n 794 633	1423
0.006	8 _n 920 725	29	0.056	8 _n 912 569	300	0.106	8 _n 890 507	596	0.156	8 _n 852 269	956	0.206	8 _n 793 199	1434
0.007	8 _n 920 691	34	0.057	8 _n 912 269	306	0.107	8 _n 889 911	602	0.157	8 _n 851 313	965	0.207	8 _n 791 753	1446
0.008	8 _n 920 652	39	0.058	8 _n 911 963	311	0.108	8 _n 889 309	608	0.158	8 _n 850 348	973	0.208	8 _n 790 295	1458
0.009	8 _n 920 608	44	0.059	8 _n 911 652	317	0.109	8 _n 888 701	615	0.159	8 _n 849 375	981	0.209	8 _n 788 825	1470
		50			317			615			981			1483
0.010	8 _n 920 558		0.060	8 _n 911 335	322	0.110	8 _n 888 086	621	0.160	8 _n 848 394	989	0.210	8 _n 787 342	
0.011	8 _n 920 503	55	0.061	8 _n 911 013	328	0.111	8 _n 887 465	628	0.161	8 _n 847 405	998	0.211	8 _n 785 848	1494
0.012	8 _n 920 443	60	0.062	8 _n 910 685	334	0.112	8 _n 886 837	635	0.162	8 _n 846 407	1006	0.212	8 _n 784 342	1506
0.013	8 _n 920 378	65	0.063	8 _n 910 351	339	0.113	8 _n 886 202	641	0.163	8 _n 845 401	1015	0.213	8 _n 782 823	1519
0.014	8 _n 920 308	70	0.064	8 _n 910 012	345	0.114	8 _n 885 561	648	0.164	8 _n 844 386	1023	0.214	8 _n 781 291	1532
0.015	8 _n 920 232	76	0.065	8 _n 909 667	350	0.115	8 _n 884 913	654	0.165	8 _n 843 363	1032	0.215	8 _n 779 747	1544
0.016	8 _n 920 151	81	0.066	8 _n 909 317	356	0.116	8 _n 884 259	661	0.166	8 _n 842 331	1041	0.216	8 _n 778 190	1557
0.017	8 _n 920 065	86	0.067	8 _n 908 961	362	0.117	8 _n 883 598	668	0.167	8 _n 841 290	1050	0.217	8 _n 776 620	1570
0.018	8 _n 919 974	91	0.068	8 _n 908 599	367	0.118	8 _n 882 930	674	0.168	8 _n 840 240	1059	0.218	8 _n 775 037	1583
0.019	8 _n 919 877	97	0.069	8 _n 908 232	373	0.119	8 _n 882 256	681	0.169	8 _n 839 181	1067	0.219	8 _n 773 441	1596
		102			373			681			1067			1609
0.020	8 _n 919 775		0.070	8 _n 907 859	379	0.120	8 _n 881 575	688	0.170	8 _n 838 114	1076	0.220	8 _n 771 832	1622
0.021	8 _n 919 668	107	0.071	8 _n 907 480	384	0.121	8 _n 880 887	695	0.171	8 _n 837 038	1085	0.221	8 _n 770 210	1636
0.022	8 _n 919 556	112	0.072	8 _n 907 096	390	0.122	8 _n 880 192	701	0.172	8 _n 835 953	1095	0.222	8 _n 768 574	1650
0.023	8 _n 919 438	118	0.073	8 _n 906 706	396	0.123	8 _n 879 491	709	0.173	8 _n 834 858	1103	0.223	8 _n 766 924	1663
0.024	8 _n 919 315	123	0.074	8 _n 906 310	402	0.124	8 _n 878 782	715	0.174	8 _n 833 755	1113	0.224	8 _n 765 261	1677
0.025	8 _n 919 187	128	0.075	8 _n 905 908	407	0.125	8 _n 878 067	722	0.175	8 _n 832 642	1122	0.225	8 _n 763 584	1691
0.026	8 _n 919 054	133	0.076	8 _n 905 501	413	0.126	8 _n 877 345	730	0.176	8 _n 831 520	1131	0.226	8 _n 761 893	1705
0.027	8 _n 918 915	139	0.077	8 _n 905 088	419	0.127	8 _n 876 615	736	0.177	8 _n 830 389	1141	0.227	8 _n 760 188	1720
0.028	8 _n 918 771	144	0.078	8 _n 904 669	425	0.128	8 _n 875 879	743	0.178	8 _n 829 248	1150	0.228	8 _n 758 468	1734
0.029	8 _n 918 622	149	0.079	8 _n 904 244	431	0.129	8 _n 875 136	751	0.179	8 _n 828 098	1160	0.229	8 _n 756 734	1749
		155			431			751			1160			1763
0.030	8 _n 918 467		0.080	8 _n 903 813	436	0.130	8 _n 874 385	757	0.180	8 _n 826 938	1169	0.230	8 _n 754 985	1779
0.031	8 _n 918 307	160	0.081	8 _n 903 377	443	0.131	8 _n 873 628	765	0.181	8 _n 825 769	1179	0.231	8 _n 753 222	1793
0.032	8 _n 918 142	165	0.082	8 _n 902 934	448	0.132	8 _n 872 863	772	0.182	8 _n 824 590	1189	0.232	8 _n 751 443	1808
0.033	8 _n 917 972	170	0.083	8 _n 902 486	454	0.133	8 _n 872 091	779	0.183	8 _n 823 401	1198	0.233	8 _n 749 650	1824
0.034	8 _n 917 796	176	0.084	8 _n 902 032	460	0.134	8 _n 871 312	786	0.184	8 _n 822 203	1208	0.234	8 _n 747 842	1840
0.035	8 _n 917 615	181	0.085	8 _n 901 572	466	0.135	8 _n 870 526	794	0.185	8 _n 820 995	1219	0.235	8 _n 746 018	1855
0.036	8 _n 917 429	186	0.086	8 _n 901 106	472	0.136	8 _n 869 732	801	0.186	8 _n 819 776	1228	0.236	8 _n 744 178	1871
0.037	8 _n 917 237	192	0.087	8 _n 900 634	478	0.137	8 _n 868 931	808	0.187	8 _n 818 548	1238	0.237	8 _n 742 323	1887
0.038	8 _n 917 040	197	0.088	8 _n 900 156	484	0.138	8 _n 868 123	816	0.188	8 _n 817 310	1249	0.238	8 _n 740 452	1903
0.039	8 _n 916 837	203	0.089	8 _n 899 672	490	0.139	8 _n 867 307	823	0.189	8 _n 816 061	1259	0.239	8 _n 738 565	1919
		208			490			823			1259			1937
0.040	8 _n 916 629		0.090	8 _n 899 182	496	0.140	8 _n 866 484	830	0.190	8 _n 814 802	1269	0.240	8 _n 736 662	1952
0.041	8 _n 916 416	213	0.091	8 _n 898 686	502	0.141	8 _n 865 654	838	0.191	8 _n 813 533	1279	0.241	8 _n 734 743	1970
0.042	8 _n 916 198	218	0.092	8 _n 898 184	508	0.142	8 _n 864 816	846	0.192	8 _n 812 254	1290	0.242	8 _n 732 806	1987
0.043	8 _n 915 974	224	0.093	8 _n 897 676	515	0.143	8 _n 863 970	853	0.193	8 _n 810 964	1301	0.243	8 _n 730 854	2004
0.044	8 _n 915 745	229	0.094	8 _n 897 161	520	0.144	8 _n 863 117	861	0.194	8 _n 809 663	1311	0.244	8 _n 728 871	2022
0.045	8 _n 915 510	235	0.095	8 _n 896 641	526	0.145	8 _n 862 256	869	0.195	8 _n 808 352	1322	0.245	8 _n 726 897	2039
0.046	8 _n 915 270	240	0.096	8 _n 896 115	533	0.146	8 _n 861 387	876	0.196	8 _n 807 030	1333	0.246	8 _n 724 893	2058
0.047	8 _n 915 024	246	0.097	8 _n 895 582	539	0.147	8 _n 860 511	884	0.197	8 _n 805 697	1344	0.247	8 _n 722 871	2075
0.048	8 _n 914 773	251	0.098	8 _n 895 043	545	0.148	8 _n 859 627	892	0.198	8 _n 804 353	1355	0.248	8 _n 720 832	
0.049	8 _n 914 517	256	0.099	8 _n 894 498	551	0.149	8 _n 858 735	900	0.199	8 _n 802 998	1366	0.249	8 _n 718 774	
0.050	8 _n 914 255	263	0.100	8 _n 893 947		0.150	8 _n 857 835		0.200	8 _n 801 632		0.250	8 _n 716 699	

Tafel III.

 $\log \{N_2^5(n)\}.$

$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$
0.000	9n397 940	0	0.050	9n397 216	30	0.100	9n395 035	59	0.150	9n391 376	88	0.200	9n386 202	120
0.001	9n397 940	1	0.051	9n397 186	30	0.101	9n394 976	59	0.151	9n391 288	89	0.201	9n386 082	120
0.002	9n397 939	1	0.052	9n397 156	30	0.102	9n394 917	59	0.152	9n391 199	90	0.202	9n385 962	120
0.003	9n397 938	2	0.053	9n397 126	31	0.103	9n394 857	60	0.153	9n391 109	90	0.203	9n385 842	121
0.004	9n397 936	2	0.054	9n397 095	32	0.104	9n394 797	61	0.154	9n391 019	91	0.204	9n385 721	122
0.005	9n397 933	3	0.055	9n397 063	32	0.105	9n394 736	61	0.155	9n390 928	92	0.205	9n385 599	123
0.006	9n397 930	3	0.056	9n397 031	33	0.106	9n394 675	62	0.156	9n390 836	92	0.206	9n385 476	123
0.007	9n397 926	4	0.057	9n396 998	33	0.107	9n394 613	63	0.157	9n390 744	93	0.207	9n385 353	123
0.008	9n397 922	4	0.058	9n396 965	33	0.108	9n394 550	64	0.158	9n390 651	93	0.208	9n385 230	125
0.009	9n397 917	5	0.059	9n396 931	34	0.109	9n394 486	64	0.159	9n390 558	93	0.209	9n385 105	125
		6			35			64			94			125
0.010	9n397 911	6	0.060	9n396 896	35	0.110	9n394 422	64	0.160	9n390 464	95	0.210	9n384 980	125
0.011	9n397 905	7	0.061	9n396 861	35	0.111	9n394 358	65	0.161	9n390 369	95	0.211	9n384 855	126
0.012	9n397 898	7	0.062	9n396 826	37	0.112	9n394 293	66	0.162	9n390 274	95	0.212	9n384 729	127
0.013	9n397 891	8	0.063	9n396 789	37	0.113	9n394 227	66	0.163	9n390 179	97	0.213	9n384 602	128
0.014	9n397 883	8	0.064	9n396 752	37	0.114	9n394 161	67	0.164	9n390 082	97	0.214	9n384 474	128
0.015	9n397 875	9	0.065	9n396 715	38	0.115	9n394 094	67	0.165	9n389 985	97	0.215	9n384 346	129
0.016	9n397 866	10	0.066	9n396 677	39	0.116	9n394 027	68	0.166	9n389 888	99	0.216	9n384 217	129
0.017	9n397 856	10	0.067	9n396 638	39	0.117	9n393 959	69	0.167	9n389 789	99	0.217	9n384 088	130
0.018	9n397 846	11	0.068	9n396 599	40	0.118	9n393 890	69	0.168	9n389 690	99	0.218	9n383 958	131
0.019	9n397 835	11	0.069	9n396 559	40	0.119	9n393 821	70	0.169	9n389 591	99	0.219	9n383 827	131
		11			40			70			100			131
0.020	9n397 824	12	0.070	9n396 519	41	0.120	9n393 751	71	0.170	9n389 491	101	0.220	9n383 696	132
0.021	9n397 812	12	0.071	9n396 478	42	0.121	9n393 680	71	0.171	9n389 390	101	0.221	9n383 564	133
0.022	9n397 800	13	0.072	9n396 436	42	0.122	9n393 609	72	0.172	9n389 289	102	0.222	9n383 431	133
0.023	9n397 787	13	0.073	9n396 394	42	0.123	9n393 537	72	0.173	9n389 187	102	0.223	9n383 298	134
0.024	9n397 773	14	0.074	9n396 352	44	0.124	9n393 465	73	0.174	9n389 085	103	0.224	9n383 164	134
0.025	9n397 759	14	0.075	9n396 308	44	0.125	9n393 392	73	0.175	9n388 982	104	0.225	9n383 030	136
0.026	9n397 744	15	0.076	9n396 264	44	0.126	9n393 319	74	0.176	9n388 878	105	0.226	9n382 894	135
0.027	9n397 729	15	0.077	9n396 220	45	0.127	9n393 245	75	0.177	9n388 773	105	0.227	9n382 759	137
0.028	9n397 713	17	0.078	9n396 175	46	0.128	9n393 170	75	0.178	9n388 668	105	0.228	9n382 622	137
0.029	9n397 696	17	0.079	9n396 129	46	0.129	9n393 095	76	0.179	9n388 563	106	0.229	9n382 485	138
		17			46			76			106			138
0.030	9n397 679	18	0.080	9n396 083	47	0.130	9n393 019	76	0.180	9n388 457	107	0.230	9n382 347	138
0.031	9n397 662	17	0.081	9n396 036	47	0.131	9n392 943	77	0.181	9n388 350	108	0.231	9n382 209	139
0.032	9n397 644	19	0.082	9n395 989	48	0.132	9n392 866	78	0.182	9n388 242	108	0.232	9n382 070	140
0.033	9n397 625	20	0.083	9n395 941	49	0.133	9n392 788	78	0.183	9n388 134	109	0.233	9n381 930	140
0.034	9n397 605	20	0.084	9n395 892	49	0.134	9n392 710	79	0.184	9n388 025	109	0.234	9n381 790	141
0.035	9n397 585	20	0.085	9n395 843	50	0.135	9n392 631	79	0.185	9n387 916	110	0.235	9n381 649	142
0.036	9n397 565	21	0.086	9n395 793	50	0.136	9n392 552	80	0.186	9n387 806	110	0.236	9n381 507	142
0.037	9n397 544	22	0.087	9n395 743	51	0.137	9n392 472	81	0.187	9n387 696	112	0.237	9n381 365	143
0.038	9n397 522	22	0.088	9n395 692	51	0.138	9n392 391	81	0.188	9n387 584	111	0.238	9n381 222	143
0.039	9n397 500	23	0.089	9n395 641	52	0.139	9n392 310	82	0.189	9n387 473	113	0.239	9n381 079	144
		23			52			82			113			144
0.040	9n397 477	24	0.090	9n395 589	53	0.140	9n392 228	83	0.190	9n387 360	113	0.240	9n380 935	145
0.041	9n397 453	24	0.091	9n395 536	53	0.141	9n392 145	83	0.191	9n387 247	114	0.241	9n380 790	146
0.042	9n397 429	25	0.092	9n395 483	54	0.142	9n392 062	83	0.192	9n387 133	114	0.242	9n380 644	146
0.043	9n397 404	25	0.093	9n395 429	55	0.143	9n391 979	84	0.193	9n387 019	115	0.243	9n380 498	147
0.044	9n397 379	26	0.094	9n395 374	55	0.144	9n391 895	85	0.194	9n386 904	115	0.244	9n380 351	147
0.045	9n397 353	26	0.095	9n395 319	55	0.145	9n391 810	86	0.195	9n386 789	116	0.245	9n380 204	148
0.046	9n397 327	27	0.096	9n395 264	57	0.146	9n391 724	86	0.196	9n386 673	117	0.246	9n380 056	149
0.047	9n397 300	28	0.097	9n395 207	57	0.147	9n391 638	87	0.197	9n386 556	118	0.247	9n379 907	150
0.048	9n397 272	28	0.098	9n395 150	57	0.148	9n391 551	87	0.198	9n386 438	118	0.248	9n379 757	150
0.049	9n397 244	28	0.099	9n395 093	58	0.149	9n391 464	88	0.199	9n386 320	118	0.249	9n379 607	150
0.050	9n397 216	28	0.100	9n395 035	58	0.150	9n391 376	88	0.200	9n386 202	118	0.250	9n379 457	150

Tafel III.

 $\log \{N_2^6(n)\}.$

$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$
0.000	8.045 758		0.050	8.037 547		0.100	8.012 075		0.150	7.966 480		0.200	7.894 562	
0.001	8.045 754	4	0.051	8.037 213	334	0.101	8.011 374	701	0.151	7.965 328	1152	0.201	7.892 783	1779
0.002	8.045 744	10	0.052	8.036 872	341	0.102	8.010 665	709	0.152	7.964 166	1162	0.202	7.890 988	1795
0.003	8.045 728	16	0.053	8.036 523	349	0.103	8.009 948	717	0.153	7.962 994	1172	0.203	7.889 178	1810
0.004	8.045 705	23	0.054	8.036 168	355	0.104	8.009 223	725	0.154	7.961 811	1183	0.204	7.887 351	1827
0.005	8.045 676	29	0.055	8.035 806	362	0.105	8.008 490	733	0.155	7.960 617	1194	0.205	7.885 509	1842
0.006	8.045 640	36	0.056	8.035 437	369	0.106	8.007 749	741	0.156	7.959 413	1204	0.206	7.883 651	1858
0.007	8.045 598	42	0.057	8.035 061	376	0.107	8.007 000	749	0.157	7.958 198	1215	0.207	7.881 776	1875
0.008	8.045 549	49	0.058	8.034 679	382	0.108	8.006 243	757	0.158	7.956 972	1226	0.208	7.879 885	1891
0.009	8.045 494	55	0.059	8.034 289	390	0.109	8.005 477	766	0.159	7.955 735	1237	0.209	7.877 977	1908
		62			397			774			1247			1924
0.010	8.045 432	69	0.060	8.033 892	404	0.110	8.004 703	782	0.160	7.954 488	1259	0.210	7.876 053	1941
0.011	8.045 363	75	0.061	8.033 488	410	0.111	8.003 921	791	0.161	7.953 229	1270	0.211	7.874 112	1959
0.012	8.045 288	81	0.062	8.033 078	418	0.112	8.003 130	799	0.162	7.951 959	1281	0.212	7.872 153	1976
0.013	8.045 207	88	0.063	8.032 660	425	0.113	8.002 331	807	0.163	7.950 678	1292	0.213	7.870 177	1993
0.014	8.045 119	95	0.064	8.032 235	432	0.114	8.001 524	816	0.164	7.949 386	1304	0.214	7.868 184	2011
0.015	8.045 024	101	0.065	8.031 803	439	0.115	8.000 708	824	0.165	7.948 082	1315	0.215	7.866 173	2029
0.016	8.044 923	108	0.066	8.031 364	446	0.116	7.999 884	833	0.166	7.946 767	1326	0.216	7.864 144	2047
0.017	8.044 815	114	0.067	8.030 918	453	0.117	7.999 051	842	0.167	7.945 441	1338	0.217	7.862 097	2066
0.018	8.044 701	121	0.068	8.030 465	460	0.118	7.998 209	850	0.168	7.944 103	1350	0.218	7.860 031	2083
0.019	8.044 580		0.069	8.030 005		0.119	7.997 359		0.169	7.942 753		0.219	7.857 948	
		127			468			858			1362			2103
0.020	8.044 453	134	0.070	8.029 537	474	0.120	7.996 501	868	0.170	7.941 391	1373	0.220	7.855 845	2121
0.021	8.044 319	141	0.071	8.029 063	482	0.121	7.995 633	876	0.171	7.940 018	1386	0.221	7.853 724	2141
0.022	8.044 178	147	0.072	8.028 581	489	0.122	7.994 757	885	0.172	7.938 632	1398	0.222	7.851 583	2159
0.023	8.044 031	153	0.073	8.028 092	497	0.123	7.993 872	893	0.173	7.937 234	1409	0.223	7.849 424	2180
0.024	8.043 878	160	0.074	8.027 595	503	0.124	7.992 979	903	0.174	7.935 825	1422	0.224	7.847 244	2199
0.025	8.043 718	167	0.075	8.027 092	511	0.125	7.992 076	911	0.175	7.934 403	1434	0.225	7.845 045	2219
0.026	8.043 551	174	0.076	8.026 581	518	0.126	7.991 165	921	0.176	7.932 969	1447	0.226	7.842 826	2239
0.027	8.043 377	180	0.077	8.026 063	525	0.127	7.990 244	929	0.177	7.931 522	1459	0.227	7.840 587	2260
0.028	8.043 197	186	0.078	8.025 538	533	0.128	7.989 315	939	0.178	7.930 063	1472	0.228	7.838 327	2281
0.029	8.043 011		0.079	8.025 005		0.129	7.988 376		0.179	7.928 591		0.229	7.836 046	
		194			540			948			1485			2301
0.030	8.042 817	200	0.080	8.024 465	548	0.130	7.987 428	956	0.180	7.927 106	1498	0.230	7.833 745	2323
0.031	8.042 617	206	0.081	8.023 917	555	0.131	7.986 472	966	0.181	7.925 608	1510	0.231	7.831 422	2344
0.032	8.042 411	213	0.082	8.023 362	562	0.132	7.985 506	976	0.182	7.924 098	1523	0.232	7.829 078	2366
0.033	8.042 198	220	0.083	8.022 800	570	0.133	7.984 530	984	0.183	7.922 575	1537	0.233	7.826 712	2389
0.034	8.041 978	227	0.084	8.022 230	577	0.134	7.983 546	994	0.184	7.921 038	1550	0.234	7.824 323	2410
0.035	8.041 751	233	0.085	8.021 653	585	0.135	7.982 552	1004	0.185	7.919 488	1563	0.235	7.821 913	2433
0.036	8.041 518	240	0.086	8.021 068	593	0.136	7.981 548	1013	0.186	7.917 925	1577	0.236	7.819 480	2456
0.037	8.041 278	246	0.087	8.020 475	600	0.137	7.980 535	1022	0.187	7.916 348	1591	0.237	7.817 024	2479
0.038	8.041 032	253	0.088	8.019 875	607	0.138	7.979 513	1032	0.188	7.914 757	1604	0.238	7.814 545	2502
0.039	8.040 779		0.089	8.019 268		0.139	7.978 481		0.189	7.913 153		0.239	7.812 043	
		260			615			1042			1618			2527
0.040	8.040 519	267	0.090	8.018 653	623	0.140	7.977 439	1051	0.190	7.911 535	1632	0.240	7.809 516	2551
0.041	8.040 252	274	0.091	8.018 030	631	0.141	7.976 388	1061	0.191	7.909 903	1647	0.241	7.806 965	2575
0.042	8.039 978	280	0.092	8.017 399	638	0.142	7.975 327	1071	0.192	7.908 256	1660	0.242	7.804 390	2599
0.043	8.039 698	286	0.093	8.016 761	646	0.143	7.974 256	1081	0.193	7.906 591	1675	0.243	7.801 791	2625
0.044	8.039 412	294	0.094	8.016 115	654	0.144	7.973 175	1090	0.194	7.904 926	1690	0.244	7.799 166	2650
0.045	8.039 118	301	0.095	8.015 461	661	0.145	7.972 085	1101	0.195	7.903 231	1704	0.245	7.796 516	2676
0.046	8.038 817	307	0.096	8.014 800	670	0.146	7.970 984	1111	0.196	7.901 527	1718	0.246	7.793 840	2703
0.047	8.038 510	314	0.097	8.014 130	677	0.147	7.969 873	1121	0.197	7.899 809	1734	0.247	7.791 137	2729
0.048	8.038 196	321	0.098	8.013 453	685	0.148	7.968 752	1131	0.198	7.898 075	1749	0.248	7.788 408	2756
0.049	8.037 875	328	0.099	8.012 768	693	0.149	7.967 621	1141	0.199	7.896 326	1764	0.249	7.785 652	2783
0.050	8.037 547		0.100	8.012 075		0.150	7.966 480		0.200	7.894 562		0.250	7.782 869	

Tafel III.

 $\log \{N_2^7(n)\}.$

$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$
0.000	8.765 917		0.050	8.764 882		0.100	8.761 767		0.150	8.756 541		0.200	8.749 152	
0.001	8.765 916	1	0.051	8.764 840	42	0.101	8.761 683	84	0.151	8.756 415	126	0.201	8.748 982	170
0.002	8.765 915	1	0.052	8.764 797	43	0.102	8.761 599	84	0.152	8.756 288	127	0.202	8.748 810	172
0.003	8.765 913	2	0.053	8.764 754	43	0.103	8.761 514	85	0.153	8.756 160	128	0.203	8.748 638	172
0.004	8.765 910	3	0.054	8.764 710	44	0.104	8.761 427	87	0.154	8.756 031	129	0.204	8.748 465	173
0.005	8.765 906	4	0.055	8.764 665	45	0.105	8.761 340	87	0.155	8.755 901	130	0.205	8.748 291	174
0.006	8.765 902	5	0.056	8.764 619	46	0.106	8.761 252	88	0.156	8.755 770	131	0.206	8.748 117	174
0.007	8.765 897	6	0.057	8.764 572	47	0.107	8.761 164	88	0.157	8.755 639	131	0.207	8.747 941	176
0.008	8.765 890	7	0.058	8.764 524	48	0.108	8.761 074	90	0.158	8.755 506	133	0.208	8.747 764	177
0.009	8.765 883	7	0.059	8.764 475	49	0.109	8.760 983	91	0.159	8.755 373	133	0.209	8.747 587	177
		8			49			91			134			179
0.010	8.765 875	8	0.060	8.764 426	50	0.110	8.760 892	92	0.160	8.755 239	135	0.210	8.747 408	179
0.011	8.765 867	10	0.061	8.764 376	51	0.111	8.760 800	93	0.161	8.755 104	136	0.211	8.747 229	180
0.012	8.765 857	10	0.062	8.764 325	51	0.112	8.760 707	93	0.162	8.754 968	136	0.212	8.747 049	181
0.013	8.765 847	11	0.063	8.764 273	52	0.113	8.760 613	94	0.163	8.754 831	137	0.213	8.746 868	181
0.014	8.765 836	11	0.064	8.764 220	53	0.114	8.760 518	95	0.164	8.754 693	138	0.214	8.746 686	182
0.015	8.765 824	12	0.065	8.764 167	53	0.115	8.760 423	95	0.165	8.754 555	138	0.215	8.746 503	183
0.016	8.765 811	13	0.066	8.764 112	55	0.116	8.760 327	96	0.166	8.754 416	139	0.216	8.746 319	184
0.017	8.765 797	14	0.067	8.764 057	55	0.117	8.760 229	98	0.167	8.754 275	141	0.217	8.746 134	185
0.018	8.765 783	14	0.068	8.764 001	56	0.118	8.760 131	98	0.168	8.754 134	141	0.218	8.745 948	186
0.019	8.765 767	16	0.069	8.763 944	57	0.119	8.760 032	99	0.169	8.753 992	142	0.219	8.745 762	186
		16			57			99			143			188
0.020	8.765 751	17	0.070	8.763 887	59	0.120	8.759 933	101	0.170	8.753 849	144	0.220	8.745 574	188
0.021	8.765 734	17	0.071	8.763 828	59	0.121	8.759 832	102	0.171	8.753 705	144	0.221	8.745 386	188
0.022	8.765 717	19	0.072	8.763 769	60	0.122	8.759 730	102	0.172	8.753 561	146	0.222	8.745 196	190
0.023	8.765 698	19	0.073	8.763 709	61	0.123	8.759 628	103	0.173	8.753 415	146	0.223	8.745 006	191
0.024	8.765 679	21	0.074	8.763 648	62	0.124	8.759 525	103	0.174	8.753 269	148	0.224	8.744 815	192
0.025	8.765 658	21	0.075	8.763 586	63	0.125	8.759 421	104	0.175	8.753 121	148	0.225	8.744 623	193
0.026	8.765 637	22	0.076	8.763 523	63	0.126	8.759 316	105	0.176	8.752 973	148	0.226	8.744 430	194
0.027	8.765 615	23	0.077	8.763 460	65	0.127	8.759 210	106	0.177	8.752 824	149	0.227	8.744 236	195
0.028	8.765 592	23	0.078	8.763 395	65	0.128	8.759 104	106	0.178	8.752 674	150	0.228	8.744 041	195
0.029	8.765 569	25	0.079	8.763 330	65	0.129	8.758 996	108	0.179	8.752 523	151	0.229	8.743 846	195
		25			66			108			151			197
0.030	8.765 544	25	0.080	8.763 264	67	0.130	8.758 888	109	0.180	8.752 372	153	0.230	8.743 649	198
0.031	8.765 519	26	0.081	8.763 197	67	0.131	8.758 779	110	0.181	8.752 219	153	0.231	8.743 451	198
0.032	8.765 493	27	0.082	8.763 130	69	0.132	8.758 669	111	0.182	8.752 066	154	0.232	8.743 253	199
0.033	8.765 466	27	0.083	8.763 061	69	0.133	8.758 558	112	0.183	8.751 912	156	0.233	8.743 054	201
0.034	8.765 439	29	0.084	8.762 992	71	0.134	8.758 446	112	0.184	8.751 756	156	0.234	8.742 853	201
0.035	8.765 410	29	0.085	8.762 921	71	0.135	8.758 333	113	0.185	8.751 600	157	0.235	8.742 652	202
0.036	8.765 381	31	0.086	8.762 850	72	0.136	8.758 220	114	0.186	8.751 443	158	0.236	8.742 450	203
0.037	8.765 350	31	0.087	8.762 778	72	0.137	8.758 106	115	0.187	8.751 285	158	0.237	8.742 247	204
0.038	8.765 319	32	0.088	8.762 706	74	0.138	8.757 991	116	0.188	8.751 127	160	0.238	8.742 043	205
0.039	8.765 287	32	0.089	8.762 632	74	0.139	8.757 875	117	0.189	8.750 967	161	0.239	8.741 838	206
		32			74			117			161			206
0.040	8.765 255	34	0.090	8.762 558	76	0.140	8.757 758	118	0.190	8.750 806	161	0.240	8.741 632	207
0.041	8.765 221	34	0.091	8.762 482	76	0.141	8.757 640	119	0.191	8.750 645	162	0.241	8.741 425	208
0.042	8.765 187	35	0.092	8.762 406	77	0.142	8.757 521	119	0.192	8.750 483	164	0.242	8.741 217	208
0.043	8.765 152	36	0.093	8.762 329	77	0.143	8.757 402	120	0.193	8.750 319	164	0.243	8.741 009	210
0.044	8.765 116	37	0.094	8.762 252	79	0.144	8.757 282	122	0.194	8.750 155	165	0.244	8.740 799	210
0.045	8.765 079	37	0.095	8.762 173	80	0.145	8.757 160	122	0.195	8.749 990	166	0.245	8.740 589	212
0.046	8.765 041	39	0.096	8.762 093	80	0.146	8.757 038	123	0.196	8.749 824	166	0.246	8.740 377	212
0.047	8.765 002	39	0.097	8.762 013	81	0.147	8.756 915	123	0.197	8.749 658	168	0.247	8.740 165	213
0.048	8.764 963	40	0.098	8.761 932	82	0.148	8.756 792	125	0.198	8.749 490	169	0.248	8.739 952	214
0.049	8.764 923	41	0.099	8.761 850	83	0.149	8.756 667	126	0.199	8.749 321	169	0.249	8.739 738	216
0.050	8.764 882	41	0.100	8.761 767	83	0.150	8.756 541	126	0.200	8.749 152	169	0.250	8.739 522	216

Tafel III.

 $\log \{N_2^8(n)\}.$

$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$
0.000	7 _n 251 812	3	0.050	7 _n 242 870	365	0.100	7 _n 215 088	766	0.150	7 _n 165 199	1263	0.200	7 _n 085 989	1969
0.001	7 _n 251 809	11	0.051	7 _n 242 505	372	0.101	7 _n 214 322	774	0.151	7 _n 163 936	1275	0.201	7 _n 084 020	1987
0.002	7 _n 251 798	17	0.052	7 _n 242 133	379	0.102	7 _n 213 548	782	0.152	7 _n 162 661	1286	0.202	7 _n 082 033	2005
0.003	7 _n 251 781	25	0.053	7 _n 241 754	387	0.103	7 _n 212 766	792	0.153	7 _n 161 375	1298	0.203	7 _n 080 028	2023
0.004	7 _n 251 756	32	0.054	7 _n 241 367	395	0.104	7 _n 211 974	801	0.154	7 _n 160 077	1310	0.204	7 _n 078 005	2041
0.005	7 _n 251 724	39	0.055	7 _n 240 972	402	0.105	7 _n 211 173	809	0.155	7 _n 158 767	1321	0.205	7 _n 075 964	2059
0.006	7 _n 251 685	46	0.056	7 _n 240 570	410	0.106	7 _n 210 364	819	0.156	7 _n 157 446	1334	0.206	7 _n 073 905	2078
0.007	7 _n 251 639	54	0.057	7 _n 240 160	417	0.107	7 _n 209 545	827	0.157	7 _n 156 112	1346	0.207	7 _n 071 827	2097
0.008	7 _n 251 585	60	0.058	7 _n 239 743	425	0.108	7 _n 208 718	836	0.158	7 _n 154 766	1357	0.208	7 _n 069 730	2116
0.009	7 _n 251 525	68	0.059	7 _n 239 318	432	0.109	7 _n 207 882	846	0.159	7 _n 153 409	1370	0.209	7 _n 067 614	2136
0.010	7 _n 251 457	74	0.060	7 _n 238 886	440	0.110	7 _n 207 036	855	0.160	7 _n 152 039	1382	0.210	7 _n 065 478	2154
0.011	7 _n 251 383	82	0.061	7 _n 238 446	448	0.111	7 _n 206 181	864	0.161	7 _n 150 657	1395	0.211	7 _n 063 324	2175
0.012	7 _n 251 301	89	0.062	7 _n 237 998	455	0.112	7 _n 205 317	873	0.162	7 _n 149 262	1407	0.212	7 _n 061 149	2194
0.013	7 _n 251 212	96	0.063	7 _n 237 543	463	0.113	7 _n 204 444	882	0.163	7 _n 147 855	1420	0.213	7 _n 058 955	2214
0.014	7 _n 251 116	103	0.064	7 _n 237 080	471	0.114	7 _n 203 562	892	0.164	7 _n 146 435	1433	0.214	7 _n 056 741	2235
0.015	7 _n 251 013	110	0.065	7 _n 236 609	478	0.115	7 _n 202 670	901	0.165	7 _n 145 002	1445	0.215	7 _n 054 506	2255
0.016	7 _n 250 903	117	0.066	7 _n 236 131	486	0.116	7 _n 201 769	910	0.166	7 _n 143 557	1458	0.216	7 _n 052 251	2277
0.017	7 _n 250 786	124	0.067	7 _n 235 645	494	0.117	7 _n 200 859	920	0.167	7 _n 142 099	1471	0.217	7 _n 049 974	2297
0.018	7 _n 250 662	132	0.068	7 _n 235 151	502	0.118	7 _n 199 939	929	0.168	7 _n 140 628	1484	0.218	7 _n 047 677	2319
0.019	7 _n 250 530	139	0.069	7 _n 234 649	510	0.119	7 _n 199 010	939	0.169	7 _n 139 144	1498	0.219	7 _n 045 358	2340
0.020	7 _n 250 391	145	0.070	7 _n 234 139	517	0.120	7 _n 198 071	948	0.170	7 _n 137 646	1511	0.220	7 _n 043 018	2362
0.021	7 _n 250 246	153	0.071	7 _n 233 622	526	0.121	7 _n 197 123	958	0.171	7 _n 136 135	1524	0.221	7 _n 040 656	2384
0.022	7 _n 250 093	160	0.072	7 _n 233 096	533	0.122	7 _n 196 165	968	0.172	7 _n 134 611	1537	0.222	7 _n 038 272	2407
0.023	7 _n 249 933	168	0.073	7 _n 232 563	541	0.123	7 _n 195 197	977	0.173	7 _n 133 074	1552	0.223	7 _n 035 865	2429
0.024	7 _n 249 765	174	0.074	7 _n 232 022	549	0.124	7 _n 194 220	988	0.174	7 _n 131 522	1565	0.224	7 _n 033 436	2452
0.025	7 _n 249 591	182	0.075	7 _n 231 473	557	0.125	7 _n 193 232	997	0.175	7 _n 129 957	1578	0.225	7 _n 030 984	2476
0.026	7 _n 249 409	189	0.076	7 _n 230 916	565	0.126	7 _n 192 235	1007	0.176	7 _n 128 379	1593	0.226	7 _n 028 508	2499
0.027	7 _n 249 220	196	0.077	7 _n 230 351	573	0.127	7 _n 191 228	1016	0.177	7 _n 126 786	1607	0.227	7 _n 026 009	2523
0.028	7 _n 249 024	203	0.078	7 _n 229 778	581	0.128	7 _n 190 212	1027	0.178	7 _n 125 179	1621	0.228	7 _n 023 486	2547
0.029	7 _n 248 821	211	0.079	7 _n 229 197	590	0.129	7 _n 189 185	1037	0.179	7 _n 123 558	1636	0.229	7 _n 020 939	2571
0.030	7 _n 248 610	217	0.080	7 _n 228 607	597	0.130	7 _n 188 148	1047	0.180	7 _n 121 922	1650	0.230	7 _n 018 368	2597
0.031	7 _n 248 393	225	0.081	7 _n 228 010	605	0.131	7 _n 187 101	1058	0.181	7 _n 120 272	1665	0.231	7 _n 015 771	2621
0.032	7 _n 248 168	233	0.082	7 _n 227 405	613	0.132	7 _n 186 043	1067	0.182	7 _n 118 607	1679	0.232	7 _n 013 150	2647
0.033	7 _n 247 935	239	0.083	7 _n 226 792	622	0.133	7 _n 184 976	1078	0.183	7 _n 116 928	1694	0.233	7 _n 010 503	2673
0.034	7 _n 247 696	247	0.084	7 _n 226 170	630	0.134	7 _n 183 898	1088	0.184	7 _n 115 234	1710	0.234	7 _n 007 830	2699
0.035	7 _n 247 449	254	0.085	7 _n 225 540	638	0.135	7 _n 182 810	1099	0.185	7 _n 113 524	1724	0.235	7 _n 005 131	2726
0.036	7 _n 247 195	261	0.086	7 _n 224 902	646	0.136	7 _n 181 711	1109	0.186	7 _n 111 800	1740	0.236	7 _n 002 405	2752
0.037	7 _n 246 934	268	0.087	7 _n 224 256	655	0.137	7 _n 180 602	1120	0.187	7 _n 110 060	1755	0.237	6 _n 999 653	2780
0.038	7 _n 246 666	276	0.088	7 _n 223 601	663	0.138	7 _n 179 482	1130	0.188	7 _n 108 305	1770	0.238	6 _n 996 873	2807
0.039	7 _n 246 390	284	0.089	7 _n 222 938	671	0.139	7 _n 178 352	1141	0.189	7 _n 106 535	1787	0.239	6 _n 994 066	2836
0.040	7 _n 246 106	290	0.090	7 _n 222 267	680	0.140	7 _n 177 211	1152	0.190	7 _n 104 748	1802	0.240	6 _n 991 230	2864
0.041	7 _n 245 816	298	0.091	7 _n 221 587	688	0.141	7 _n 176 059	1162	0.191	7 _n 102 946	1818	0.241	6 _n 988 366	2893
0.042	7 _n 245 518	305	0.092	7 _n 220 899	696	0.142	7 _n 174 897	1174	0.192	7 _n 101 128	1834	0.242	6 _n 985 473	2922
0.043	7 _n 245 213	313	0.093	7 _n 220 203	705	0.143	7 _n 173 723	1184	0.193	7 _n 099 294	1850	0.243	6 _n 982 551	2952
0.044	7 _n 244 900	320	0.094	7 _n 219 498	714	0.144	7 _n 172 539	1195	0.194	7 _n 097 444	1867	0.244	6 _n 979 599	2983
0.045	7 _n 244 580	327	0.095	7 _n 218 784	722	0.145	7 _n 171 344	1207	0.195	7 _n 095 577	1884	0.245	6 _n 976 616	3013
0.046	7 _n 244 253	335	0.096	7 _n 218 062	731	0.146	7 _n 170 137	1217	0.196	7 _n 093 693	1900	0.246	6 _n 973 603	3044
0.047	7 _n 243 918	342	0.097	7 _n 217 331	739	0.147	7 _n 168 920	1229	0.197	7 _n 091 793	1918	0.247	6 _n 970 559	3076
0.048	7 _n 243 576	349	0.098	7 _n 216 592	748	0.148	7 _n 167 691	1240	0.198	7 _n 089 875	1934	0.248	6 _n 967 483	3108
0.049	7 _n 243 227	357	0.099	7 _n 215 844	756	0.149	7 _n 166 451	1252	0.199	7 _n 087 941	1952	0.249	6 _n 964 375	3140
0.050	7 _n 242 870		0.100	7 _n 215 088		0.150	7 _n 165 199		0.200	7 _n 085 989		0.250	6 _n 961 235	

Tafel III.

 $\log \{N_2^9(n)\}.$

$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$
0.000	$8_{II}132\ 202$	0	0.050	$8_{II}130\ 996$	49	0.100	$8_{II}127\ 367$	98	0.150	$8_{II}121\ 278$	147	0.200	$8_{II}112\ 668$	198
0.001	$8_{II}132\ 202$	2	0.051	$8_{II}130\ 947$	49	0.101	$8_{II}127\ 269$	98	0.151	$8_{II}121\ 131$	149	0.201	$8_{II}112\ 470$	200
0.002	$8_{II}132\ 200$	2	0.052	$8_{II}130\ 898$	51	0.102	$8_{II}127\ 171$	100	0.152	$8_{II}120\ 982$	149	0.202	$8_{II}112\ 270$	200
0.003	$8_{II}132\ 198$	4	0.053	$8_{II}130\ 847$	52	0.103	$8_{II}127\ 071$	100	0.153	$8_{II}120\ 833$	150	0.203	$8_{II}112\ 070$	202
0.004	$8_{II}132\ 194$	4	0.054	$8_{II}130\ 795$	52	0.104	$8_{II}126\ 971$	102	0.154	$8_{II}120\ 683$	151	0.204	$8_{II}111\ 868$	202
0.005	$8_{II}132\ 190$	5	0.055	$8_{II}130\ 743$	54	0.105	$8_{II}126\ 869$	102	0.155	$8_{II}120\ 532$	153	0.205	$8_{II}111\ 666$	204
0.006	$8_{II}132\ 185$	6	0.056	$8_{II}130\ 689$	55	0.106	$8_{II}126\ 767$	103	0.156	$8_{II}120\ 379$	153	0.206	$8_{II}111\ 462$	205
0.007	$8_{II}132\ 179$	8	0.057	$8_{II}130\ 634$	55	0.107	$8_{II}126\ 664$	105	0.157	$8_{II}120\ 226$	154	0.207	$8_{II}111\ 257$	206
0.008	$8_{II}132\ 171$	8	0.058	$8_{II}130\ 579$	56	0.108	$8_{II}126\ 559$	105	0.158	$8_{II}120\ 072$	156	0.208	$8_{II}111\ 051$	206
0.009	$8_{II}132\ 163$		0.059	$8_{II}130\ 523$		0.109	$8_{II}126\ 454$		0.159	$8_{II}119\ 916$		0.209	$8_{II}110\ 845$	
		9			58			107			156			208
0.010	$8_{II}132\ 154$	10	0.060	$8_{II}130\ 465$	59	0.110	$8_{II}126\ 347$	107	0.160	$8_{II}119\ 760$	157	0.210	$8_{II}110\ 637$	209
0.011	$8_{II}132\ 144$	11	0.061	$8_{II}130\ 406$	59	0.111	$8_{II}126\ 240$	108	0.161	$8_{II}119\ 603$	159	0.211	$8_{II}110\ 428$	210
0.012	$8_{II}132\ 133$	12	0.062	$8_{II}130\ 347$	60	0.112	$8_{II}126\ 132$	110	0.162	$8_{II}119\ 444$	159	0.212	$8_{II}110\ 218$	211
0.013	$8_{II}132\ 121$	13	0.063	$8_{II}130\ 287$	62	0.113	$8_{II}126\ 022$	110	0.163	$8_{II}119\ 285$	160	0.213	$8_{II}110\ 007$	212
0.014	$8_{II}132\ 108$	14	0.064	$8_{II}130\ 225$	62	0.114	$8_{II}125\ 912$	111	0.164	$8_{II}119\ 125$	162	0.214	$8_{II}109\ 795$	214
0.015	$8_{II}132\ 094$	15	0.065	$8_{II}130\ 163$	63	0.115	$8_{II}125\ 801$	113	0.165	$8_{II}118\ 963$	162	0.215	$8_{II}109\ 581$	214
0.016	$8_{II}132\ 079$	16	0.066	$8_{II}130\ 100$	65	0.116	$8_{II}125\ 688$	113	0.166	$8_{II}118\ 801$	164	0.216	$8_{II}109\ 367$	215
0.017	$8_{II}132\ 063$	17	0.067	$8_{II}130\ 035$	65	0.117	$8_{II}125\ 575$	114	0.167	$8_{II}118\ 637$	164	0.217	$8_{II}109\ 152$	216
0.018	$8_{II}132\ 046$	18	0.068	$8_{II}129\ 970$	66	0.118	$8_{II}125\ 461$	115	0.168	$8_{II}118\ 473$	166	0.218	$8_{II}108\ 936$	218
0.019	$8_{II}132\ 028$		0.069	$8_{II}129\ 904$		0.119	$8_{II}125\ 346$		0.169	$8_{II}118\ 307$		0.219	$8_{II}108\ 718$	
		19			67			117			166			218
0.020	$8_{II}132\ 009$	20	0.070	$8_{II}129\ 837$	69	0.120	$8_{II}125\ 229$	117	0.170	$8_{II}118\ 141$	167	0.220	$8_{II}108\ 500$	220
0.021	$8_{II}131\ 989$	20	0.071	$8_{II}129\ 768$	69	0.121	$8_{II}125\ 112$	118	0.171	$8_{II}117\ 974$	169	0.221	$8_{II}108\ 280$	220
0.022	$8_{II}131\ 969$	22	0.072	$8_{II}129\ 699$	70	0.122	$8_{II}124\ 994$	120	0.172	$8_{II}117\ 805$	170	0.222	$8_{II}108\ 060$	222
0.023	$8_{II}131\ 947$	23	0.073	$8_{II}129\ 629$	71	0.123	$8_{II}124\ 874$	120	0.173	$8_{II}117\ 635$	170	0.223	$8_{II}107\ 838$	222
0.024	$8_{II}131\ 924$	23	0.074	$8_{II}129\ 558$	72	0.124	$8_{II}124\ 754$	121	0.174	$8_{II}117\ 465$	172	0.224	$8_{II}107\ 616$	224
0.025	$8_{II}131\ 901$	25	0.075	$8_{II}129\ 486$	73	0.125	$8_{II}124\ 633$	122	0.175	$8_{II}117\ 293$	172	0.225	$8_{II}107\ 392$	225
0.026	$8_{II}131\ 876$	25	0.076	$8_{II}129\ 413$	74	0.126	$8_{II}124\ 511$	123	0.176	$8_{II}117\ 121$	174	0.226	$8_{II}107\ 167$	226
0.027	$8_{II}131\ 851$	27	0.077	$8_{II}129\ 339$	75	0.127	$8_{II}124\ 388$	125	0.177	$8_{II}116\ 947$	175	0.227	$8_{II}106\ 941$	227
0.028	$8_{II}131\ 824$	27	0.078	$8_{II}129\ 264$	76	0.128	$8_{II}124\ 263$	125	0.178	$8_{II}116\ 772$	176	0.228	$8_{II}106\ 714$	228
0.029	$8_{II}131\ 797$		0.079	$8_{II}129\ 188$		0.129	$8_{II}124\ 138$		0.179	$8_{II}116\ 596$		0.229	$8_{II}106\ 486$	
		29			77			126			176			229
0.030	$8_{II}131\ 768$	29	0.080	$8_{II}129\ 111$	78	0.130	$8_{II}124\ 012$	127	0.180	$8_{II}116\ 420$	178	0.230	$8_{II}106\ 257$	230
0.031	$8_{II}131\ 739$	31	0.081	$8_{II}129\ 033$	79	0.131	$8_{II}123\ 885$	128	0.181	$8_{II}116\ 242$	179	0.231	$8_{II}106\ 027$	232
0.032	$8_{II}131\ 708$	31	0.082	$8_{II}128\ 954$	80	0.132	$8_{II}123\ 757$	130	0.182	$8_{II}116\ 063$	180	0.232	$8_{II}105\ 795$	232
0.033	$8_{II}131\ 677$	32	0.083	$8_{II}128\ 874$	80	0.133	$8_{II}123\ 627$	130	0.183	$8_{II}115\ 883$	180	0.233	$8_{II}105\ 563$	233
0.034	$8_{II}131\ 645$	34	0.084	$8_{II}128\ 794$	82	0.134	$8_{II}123\ 497$	131	0.184	$8_{II}115\ 703$	182	0.234	$8_{II}105\ 330$	235
0.035	$8_{II}131\ 611$	34	0.085	$8_{II}128\ 712$	83	0.135	$8_{II}123\ 366$	132	0.185	$8_{II}115\ 521$	183	0.235	$8_{II}105\ 095$	235
0.036	$8_{II}131\ 577$	35	0.086	$8_{II}128\ 629$	84	0.136	$8_{II}123\ 234$	133	0.186	$8_{II}115\ 338$	184	0.236	$8_{II}104\ 860$	237
0.037	$8_{II}131\ 542$	36	0.087	$8_{II}128\ 545$	85	0.137	$8_{II}123\ 101$	134	0.187	$8_{II}115\ 154$	185	0.237	$8_{II}104\ 623$	238
0.038	$8_{II}131\ 506$	37	0.088	$8_{II}128\ 460$	85	0.138	$8_{II}122\ 967$	136	0.188	$8_{II}114\ 969$	186	0.238	$8_{II}104\ 385$	238
0.039	$8_{II}131\ 469$		0.089	$8_{II}128\ 375$		0.139	$8_{II}122\ 831$		0.189	$8_{II}114\ 783$		0.239	$8_{II}104\ 147$	
		38			87			136			187			240
0.040	$8_{II}131\ 431$	39	0.090	$8_{II}128\ 288$	88	0.140	$8_{II}122\ 695$	137	0.190	$8_{II}114\ 596$	188	0.240	$8_{II}103\ 907$	241
0.041	$8_{II}131\ 392$	40	0.091	$8_{II}128\ 200$	89	0.141	$8_{II}122\ 558$	138	0.191	$8_{II}114\ 408$	189	0.241	$8_{II}103\ 666$	242
0.042	$8_{II}131\ 352$	42	0.092	$8_{II}128\ 111$	89	0.142	$8_{II}122\ 420$	139	0.192	$8_{II}114\ 219$	191	0.242	$8_{II}103\ 424$	243
0.043	$8_{II}131\ 310$	42	0.093	$8_{II}128\ 022$	91	0.143	$8_{II}122\ 281$	141	0.193	$8_{II}114\ 028$	191	0.243	$8_{II}103\ 181$	244
0.044	$8_{II}131\ 268$	43	0.094	$8_{II}127\ 931$	91	0.144	$8_{II}122\ 140$	141	0.194	$8_{II}113\ 837$	192	0.244	$8_{II}102\ 937$	246
0.045	$8_{II}131\ 225$	43	0.095	$8_{II}127\ 840$	93	0.145	$8_{II}121\ 999$	142	0.195	$8_{II}113\ 645$	193	0.245	$8_{II}102\ 691$	246
0.046	$8_{II}131\ 182$	45	0.096	$8_{II}127\ 747$	94	0.146	$8_{II}121\ 857$	143	0.196	$8_{II}113\ 452$	194	0.246	$8_{II}102\ 445$	247
0.047	$8_{II}131\ 137$	46	0.097	$8_{II}127\ 653$	94	0.147	$8_{II}121\ 714$	145	0.197	$8_{II}113\ 258$	196	0.247	$8_{II}102\ 198$	249
0.048	$8_{II}131\ 091$	47	0.098	$8_{II}127\ 559$	96	0.148	$8_{II}121\ 569$	145	0.198	$8_{II}113\ 062$	196	0.248	$8_{II}101\ 949$	249
0.049	$8_{II}131\ 044$	48	0.099	$8_{II}127\ 463$	96	0.149	$8_{II}121\ 424$	146	0.199	$8_{II}112\ 866$	198	0.249	$8_{II}101\ 700$	251
0.050	$8_{II}130\ 996$		0.100	$8_{II}127\ 367$		0.150	$8_{II}121\ 278$		0.200	$8_{II}112\ 668$		0.250	$8_{II}101\ 449$	

Tafel III.

 $\log \{N_2^{10}(n)\}.$

$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$	$\pm n$	N	$-J$
0.000	6.501 690		0.050	6.492 335	382	0.100	6.463 250	802	0.150	6.410 922	1327	0.200	6.327 515	2080
0.001	6.501 686	4	0.051	6.491 953	389	0.101	6.462 448	811	0.151	6.409 595	1339	0.201	6.325 435	2099
0.002	6.501 675	11	0.052	6.491 564	397	0.102	6.461 637	820	0.152	6.408 256	1351	0.202	6.323 336	2117
0.003	6.501 656	19	0.053	6.491 167	405	0.103	6.460 817	830	0.153	6.406 905	1363	0.203	6.321 219	2137
0.004	6.501 630	26	0.054	6.490 762	412	0.104	6.459 987	839	0.154	6.405 542	1376	0.204	6.319 082	2157
0.005	6.501 597	33	0.055	6.490 350	421	0.105	6.459 148	848	0.155	6.404 166	1389	0.205	6.316 925	2177
0.006	6.501 556	41	0.056	6.489 929	429	0.106	6.458 300	857	0.156	6.402 777	1402	0.206	6.314 748	2197
0.007	6.501 508	48	0.057	6.489 500	436	0.107	6.457 443	867	0.157	6.401 375	1414	0.207	6.312 551	2217
0.008	6.501 452	56	0.058	6.489 064	445	0.108	6.456 576	877	0.158	6.399 961	1427	0.208	6.310 334	2237
0.009	6.501 389	63	0.059	6.488 619	452	0.109	6.455 699	886	0.159	6.398 534	1440	0.209	6.308 097	2258
		71												
0.010	6.501 318	78	0.060	6.488 167	461	0.110	6.454 813	896	0.160	6.397 094	1453	0.210	6.305 839	2280
0.011	6.501 240	85	0.061	6.487 706	468	0.111	6.453 917	905	0.161	6.395 641	1466	0.211	6.303 559	2300
0.012	6.501 155	93	0.062	6.487 238	477	0.112	6.453 012	915	0.162	6.394 175	1479	0.212	6.301 259	2322
0.013	6.501 062	100	0.063	6.486 761	485	0.113	6.452 097	925	0.163	6.392 696	1493	0.213	6.298 937	2344
0.014	6.500 962	108	0.064	6.486 276	492	0.114	6.451 172	934	0.164	6.391 203	1506	0.214	6.296 593	2366
0.015	6.500 854	115	0.065	6.485 784	501	0.115	6.450 238	945	0.165	6.389 697	1520	0.215	6.294 227	2388
0.016	6.500 739	123	0.066	6.485 283	509	0.116	6.449 293	954	0.166	6.388 177	1534	0.216	6.291 839	2410
0.017	6.500 616	130	0.067	6.484 774	517	0.117	6.448 339	964	0.167	6.386 643	1547	0.217	6.289 429	2434
0.018	6.500 486	137	0.068	6.484 257	525	0.118	6.447 375	974	0.168	6.385 096	1562	0.218	6.286 995	2456
0.019	6.500 349	145	0.069	6.483 732	534	0.119	6.446 401	985	0.169	6.383 534	1575	0.219	6.284 539	2480
0.020	6.500 204	153	0.070	6.483 198	541	0.120	6.445 416	994	0.170	6.381 959	1589	0.220	6.282 059	2504
0.021	6.500 051	160	0.071	6.482 657	550	0.121	6.444 422	1004	0.171	6.380 370	1604	0.221	6.279 555	2527
0.022	6.499 891	167	0.072	6.482 107	558	0.122	6.443 418	1015	0.172	6.378 766	1618	0.222	6.277 028	2552
0.023	6.499 724	175	0.073	6.481 549	567	0.123	6.442 403	1025	0.173	6.377 148	1633	0.223	6.274 476	2577
0.024	6.499 549	183	0.074	6.480 982	574	0.124	6.441 378	1035	0.174	6.375 515	1648	0.224	6.271 899	2601
0.025	6.499 366	190	0.075	6.480 408	583	0.125	6.440 343	1046	0.175	6.373 867	1662	0.225	6.269 298	2627
0.026	6.499 176	198	0.076	6.479 825	592	0.126	6.439 297	1056	0.176	6.372 205	1677	0.226	6.266 671	2652
0.027	6.498 978	205	0.077	6.479 233	600	0.127	6.438 241	1067	0.177	6.370 528	1692	0.227	6.264 019	2679
0.028	6.498 773	212	0.078	6.478 633	608	0.128	6.437 174	1077	0.178	6.368 836	1707	0.228	6.261 340	2704
0.029	6.498 561	220	0.079	6.478 025	617	0.129	6.436 097	1088	0.179	6.367 129	1722	0.229	6.258 636	2732
0.030	6.498 341	228	0.080	6.477 408	625	0.130	6.435 009	1098	0.180	6.365 407	1738	0.230	6.255 904	2758
0.031	6.498 113	235	0.081	6.476 783	634	0.131	6.433 911	1109	0.181	6.363 669	1753	0.231	6.253 146	2786
0.032	6.497 878	243	0.082	6.476 149	642	0.132	6.432 802	1120	0.182	6.361 916	1770	0.232	6.250 360	2814
0.033	6.497 635	251	0.083	6.475 507	651	0.133	6.431 682	1131	0.183	6.360 146	1785	0.233	6.247 546	2842
0.034	6.497 384	258	0.084	6.474 856	660	0.134	6.430 551	1142	0.184	6.358 361	1801	0.234	6.244 704	2870
0.035	6.497 126	266	0.085	6.474 196	668	0.135	6.429 409	1153	0.185	6.356 560	1817	0.235	6.241 834	2900
0.036	6.496 860	273	0.086	6.473 528	676	0.136	6.428 256	1164	0.186	6.354 743	1833	0.236	6.238 934	2929
0.037	6.496 587	281	0.087	6.472 852	686	0.137	6.427 092	1175	0.187	6.352 910	1850	0.237	6.236 005	2959
0.038	6.496 306	289	0.088	6.472 166	694	0.138	6.425 917	1186	0.188	6.351 060	1867	0.238	6.233 046	2989
0.039	6.496 017	296	0.089	6.471 472	703	0.139	6.424 731	1197	0.189	6.349 193	1883	0.239	6.230 057	3020
0.040	6.495 721	304	0.090	6.470 769	712	0.140	6.423 534	1209	0.190	6.347 310	1900	0.240	6.227 037	3051
0.041	6.495 417	311	0.091	6.470 057	721	0.141	6.422 325	1220	0.191	6.345 410	1918	0.241	6.223 986	3084
0.042	6.495 106	320	0.092	6.469 336	729	0.142	6.421 105	1232	0.192	6.343 492	1935	0.242	6.220 902	3115
0.043	6.494 786	327	0.093	6.468 607	738	0.143	6.419 873	1244	0.193	6.341 557	1952	0.243	6.217 787	3148
0.044	6.494 459	334	0.094	6.467 869	748	0.144	6.418 629	1255	0.194	6.339 605	1970	0.244	6.214 639	3182
0.045	6.494 125	343	0.095	6.467 121	756	0.145	6.417 374	1266	0.195	6.337 635	1988	0.245	6.211 457	3215
0.046	6.493 782	350	0.096	6.466 365	765	0.146	6.416 108	1279	0.196	6.335 647	2005	0.246	6.208 242	3250
0.047	6.493 432	358	0.097	6.465 600	775	0.147	6.414 829	1290	0.197	6.333 642	2024	0.247	6.204 992	3285
0.048	6.493 074	366	0.098	6.464 825	783	0.148	6.413 539	1303	0.198	6.331 618	2042	0.248	6.201 707	3320
0.049	6.492 708	373	0.099	6.464 042	792	0.149	6.412 236	1314	0.199	6.329 576	2061	0.249	6.198 387	3356
0.050	6.492 335		0.100	6.463 250		0.150	6.410 922		0.200	6.327 515		0.250	6.195 031	

Tafel IV.

 $\log \{M_2^4(m)\}$.

vergl. pag. 20.

$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$
0.000	9 _n 318 759	1	0.050	9 _n 316 145	106	0.100	9 _n 308 209	215	0.150	9 _n 294 650	332	0.200	9 _n 274 927	462
0.001	9 _n 318 758	3	0.051	9 _n 316 039	108	0.101	9 _n 307 994	217	0.151	9 _n 294 318	334	0.201	9 _n 274 465	466
0.002	9 _n 318 755	5	0.052	9 _n 315 931	110	0.102	9 _n 307 777	219	0.152	9 _n 293 984	337	0.202	9 _n 273 999	468
0.003	9 _n 318 750	8	0.053	9 _n 315 821	112	0.103	9 _n 307 558	222	0.153	9 _n 293 647	339	0.203	9 _n 273 531	471
0.004	9 _n 318 742	9	0.054	9 _n 315 709	115	0.104	9 _n 307 336	223	0.154	9 _n 293 308	342	0.204	9 _n 273 060	474
0.005	9 _n 318 733	12	0.055	9 _n 315 594	116	0.105	9 _n 307 113	226	0.155	9 _n 292 966	344	0.205	9 _n 272 586	477
0.006	9 _n 318 721	13	0.056	9 _n 315 478	119	0.106	9 _n 306 887	229	0.156	9 _n 292 622	346	0.206	9 _n 272 109	479
0.007	9 _n 318 708	16	0.057	9 _n 315 359	121	0.107	9 _n 306 658	230	0.157	9 _n 292 276	349	0.207	9 _n 271 630	483
0.008	9 _n 318 692	18	0.058	9 _n 315 238	123	0.108	9 _n 306 428	233	0.158	9 _n 291 927	352	0.208	9 _n 271 147	485
0.009	9 _n 318 674	19	0.059	9 _n 315 115	125	0.109	9 _n 306 195	235	0.159	9 _n 291 575	354	0.209	9 _n 270 662	488
0.010	9 _n 318 655	22	0.060	9 _n 314 990	127	0.110	9 _n 305 960	237	0.160	9 _n 291 221	357	0.210	9 _n 270 174	491
0.011	9 _n 318 633	24	0.061	9 _n 314 863	129	0.111	9 _n 305 723	240	0.161	9 _n 290 864	359	0.211	9 _n 269 683	494
0.012	9 _n 318 609	26	0.062	9 _n 314 734	132	0.112	9 _n 305 483	242	0.162	9 _n 290 505	362	0.212	9 _n 269 189	497
0.013	9 _n 318 583	29	0.063	9 _n 314 602	134	0.113	9 _n 305 241	244	0.163	9 _n 290 143	364	0.213	9 _n 268 692	500
0.014	9 _n 318 554	30	0.064	9 _n 314 468	135	0.114	9 _n 304 997	246	0.164	9 _n 289 779	367	0.214	9 _n 268 192	502
0.015	9 _n 318 524	32	0.065	9 _n 314 333	138	0.115	9 _n 304 751	249	0.165	9 _n 289 412	369	0.215	9 _n 267 690	506
0.016	9 _n 318 492	35	0.066	9 _n 314 195	141	0.116	9 _n 304 502	251	0.166	9 _n 289 043	372	0.216	9 _n 267 184	508
0.017	9 _n 318 457	36	0.067	9 _n 314 054	142	0.117	9 _n 304 251	253	0.167	9 _n 288 671	374	0.217	9 _n 266 676	512
0.018	9 _n 318 421	39	0.068	9 _n 313 912	144	0.118	9 _n 303 998	256	0.168	9 _n 288 297	377	0.218	9 _n 266 164	514
0.019	9 _n 318 382	40	0.069	9 _n 313 768	147	0.119	9 _n 303 742	258	0.169	9 _n 287 920	380	0.219	9 _n 265 650	518
0.020	9 _n 318 342	43	0.070	9 _n 313 621	148	0.120	9 _n 303 484	260	0.170	9 _n 287 540	382	0.220	9 _n 265 132	520
0.021	9 _n 318 299	45	0.071	9 _n 313 473	151	0.121	9 _n 303 224	263	0.171	9 _n 287 158	384	0.221	9 _n 264 612	523
0.022	9 _n 318 254	47	0.072	9 _n 313 322	154	0.122	9 _n 302 961	265	0.172	9 _n 286 774	387	0.222	9 _n 264 089	527
0.023	9 _n 318 207	49	0.073	9 _n 313 168	155	0.123	9 _n 302 696	267	0.173	9 _n 286 387	390	0.223	9 _n 263 562	529
0.024	9 _n 318 158	51	0.074	9 _n 313 013	157	0.124	9 _n 302 429	269	0.174	9 _n 285 997	393	0.224	9 _n 263 033	532
0.025	9 _n 318 107	53	0.075	9 _n 312 856	160	0.125	9 _n 302 160	272	0.175	9 _n 285 604	395	0.225	9 _n 262 501	536
0.026	9 _n 318 054	56	0.076	9 _n 312 696	161	0.126	9 _n 301 888	275	0.176	9 _n 285 209	397	0.226	9 _n 261 965	538
0.027	9 _n 317 998	57	0.077	9 _n 312 535	164	0.127	9 _n 301 613	276	0.177	9 _n 284 812	401	0.227	9 _n 261 427	542
0.028	9 _n 317 941	60	0.078	9 _n 312 371	166	0.128	9 _n 301 337	279	0.178	9 _n 284 411	403	0.228	9 _n 260 885	544
0.029	9 _n 317 881	61	0.079	9 _n 312 205	169	0.129	9 _n 301 058	281	0.179	9 _n 284 008	405	0.229	9 _n 260 341	548
0.030	9 _n 317 820	64	0.080	9 _n 312 036	170	0.130	9 _n 300 777	284	0.180	9 _n 283 603	408	0.230	9 _n 259 793	551
0.031	9 _n 317 756	66	0.081	9 _n 311 866	173	0.131	9 _n 300 493	286	0.181	9 _n 283 195	411	0.231	9 _n 259 242	554
0.032	9 _n 317 690	68	0.082	9 _n 311 693	175	0.132	9 _n 300 207	288	0.182	9 _n 282 784	414	0.232	9 _n 258 688	557
0.033	9 _n 317 622	70	0.083	9 _n 311 518	177	0.133	9 _n 299 919	291	0.183	9 _n 282 370	416	0.233	9 _n 258 131	560
0.034	9 _n 317 552	72	0.084	9 _n 311 341	179	0.134	9 _n 299 628	293	0.184	9 _n 281 954	419	0.234	9 _n 257 571	563
0.035	9 _n 317 480	74	0.085	9 _n 311 162	181	0.135	9 _n 299 335	296	0.185	9 _n 281 535	421	0.235	9 _n 257 008	566
0.036	9 _n 317 406	77	0.086	9 _n 310 981	184	0.136	9 _n 299 039	298	0.186	9 _n 281 114	424	0.236	9 _n 256 442	570
0.037	9 _n 317 329	78	0.087	9 _n 310 797	186	0.137	9 _n 298 741	300	0.187	9 _n 280 690	427	0.237	9 _n 255 872	572
0.038	9 _n 317 251	80	0.088	9 _n 310 611	188	0.138	9 _n 298 441	303	0.188	9 _n 280 263	430	0.238	9 _n 255 300	576
0.039	9 _n 317 171	83	0.089	9 _n 310 423	190	0.139	9 _n 298 138	305	0.189	9 _n 279 833	432	0.239	9 _n 254 724	579
0.040	9 _n 317 088	85	0.090	9 _n 310 233	192	0.140	9 _n 297 833	307	0.190	9 _n 279 401	435	0.240	9 _n 254 145	582
0.041	9 _n 317 003	87	0.091	9 _n 310 041	195	0.141	9 _n 297 526	310	0.191	9 _n 278 966	438	0.241	9 _n 253 563	585
0.042	9 _n 316 916	89	0.092	9 _n 309 846	197	0.142	9 _n 297 216	312	0.192	9 _n 278 528	440	0.242	9 _n 252 978	589
0.043	9 _n 316 827	91	0.093	9 _n 309 649	199	0.143	9 _n 296 904	315	0.193	9 _n 278 088	444	0.243	9 _n 252 389	592
0.044	9 _n 316 736	93	0.094	9 _n 309 450	201	0.144	9 _n 296 589	317	0.194	9 _n 277 644	446	0.244	9 _n 251 797	595
0.045	9 _n 316 643	95	0.095	9 _n 309 249	204	0.145	9 _n 296 272	320	0.195	9 _n 277 198	448	0.245	9 _n 251 202	598
0.046	9 _n 316 548	98	0.096	9 _n 309 045	206	0.146	9 _n 295 952	322	0.196	9 _n 276 750	452	0.246	9 _n 250 604	602
0.047	9 _n 316 450	99	0.097	9 _n 308 839	208	0.147	9 _n 295 630	324	0.197	9 _n 276 298	454	0.247	9 _n 250 002	605
0.048	9 _n 316 351	102	0.098	9 _n 308 631	210	0.148	9 _n 295 306	327	0.198	9 _n 275 844	457	0.248	9 _n 249 397	608
0.049	9 _n 316 249	104	0.099	9 _n 308 421	212	0.149	9 _n 294 979	329	0.199	9 _n 275 387	460	0.249	9 _n 248 789	611
0.050	9 _n 316 145		0.100	9 _n 308 209		0.150	9 _n 294 650		0.200	9 _n 274 927		0.250	9 _n 248 178	

Tafel IV.

 $\log \{M_2^5(m)\}.$

$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$
0.000	911096 910	0	0.050	911095 460	59	0.100	911091 080	118	0.150	911083 682	180	0.200	911073 107	245
0.001	911096 910	2	0.051	911095 401	60	0.101	911090 962	119	0.151	911083 502	181	0.201	911072 862	247
0.002	911096 908	3	0.052	911095 341	61	0.102	911090 843	120	0.152	911083 321	182	0.202	911072 615	248
0.003	911096 905	4	0.053	911095 280	62	0.103	911090 723	122	0.153	911083 139	184	0.203	911072 367	250
0.004	911096 901	5	0.054	911095 218	63	0.104	911090 601	123	0.154	911082 955	185	0.204	911072 117	250
0.005	911096 896	6	0.055	911095 155	64	0.105	911090 478	124	0.155	911082 770	186	0.205	911071 867	252
0.006	911096 889	7	0.056	911095 090	65	0.106	911090 354	125	0.156	911082 584	187	0.206	911071 615	252
0.007	911096 882	8	0.057	911095 025	66	0.107	911090 229	126	0.157	911082 397	188	0.207	911071 361	254
0.008	911096 873	9	0.058	911094 958	67	0.108	911090 103	127	0.158	911082 208	189	0.208	911071 106	255
0.009	911096 863	10	0.059	911094 890	68	0.109	911089 975	128	0.159	911082 018	190	0.209	911070 850	256
		11			70			129			191			258
0.010	911096 852	12	0.060	911094 820	70	0.110	911089 846	130	0.160	911081 827	192	0.210	911070 592	259
0.011	911096 840	13	0.061	911094 750	72	0.111	911089 716	131	0.161	911081 635	194	0.211	911070 333	260
0.012	911096 827	14	0.062	911094 678	72	0.112	911089 585	133	0.162	911081 441	195	0.212	911070 073	262
0.013	911096 812	15	0.063	911094 606	74	0.113	911089 452	133	0.163	911081 246	197	0.213	911069 811	264
0.014	911096 797	16	0.064	911094 532	75	0.114	911089 319	135	0.164	911081 049	197	0.214	911069 547	264
0.015	911096 780	17	0.065	911094 457	77	0.115	911089 184	137	0.165	911080 852	199	0.215	911069 283	266
0.016	911096 762	18	0.066	911094 380	77	0.116	911089 047	137	0.166	911080 653	200	0.216	911069 017	268
0.017	911096 743	19	0.067	911094 303	79	0.117	911088 910	139	0.167	911080 453	202	0.217	911068 749	269
0.018	911096 722	20	0.068	911094 224	80	0.118	911088 771	139	0.168	911080 251	203	0.218	911068 480	270
0.019	911096 701	21	0.069	911094 144	81	0.119	911088 632	141	0.169	911080 048	204	0.219	911068 210	272
		23			82			143			205			273
0.020	911096 678	23	0.070	911094 063	82	0.120	911088 491	143	0.170	911079 844	207	0.220	911067 938	274
0.021	911096 655	24	0.071	911093 981	83	0.121	911088 348	143	0.171	911079 639	208	0.221	911067 665	276
0.022	911096 630	25	0.072	911093 898	85	0.122	911088 205	145	0.172	911079 432	209	0.222	911067 391	277
0.023	911096 604	26	0.073	911093 813	86	0.123	911088 060	146	0.173	911079 224	211	0.223	911067 115	279
0.024	911096 576	27	0.074	911093 727	86	0.124	911087 914	147	0.174	911079 015	212	0.224	911066 838	280
0.025	911096 548	28	0.075	911093 641	88	0.125	911087 767	149	0.175	911078 804	213	0.225	911066 559	282
0.026	911096 518	29	0.076	911093 553	90	0.126	911087 618	151	0.176	911078 592	215	0.226	911066 279	284
0.027	911096 488	30	0.077	911093 463	92	0.127	911087 469	153	0.177	911078 379	216	0.227	911065 997	286
0.028	911096 456	31	0.078	911093 373	93	0.128	911087 318	153	0.178	911078 164	217	0.228	911065 714	287
0.029	911096 423	32	0.079	911093 281	94	0.129	911087 165	155	0.179	911077 948	218	0.229	911065 430	288
		34			95			157			219			290
0.030	911096 389	35	0.080	911093 188	96	0.130	911087 012	157	0.180	911077 731	220	0.230	911065 144	291
0.031	911096 353	36	0.081	911093 094	97	0.131	911086 857	158	0.181	911077 513	221	0.231	911064 857	292
0.032	911096 317	37	0.082	911092 999	97	0.132	911086 701	158	0.182	911077 293	222	0.232	911064 568	293
0.033	911096 279	38	0.083	911092 902	97	0.133	911086 544	158	0.183	911077 072	223	0.233	911064 278	294
0.034	911096 240	39	0.084	911092 805	99	0.134	911086 386	160	0.184	911076 849	224	0.234	911063 986	295
0.035	911096 200	40	0.085	911092 706	100	0.135	911086 226	161	0.185	911076 625	225	0.235	911063 693	296
0.036	911096 159	41	0.086	911092 606	101	0.136	911086 065	162	0.186	911076 400	226	0.236	911063 398	297
0.037	911096 117	42	0.087	911092 505	103	0.137	911085 903	163	0.187	911076 174	228	0.237	911063 102	297
0.038	911096 073	43	0.088	911092 402	103	0.138	911085 740	165	0.188	911075 946	229	0.238	911062 805	299
0.039	911096 028	44	0.089	911092 299	105	0.139	911085 575	165	0.189	911075 717	231	0.239	911062 506	300
		45			106			167			232			302
0.040	911095 983	46	0.090	911092 194	107	0.140	911085 410	169	0.190	911075 486	233	0.240	911062 206	303
0.041	911095 936	47	0.091	911092 088	108	0.141	911085 243	170	0.191	911075 254	234	0.241	911061 904	305
0.042	911095 887	48	0.092	911091 981	110	0.142	911085 074	172	0.192	911075 021	236	0.242	911061 601	306
0.043	911095 838	49	0.093	911091 873	111	0.143	911084 904	174	0.193	911074 787	238	0.243	911061 296	308
0.044	911095 788	50	0.094	911091 763	112	0.144	911084 734	175	0.194	911074 551	240	0.244	911060 990	309
0.045	911095 736	51	0.095	911091 652	113	0.145	911084 562	176	0.195	911074 313	241	0.245	911060 682	311
0.046	911095 683	52	0.096	911091 540	114	0.146	911084 388	177	0.196	911074 075	243	0.246	911060 373	312
0.047	911095 629	53	0.097	911091 427	116	0.147	911084 213	178	0.197	911073 835	244	0.247	911060 062	313
0.048	911095 574	54	0.098	911091 313	117	0.148	911084 037	178	0.198	911073 594	244	0.248	911059 750	315
0.049	911095 517	55	0.099	911091 197	117	0.149	911083 860	178	0.199	911073 351	244	0.249	911059 437	315
0.050	911095 460	57	0.100	911091 080	117	0.150	911083 682	178	0.200	911073 107	244	0.250	911059 122	315

Tafel IV.

 $\log \{M_2^6(m)\}.$

$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$
0.000	8.652 877	1	0.050	8.649 344	143	0.100	8.638 600	291	0.150	8.620 189	451	0.200	8.593 271	634
0.001	8.652 876	4	0.051	8.649 201	146	0.101	8.638 309	294	0.151	8.619 738	455	0.201	8.592 637	637
0.002	8.652 872	7	0.052	8.649 055	149	0.102	8.638 015	297	0.152	8.619 283	458	0.202	8.592 000	642
0.003	8.652 865	10	0.053	8.648 906	152	0.103	8.637 718	300	0.153	8.618 825	462	0.203	8.591 358	645
0.004	8.652 855	13	0.054	8.648 754	155	0.104	8.637 418	303	0.154	8.618 363	465	0.204	8.590 713	649
0.005	8.652 842	15	0.055	8.648 599	157	0.105	8.637 115	307	0.155	8.617 898	468	0.205	8.590 064	654
0.006	8.652 827	19	0.056	8.648 442	161	0.106	8.636 808	309	0.156	8.617 430	472	0.206	8.589 410	657
0.007	8.652 808	21	0.057	8.648 281	163	0.107	8.636 499	313	0.157	8.616 958	475	0.207	8.588 753	661
0.008	8.652 787	24	0.058	8.648 118	167	0.108	8.636 186	315	0.158	8.616 483	479	0.208	8.588 092	666
0.009	8.652 763	27	0.059	8.647 951	169	0.109	8.635 871	319	0.159	8.616 004	483	0.209	8.587 426	669
0.010	8.652 736	29	0.060	8.647 782	172	0.110	8.635 552	322	0.160	8.615 521	485	0.210	8.586 757	674
0.011	8.652 707	33	0.061	8.647 610	175	0.111	8.635 230	325	0.161	8.615 036	490	0.211	8.586 083	677
0.012	8.652 674	35	0.062	8.647 435	178	0.112	8.634 905	328	0.162	8.614 546	492	0.212	8.585 406	682
0.013	8.652 639	38	0.063	8.647 257	181	0.113	8.634 577	331	0.163	8.614 054	497	0.213	8.584 724	686
0.014	8.652 601	41	0.064	8.647 076	184	0.114	8.634 246	334	0.164	8.613 557	499	0.214	8.584 038	690
0.015	8.652 560	43	0.065	8.646 892	186	0.115	8.633 912	338	0.165	8.613 058	504	0.215	8.583 348	694
0.016	8.652 517	47	0.066	8.646 706	190	0.116	8.633 574	340	0.166	8.612 554	507	0.216	8.582 654	698
0.017	8.652 470	49	0.067	8.646 516	192	0.117	8.633 234	344	0.167	8.612 047	510	0.217	8.581 956	703
0.018	8.652 421	52	0.068	8.646 324	196	0.118	8.632 890	347	0.168	8.611 537	514	0.218	8.581 253	707
0.019	8.652 369	55	0.069	8.646 128	198	0.119	8.632 543	350	0.169	8.611 023	517	0.219	8.580 546	710
0.020	8.652 314	58	0.070	8.645 930	201	0.120	8.632 193	353	0.170	8.610 506	521	0.220	8.579 836	716
0.021	8.652 256	61	0.071	8.645 729	205	0.121	8.631 840	356	0.171	8.609 985	525	0.221	8.579 120	719
0.022	8.652 195	63	0.072	8.645 524	207	0.122	8.631 484	360	0.172	8.609 460	528	0.222	8.578 401	723
0.023	8.652 132	67	0.073	8.645 317	210	0.123	8.631 124	363	0.173	8.608 932	532	0.223	8.577 678	728
0.024	8.652 065	69	0.074	8.645 107	213	0.124	8.630 761	366	0.174	8.608 400	535	0.224	8.576 950	732
0.025	8.651 996	72	0.075	8.644 894	216	0.125	8.630 395	369	0.175	8.607 865	540	0.225	8.576 218	737
0.026	8.651 924	75	0.076	8.644 678	219	0.126	8.630 026	372	0.176	8.607 325	542	0.226	8.575 481	741
0.027	8.651 849	77	0.077	8.644 459	222	0.127	8.629 654	376	0.177	8.606 783	547	0.227	8.574 740	745
0.028	8.651 772	81	0.078	8.644 237	225	0.128	8.629 278	378	0.178	8.606 236	550	0.228	8.573 995	749
0.029	8.651 691	83	0.079	8.644 012	227	0.129	8.628 900	382	0.179	8.605 686	553	0.229	8.573 246	754
0.030	8.651 608	86	0.080	8.643 785	231	0.130	8.628 518	386	0.180	8.605 133	558	0.230	8.572 492	759
0.031	8.651 522	89	0.081	8.643 554	234	0.131	8.628 132	388	0.181	8.604 575	561	0.231	8.571 733	762
0.032	8.651 433	92	0.082	8.643 320	237	0.132	8.627 744	392	0.182	8.604 014	564	0.232	8.570 971	767
0.033	8.651 341	94	0.083	8.643 083	239	0.133	8.627 352	395	0.183	8.603 450	569	0.233	8.570 204	772
0.034	8.651 247	98	0.084	8.642 844	243	0.134	8.626 957	398	0.184	8.602 881	572	0.234	8.569 432	776
0.035	8.651 149	100	0.085	8.642 601	246	0.135	8.626 559	401	0.185	8.602 309	576	0.235	8.568 656	781
0.036	8.651 049	103	0.086	8.642 355	248	0.136	8.626 158	405	0.186	8.601 733	580	0.236	8.567 875	785
0.037	8.650 946	106	0.087	8.642 107	252	0.137	8.625 753	408	0.187	8.601 153	583	0.237	8.567 090	789
0.038	8.650 840	109	0.088	8.641 855	255	0.138	8.625 345	412	0.188	8.600 570	587	0.238	8.566 301	795
0.039	8.650 731	112	0.089	8.641 600	257	0.139	8.624 933	414	0.189	8.599 983	591	0.239	8.565 506	798
0.040	8.650 619	115	0.090	8.641 343	261	0.140	8.624 519	418	0.190	8.599 392	595	0.240	8.564 708	804
0.041	8.650 504	117	0.091	8.641 082	264	0.141	8.624 101	421	0.191	8.598 797	599	0.241	8.563 904	808
0.042	8.650 387	120	0.092	8.640 818	266	0.142	8.623 680	425	0.192	8.598 198	602	0.242	8.563 096	812
0.043	8.650 267	124	0.093	8.640 552	270	0.143	8.623 255	428	0.193	8.597 596	606	0.243	8.562 284	817
0.044	8.650 143	126	0.094	8.640 282	273	0.144	8.622 827	431	0.194	8.596 990	611	0.244	8.561 467	822
0.045	8.650 017	129	0.095	8.640 009	275	0.145	8.622 396	435	0.195	8.596 379	614	0.245	8.560 645	827
0.046	8.649 888	131	0.096	8.639 734	279	0.146	8.621 961	438	0.196	8.595 765	617	0.246	8.559 818	831
0.047	8.649 757	135	0.097	8.639 455	282	0.147	8.621 523	441	0.197	8.595 148	622	0.247	8.558 987	836
0.048	8.649 622	137	0.098	8.639 173	285	0.148	8.621 082	445	0.198	8.594 526	626	0.248	8.558 151	841
0.049	8.649 485	141	0.099	8.638 888	288	0.149	8.620 637	448	0.199	8.593 900	629	0.249	8.557 310	845
0.050	8.649 344		0.100	8.638 600		0.150	8.620 189		0.200	8.593 271		0.250	8.556 465	

Tafel IV.

 $\log \{M_2^7(m)\}.$

$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$
0.000	8.284 901	1	0.050	8.282 941	79	0.100	8.277 023	159	0.150	8.267 026	243	0.200	8.252 738	331
0.001	8.284 900	3	0.051	8.282 862	81	0.101	8.276 864	161	0.151	8.266 783	244	0.201	8.252 407	333
0.002	8.284 897	4	0.052	8.282 781	83	0.102	8.276 703	163	0.152	8.266 539	246	0.202	8.252 074	336
0.003	8.284 893	5	0.053	8.282 698	84	0.103	8.276 540	164	0.153	8.266 293	248	0.203	8.251 738	337
0.004	8.284 888	7	0.054	8.282 614	85	0.104	8.276 376	166	0.154	8.266 045	250	0.204	8.251 401	339
0.005	8.284 881	9	0.055	8.282 529	87	0.105	8.276 210	168	0.155	8.265 795	252	0.205	8.251 062	340
0.006	8.284 872	10	0.056	8.282 442	89	0.106	8.276 042	169	0.156	8.265 543	253	0.206	8.250 722	343
0.007	8.284 862	12	0.057	8.282 353	91	0.107	8.275 873	171	0.157	8.265 290	255	0.207	8.250 379	344
0.008	8.284 850	13	0.058	8.282 262	92	0.108	8.275 702	172	0.158	8.265 035	256	0.208	8.250 035	347
0.009	8.284 837	15	0.059	8.282 170	93	0.109	8.275 530	174	0.159	8.264 779	259	0.209	8.249 688	348
0.010	8.284 822	16	0.060	8.282 077	95	0.110	8.275 356	176	0.160	8.264 520	260	0.210	8.249 340	350
0.011	8.284 806	18	0.061	8.281 982	97	0.111	8.275 180	178	0.161	8.264 260	262	0.211	8.248 990	352
0.012	8.284 788	20	0.062	8.281 885	98	0.112	8.275 002	179	0.162	8.263 998	263	0.212	8.248 638	354
0.013	8.284 768	21	0.063	8.281 787	100	0.113	8.274 823	180	0.163	8.263 735	265	0.213	8.248 284	356
0.014	8.284 747	23	0.064	8.281 687	102	0.114	8.274 643	183	0.164	8.263 470	267	0.214	8.247 928	357
0.015	8.284 724	24	0.065	8.281 585	103	0.115	8.274 460	184	0.165	8.263 203	269	0.215	8.247 571	360
0.016	8.284 700	26	0.066	8.281 482	105	0.116	8.274 276	186	0.166	8.262 934	271	0.216	8.247 211	361
0.017	8.284 674	27	0.067	8.281 377	106	0.117	8.274 090	187	0.167	8.262 663	272	0.217	8.246 850	363
0.018	8.284 647	29	0.068	8.281 271	108	0.118	8.273 903	189	0.168	8.262 391	274	0.218	8.246 487	366
0.019	8.284 618	31	0.069	8.281 163	109	0.119	8.273 714	190	0.169	8.262 117	276	0.219	8.246 121	367
0.020	8.284 587	32	0.070	8.281 054	111	0.120	8.273 524	193	0.170	8.261 841	277	0.220	8.245 754	369
0.021	8.284 555	33	0.071	8.280 943	113	0.121	8.273 331	194	0.171	8.261 564	280	0.221	8.245 385	371
0.022	8.284 522	36	0.072	8.280 830	114	0.122	8.273 137	195	0.172	8.261 284	281	0.222	8.245 014	372
0.023	8.284 486	36	0.073	8.280 716	116	0.123	8.272 942	197	0.173	8.261 003	283	0.223	8.244 642	375
0.024	8.284 450	39	0.074	8.280 600	118	0.124	8.272 745	199	0.174	8.260 720	284	0.224	8.244 267	377
0.025	8.284 411	40	0.075	8.280 482	119	0.125	8.272 546	201	0.175	8.260 436	287	0.225	8.243 890	378
0.026	8.284 371	41	0.076	8.280 363	120	0.126	8.272 345	202	0.176	8.260 149	288	0.226	8.243 512	381
0.027	8.284 330	43	0.077	8.280 243	123	0.127	8.272 143	204	0.177	8.259 861	290	0.227	8.243 131	382
0.028	8.284 287	45	0.078	8.280 120	123	0.128	8.271 939	206	0.178	8.259 571	291	0.228	8.242 749	384
0.029	8.284 242	46	0.079	8.279 997	126	0.129	8.271 733	207	0.179	8.259 280	294	0.229	8.242 365	387
0.030	8.284 196	48	0.080	8.279 871	127	0.130	8.271 526	209	0.180	8.258 986	295	0.230	8.241 978	388
0.031	8.284 148	49	0.081	8.279 744	129	0.131	8.271 317	211	0.181	8.258 691	297	0.231	8.241 590	390
0.032	8.284 099	51	0.082	8.279 615	130	0.132	8.271 106	212	0.182	8.258 394	299	0.232	8.241 200	392
0.033	8.284 048	53	0.083	8.279 485	132	0.133	8.270 894	214	0.183	8.258 095	301	0.233	8.240 808	394
0.034	8.283 995	54	0.084	8.279 353	133	0.134	8.270 680	216	0.184	8.257 794	302	0.234	8.240 414	396
0.035	8.283 941	55	0.085	8.279 220	135	0.135	8.270 464	217	0.185	8.257 492	304	0.235	8.240 018	398
0.036	8.283 886	58	0.086	8.279 085	137	0.136	8.270 247	219	0.186	8.257 188	306	0.236	8.239 620	400
0.037	8.283 828	59	0.087	8.278 948	138	0.137	8.270 028	221	0.187	8.256 882	308	0.237	8.239 220	402
0.038	8.283 769	60	0.088	8.278 810	140	0.138	8.269 807	222	0.188	8.256 574	310	0.238	8.238 818	404
0.039	8.283 709	62	0.089	8.278 670	142	0.139	8.269 585	224	0.189	8.256 264	311	0.239	8.238 414	406
0.040	8.283 647	63	0.090	8.278 528	143	0.140	8.269 361	226	0.190	8.255 953	313	0.240	8.238 008	408
0.041	8.283 584	65	0.091	8.278 385	145	0.141	8.269 135	228	0.191	8.255 640	315	0.241	8.237 600	410
0.042	8.283 519	67	0.092	8.278 240	146	0.142	8.268 907	229	0.192	8.255 325	317	0.242	8.237 190	412
0.043	8.283 452	68	0.093	8.278 094	148	0.143	8.268 678	231	0.193	8.255 008	319	0.243	8.236 778	413
0.044	8.283 384	70	0.094	8.277 946	150	0.144	8.268 447	232	0.194	8.254 689	321	0.244	8.236 365	416
0.045	8.283 314	72	0.095	8.277 796	151	0.145	8.268 215	235	0.195	8.254 368	322	0.245	8.235 949	418
0.046	8.283 242	73	0.096	8.277 645	153	0.146	8.267 980	236	0.196	8.254 046	324	0.246	8.235 531	420
0.047	8.283 169	74	0.097	8.277 492	155	0.147	8.267 744	237	0.197	8.253 722	326	0.247	8.235 111	422
0.048	8.283 095	76	0.098	8.277 337	156	0.148	8.267 507	240	0.198	8.253 396	328	0.248	8.234 689	423
0.049	8.283 019	78	0.099	8.277 181	158	0.149	8.267 267	241	0.199	8.253 068	330	0.249	8.234 266	426
0.050	8.282 941		0.100	8.277 023		0.150	8.267 026		0.200	8.252 738		0.250	8.233 840	

Tafel IV.

 $\log \{M_2^8(m)\}.$

$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$
0.000	8 ₀₀₀₀ 458		0.050	7 ₀₉₉₆ 461	162	0.100	7 ₀₉₈₄ 298		0.150	7 ₀₉₆₃ 422		0.200	7 ₀₉₃₂ 814	
0.001	8 ₀₀₀₀ 456	2	0.051	7 ₀₉₉₆ 299	165	0.101	7 ₀₉₈₃ 969	329	0.151	7 ₀₉₆₂ 910	512	0.201	7 ₀₉₃₂ 092	722
0.002	8 ₀₀₀₀ 451	5	0.052	7 ₀₉₉₆ 134	169	0.102	7 ₀₉₈₃ 636	333	0.152	7 ₀₉₆₂ 394	516	0.202	7 ₀₉₃₁ 366	726
0.003	8 ₀₀₀₀ 443	8	0.053	7 ₀₉₉₅ 965	172	0.103	7 ₀₉₈₃ 299	337	0.153	7 ₀₉₆₁ 873	521	0.203	7 ₀₉₃₀ 635	731
0.004	8 ₀₀₀₀ 432	11	0.054	7 ₀₉₉₅ 793	175	0.104	7 ₀₉₈₂ 959	340	0.154	7 ₀₉₆₁ 349	524	0.204	7 ₀₉₂₉ 900	735
0.005	8 ₀₀₀₀ 418	14	0.055	7 ₀₉₉₅ 618	178	0.105	7 ₀₉₈₂ 616	343	0.155	7 ₀₉₆₀ 821	528	0.205	7 ₀₉₂₉ 160	740
0.006	8 ₀₀₀₀ 400	18	0.056	7 ₀₉₉₅ 440	182	0.106	7 ₀₉₈₂ 269	347	0.156	7 ₀₉₆₀ 289	532	0.206	7 ₀₉₂₈ 415	745
0.007	8 ₀₀₀₀ 379	21	0.057	7 ₀₉₉₅ 258	185	0.107	7 ₀₉₈₁ 918	351	0.157	7 ₀₉₅₉ 753	536	0.207	7 ₀₉₂₇ 666	749
0.008	8 ₀₀₀₀ 356	23	0.058	7 ₀₉₉₅ 073	188	0.108	7 ₀₉₈₁ 564	354	0.158	7 ₀₉₅₉ 214	539	0.208	7 ₀₉₂₆ 912	754
0.009	8 ₀₀₀₀ 328	28	0.059	7 ₀₉₉₄ 885	191	0.109	7 ₀₉₈₁ 206	358	0.159	7 ₀₉₅₈ 670	544	0.209	7 ₀₉₂₆ 153	759
		30						361			548			763
0.010	8 ₀₀₀₀ 298		0.060	7 ₀₉₉₄ 694	195	0.110	7 ₀₉₈₀ 845		0.160	7 ₀₉₅₈ 122		0.210	7 ₀₉₂₅ 390	
0.011	8 ₀₀₀₀ 265	33	0.061	7 ₀₉₉₄ 499	198	0.111	7 ₀₉₈₀ 481	364	0.161	7 ₀₉₅₇ 570	552	0.211	7 ₀₉₂₄ 622	768
0.012	8 ₀₀₀₀ 228	37	0.062	7 ₀₉₉₄ 301	202	0.112	7 ₀₉₈₀ 112	369	0.162	7 ₀₉₅₇ 015	555	0.212	7 ₀₉₂₃ 849	773
0.013	8 ₀₀₀₀ 188	40	0.063	7 ₀₉₉₄ 099	204	0.113	7 ₀₉₇₉ 741	371	0.163	7 ₀₉₅₆ 455	560	0.213	7 ₀₉₂₃ 072	777
0.014	8 ₀₀₀₀ 145	43	0.064	7 ₀₉₉₃ 895	208	0.114	7 ₀₉₇₉ 365	376	0.164	7 ₀₉₅₅ 891	564	0.214	7 ₀₉₂₂ 290	782
0.015	8 ₀₀₀₀ 099	46	0.065	7 ₀₉₉₃ 687	212	0.115	7 ₀₉₇₈ 986	379	0.165	7 ₀₉₅₅ 323	568	0.215	7 ₀₉₂₁ 503	787
0.016	8 ₀₀₀₀ 050	49	0.066	7 ₀₉₉₃ 475	214	0.116	7 ₀₉₇₈ 604	382	0.166	7 ₀₉₅₄ 752	571	0.216	7 ₀₉₂₀ 711	792
0.017	7 ₀₉₉₉ 997	53	0.067	7 ₀₉₉₃ 261	218	0.117	7 ₀₉₇₈ 218	386	0.167	7 ₀₉₅₄ 176	576	0.217	7 ₀₉₁₉ 914	797
0.018	7 ₀₉₉₉ 941	56	0.068	7 ₀₉₉₃ 043	221	0.118	7 ₀₉₇₇ 828	390	0.168	7 ₀₉₅₃ 596	580	0.218	7 ₀₉₁₉ 113	801
0.019	7 ₀₉₉₉ 882	59	0.069	7 ₀₉₉₂ 822	225	0.119	7 ₀₉₇₇ 435	393	0.169	7 ₀₉₅₃ 012	584	0.219	7 ₀₉₁₈ 306	807
		62			225			396			588			811
0.020	7 ₀₉₉₉ 820		0.070	7 ₀₉₉₂ 597	227	0.120	7 ₀₉₇₇ 039		0.170	7 ₀₉₅₂ 424		0.220	7 ₀₉₁₇ 495	
0.021	7 ₀₉₉₉ 755	65	0.071	7 ₀₉₉₂ 370	231	0.121	7 ₀₉₇₆ 638	401	0.171	7 ₀₉₅₁ 831	593	0.221	7 ₀₉₁₆ 679	816
0.022	7 ₀₉₉₉ 686	69	0.072	7 ₀₉₉₂ 139	235	0.122	7 ₀₉₇₆ 234	404	0.172	7 ₀₉₅₁ 235	596	0.222	7 ₀₉₁₅ 858	821
0.023	7 ₀₉₉₉ 614	72	0.073	7 ₀₉₉₁ 904	238	0.123	7 ₀₉₇₅ 827	407	0.173	7 ₀₉₅₀ 635	600	0.223	7 ₀₉₁₅ 032	826
0.024	7 ₀₉₉₉ 539	75	0.074	7 ₀₉₉₁ 666	241	0.124	7 ₀₉₇₅ 415	412	0.174	7 ₀₉₅₀ 030	605	0.224	7 ₀₉₁₄ 200	832
0.025	7 ₀₉₉₉ 461	78	0.075	7 ₀₉₉₁ 425	244	0.125	7 ₀₉₇₅ 000	415	0.175	7 ₀₉₄₉ 421	609	0.225	7 ₀₉₁₃ 364	836
0.026	7 ₀₉₉₉ 380	81	0.076	7 ₀₉₉₁ 181	248	0.126	7 ₀₉₇₄ 582	418	0.176	7 ₀₉₄₈ 808	613	0.226	7 ₀₉₁₂ 523	841
0.027	7 ₀₉₉₉ 295	85	0.077	7 ₀₉₉₀ 933	251	0.127	7 ₀₉₇₄ 160	422	0.177	7 ₀₉₄₈ 191	617	0.227	7 ₀₉₁₁ 677	846
0.028	7 ₀₉₉₉ 207	88	0.078	7 ₀₉₉₀ 682	255	0.128	7 ₀₉₇₃ 734	426	0.178	7 ₀₉₄₇ 570	621	0.228	7 ₀₉₁₀ 826	851
0.029	7 ₀₉₉₉ 116	91	0.079	7 ₀₉₉₀ 427	258	0.129	7 ₀₉₇₃ 304	430	0.179	7 ₀₉₄₆ 945	625	0.229	7 ₀₉₀₉ 970	856
		94			258			433			630			861
0.030	7 ₀₉₉₉ 022		0.080	7 ₀₉₉₀ 169	261	0.130	7 ₀₉₇₂ 871		0.180	7 ₀₉₄₆ 315		0.230	7 ₀₉₀₉ 109	
0.031	7 ₀₉₉₈ 925	97	0.081	7 ₀₉₈₉ 908	265	0.131	7 ₀₉₇₂ 434	437	0.181	7 ₀₉₄₅ 681	634	0.231	7 ₀₉₀₈ 242	867
0.032	7 ₀₉₉₈ 824	101	0.082	7 ₀₉₈₉ 643	268	0.132	7 ₀₉₇₁ 994	440	0.182	7 ₀₉₄₅ 043	638	0.232	7 ₀₉₀₇ 371	871
0.033	7 ₀₉₉₈ 720	104	0.083	7 ₀₉₈₉ 375	271	0.133	7 ₀₉₇₁ 550	444	0.183	7 ₀₉₄₄ 401	642	0.233	7 ₀₉₀₆ 494	877
0.034	7 ₀₉₉₈ 613	107	0.084	7 ₀₉₈₉ 104	275	0.134	7 ₀₉₇₁ 102	448	0.184	7 ₀₉₄₃ 754	647	0.234	7 ₀₉₀₅ 612	882
0.035	7 ₀₉₉₈ 503	110	0.085	7 ₀₉₈₈ 829	278	0.135	7 ₀₉₇₀ 650	452	0.185	7 ₀₉₄₃ 103	651	0.235	7 ₀₉₀₄ 725	887
0.036	7 ₀₉₉₈ 389	114	0.086	7 ₀₉₈₈ 551	282	0.136	7 ₀₉₇₀ 195	455	0.186	7 ₀₉₄₂ 448	655	0.236	7 ₀₉₀₃ 832	893
0.037	7 ₀₉₉₈ 273	116	0.087	7 ₀₉₈₈ 269	284	0.137	7 ₀₉₆₉ 736	459	0.187	7 ₀₉₄₁ 788	660	0.237	7 ₀₉₀₂ 935	897
0.038	7 ₀₉₉₈ 153	120	0.088	7 ₀₉₈₇ 985	289	0.138	7 ₀₉₆₉ 273	463	0.188	7 ₀₉₄₁ 124	664	0.238	7 ₀₉₀₂ 032	903
0.039	7 ₀₉₉₈ 029	124	0.089	7 ₀₉₈₇ 696	292	0.139	7 ₀₉₆₈ 806	467	0.189	7 ₀₉₄₀ 456	668	0.239	7 ₀₉₀₁ 123	909
		126			292			470			673			913
0.040	7 ₀₉₉₇ 903		0.090	7 ₀₉₈₇ 404	295	0.140	7 ₀₉₆₈ 336		0.190	7 ₀₉₃₉ 783		0.240	7 ₀₉₀₀ 210	
0.041	7 ₀₉₉₇ 773	130	0.091	7 ₀₉₈₇ 109	298	0.141	7 ₀₉₆₇ 862	474	0.191	7 ₀₉₃₉ 106	677	0.241	7 ₀₈₉₉ 291	919
0.042	7 ₀₉₉₇ 640	133	0.092	7 ₀₉₈₆ 811	302	0.142	7 ₀₉₆₇ 384	478	0.192	7 ₀₉₃₈ 425	681	0.242	7 ₀₈₉₈ 366	925
0.043	7 ₀₉₉₇ 504	136	0.093	7 ₀₉₈₆ 509	306	0.143	7 ₀₉₆₆ 902	482	0.193	7 ₀₉₃₇ 739	686	0.243	7 ₀₈₉₇ 436	930
0.044	7 ₀₉₉₇ 365	139	0.094	7 ₀₉₈₆ 203	309	0.144	7 ₀₉₆₆ 416	486	0.194	7 ₀₉₃₇ 049	690	0.244	7 ₀₈₉₆ 501	935
0.045	7 ₀₉₉₇ 222	143	0.095	7 ₀₉₈₅ 894	312	0.145	7 ₀₉₆₅ 927	489	0.195	7 ₀₉₃₆ 354	695	0.245	7 ₀₈₉₅ 560	941
0.046	7 ₀₉₉₇ 077	145	0.096	7 ₀₉₈₅ 582	316	0.146	7 ₀₉₆₅ 434	493	0.196	7 ₀₉₃₅ 655	699	0.246	7 ₀₈₉₄ 614	946
0.047	7 ₀₉₉₆ 928	149	0.097	7 ₀₉₈₅ 266	319	0.147	7 ₀₉₆₄ 937	497	0.197	7 ₀₉₃₄ 951	704	0.247	7 ₀₈₉₃ 662	952
0.048	7 ₀₉₉₆ 775	153	0.098	7 ₀₉₈₄ 947	323	0.148	7 ₀₉₆₄ 436	501	0.198	7 ₀₉₃₄ 243	708	0.248	7 ₀₈₉₂ 705	957
0.049	7 ₀₉₉₆ 620	155	0.099	7 ₀₉₈₄ 624	326	0.149	7 ₀₉₆₃ 931	505	0.199	7 ₀₉₃₃ 531	712	0.249	7 ₀₈₉₁ 742	963
0.050	7 ₀₉₉₆ 461	159	0.100	7 ₀₉₈₄ 298		0.150	7 ₀₉₆₃ 422	509	0.200	7 ₀₉₃₂ 814	717	0.250	7 ₀₈₉₀ 774	968

Tafel IV.

 $\log \{M_2^0(m)\}.$

$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$	$\pm m$	M	$-J$
0.000	7n523 336	1	0.050	7n521 120	90	0.100	7n514 427	180	0.150	7n503 120	274	0.200	7n486 959	375
0.001	7n523 335	2	0.051	7n521 030	91	0.101	7n514 247	182	0.151	7n502 846	277	0.201	7n486 584	377
0.002	7n523 333	3	0.052	7n520 939	93	0.102	7n514 065	184	0.152	7n502 569	278	0.202	7n486 207	379
0.003	7n523 328	5	0.053	7n520 846	95	0.103	7n513 881	186	0.153	7n502 291	281	0.203	7n485 828	382
0.004	7n523 322	6	0.054	7n520 751	97	0.104	7n513 695	188	0.154	7n502 010	282	0.204	7n485 446	383
0.005	7n523 314	8	0.055	7n520 654	99	0.105	7n513 507	189	0.155	7n501 728	285	0.205	7n485 063	386
0.006	7n523 304	10	0.056	7n520 555	100	0.106	7n513 318	192	0.156	7n501 443	286	0.206	7n484 677	387
0.007	7n523 293	11	0.057	7n520 455	103	0.107	7n513 126	193	0.157	7n501 157	288	0.207	7n484 290	390
0.008	7n523 280	13	0.058	7n520 352	104	0.108	7n512 933	195	0.158	7n500 869	291	0.208	7n483 900	392
0.009	7n523 265	15	0.059	7n520 248	105	0.109	7n512 738	197	0.159	7n500 578	292	0.209	7n483 508	394
		17			105			197			292			394
0.010	7n523 248	19	0.060	7n520 143	108	0.110	7n512 541	199	0.160	7n500 286	294	0.210	7n483 114	396
0.011	7n523 229	20	0.061	7n520 035	109	0.111	7n512 342	200	0.161	7n499 992	296	0.211	7n482 718	398
0.012	7n523 209	22	0.062	7n519 926	112	0.112	7n512 142	203	0.162	7n499 696	298	0.212	7n482 320	400
0.013	7n523 187	24	0.063	7n519 814	113	0.113	7n511 939	204	0.163	7n499 398	300	0.213	7n481 920	402
0.014	7n523 163	26	0.064	7n519 701	114	0.114	7n511 735	207	0.164	7n499 098	302	0.214	7n481 518	405
0.015	7n523 137	27	0.065	7n519 587	117	0.115	7n511 528	208	0.165	7n498 796	304	0.215	7n481 113	407
0.016	7n523 110	29	0.066	7n519 470	118	0.116	7n511 320	210	0.166	7n498 492	306	0.216	7n480 706	409
0.017	7n523 081	32	0.067	7n519 352	121	0.117	7n511 110	212	0.167	7n498 186	308	0.217	7n480 297	411
0.018	7n523 049	32	0.068	7n519 231	122	0.118	7n510 898	213	0.168	7n497 878	310	0.218	7n479 886	413
0.019	7n523 017	35	0.069	7n519 109	123	0.119	7n510 685	216	0.169	7n497 568	312	0.219	7n479 473	415
		35			123			216			312			415
0.020	7n522 982	36	0.070	7n518 986	126	0.120	7n510 469	217	0.170	7n497 256	314	0.220	7n479 058	417
0.021	7n522 946	38	0.071	7n518 860	127	0.121	7n510 252	220	0.171	7n496 942	316	0.221	7n478 641	420
0.022	7n522 908	40	0.072	7n518 733	130	0.122	7n510 032	221	0.172	7n496 626	318	0.222	7n478 221	422
0.023	7n522 868	42	0.073	7n518 603	131	0.123	7n509 811	223	0.173	7n496 308	320	0.223	7n477 799	424
0.024	7n522 826	43	0.074	7n518 472	132	0.124	7n509 588	225	0.174	7n495 988	322	0.224	7n477 375	426
0.025	7n522 783	45	0.075	7n518 340	135	0.125	7n509 363	227	0.175	7n495 666	324	0.225	7n476 949	428
0.026	7n522 738	47	0.076	7n518 205	137	0.126	7n509 136	229	0.176	7n495 342	326	0.226	7n476 521	431
0.027	7n522 691	49	0.077	7n518 068	138	0.127	7n508 907	230	0.177	7n495 016	328	0.227	7n476 090	432
0.028	7n522 642	50	0.078	7n517 930	140	0.128	7n508 677	233	0.178	7n494 688	330	0.228	7n475 658	435
0.029	7n522 592	53	0.079	7n517 790	142	0.129	7n508 444	234	0.179	7n494 358	332	0.229	7n475 223	437
		53			142			234			332			437
0.030	7n522 539	54	0.080	7n517 648	144	0.130	7n508 210	237	0.180	7n494 026	334	0.230	7n474 786	439
0.031	7n522 485	56	0.081	7n517 504	145	0.131	7n507 973	238	0.181	7n493 692	336	0.231	7n474 347	442
0.032	7n522 429	57	0.082	7n517 359	147	0.132	7n507 735	240	0.182	7n493 356	338	0.232	7n473 905	444
0.033	7n522 372	60	0.083	7n517 212	150	0.133	7n507 495	242	0.183	7n493 018	340	0.233	7n473 461	445
0.034	7n522 312	61	0.084	7n517 062	151	0.134	7n507 253	244	0.184	7n492 678	342	0.234	7n473 016	448
0.035	7n522 251	63	0.085	7n516 911	152	0.135	7n507 009	246	0.185	7n492 336	344	0.235	7n472 568	451
0.036	7n522 188	64	0.086	7n516 759	155	0.136	7n506 763	248	0.186	7n491 992	346	0.236	7n472 117	452
0.037	7n522 124	67	0.087	7n516 604	157	0.137	7n506 515	249	0.187	7n491 646	348	0.237	7n471 665	455
0.038	7n522 057	68	0.088	7n516 447	158	0.138	7n506 266	252	0.188	7n491 298	351	0.238	7n471 210	457
0.039	7n521 989	70	0.089	7n516 289	160	0.139	7n506 014	253	0.189	7n490 947	352	0.239	7n470 753	459
		70			160			253			352			459
0.040	7n521 919	72	0.090	7n516 129	162	0.140	7n505 761	256	0.190	7n490 595	354	0.240	7n470 294	462
0.041	7n521 847	74	0.091	7n515 967	164	0.141	7n505 505	257	0.191	7n490 241	357	0.241	7n469 832	463
0.042	7n521 773	75	0.092	7n515 803	165	0.142	7n505 248	259	0.192	7n489 884	358	0.242	7n469 369	466
0.043	7n521 698	77	0.093	7n515 638	168	0.143	7n504 989	261	0.193	7n489 526	361	0.243	7n468 903	469
0.044	7n521 621	79	0.094	7n515 470	169	0.144	7n504 728	263	0.194	7n489 165	362	0.244	7n468 434	470
0.045	7n521 542	81	0.095	7n515 301	171	0.145	7n504 465	265	0.195	7n488 803	365	0.245	7n467 964	473
0.046	7n521 461	82	0.096	7n515 130	173	0.146	7n504 200	267	0.196	7n488 438	366	0.246	7n467 491	475
0.047	7n521 379	85	0.097	7n514 957	175	0.147	7n503 933	269	0.197	7n488 072	369	0.247	7n467 016	477
0.048	7n521 294	86	0.098	7n514 782	176	0.148	7n503 664	271	0.198	7n487 703	371	0.248	7n466 539	480
0.049	7n521 208	88	0.099	7n514 606	179	0.149	7n503 393	273	0.199	7n487 332	373	0.249	7n466 059	482
0.050	7n521 120		0.100	7n514 427		0.150	7n503 120		0.200	7n486 959		0.250	7n465 577	

Tafel IV.

 $\log \{M_2^{10(m)}\}.$

$\pm m$	M	$-A$	$\pm m$	M	$-A$	$\pm m$	M	$-A$	$\pm m$	M	$-A$	$\pm m$	M	$-A$
0.000	7.357 193		0.050	7.352 918		0.100	7.339 902		0.150	7.317 539		0.200	7.284 692	
0.001	7.357 191	2	0.051	7.352 745	173	0.101	7.339 550	352	0.151	7.316 990	549	0.201	7.283 917	775
0.002	7.357 186	5	0.052	7.352 568	177	0.102	7.339 193	357	0.152	7.316 436	554	0.202	7.283 137	780
0.003	7.357 178	8	0.053	7.352 388	180	0.103	7.338 833	360	0.153	7.315 879	557	0.203	7.282 352	785
0.004	7.357 166	12	0.054	7.352 204	184	0.104	7.338 469	364	0.154	7.315 317	562	0.204	7.281 561	791
0.005	7.357 150	16	0.055	7.352 016	188	0.105	7.338 101	368	0.155	7.314 751	566	0.205	7.280 766	795
0.006	7.357 132	18	0.056	7.351 825	191	0.106	7.337 729	372	0.156	7.314 180	571	0.206	7.279 966	800
0.007	7.357 109	23	0.057	7.351 631	194	0.107	7.337 354	375	0.157	7.313 606	574	0.207	7.279 161	805
0.008	7.357 084	25	0.058	7.351 433	198	0.108	7.336 975	379	0.158	7.313 027	579	0.208	7.278 351	810
0.009	7.357 055	29	0.059	7.351 232	201	0.109	7.336 592	383	0.159	7.312 444	583	0.209	7.277 535	816
		32			205			387			588			820
0.010	7.357 023		0.060	7.351 027		0.110	7.336 205		0.160	7.311 856		0.210	7.276 715	
0.011	7.356 987	36	0.061	7.350 819	208	0.111	7.335 815	390	0.161	7.311 265	591	0.211	7.275 889	826
0.012	7.356 947	40	0.062	7.350 607	212	0.112	7.335 420	395	0.162	7.310 669	596	0.212	7.275 058	831
0.013	7.356 905	42	0.063	7.350 391	216	0.113	7.335 022	398	0.163	7.310 069	600	0.213	7.274 223	835
0.014	7.356 859	46	0.064	7.350 172	219	0.114	7.334 621	401	0.164	7.309 464	605	0.214	7.273 382	841
0.015	7.356 809	50	0.065	7.349 950	222	0.115	7.334 215	406	0.165	7.308 855	609	0.215	7.272 535	847
0.016	7.356 756	53	0.066	7.349 724	226	0.116	7.333 805	410	0.166	7.308 242	613	0.216	7.271 684	851
0.017	7.356 700	56	0.067	7.349 494	230	0.117	7.333 392	413	0.167	7.307 624	618	0.217	7.270 827	857
0.018	7.356 640	60	0.068	7.349 261	233	0.118	7.332 975	417	0.168	7.307 002	622	0.218	7.269 965	862
0.019	7.356 577	63	0.069	7.349 025	236	0.119	7.332 554	421	0.169	7.306 376	626	0.219	7.269 098	867
		66			240			425			631			873
0.020	7.356 511		0.070	7.348 785		0.120	7.332 129		0.170	7.305 745		0.220	7.268 225	
0.021	7.356 441	70	0.071	7.348 541	244	0.121	7.331 700	429	0.171	7.305 109	636	0.221	7.267 347	878
0.022	7.356 368	73	0.072	7.348 293	248	0.122	7.331 267	433	0.172	7.304 470	639	0.222	7.266 464	883
0.023	7.356 291	77	0.073	7.348 043	250	0.123	7.330 831	436	0.173	7.303 825	645	0.223	7.265 575	889
0.024	7.356 211	80	0.074	7.347 788	255	0.124	7.330 390	441	0.174	7.303 177	648	0.224	7.264 681	894
0.025	7.356 127	84	0.075	7.347 530	258	0.125	7.329 946	444	0.175	7.302 524	653	0.225	7.263 781	900
0.026	7.356 040	87	0.076	7.347 268	262	0.126	7.329 498	448	0.176	7.301 866	658	0.226	7.262 876	905
0.027	7.355 949	91	0.077	7.347 003	265	0.127	7.329 045	453	0.177	7.301 204	662	0.227	7.261 966	910
0.028	7.355 855	94	0.078	7.346 734	269	0.128	7.328 589	456	0.178	7.300 537	667	0.228	7.261 050	916
0.029	7.355 758	97	0.079	7.346 462	272	0.129	7.328 129	460	0.179	7.299 866	671	0.229	7.260 128	922
		101			276			464			676			927
0.030	7.355 657		0.080	7.346 186		0.130	7.327 665		0.180	7.299 190		0.230	7.259 201	
0.031	7.355 553	104	0.081	7.345 906	280	0.131	7.327 197	468	0.181	7.298 510	680	0.231	7.258 269	932
0.032	7.355 446	107	0.082	7.345 623	283	0.132	7.326 725	472	0.182	7.297 825	685	0.232	7.257 330	939
0.033	7.355 335	111	0.083	7.345 337	286	0.133	7.326 249	476	0.183	7.297 135	690	0.233	7.256 386	944
0.034	7.355 220	115	0.084	7.345 046	291	0.134	7.325 769	480	0.184	7.296 441	694	0.234	7.255 437	949
0.035	7.355 102	118	0.085	7.344 752	294	0.135	7.325 285	484	0.185	7.295 742	699	0.235	7.254 482	955
0.036	7.354 981	121	0.086	7.344 454	298	0.136	7.324 797	488	0.186	7.295 039	703	0.236	7.253 521	961
0.037	7.354 856	125	0.087	7.344 153	301	0.137	7.324 305	492	0.187	7.294 331	708	0.237	7.252 554	967
0.038	7.354 727	129	0.088	7.343 848	305	0.138	7.323 809	496	0.188	7.293 618	713	0.238	7.251 581	973
0.039	7.354 596	131	0.089	7.343 539	309	0.139	7.323 309	500	0.189	7.292 900	718	0.239	7.250 603	978
		135			312			504			722			984
0.040	7.354 461		0.090	7.343 227		0.140	7.322 805		0.190	7.292 178		0.240	7.249 619	
0.041	7.354 322	139	0.091	7.342 911	316	0.141	7.322 297	508	0.191	7.291 451	727	0.241	7.248 629	990
0.042	7.354 180	142	0.092	7.342 592	319	0.142	7.321 785	512	0.192	7.290 719	732	0.242	7.247 633	996
0.043	7.354 034	146	0.093	7.342 268	324	0.143	7.321 269	516	0.193	7.289 983	736	0.243	7.246 631	1002
0.044	7.353 885	149	0.094	7.341 941	327	0.144	7.320 748	521	0.194	7.289 242	741	0.244	7.245 623	1008
0.045	7.353 733	152	0.095	7.341 611	330	0.145	7.320 224	524	0.195	7.288 496	746	0.245	7.244 609	1014
0.046	7.353 577	156	0.096	7.341 277	334	0.146	7.319 695	529	0.196	7.287 745	751	0.246	7.243 590	1019
0.047	7.353 417	160	0.097	7.340 939	338	0.147	7.319 162	533	0.197	7.286 989	756	0.247	7.242 564	1026
0.048	7.353 254	163	0.098	7.340 597	342	0.148	7.318 625	537	0.198	7.286 228	761	0.248	7.241 532	1032
0.049	7.353 088	166	0.099	7.340 251	346	0.149	7.318 084	541	0.199	7.285 463	765	0.249	7.240 494	1038
0.050	7.352 918	170	0.100	7.339 902	349	0.150	7.317 539	545	0.200	7.284 692	771	0.250	7.239 450	1044

Tafel V.

vergl. pag. 35.

$Q_1^1 - 1 : 12$
 $Q_1^3 + 11 : 720$
 $Q_1^5 - 191 : 60480$
 $Q_1^7 + 2497 : 36\ 28800$
 $Q_1^9 - 14797 : 958\ 00320$
 $Q_1^{11} + 924\ 27157 : 261\ 53487\ 36000$
 $Q_1^{13} - 367\ 40617 : 448\ 34549\ 76000$
 $Q_1^{15} + 6\ 14309\ 43169 : 32\ 01186\ 85286\ 40000$
 $Q_1^{17} - 2313\ 39458\ 92303 : 51090\ 94217\ 17094\ 40000$

$Q_1^{19} + 1639\ 96886\ 81447 : 1\ 52579\ 28431\ 37024\ 00000$

$P_1^1 + 1 : 24$
 $P_1^3 - 17 : 5760$
 $P_1^5 + 367 : 9\ 67680$
 $P_1^7 - 27859 : 4644\ 86400$
 $P_1^9 + 12\ 95803 : 12\ 26244\ 09600$
 $P_1^{11} - 53292\ 42827 : 2\ 67811\ 71056\ 64000$
 $P_1^{13} + 2\ 51988\ 57127 : 64\ 27481\ 05359\ 36000$
 $P_1^{15} - 1195\ 97121\ 66949 : 1\ 49852\ 12970\ 66393\ 60000$
 $P_1^{17} + 11\ 15323\ 97734\ 19941 : 6696\ 59197\ 23302\ 99719\ 68000$
 $P_1^{19} - 31326\ 45059\ 69545\ 10807 : 883\ 95014\ 03475\ 99562\ 99776\ 00000$

$\log Q_1^1$ 8,92081 87539 52375 17228 — 10
 $\log Q_1^3$ 8,18406 01887 26956 58052 — 10
 $\log Q_1^5$ 7,24994 15847 54577 41897 — 10
 $\log Q_1^7$ 6,83765 55094 74554 00968 — 10
 $\log Q_1^9$ 6,18880 67140 59646 43697 — 10
 $\log Q_1^{11}$ 5,54826 99878 35275 08440 — 10
 $\log Q_1^{13}$ 4,91353 36324 92680 95240 — 10
 $\log Q_1^{15}$ 4,28307 61586 36488 77263 — 10
 $\log Q_1^{17}$ 3,65590 58038 69592 29695 — 10
 $\log Q_1^{19}$ 3,03134 00303 59002 66855 — 10

$\log P_1^1$ 8,61978 87582 88393 97706 — 10
 $\log P_1^3$ 7,27002 64379 55061 88267 — 10
 $\log P_1^5$ 6,57893 42991 03014 43847 — 10
 $\log P_1^7$ 5,77799 25208 24003 32215 — 10
 $\log P_1^9$ 5,02396 20516 80116 06360 — 10
 $\log P_1^{11}$ 4,29883 59458 96757 75456 — 10
 $\log P_1^{13}$ 3,59334 00390 27949 00215 — 10
 $\log P_1^{15}$ 2,90205 78081 19206 78783 — 10
 $\log P_1^{17}$ 2,22154 72009 05976 08148 — 10
 $\log P_1^{19}$ 1,54948 34213 88368 16947 — 10

$Q_2^0 + 1 : 12$
 $Q_2^2 - 1 : 240$
 $Q_2^4 + 31 : 60480$
 $Q_2^6 - 289 : 36\ 28800$
 $Q_2^8 + 317 : 228\ 09600$
 $Q_2^{10} - 68\ 03477 : 261\ 53487\ 36000$
 $Q_2^{12} + 32\ 03699 : 627\ 68369\ 66400$
 $Q_2^{14} - 6632\ 25741 : 6\ 40237\ 37057\ 28000$
 $Q_2^{16} + 22\ 03877\ 95651 : 10218\ 18843\ 43418\ 88000$
 $Q_2^{18} - 15447\ 34732\ 56043 : 337\ 20021\ 83332\ 82304\ 00000$

$P_2^0 - 1 : 24$
 $P_2^2 + 17 : 1920$
 $P_2^4 - 367 : 1\ 93536$
 $P_2^6 + 27859 : 663\ 55200$
 $P_2^8 - 12\ 95803 : 1\ 36249\ 34400$
 $P_2^{10} + 53292\ 42827 : 24346\ 51914\ 24000$
 $P_2^{12} - 2\ 51988\ 57127 : 4\ 94421\ 61950\ 72000$
 $P_2^{14} + 1195\ 97121\ 66949 : 9990\ 14198\ 04426\ 24000$
 $P_2^{16} - 11\ 15323\ 97734\ 19941 : 393\ 91717\ 48429\ 58807\ 04000$
 $P_2^{18} + 31326\ 45059\ 69545\ 10807 : 46\ 52369\ 15972\ 42082\ 26304\ 00000$

$\log Q_2^0$ 8,92081 87539 52375 17228 — 10
 $\log Q_2^2$ 7,61978 87582 88393 97706 — 10
 $\log Q_2^4$ 6,70974 99113 41122 56100 — 10
 $\log Q_2^6$ 5,90113 48098 79754 10591 — 10
 $\log Q_2^8$ 5,14294 15928 69027 14291 — 10
 $\log Q_2^{10}$ 4,41520 13141 51965 43582 — 10
 $\log Q_2^{12}$ 3,70791 08571 71699 08962 — 10
 $\log Q_2^{14}$ 3,01532 03533 68939 05852 — 10
 $\log Q_2^{16}$ 2,33381 36337 74462 41189 — 10
 $\log Q_2^{18}$ 1,66096 60643 89676 13374 — 10

$\log P_2^0$ 8,61978 87582 88393 97706 — 10
 $\log P_2^2$ 7,94714 76926 74724 31996 — 10
 $\log P_2^4$ 7,27790 43034 39033 24326 — 10
 $\log P_2^6$ 6,62309 05608 38260 15286 — 10
 $\log P_2^8$ 5,97820 45611 19440 93819 — 10
 $\log P_2^{10}$ 5,34022 86310 54982 79531 — 10
 $\log P_2^{12}$ 4,70728 33913 34785 77136 — 10
 $\log P_2^{14}$ 4,07814 90671 74888 02991 — 10
 $\log P_2^{16}$ 3,45199 61222 84250 01002 — 10
 $\log P_2^{18}$ 2,82823 70223 41197 13100 — 10

Tafel VI.

 $\log \{Q_1^{-1}(n)\}$.

vergl. pag. 41.

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	8 _n 920 819		0.050	8 _n 914 255	267	0.100	8 _n 893 947	558	0.150	8 _n 857 835	908	0.200	8 _n 801 632	1377
0.001	8 _n 920 816	3	0.051	8 _n 913 988	273	0.101	8 _n 893 389	564	0.151	8 _n 856 927	915	0.201	8 _n 800 255	1388
0.002	8 _n 920 808	8	0.052	8 _n 913 715	278	0.102	8 _n 892 825	570	0.152	8 _n 856 012	924	0.202	8 _n 798 867	1400
0.003	8 _n 920 795	13	0.053	8 _n 913 437	284	0.103	8 _n 892 255	576	0.153	8 _n 855 088	932	0.203	8 _n 797 467	1411
0.004	8 _n 920 777	18	0.054	8 _n 913 153	289	0.104	8 _n 891 679	583	0.154	8 _n 854 156	940	0.204	8 _n 796 056	1423
0.005	8 _n 920 754	23	0.055	8 _n 912 864	295	0.105	8 _n 891 096	589	0.155	8 _n 853 216	947	0.205	8 _n 794 633	1434
0.006	8 _n 920 725	29	0.056	8 _n 912 569	300	0.106	8 _n 890 507	596	0.156	8 _n 852 269	957	0.206	8 _n 793 199	1446
0.007	8 _n 920 691	34	0.057	8 _n 912 269	306	0.107	8 _n 889 911	602	0.157	8 _n 851 312	964	0.207	8 _n 791 753	1458
0.008	8 _n 920 652	39	0.058	8 _n 911 963	311	0.108	8 _n 889 309	608	0.158	8 _n 850 348	973	0.208	8 _n 790 295	1470
0.009	8 _n 920 608	44	0.059	8 _n 911 652	317	0.109	8 _n 888 701	615	0.159	8 _n 849 375	981	0.209	8 _n 788 825	1483
		50												
0.010	8 _n 920 558	55	0.060	8 _n 911 335	322	0.110	8 _n 888 086	621	0.160	8 _n 848 394	989	0.210	8 _n 787 342	1494
0.011	8 _n 920 503	60	0.061	8 _n 911 013	328	0.111	8 _n 887 465	628	0.161	8 _n 847 405	998	0.211	8 _n 785 848	1506
0.012	8 _n 920 443	65	0.062	8 _n 910 685	334	0.112	8 _n 886 837	635	0.162	8 _n 846 407	1006	0.212	8 _n 784 342	1519
0.013	8 _n 920 378	70	0.063	8 _n 910 351	339	0.113	8 _n 886 202	641	0.163	8 _n 845 401	1015	0.213	8 _n 782 823	1532
0.014	8 _n 920 308	76	0.064	8 _n 910 012	344	0.114	8 _n 885 561	648	0.164	8 _n 844 386	1023	0.214	8 _n 781 291	1544
0.015	8 _n 920 232	81	0.065	8 _n 909 668	351	0.115	8 _n 884 913	654	0.165	8 _n 843 363	1032	0.215	8 _n 779 747	1557
0.016	8 _n 920 151	86	0.066	8 _n 909 317	356	0.116	8 _n 884 259	661	0.166	8 _n 842 331	1041	0.216	8 _n 778 190	1570
0.017	8 _n 920 065	91	0.067	8 _n 908 961	362	0.117	8 _n 883 598	667	0.167	8 _n 841 290	1050	0.217	8 _n 776 620	1583
0.018	8 _n 919 974	97	0.068	8 _n 908 599	367	0.118	8 _n 882 931	675	0.168	8 _n 840 240	1058	0.218	8 _n 775 037	1595
0.019	8 _n 919 877	102	0.069	8 _n 908 232	373	0.119	8 _n 882 256	681	0.169	8 _n 839 182	1068	0.219	8 _n 773 442	1610
		107												
0.020	8 _n 919 775	112	0.070	8 _n 907 859	379	0.120	8 _n 881 575	688	0.170	8 _n 838 114	1076	0.220	8 _n 771 832	1622
0.021	8 _n 919 668	118	0.071	8 _n 907 480	384	0.121	8 _n 880 887	695	0.171	8 _n 837 038	1085	0.221	8 _n 770 210	1636
0.022	8 _n 919 556	123	0.072	8 _n 907 096	390	0.122	8 _n 880 192	701	0.172	8 _n 835 953	1095	0.222	8 _n 768 574	1649
0.023	8 _n 919 438	128	0.073	8 _n 906 706	396	0.123	8 _n 879 491	709	0.173	8 _n 834 858	1103	0.223	8 _n 766 925	1664
0.024	8 _n 919 315	133	0.074	8 _n 906 310	402	0.124	8 _n 878 782	715	0.174	8 _n 833 755	1113	0.224	8 _n 765 261	1677
0.025	8 _n 919 187	139	0.075	8 _n 905 908	407	0.125	8 _n 878 067	723	0.175	8 _n 832 642	1122	0.225	8 _n 763 584	1691
0.026	8 _n 919 054	144	0.076	8 _n 905 501	413	0.126	8 _n 877 344	729	0.176	8 _n 831 520	1131	0.226	8 _n 761 893	1706
0.027	8 _n 918 915	149	0.077	8 _n 905 088	419	0.127	8 _n 876 615	736	0.177	8 _n 830 389	1141	0.227	8 _n 760 187	1719
0.028	8 _n 918 771	155	0.078	8 _n 904 669	425	0.128	8 _n 875 879	743	0.178	8 _n 829 248	1150	0.228	8 _n 758 468	1734
0.029	8 _n 918 622	160	0.079	8 _n 904 244	431	0.129	8 _n 875 136	751	0.179	8 _n 828 098	1160	0.229	8 _n 756 734	1749
		165												
0.030	8 _n 918 467	170	0.080	8 _n 903 813	436	0.130	8 _n 874 385	757	0.180	8 _n 826 938	1169	0.230	8 _n 754 985	1763
0.031	8 _n 918 307	176	0.081	8 _n 903 377	443	0.131	8 _n 873 628	765	0.181	8 _n 825 769	1179	0.231	8 _n 753 222	1779
0.032	8 _n 918 142	181	0.082	8 _n 902 934	448	0.132	8 _n 872 863	772	0.182	8 _n 824 590	1188	0.232	8 _n 751 443	1793
0.033	8 _n 917 972	186	0.083	8 _n 902 486	454	0.133	8 _n 872 091	779	0.183	8 _n 823 402	1199	0.233	8 _n 749 650	1808
0.034	8 _n 917 796	192	0.084	8 _n 902 032	460	0.134	8 _n 871 312	786	0.184	8 _n 822 203	1208	0.234	8 _n 747 842	1824
0.035	8 _n 917 615	197	0.085	8 _n 901 572	466	0.135	8 _n 870 526	794	0.185	8 _n 820 995	1219	0.235	8 _n 746 018	1840
0.036	8 _n 917 429	203	0.086	8 _n 901 106	472	0.136	8 _n 869 732	801	0.186	8 _n 819 776	1228	0.236	8 _n 744 178	1855
0.037	8 _n 917 237	208	0.087	8 _n 900 634	478	0.137	8 _n 868 931	808	0.187	8 _n 818 548	1238	0.237	8 _n 742 323	1871
0.038	8 _n 917 040	213	0.088	8 _n 900 156	484	0.138	8 _n 868 123	816	0.188	8 _n 817 310	1249	0.238	8 _n 740 452	1887
0.039	8 _n 916 837	218	0.089	8 _n 899 672	490	0.139	8 _n 867 307	823	0.189	8 _n 816 061	1259	0.239	8 _n 738 565	1903
		224												
0.040	8 _n 916 629	229	0.090	8 _n 899 182	496	0.140	8 _n 866 484	830	0.190	8 _n 814 802	1269	0.240	8 _n 736 662	1919
0.041	8 _n 916 416	235	0.091	8 _n 898 686	502	0.141	8 _n 865 654	838	0.191	8 _n 813 533	1279	0.241	8 _n 734 743	1936
0.042	8 _n 916 198	240	0.092	8 _n 898 184	508	0.142	8 _n 864 816	846	0.192	8 _n 812 254	1291	0.242	8 _n 732 807	1953
0.043	8 _n 915 974	246	0.093	8 _n 897 676	515	0.143	8 _n 863 970	853	0.193	8 _n 810 963	1300	0.243	8 _n 730 854	1970
0.044	8 _n 915 745	251	0.094	8 _n 897 161	520	0.144	8 _n 863 117	861	0.194	8 _n 809 663	1311	0.244	8 _n 728 884	1987
0.045	8 _n 915 510	256	0.095	8 _n 896 641	526	0.145	8 _n 862 256	869	0.195	8 _n 808 352	1322	0.245	8 _n 726 897	2004
0.046	8 _n 915 270	262	0.096	8 _n 896 115	533	0.146	8 _n 861 387	876	0.196	8 _n 807 030	1333	0.246	8 _n 724 893	2022
0.047	8 _n 915 024	267	0.097	8 _n 895 582	539	0.147	8 _n 860 511	884	0.197	8 _n 805 697	1344	0.247	8 _n 722 871	2039
0.048	8 _n 914 773	273	0.098	8 _n 895 043	545	0.148	8 _n 859 627	892	0.198	8 _n 804 353	1355	0.248	8 _n 720 832	2058
0.049	8 _n 914 517	278	0.099	8 _n 894 498	551	0.149	8 _n 858 735	900	0.199	8 _n 802 998	1366	0.249	8 _n 718 774	2075
0.050	8 _n 914 255		0.100	8 _n 893 947		0.150	8 _n 857 835		0.200	8 _n 801 632		0.250	8 _n 716 699	

Tafel VI.

 $\log \{Q_1^3(n)\}$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	8.184 060		0.050	8.178 105	242	0.100	8.159 826		0.150	8.127 878	794	0.200	8.079 583	1161
0.001	8.184 058	2	0.051	8.177 863	247	0.101	8.159 327	499	0.151	8.127 084	800	0.201	8.078 422	1170
0.002	8.184 051	12	0.052	8.177 616	252	0.102	8.158 823	504	0.152	8.126 284	807	0.202	8.077 252	1178
0.003	8.184 039	17	0.053	8.177 364	257	0.103	8.158 314	509	0.153	8.125 477	814	0.203	8.076 074	1187
0.004	8.184 022	21	0.054	8.177 107	261	0.104	8.157 799	515	0.154	8.124 663	820	0.204	8.074 887	1195
0.005	8.184 001	26	0.055	8.176 846	267	0.105	8.157 278	521	0.155	8.123 843	826	0.205	8.073 692	1204
0.006	8.183 975	31	0.056	8.176 579	271	0.106	8.156 752	526	0.156	8.123 017	834	0.206	8.072 488	1213
0.007	8.183 944	35	0.057	8.176 308	277	0.107	8.156 221	531	0.157	8.122 183	839	0.207	8.071 275	1221
0.008	8.183 909	41	0.058	8.176 031	281	0.108	8.155 683	538	0.158	8.121 344	847	0.208	8.070 054	1230
0.009	8.183 868	45	0.059	8.175 750	287	0.109	8.155 141	542	0.159	8.120 497	853	0.209	8.068 824	1239
0.010	8.183 823	50	0.060	8.175 463	291	0.110	8.154 593	548	0.160	8.119 644	861	0.210	8.067 585	1249
0.011	8.183 773	54	0.061	8.175 172	297	0.111	8.154 039	554	0.161	8.118 783	867	0.211	8.066 336	1257
0.012	8.183 719	59	0.062	8.174 875	301	0.112	8.153 479	560	0.162	8.117 916	873	0.212	8.065 079	1266
0.013	8.183 660	64	0.063	8.174 574	306	0.113	8.152 914	565	0.163	8.117 043	881	0.213	8.063 813	1275
0.014	8.183 596	69	0.064	8.174 268	312	0.114	8.152 344	570	0.164	8.116 162	887	0.214	8.062 538	1284
0.015	8.183 527	74	0.065	8.173 956	316	0.115	8.151 768	576	0.165	8.115 275	895	0.215	8.061 254	1294
0.016	8.183 453	78	0.066	8.173 640	322	0.116	8.151 186	582	0.166	8.114 380	901	0.216	8.059 960	1303
0.017	8.183 375	83	0.067	8.173 318	326	0.117	8.150 598	588	0.167	8.113 479	908	0.217	8.058 657	1312
0.018	8.183 292	88	0.068	8.172 992	331	0.118	8.150 005	593	0.168	8.112 571	916	0.218	8.057 345	1322
0.019	8.183 204	92	0.069	8.172 661	337	0.119	8.149 405	600	0.169	8.111 655	922	0.219	8.056 023	1331
0.020	8.183 112	97	0.070	8.172 324	342	0.120	8.148 801	604	0.170	8.110 733	930	0.220	8.054 692	1341
0.021	8.183 015	103	0.071	8.171 982	346	0.121	8.148 190	611	0.171	8.109 803	937	0.221	8.053 351	1351
0.022	8.182 912	106	0.072	8.171 636	352	0.122	8.147 574	616	0.172	8.108 866	943	0.222	8.052 000	1360
0.023	8.182 806	112	0.073	8.171 284	357	0.123	8.146 951	623	0.173	8.107 923	952	0.223	8.050 640	1370
0.024	8.182 694	116	0.074	8.170 927	362	0.124	8.146 323	628	0.174	8.106 971	958	0.224	8.049 270	1380
0.025	8.182 578	122	0.075	8.170 565	367	0.125	8.145 689	634	0.175	8.106 013	965	0.225	8.047 890	1389
0.026	8.182 456	125	0.076	8.170 198	372	0.126	8.145 050	639	0.176	8.105 048	973	0.226	8.046 501	1400
0.027	8.182 331	131	0.077	8.169 826	377	0.127	8.144 404	646	0.177	8.104 075	981	0.227	8.045 101	1410
0.028	8.182 200	136	0.078	8.169 449	383	0.128	8.143 752	652	0.178	8.103 094	987	0.228	8.043 691	1419
0.029	8.182 064	140	0.079	8.169 066	387	0.129	8.143 095	657	0.179	8.102 107	995	0.229	8.042 272	1431
0.030	8.181 924	145	0.080	8.168 679	393	0.130	8.142 432	663	0.180	8.101 112	1003	0.230	8.040 841	1440
0.031	8.181 779	150	0.081	8.168 286	398	0.131	8.141 762	670	0.181	8.100 109	1010	0.231	8.039 401	1451
0.032	8.181 629	155	0.082	8.167 888	403	0.132	8.141 087	675	0.182	8.099 099	1018	0.232	8.037 950	1461
0.033	8.181 474	159	0.083	8.167 485	408	0.133	8.140 405	682	0.183	8.098 081	1025	0.233	8.036 489	1471
0.034	8.181 315	165	0.084	8.167 077	414	0.134	8.139 718	687	0.184	8.097 056	1033	0.234	8.035 018	1483
0.035	8.181 150	169	0.085	8.166 663	419	0.135	8.139 024	694	0.185	8.096 023	1040	0.235	8.033 535	1493
0.036	8.180 981	174	0.086	8.166 244	424	0.136	8.138 325	699	0.186	8.094 983	1049	0.236	8.032 042	1503
0.037	8.180 807	178	0.087	8.165 820	429	0.137	8.137 619	706	0.187	8.093 934	1056	0.237	8.030 539	1515
0.038	8.180 629	184	0.088	8.165 391	434	0.138	8.136 907	712	0.188	8.092 878	1064	0.238	8.029 024	1526
0.039	8.180 445	189	0.089	8.164 957	440	0.139	8.136 189	718	0.189	8.091 814	1071	0.239	8.027 498	1536
0.040	8.180 256	193	0.090	8.164 517	445	0.140	8.135 465	724	0.190	8.090 743	1080	0.240	8.025 962	1548
0.041	8.180 063	198	0.091	8.164 072	451	0.141	8.134 735	730	0.191	8.089 663	1087	0.241	8.024 414	1559
0.042	8.179 865	203	0.092	8.163 621	455	0.142	8.133 998	737	0.192	8.088 576	1096	0.242	8.022 855	1570
0.043	8.179 662	208	0.093	8.163 166	461	0.143	8.133 255	743	0.193	8.087 480	1104	0.243	8.021 283	1582
0.044	8.179 454	212	0.094	8.162 705	467	0.144	8.132 506	749	0.194	8.086 376	1111	0.244	8.019 705	1594
0.045	8.179 242	218	0.095	8.162 238	471	0.145	8.131 751	755	0.195	8.085 265	1120	0.245	8.018 110	1603
0.046	8.179 024	223	0.096	8.161 767	477	0.146	8.130 989	762	0.196	8.084 145	1128	0.246	8.016 506	1617
0.047	8.178 801	227	0.097	8.161 290	483	0.147	8.130 221	768	0.197	8.083 017	1136	0.247	8.014 889	1628
0.048	8.178 574	232	0.098	8.160 807	488	0.148	8.129 446	775	0.198	8.081 881	1145	0.248	8.013 261	1640
0.049	8.178 342	237	0.099	8.160 319	493	0.149	8.128 665	781	0.199	8.080 736	1153	0.249	8.011 621	1652
0.050	8.178 105		0.100	8.159 826		0.150	8.127 878		0.200	8.079 583		0.250	8.009 969	

Tafel VI.

 $\log \{Q_1^1(n)\}.$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	8 _n 142 668	1	0.050	8 _n 142 016	27	0.100	8 _n 140 054	53	0.150	8 _n 136 765	80	0.200	8 _n 132 117	107
0.001	8 _n 142 667	0	0.051	8 _n 141 989	27	0.101	8 _n 140 001	53	0.151	8 _n 136 685	80	0.201	8 _n 132 010	107
0.002	8 _n 142 667	2	0.052	8 _n 141 962	27	0.102	8 _n 139 948	54	0.152	8 _n 136 605	81	0.202	8 _n 131 903	109
0.003	8 _n 142 665	2	0.053	8 _n 141 935	28	0.103	8 _n 139 894	54	0.153	8 _n 136 524	81	0.203	8 _n 131 794	108
0.004	8 _n 142 663	2	0.054	8 _n 141 907	28	0.104	8 _n 139 840	55	0.154	8 _n 136 443	81	0.204	8 _n 131 686	110
0.005	8 _n 142 661	3	0.055	8 _n 141 879	29	0.105	8 _n 139 785	55	0.155	8 _n 136 362	83	0.205	8 _n 131 576	110
0.006	8 _n 142 658	3	0.056	8 _n 141 850	30	0.106	8 _n 139 730	56	0.156	8 _n 136 279	82	0.206	8 _n 131 466	110
0.007	8 _n 142 655	4	0.057	8 _n 141 820	30	0.107	8 _n 139 674	57	0.157	8 _n 136 197	84	0.207	8 _n 131 356	111
0.008	8 _n 142 651	5	0.058	8 _n 141 790	30	0.108	8 _n 139 617	56	0.158	8 _n 136 113	84	0.208	8 _n 131 245	112
0.009	8 _n 142 646	5	0.059	8 _n 141 760	30	0.109	8 _n 139 561	58	0.159	8 _n 136 029	84	0.209	8 _n 131 133	112
0.010	8 _n 142 641	5	0.060	8 _n 141 728	31	0.110	8 _n 139 503	58	0.160	8 _n 135 945	85	0.210	8 _n 131 021	112
0.011	8 _n 142 636	6	0.061	8 _n 141 697	31	0.111	8 _n 139 445	59	0.161	8 _n 135 860	85	0.211	8 _n 130 909	114
0.012	8 _n 142 630	6	0.062	8 _n 141 665	32	0.112	8 _n 139 386	59	0.162	8 _n 135 775	86	0.212	8 _n 130 795	113
0.013	8 _n 142 624	7	0.063	8 _n 141 632	33	0.113	8 _n 139 327	59	0.163	8 _n 135 689	87	0.213	8 _n 130 682	115
0.014	8 _n 142 617	8	0.064	8 _n 141 599	33	0.114	8 _n 139 268	60	0.164	8 _n 135 602	87	0.214	8 _n 130 567	115
0.015	8 _n 142 609	8	0.065	8 _n 141 565	34	0.115	8 _n 139 208	61	0.165	8 _n 135 515	88	0.215	8 _n 130 452	115
0.016	8 _n 142 601	9	0.066	8 _n 141 531	34	0.116	8 _n 139 147	61	0.166	8 _n 135 427	88	0.216	8 _n 130 337	116
0.017	8 _n 142 592	9	0.067	8 _n 141 496	35	0.117	8 _n 139 086	62	0.167	8 _n 135 339	89	0.217	8 _n 130 221	117
0.018	8 _n 142 583	9	0.068	8 _n 141 461	35	0.118	8 _n 139 024	62	0.168	8 _n 135 250	89	0.218	8 _n 130 104	117
0.019	8 _n 142 574	11	0.069	8 _n 141 425	36	0.119	8 _n 138 962	63	0.169	8 _n 135 161	90	0.219	8 _n 129 987	118
0.020	8 _n 142 563	10	0.070	8 _n 141 389	37	0.120	8 _n 138 899	63	0.170	8 _n 135 071	91	0.220	8 _n 129 869	118
0.021	8 _n 142 553	12	0.071	8 _n 141 352	37	0.121	8 _n 138 836	64	0.171	8 _n 134 980	91	0.221	8 _n 129 751	119
0.022	8 _n 142 541	11	0.072	8 _n 141 315	37	0.122	8 _n 138 772	65	0.172	8 _n 134 889	91	0.222	8 _n 129 632	120
0.023	8 _n 142 530	13	0.073	8 _n 141 277	38	0.123	8 _n 138 707	65	0.173	8 _n 134 798	92	0.223	8 _n 129 512	120
0.024	8 _n 142 517	12	0.074	8 _n 141 238	39	0.124	8 _n 138 642	65	0.174	8 _n 134 706	93	0.224	8 _n 129 392	121
0.025	8 _n 142 505	14	0.075	8 _n 141 199	39	0.125	8 _n 138 577	66	0.175	8 _n 134 613	93	0.225	8 _n 129 271	121
0.026	8 _n 142 491	13	0.076	8 _n 141 160	39	0.126	8 _n 138 511	67	0.176	8 _n 134 520	94	0.226	8 _n 129 150	122
0.027	8 _n 142 478	15	0.077	8 _n 141 120	40	0.127	8 _n 138 444	67	0.177	8 _n 134 426	94	0.227	8 _n 129 028	122
0.028	8 _n 142 463	15	0.078	8 _n 141 079	41	0.128	8 _n 138 377	67	0.178	8 _n 134 332	95	0.228	8 _n 128 906	123
0.029	8 _n 142 448	15	0.079	8 _n 141 038	41	0.129	8 _n 138 310	69	0.179	8 _n 134 237	95	0.229	8 _n 128 783	123
0.030	8 _n 142 433	16	0.080	8 _n 140 997	42	0.130	8 _n 138 241	68	0.180	8 _n 134 142	96	0.230	8 _n 128 660	125
0.031	8 _n 142 417	16	0.081	8 _n 140 955	43	0.131	8 _n 138 173	70	0.181	8 _n 134 046	97	0.231	8 _n 128 535	124
0.032	8 _n 142 401	17	0.082	8 _n 140 912	43	0.132	8 _n 138 103	69	0.182	8 _n 133 949	97	0.232	8 _n 128 411	125
0.033	8 _n 142 384	18	0.083	8 _n 140 869	44	0.133	8 _n 138 034	71	0.183	8 _n 133 852	97	0.233	8 _n 128 286	126
0.034	8 _n 142 366	18	0.084	8 _n 140 825	44	0.134	8 _n 137 963	71	0.184	8 _n 133 755	98	0.234	8 _n 128 160	127
0.035	8 _n 142 348	18	0.085	8 _n 140 781	44	0.135	8 _n 137 892	71	0.185	8 _n 133 657	99	0.235	8 _n 128 033	127
0.036	8 _n 142 330	19	0.086	8 _n 140 736	45	0.136	8 _n 137 821	72	0.186	8 _n 133 558	99	0.236	8 _n 127 906	127
0.037	8 _n 142 311	20	0.087	8 _n 140 691	45	0.137	8 _n 137 749	72	0.187	8 _n 133 459	100	0.237	8 _n 127 779	128
0.038	8 _n 142 291	20	0.088	8 _n 140 645	46	0.138	8 _n 137 677	73	0.188	8 _n 133 359	101	0.238	8 _n 127 651	129
0.039	8 _n 142 271	21	0.089	8 _n 140 599	47	0.139	8 _n 137 604	74	0.189	8 _n 133 258	101	0.239	8 _n 127 522	129
0.040	8 _n 142 250	21	0.090	8 _n 140 552	48	0.140	8 _n 137 530	74	0.190	8 _n 133 157	101	0.240	8 _n 127 393	130
0.041	8 _n 142 229	21	0.091	8 _n 140 504	48	0.141	8 _n 137 456	75	0.191	8 _n 133 056	102	0.241	8 _n 127 263	130
0.042	8 _n 142 208	23	0.092	8 _n 140 456	48	0.142	8 _n 137 381	75	0.192	8 _n 132 954	103	0.242	8 _n 127 133	131
0.043	8 _n 142 185	22	0.093	8 _n 140 408	49	0.143	8 _n 137 306	76	0.193	8 _n 132 851	103	0.243	8 _n 127 002	132
0.044	8 _n 142 163	23	0.094	8 _n 140 359	50	0.144	8 _n 137 230	76	0.194	8 _n 132 748	104	0.244	8 _n 126 870	132
0.045	8 _n 142 140	24	0.095	8 _n 140 309	50	0.145	8 _n 137 154	77	0.195	8 _n 132 644	104	0.245	8 _n 126 738	133
0.046	8 _n 142 116	24	0.096	8 _n 140 259	50	0.146	8 _n 137 077	77	0.196	8 _n 132 540	105	0.246	8 _n 126 605	133
0.047	8 _n 142 092	25	0.097	8 _n 140 209	51	0.147	8 _n 137 000	78	0.197	8 _n 132 435	105	0.247	8 _n 126 472	134
0.048	8 _n 142 067	26	0.098	8 _n 140 158	52	0.148	8 _n 136 922	78	0.198	8 _n 132 330	106	0.248	8 _n 126 338	135
0.049	8 _n 142 041	25	0.099	8 _n 140 106	52	0.149	8 _n 136 844	79	0.199	8 _n 132 224	107	0.249	8 _n 126 203	135
0.050	8 _n 142 016		0.100	8 _n 140 054		0.150	8 _n 136 765		0.200	8 _n 132 117		0.250	8 _n 126 068	

Tafel VI.

$$\log \{Q_1^5(n)\}$$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	7n499 422	3	0.050	7n493 663	234	0.100	7n476 026	480	0.150	7n445 344	760	0.200	7n399 324	1101
0.001	7n499 419	7	0.051	7n493 429	239	0.101	7n475 546	486	0.151	7n444 584	766	0.201	7n398 223	1109
0.002	7n499 412	11	0.052	7n493 190	243	0.102	7n475 060	491	0.152	7n443 818	773	0.202	7n397 114	1116
0.003	7n499 401	16	0.053	7n492 947	248	0.103	7n474 569	496	0.153	7n443 045	778	0.203	7n395 998	1125
0.004	7n499 385	21	0.054	7n492 699	253	0.104	7n474 073	501	0.154	7n442 267	785	0.204	7n394 873	1132
0.005	7n499 364	25	0.055	7n492 446	258	0.105	7n473 572	506	0.155	7n441 482	790	0.205	7n393 741	1140
0.006	7n499 339	30	0.056	7n492 188	262	0.106	7n473 066	512	0.156	7n440 692	797	0.206	7n392 601	1148
0.007	7n499 309	34	0.057	7n491 926	267	0.107	7n472 554	517	0.157	7n439 895	803	0.207	7n391 453	1156
0.008	7n499 275	39	0.058	7n491 659	272	0.108	7n472 037	522	0.158	7n439 092	810	0.208	7n390 297	1164
0.009	7n499 236	44	0.059	7n491 387	277	0.109	7n471 515	528	0.159	7n438 282	816	0.209	7n389 133	1173
0.010	7n499 192	48	0.060	7n491 110	281	0.110	7n470 987	533	0.160	7n437 466	822	0.210	7n387 960	1180
0.011	7n499 144	52	0.061	7n490 829	287	0.111	7n470 454	538	0.161	7n436 644	828	0.211	7n386 780	1189
0.012	7n499 092	58	0.062	7n490 542	291	0.112	7n469 916	543	0.162	7n435 816	835	0.212	7n385 591	1196
0.013	7n499 034	62	0.063	7n490 251	296	0.113	7n469 373	549	0.163	7n434 981	842	0.213	7n384 395	1205
0.014	7n498 972	66	0.064	7n489 955	300	0.114	7n468 824	555	0.164	7n434 139	847	0.214	7n383 190	1214
0.015	7n498 906	71	0.065	7n489 655	306	0.115	7n468 269	559	0.165	7n433 292	855	0.215	7n381 976	1222
0.016	7n498 835	76	0.066	7n489 349	310	0.116	7n467 710	566	0.166	7n432 437	860	0.216	7n380 754	1230
0.017	7n498 759	80	0.067	7n489 039	315	0.117	7n467 144	570	0.167	7n431 577	867	0.217	7n379 524	1239
0.018	7n498 679	85	0.068	7n488 724	321	0.118	7n466 574	576	0.168	7n430 710	874	0.218	7n378 285	1247
0.019	7n498 594	90	0.069	7n488 403	325	0.119	7n465 998	582	0.169	7n429 836	881	0.219	7n377 038	1256
0.020	7n498 504	94	0.070	7n488 078	329	0.120	7n465 416	587	0.170	7n428 955	886	0.220	7n375 782	1265
0.021	7n498 410	99	0.071	7n487 749	335	0.121	7n464 829	592	0.171	7n428 069	894	0.221	7n374 517	1273
0.022	7n498 311	103	0.072	7n487 414	340	0.122	7n464 237	598	0.172	7n427 175	900	0.222	7n373 244	1282
0.023	7n498 208	108	0.073	7n487 074	344	0.123	7n463 639	603	0.173	7n426 275	907	0.223	7n371 962	1291
0.024	7n498 100	113	0.074	7n486 730	349	0.124	7n463 036	609	0.174	7n425 368	914	0.224	7n370 671	1300
0.025	7n497 987	117	0.075	7n486 381	355	0.125	7n462 427	615	0.175	7n424 454	920	0.225	7n369 371	1309
0.026	7n497 870	122	0.076	7n486 026	359	0.126	7n461 812	620	0.176	7n423 534	928	0.226	7n368 062	1318
0.027	7n497 748	126	0.077	7n485 667	364	0.127	7n461 192	626	0.177	7n422 606	934	0.227	7n366 744	1326
0.028	7n497 622	131	0.078	7n485 303	369	0.128	7n460 566	631	0.178	7n421 672	941	0.228	7n365 418	1336
0.029	7n497 491	136	0.079	7n484 934	374	0.129	7n459 935	637	0.179	7n420 731	948	0.229	7n364 082	1346
0.030	7n497 355	140	0.080	7n484 560	379	0.130	7n459 298	643	0.180	7n419 783	954	0.230	7n362 736	1354
0.031	7n497 215	145	0.081	7n484 181	383	0.131	7n458 655	649	0.181	7n418 829	962	0.231	7n361 382	1364
0.032	7n497 070	150	0.082	7n483 798	389	0.132	7n458 006	654	0.182	7n417 867	969	0.232	7n360 018	1373
0.033	7n496 920	154	0.083	7n483 409	394	0.133	7n457 352	659	0.183	7n416 898	976	0.233	7n358 645	1383
0.034	7n496 766	159	0.084	7n483 015	399	0.134	7n456 693	666	0.184	7n415 922	982	0.234	7n357 262	1392
0.035	7n496 607	164	0.085	7n482 616	404	0.135	7n456 027	671	0.185	7n414 940	990	0.235	7n355 870	1401
0.036	7n496 443	168	0.086	7n482 212	409	0.136	7n455 356	677	0.186	7n413 950	997	0.236	7n354 469	1412
0.037	7n496 275	173	0.087	7n481 803	414	0.137	7n454 679	682	0.187	7n412 953	1005	0.237	7n353 057	1421
0.038	7n496 102	177	0.088	7n481 389	419	0.138	7n453 997	689	0.188	7n411 948	1011	0.238	7n351 636	1430
0.039	7n495 925	182	0.089	7n480 970	424	0.139	7n453 308	695	0.189	7n410 937	1019	0.239	7n350 206	1441
0.040	7n495 743	187	0.090	7n480 546	429	0.140	7n452 613	700	0.190	7n409 918	1026	0.240	7n348 765	1451
0.041	7n495 556	192	0.091	7n480 117	434	0.141	7n451 913	706	0.191	7n408 892	1033	0.241	7n347 314	1460
0.042	7n495 364	196	0.092	7n479 683	439	0.142	7n451 207	712	0.192	7n407 859	1041	0.242	7n345 854	1471
0.043	7n495 168	201	0.093	7n479 244	445	0.143	7n450 495	718	0.193	7n406 818	1048	0.243	7n344 383	1481
0.044	7n494 967	206	0.094	7n478 799	449	0.144	7n449 777	724	0.194	7n405 770	1055	0.244	7n342 902	1491
0.045	7n494 761	210	0.095	7n478 350	455	0.145	7n449 053	730	0.195	7n404 715	1063	0.245	7n341 411	1501
0.046	7n494 551	215	0.096	7n477 895	459	0.146	7n448 323	736	0.196	7n403 652	1071	0.246	7n339 910	1511
0.047	7n494 336	220	0.097	7n477 436	465	0.147	7n447 587	742	0.197	7n402 581	1078	0.247	7n338 399	1523
0.048	7n494 116	224	0.098	7n476 971	470	0.148	7n446 845	747	0.198	7n401 503	1086	0.248	7n336 876	1532
0.049	7n493 892	229	0.099	7n476 501	475	0.149	7n446 098	754	0.199	7n400 417	1093	0.249	7n335 344	1543
0.050	7n493 663		0.100	7n476 026		0.150	7n445 344		0.200	7n399 324		0.250	7n333 801	

Tafel VI.

 $\log \{Q_1^{(n)}\}$.

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	7.267 606	0	0.050	7.266 792	33	0.100	7.264 341	65	0.150	7.260 239	99	0.200	7.254 455	133
0.001	7.267 606	1	0.051	7.266 759	34	0.101	7.264 276	67	0.151	7.260 140	100	0.201	7.254 322	134
0.002	7.267 605	2	0.052	7.266 725	34	0.102	7.264 209	67	0.152	7.260 040	100	0.202	7.254 188	135
0.003	7.267 603	2	0.053	7.266 691	35	0.103	7.264 142	68	0.153	7.259 940	101	0.203	7.254 053	135
0.004	7.267 601	3	0.054	7.266 656	36	0.104	7.264 074	68	0.154	7.259 839	102	0.204	7.253 918	136
0.005	7.267 598	3	0.055	7.266 620	36	0.105	7.264 006	69	0.155	7.259 737	103	0.205	7.253 782	136
0.006	7.267 595	4	0.056	7.266 584	37	0.106	7.263 937	70	0.156	7.259 634	103	0.206	7.253 646	137
0.007	7.267 590	5	0.057	7.266 547	37	0.107	7.263 867	70	0.157	7.259 531	104	0.207	7.253 509	138
0.008	7.267 586	6	0.058	7.266 510	37	0.108	7.263 797	71	0.158	7.259 427	104	0.208	7.253 371	139
0.009	7.267 580	6	0.059	7.266 471	39	0.109	7.263 726	71	0.159	7.259 323	105	0.209	7.253 232	139
					38			72						
0.010	7.267 574	7	0.060	7.266 433	40	0.110	7.263 654	72	0.160	7.259 218	106	0.210	7.253 093	140
0.011	7.267 567	8	0.061	7.266 393	40	0.111	7.263 582	73	0.161	7.259 112	107	0.211	7.252 953	141
0.012	7.267 559	8	0.062	7.266 353	41	0.112	7.263 509	74	0.162	7.259 005	107	0.212	7.252 812	141
0.013	7.267 551	9	0.063	7.266 312	41	0.113	7.263 435	74	0.163	7.258 898	108	0.213	7.252 671	142
0.014	7.267 542	9	0.064	7.266 271	42	0.114	7.263 361	76	0.164	7.258 790	108	0.214	7.252 528	142
0.015	7.267 533	10	0.065	7.266 229	43	0.115	7.263 285	75	0.165	7.258 682	109	0.215	7.252 386	143
0.016	7.267 523	11	0.066	7.266 186	43	0.116	7.263 210	77	0.166	7.258 573	110	0.216	7.252 242	144
0.017	7.267 512	11	0.067	7.266 143	44	0.117	7.263 133	77	0.167	7.258 463	111	0.217	7.252 098	145
0.018	7.267 501	12	0.068	7.266 099	45	0.118	7.263 056	77	0.168	7.258 352	111	0.218	7.251 953	145
0.019	7.267 489	13	0.069	7.266 054	46	0.119	7.262 979	79	0.169	7.258 241	112	0.219	7.251 808	147
0.020	7.267 476	13	0.070	7.266 008	46	0.120	7.262 900	79	0.170	7.258 129	112	0.220	7.251 661	147
0.021	7.267 463	14	0.071	7.265 962	46	0.121	7.262 821	80	0.171	7.258 017	114	0.221	7.251 514	147
0.022	7.267 449	15	0.072	7.265 916	48	0.122	7.262 741	80	0.172	7.257 903	114	0.222	7.251 367	149
0.023	7.267 434	15	0.073	7.265 868	48	0.123	7.262 661	81	0.173	7.257 789	114	0.223	7.251 218	149
0.024	7.267 419	16	0.074	7.265 820	48	0.124	7.262 580	82	0.174	7.257 675	116	0.224	7.251 069	150
0.025	7.267 403	17	0.075	7.265 772	50	0.125	7.262 498	82	0.175	7.257 559	116	0.225	7.250 919	150
0.026	7.267 386	17	0.076	7.265 722	50	0.126	7.262 416	83	0.176	7.257 443	116	0.226	7.250 769	151
0.027	7.267 369	18	0.077	7.265 672	50	0.127	7.262 333	84	0.177	7.257 327	118	0.227	7.250 618	152
0.028	7.267 351	19	0.078	7.265 622	51	0.128	7.262 249	84	0.178	7.257 209	118	0.228	7.250 466	153
0.029	7.267 332	19	0.079	7.265 571	52	0.129	7.262 165	85	0.179	7.257 091	118	0.229	7.250 313	153
0.030	7.267 313	20	0.080	7.265 519	53	0.130	7.262 080	86	0.180	7.256 973	120	0.230	7.250 160	154
0.031	7.267 293	20	0.081	7.265 466	53	0.131	7.261 994	86	0.181	7.256 853	120	0.231	7.250 006	155
0.032	7.267 273	21	0.082	7.265 413	54	0.132	7.261 908	87	0.182	7.256 733	121	0.232	7.249 851	155
0.033	7.267 252	22	0.083	7.265 359	54	0.133	7.261 821	88	0.183	7.256 612	121	0.233	7.249 696	156
0.034	7.267 230	23	0.084	7.265 304	55	0.134	7.261 733	88	0.184	7.256 491	122	0.234	7.249 540	157
0.035	7.267 207	23	0.085	7.265 249	56	0.135	7.261 645	89	0.185	7.256 369	123	0.235	7.249 383	157
0.036	7.267 184	24	0.086	7.265 193	56	0.136	7.261 556	90	0.186	7.256 246	123	0.236	7.249 226	158
0.037	7.267 160	24	0.087	7.265 137	58	0.137	7.261 466	90	0.187	7.256 123	125	0.237	7.249 068	159
0.038	7.267 136	25	0.088	7.265 079	58	0.138	7.261 376	91	0.188	7.255 998	125	0.238	7.248 909	160
0.039	7.267 111	26	0.089	7.265 021	58	0.139	7.261 285	92	0.189	7.255 873	125	0.239	7.248 749	160
0.040	7.267 085	26	0.090	7.264 963	59	0.140	7.261 193	92	0.190	7.255 748	126	0.240	7.248 589	161
0.041	7.267 059	28	0.091	7.264 904	60	0.141	7.261 101	93	0.191	7.255 622	127	0.241	7.248 428	162
0.042	7.267 031	27	0.092	7.264 844	61	0.142	7.261 008	94	0.192	7.255 495	128	0.242	7.248 266	162
0.043	7.267 004	29	0.093	7.264 783	61	0.143	7.260 914	95	0.193	7.255 367	128	0.243	7.248 104	164
0.044	7.266 975	29	0.094	7.264 722	62	0.144	7.260 819	95	0.194	7.255 239	129	0.244	7.247 940	163
0.045	7.266 946	29	0.095	7.264 660	62	0.145	7.260 724	95	0.195	7.255 110	130	0.245	7.247 777	165
0.046	7.266 917	31	0.096	7.264 598	63	0.146	7.260 629	97	0.196	7.254 980	130	0.246	7.247 612	165
0.047	7.266 886	31	0.097	7.264 535	64	0.147	7.260 532	97	0.197	7.254 850	131	0.247	7.247 447	166
0.048	7.266 855	31	0.098	7.264 471	64	0.148	7.260 435	98	0.198	7.254 719	132	0.248	7.247 281	167
0.049	7.266 824	32	0.099	7.264 407	66	0.149	7.260 337	98	0.199	7.254 587	132	0.249	7.247 114	167
0.050	7.266 792		0.100	7.264 341		0.150	7.260 239		0.200	7.254 455		0.250	7.246 947	

Tafel VI.

$$\log \{Q_1^7(n)\}.$$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	6.837 656		0.050	6.831 993	230	0.100	6.814 670	471	0.150	6.784 599	744	0.200	6.739 658	1073
0.001	6.837 653	3	0.051	6.831 763	234	0.101	6.814 199	477	0.151	6.783 855	750	0.201	6.738 585	1080
0.002	6.837 647	6	0.052	6.831 529	239	0.102	6.813 722	481	0.152	6.783 105	755	0.202	6.737 505	1087
0.003	6.837 635	12	0.053	6.831 290	244	0.103	6.813 241	487	0.153	6.782 350	762	0.203	6.736 418	1095
0.004	6.837 620	15	0.054	6.831 046	249	0.104	6.812 754	492	0.154	6.781 588	768	0.204	6.735 323	1103
0.005	6.837 599	21	0.055	6.830 797	253	0.105	6.812 262	497	0.155	6.780 820	773	0.205	6.734 220	1110
0.006	6.837 574	25	0.056	6.830 544	258	0.106	6.811 765	502	0.156	6.780 047	780	0.206	6.733 110	1118
0.007	6.837 545	29	0.057	6.830 286	262	0.107	6.811 263	507	0.157	6.779 267	786	0.207	6.731 992	1126
0.008	6.837 511	34	0.058	6.830 024	268	0.108	6.810 756	512	0.158	6.778 481	791	0.208	6.730 866	1133
0.009	6.837 473	38	0.059	6.829 756	272	0.109	6.810 244	518	0.159	6.777 690	798	0.209	6.729 733	1141
		43												
0.010	6.837 430	47	0.060	6.829 484	276	0.110	6.809 726	523	0.160	6.776 892	804	0.210	6.728 592	1149
0.011	6.837 383	52	0.061	6.829 208	282	0.111	6.809 203	528	0.161	6.776 088	810	0.211	6.727 443	1156
0.012	6.837 331	56	0.062	6.828 926	286	0.112	6.808 675	533	0.162	6.775 278	817	0.212	6.726 287	1165
0.013	6.837 275	61	0.063	6.828 640	290	0.113	6.808 142	538	0.163	6.774 461	822	0.213	6.725 122	1172
0.014	6.837 214	66	0.064	6.828 350	296	0.114	6.807 602	544	0.164	6.773 639	829	0.214	6.723 950	1181
0.015	6.837 148	70	0.065	6.828 054	300	0.115	6.807 060	549	0.165	6.772 810	835	0.215	6.722 769	1188
0.016	6.837 08	74	0.066	6.827 754	305	0.116	6.806 511	554	0.166	6.771 975	841	0.216	6.721 581	1196
0.017	6.837 004	79	0.067	6.827 449	310	0.117	6.805 957	560	0.167	6.771 134	848	0.217	6.720 385	1205
0.018	6.836 925	84	0.068	6.827 139	314	0.118	6.805 397	564	0.168	6.770 286	854	0.218	6.719 180	1213
0.019	6.836 841	88	0.069	6.826 825	320	0.119	6.804 833	571	0.169	6.769 432	860	0.219	6.717 967	1221
0.020	6.836 753	92	0.070	6.826 505	324	0.120	6.804 262	575	0.170	6.768 572	866	0.220	6.716 746	1229
0.021	6.836 661	97	0.071	6.826 181	328	0.121	6.803 687	581	0.171	6.767 706	874	0.221	6.715 517	1237
0.022	6.836 564	102	0.072	6.825 853	334	0.122	6.803 106	586	0.172	6.766 832	879	0.222	6.714 280	1246
0.023	6.836 462	106	0.073	6.825 519	338	0.123	6.802 520	592	0.173	6.765 953	886	0.223	6.713 034	1254
0.024	6.836 356	111	0.074	6.825 181	343	0.124	6.801 928	597	0.174	6.765 067	893	0.224	6.711 780	1263
0.025	6.836 245	115	0.075	6.824 838	348	0.125	6.801 331	602	0.175	6.764 174	899	0.225	6.710 517	1272
0.026	6.836 130	120	0.076	6.824 490	353	0.126	6.800 729	608	0.176	6.763 275	905	0.226	6.709 245	1279
0.027	6.836 010	124	0.077	6.824 137	358	0.127	6.800 121	613	0.177	6.762 370	912	0.227	6.707 966	1289
0.028	6.835 886	129	0.078	6.823 779	362	0.128	6.799 508	619	0.178	6.761 458	919	0.228	6.706 677	1297
0.029	6.835 757	134	0.079	6.823 417	368	0.129	6.798 889	624	0.179	6.760 539	926	0.229	6.705 380	1306
0.030	6.835 623	138	0.080	6.823 049	372	0.130	6.798 265	630	0.180	6.759 613	932	0.230	6.704 074	1314
0.031	6.835 485	142	0.081	6.822 677	377	0.131	6.797 635	635	0.181	6.758 681	939	0.231	6.702 760	1324
0.032	6.835 343	147	0.082	6.822 300	382	0.132	6.797 000	641	0.182	6.757 742	945	0.232	6.701 436	1332
0.033	6.835 196	152	0.083	6.821 918	387	0.133	6.796 359	646	0.183	6.756 797	953	0.233	6.700 104	1342
0.034	6.835 044	156	0.084	6.821 531	391	0.134	6.795 713	652	0.184	6.755 844	959	0.234	6.698 762	1350
0.035	6.834 888	161	0.085	6.821 140	397	0.135	6.795 061	658	0.185	6.754 885	966	0.235	6.697 412	1360
0.036	6.834 727	165	0.086	6.820 743	402	0.136	6.794 403	663	0.186	6.753 919	973	0.236	6.696 052	1368
0.037	6.834 562	170	0.087	6.820 341	406	0.137	6.793 740	669	0.187	6.752 946	979	0.237	6.694 684	1378
0.038	6.834 392	175	0.088	6.819 935	411	0.138	6.793 071	675	0.188	6.751 967	987	0.238	6.693 306	1388
0.039	6.834 217	179	0.089	6.819 524	417	0.139	6.792 396	680	0.189	6.750 980	994	0.239	6.691 918	1396
0.040	6.834 038	184	0.090	6.819 107	421	0.140	6.791 716	685	0.190	6.749 986	1000	0.240	6.690 522	1406
0.041	6.833 854	188	0.091	6.818 686	426	0.141	6.791 031	692	0.191	6.748 986	1008	0.241	6.689 116	1415
0.042	6.833 666	193	0.092	6.818 260	431	0.142	6.790 339	697	0.192	6.747 978	1015	0.242	6.687 701	1425
0.043	6.833 473	198	0.093	6.817 829	436	0.143	6.789 642	703	0.193	6.746 963	1022	0.243	6.686 276	1435
0.044	6.833 275	202	0.094	6.817 393	442	0.144	6.788 939	709	0.194	6.745 941	1029	0.244	6.684 841	1444
0.045	6.833 073	207	0.095	6.816 951	446	0.145	6.788 230	715	0.195	6.744 912	1036	0.245	6.683 397	1454
0.046	6.832 866	211	0.096	6.816 505	451	0.146	6.787 515	720	0.196	6.743 876	1044	0.246	6.681 943	1463
0.047	6.832 655	216	0.097	6.816 054	456	0.147	6.786 795	726	0.197	6.742 832	1050	0.247	6.680 480	1474
0.048	6.832 439	221	0.098	6.815 598	462	0.148	6.786 069	732	0.198	6.741 782	1058	0.248	6.679 006	1483
0.049	6.832 218	225	0.099	6.815 136	466	0.149	6.785 337	738	0.199	6.740 724	1066	0.249	6.677 523	1494
0.050	6.831 993		0.100	6.814 670		0.150	6.784 599		0.200	6.739 658		0.250	6.676 039	

Tafel VI.

 $\log \{Q_1^8(n)\}.$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	6 _n +73 661	1	0.050	6 _n +72 774	36	0.100	6 _n +70 107	72	0.150	6 _n +65 644	108	0.200	6 _n +59 356	144
0.001	6 _n +73 660	1	0.051	6 _n +72 738	37	0.101	6 _n +70 035	72	0.151	6 _n +65 536	109	0.201	6 _n +59 212	146
0.002	6 _n +73 659	1	0.052	6 _n +72 701	37	0.102	6 _n +69 963	73	0.152	6 _n +65 427	109	0.202	6 _n +59 066	146
0.003	6 _n +73 658	1	0.053	6 _n +72 664	38	0.103	6 _n +69 890	74	0.153	6 _n +65 318	110	0.203	6 _n +58 920	147
0.004	6 _n +73 655	3	0.054	6 _n +72 626	39	0.104	6 _n +69 816	74	0.154	6 _n +65 208	110	0.204	6 _n +58 773	147
0.005	6 _n +73 652	4	0.055	6 _n +72 587	39	0.105	6 _n +69 742	76	0.155	6 _n +65 098	112	0.205	6 _n +58 626	149
0.006	6 _n +73 648	5	0.056	6 _n +72 548	40	0.106	6 _n +69 666	76	0.156	6 _n +64 986	112	0.206	6 _n +58 477	149
0.007	6 _n +73 643	5	0.057	6 _n +72 508	41	0.107	6 _n +69 590	76	0.157	6 _n +64 874	113	0.207	6 _n +58 328	149
0.008	6 _n +73 638	6	0.058	6 _n +72 467	42	0.108	6 _n +69 514	77	0.158	6 _n +64 761	113	0.208	6 _n +58 179	149
0.009	6 _n +73 632	7	0.059	6 _n +72 425	42	0.109	6 _n +69 437	77	0.159	6 _n +64 648	113	0.209	6 _n +58 028	151
0.010	6 _n +73 625	7	0.060	6 _n +72 383	43	0.110	6 _n +69 359	79	0.160	6 _n +64 533	115	0.210	6 _n +57 877	152
0.011	6 _n +73 618	8	0.061	6 _n +72 340	44	0.111	6 _n +69 280	80	0.161	6 _n +64 418	116	0.211	6 _n +57 725	153
0.012	6 _n +73 610	9	0.062	6 _n +72 296	44	0.112	6 _n +69 200	80	0.162	6 _n +64 302	116	0.212	6 _n +57 572	154
0.013	6 _n +73 601	10	0.063	6 _n +72 252	45	0.113	6 _n +69 120	81	0.163	6 _n +64 186	117	0.213	6 _n +57 418	154
0.014	6 _n +73 591	10	0.064	6 _n +72 207	46	0.114	6 _n +69 039	82	0.164	6 _n +64 069	118	0.214	6 _n +57 264	155
0.015	6 _n +73 581	11	0.065	6 _n +72 161	47	0.115	6 _n +68 957	82	0.165	6 _n +63 951	119	0.215	6 _n +57 109	155
0.016	6 _n +73 570	12	0.066	6 _n +72 114	47	0.116	6 _n +68 875	83	0.166	6 _n +63 832	120	0.216	6 _n +56 953	157
0.017	6 _n +73 558	12	0.067	6 _n +72 067	48	0.117	6 _n +68 792	84	0.167	6 _n +63 712	120	0.217	6 _n +56 796	157
0.018	6 _n +73 546	13	0.068	6 _n +72 019	48	0.118	6 _n +68 708	84	0.168	6 _n +63 592	121	0.218	6 _n +56 639	158
0.019	6 _n +73 533	14	0.069	6 _n +71 971	50	0.119	6 _n +68 624	86	0.169	6 _n +63 471	121	0.219	6 _n +56 481	159
0.020	6 _n +73 519	14	0.070	6 _n +71 921	50	0.120	6 _n +68 538	86	0.170	6 _n +63 350	123	0.220	6 _n +56 322	159
0.021	6 _n +73 505	16	0.071	6 _n +71 871	51	0.121	6 _n +68 452	88	0.171	6 _n +63 227	123	0.221	6 _n +56 163	161
0.022	6 _n +73 489	16	0.072	6 _n +71 820	51	0.122	6 _n +68 366	88	0.172	6 _n +63 104	124	0.222	6 _n +56 002	161
0.023	6 _n +73 473	16	0.073	6 _n +71 769	53	0.123	6 _n +68 278	88	0.173	6 _n +62 980	124	0.223	6 _n +55 841	162
0.024	6 _n +73 457	18	0.074	6 _n +71 716	53	0.124	6 _n +68 190	89	0.174	6 _n +62 856	126	0.224	6 _n +55 679	162
0.025	6 _n +73 439	18	0.075	6 _n +71 663	53	0.125	6 _n +68 101	89	0.175	6 _n +62 730	126	0.225	6 _n +55 517	164
0.026	6 _n +73 421	19	0.076	6 _n +71 610	55	0.126	6 _n +68 012	91	0.176	6 _n +62 604	127	0.226	6 _n +55 353	164
0.027	6 _n +73 402	19	0.077	6 _n +71 555	55	0.127	6 _n +67 921	91	0.177	6 _n +62 477	127	0.227	6 _n +55 189	165
0.028	6 _n +73 383	20	0.078	6 _n +71 500	56	0.128	6 _n +67 830	92	0.178	6 _n +62 350	129	0.228	6 _n +55 024	165
0.029	6 _n +73 363	21	0.079	6 _n +71 444	56	0.129	6 _n +67 738	92	0.179	6 _n +62 221	129	0.229	6 _n +54 859	167
0.030	6 _n +73 342	22	0.080	6 _n +71 388	57	0.130	6 _n +67 646	93	0.180	6 _n +62 092	129	0.230	6 _n +54 692	167
0.031	6 _n +73 320	22	0.081	6 _n +71 331	58	0.131	6 _n +67 553	94	0.181	6 _n +61 963	131	0.231	6 _n +54 525	168
0.032	6 _n +73 298	24	0.082	6 _n +71 273	59	0.132	6 _n +67 459	95	0.182	6 _n +61 832	131	0.232	6 _n +54 357	168
0.033	6 _n +73 274	23	0.083	6 _n +71 214	59	0.133	6 _n +67 364	95	0.183	6 _n +61 701	132	0.233	6 _n +54 189	170
0.034	6 _n +73 251	25	0.084	6 _n +71 155	61	0.134	6 _n +67 269	96	0.184	6 _n +61 569	133	0.234	6 _n +54 019	170
0.035	6 _n +73 226	25	0.085	6 _n +71 094	60	0.135	6 _n +67 173	97	0.185	6 _n +61 436	133	0.235	6 _n +53 849	171
0.036	6 _n +73 201	26	0.086	6 _n +71 034	62	0.136	6 _n +67 076	98	0.186	6 _n +61 303	134	0.236	6 _n +53 678	172
0.037	6 _n +73 175	27	0.087	6 _n +70 972	62	0.137	6 _n +66 978	98	0.187	6 _n +61 169	135	0.237	6 _n +53 506	172
0.038	6 _n +73 148	27	0.088	6 _n +70 910	63	0.138	6 _n +66 880	99	0.188	6 _n +61 034	136	0.238	6 _n +53 334	173
0.039	6 _n +73 121	28	0.089	6 _n +70 847	64	0.139	6 _n +66 781	100	0.189	6 _n +60 898	136	0.239	6 _n +53 161	174
0.040	6 _n +73 093	29	0.090	6 _n +70 783	64	0.140	6 _n +66 681	100	0.190	6 _n +60 762	138	0.240	6 _n +52 987	175
0.041	6 _n +73 064	29	0.091	6 _n +70 719	65	0.141	6 _n +66 581	102	0.191	6 _n +60 624	138	0.241	6 _n +52 812	176
0.042	6 _n +73 035	30	0.092	6 _n +70 654	66	0.142	6 _n +66 479	101	0.192	6 _n +60 486	138	0.242	6 _n +52 636	176
0.043	6 _n +73 005	31	0.093	6 _n +70 588	67	0.143	6 _n +66 378	103	0.193	6 _n +60 348	140	0.243	6 _n +52 460	177
0.044	6 _n +72 974	32	0.094	6 _n +70 521	67	0.144	6 _n +66 275	103	0.194	6 _n +60 208	140	0.244	6 _n +52 283	178
0.045	6 _n +72 942	32	0.095	6 _n +70 454	68	0.145	6 _n +66 172	105	0.195	6 _n +60 068	141	0.245	6 _n +52 105	178
0.046	6 _n +72 910	33	0.096	6 _n +70 386	69	0.146	6 _n +66 067	104	0.196	6 _n +59 927	141	0.246	6 _n +51 927	180
0.047	6 _n +72 877	34	0.097	6 _n +70 317	69	0.147	6 _n +65 963	106	0.197	6 _n +59 786	143	0.247	6 _n +51 747	180
0.048	6 _n +72 843	34	0.098	6 _n +70 248	70	0.148	6 _n +65 857	106	0.198	6 _n +59 643	143	0.248	6 _n +51 567	181
0.049	6 _n +72 809	35	0.099	6 _n +70 178	71	0.149	6 _n +65 751	107	0.199	6 _n +59 500	144	0.249	6 _n +51 386	181
0.050	6 _n +72 774		0.100	6 _n +70 107		0.150	6 _n +65 644		0.200	6 _n +59 356		0.250	6 _n +51 205	

Tafel VI.

 $\log \{Q_1^{9/n}\}$.

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	6 _n 188 807		0.050	6 _n 183 202	228	0.100	6 _n 166 065	467	0.150	6 _n 136 353	734	0.200	6 _n 092 041	1056
0.001	6 _n 188 805	2	0.051	6 _n 182 974	232	0.101	6 _n 165 598	471	0.151	6 _n 135 619	740	0.201	6 _n 090 985	1064
0.002	6 _n 188 798	11	0.052	6 _n 182 742	237	0.102	6 _n 165 127	476	0.152	6 _n 134 879	746	0.202	6 _n 089 921	1070
0.003	6 _n 188 787	16	0.053	6 _n 182 505	241	0.103	6 _n 164 651	481	0.153	6 _n 134 133	752	0.203	6 _n 088 851	1079
0.004	6 _n 188 771	20	0.054	6 _n 182 264	246	0.104	6 _n 164 170	486	0.154	6 _n 133 381	758	0.204	6 _n 087 772	1085
0.005	6 _n 188 751	25	0.055	6 _n 182 018	250	0.105	6 _n 163 684	492	0.155	6 _n 132 623	763	0.205	6 _n 086 687	1093
0.006	6 _n 188 726	29	0.056	6 _n 181 768	256	0.106	6 _n 163 192	496	0.156	6 _n 131 860	770	0.206	6 _n 085 594	1100
0.007	6 _n 188 697	33	0.057	6 _n 181 512	259	0.107	6 _n 162 696	501	0.157	6 _n 131 090	775	0.207	6 _n 084 494	1108
0.008	6 _n 188 664	38	0.058	6 _n 181 253	265	0.108	6 _n 162 195	507	0.158	6 _n 130 315	781	0.208	6 _n 083 386	1115
0.009	6 _n 188 626	42	0.059	6 _n 180 988	269	0.109	6 _n 161 688	512	0.159	6 _n 129 534	788	0.209	6 _n 082 271	1123
0.010	6 _n 188 584	47	0.060	6 _n 180 719	274	0.110	6 _n 161 176	516	0.160	6 _n 128 746	793	0.210	6 _n 081 148	1130
0.011	6 _n 188 537	52	0.061	6 _n 180 445	278	0.111	6 _n 160 660	522	0.161	6 _n 127 953	800	0.211	6 _n 080 018	1139
0.012	6 _n 188 485	55	0.062	6 _n 180 167	283	0.112	6 _n 160 138	527	0.162	6 _n 127 153	805	0.212	6 _n 078 879	1145
0.013	6 _n 188 430	61	0.063	6 _n 179 884	288	0.113	6 _n 159 611	533	0.163	6 _n 126 348	812	0.213	6 _n 077 734	1154
0.014	6 _n 188 369	65	0.064	6 _n 179 596	292	0.114	6 _n 159 078	537	0.164	6 _n 125 536	817	0.214	6 _n 076 580	1161
0.015	6 _n 188 304	69	0.065	6 _n 179 304	297	0.115	6 _n 158 541	543	0.165	6 _n 124 719	824	0.215	6 _n 075 419	1169
0.016	6 _n 188 235	73	0.066	6 _n 179 007	302	0.116	6 _n 157 998	547	0.166	6 _n 123 895	830	0.216	6 _n 074 250	1177
0.017	6 _n 188 162	79	0.067	6 _n 178 705	307	0.117	6 _n 157 451	553	0.167	6 _n 123 065	836	0.217	6 _n 073 073	1185
0.018	6 _n 188 083	82	0.068	6 _n 178 398	311	0.118	6 _n 156 898	559	0.168	6 _n 122 229	843	0.218	6 _n 071 888	1192
0.019	6 _n 188 001	87	0.069	6 _n 178 087	316	0.119	6 _n 156 339	563	0.169	6 _n 121 386	848	0.219	6 _n 070 696	1201
0.020	6 _n 187 914	92	0.070	6 _n 177 771	320	0.120	6 _n 155 776	569	0.170	6 _n 120 538	855	0.220	6 _n 069 495	1209
0.021	6 _n 187 822	96	0.071	6 _n 177 451	326	0.121	6 _n 155 207	574	0.171	6 _n 119 683	861	0.221	6 _n 068 286	1217
0.022	6 _n 187 726	101	0.072	6 _n 177 125	330	0.122	6 _n 154 633	579	0.172	6 _n 118 822	868	0.222	6 _n 067 069	1224
0.023	6 _n 187 625	105	0.073	6 _n 176 795	334	0.123	6 _n 154 054	585	0.173	6 _n 117 954	874	0.223	6 _n 065 845	1234
0.024	6 _n 187 520	110	0.074	6 _n 176 461	340	0.124	6 _n 153 469	590	0.174	6 _n 117 080	880	0.224	6 _n 064 611	1241
0.025	6 _n 187 410	114	0.075	6 _n 176 121	344	0.125	6 _n 152 879	595	0.175	6 _n 116 200	886	0.225	6 _n 063 370	1250
0.026	6 _n 187 296	118	0.076	6 _n 175 777	349	0.126	6 _n 152 284	601	0.176	6 _n 115 314	893	0.226	6 _n 062 120	1258
0.027	6 _n 187 178	123	0.077	6 _n 175 428	354	0.127	6 _n 151 683	606	0.177	6 _n 114 421	899	0.227	6 _n 060 862	1266
0.028	6 _n 187 055	128	0.078	6 _n 175 074	359	0.128	6 _n 151 077	611	0.178	6 _n 113 522	906	0.228	6 _n 059 596	1275
0.029	6 _n 186 927	132	0.079	6 _n 174 715	363	0.129	6 _n 150 466	617	0.179	6 _n 112 616	913	0.229	6 _n 058 321	1283
0.030	6 _n 186 795	137	0.080	6 _n 174 352	368	0.130	6 _n 149 849	622	0.180	6 _n 111 703	919	0.230	6 _n 057 038	1292
0.031	6 _n 186 658	141	0.081	6 _n 173 984	373	0.131	6 _n 149 227	627	0.181	6 _n 110 784	925	0.231	6 _n 055 746	1300
0.032	6 _n 186 517	145	0.082	6 _n 173 611	378	0.132	6 _n 148 600	633	0.182	6 _n 109 859	932	0.232	6 _n 054 446	1309
0.033	6 _n 186 372	150	0.083	6 _n 173 233	383	0.133	6 _n 147 967	639	0.183	6 _n 108 927	939	0.233	6 _n 053 137	1318
0.034	6 _n 186 222	155	0.084	6 _n 172 850	387	0.134	6 _n 147 328	644	0.184	6 _n 107 988	945	0.234	6 _n 051 819	1326
0.035	6 _n 186 067	159	0.085	6 _n 172 463	392	0.135	6 _n 146 684	650	0.185	6 _n 107 043	952	0.235	6 _n 050 493	1336
0.036	6 _n 185 908	164	0.086	6 _n 172 071	397	0.136	6 _n 146 034	655	0.186	6 _n 106 091	959	0.236	6 _n 049 157	1344
0.037	6 _n 185 744	168	0.087	6 _n 171 674	402	0.137	6 _n 145 379	660	0.187	6 _n 105 132	966	0.237	6 _n 047 813	1353
0.038	6 _n 185 576	173	0.088	6 _n 171 272	407	0.138	6 _n 144 719	666	0.188	6 _n 104 166	972	0.238	6 _n 046 460	1362
0.039	6 _n 185 403	177	0.089	6 _n 170 865	412	0.139	6 _n 144 053	672	0.189	6 _n 103 194	979	0.239	6 _n 045 098	1371
0.040	6 _n 185 226	182	0.090	6 _n 170 453	417	0.140	6 _n 143 381	677	0.190	6 _n 102 215	986	0.240	6 _n 043 727	1380
0.041	6 _n 185 044	187	0.091	6 _n 170 036	421	0.141	6 _n 142 704	683	0.191	6 _n 101 229	993	0.241	6 _n 042 347	1389
0.042	6 _n 184 857	191	0.092	6 _n 169 615	427	0.142	6 _n 142 021	689	0.192	6 _n 100 236	1000	0.242	6 _n 040 957	1398
0.043	6 _n 184 666	195	0.093	6 _n 169 188	431	0.143	6 _n 141 332	694	0.193	6 _n 099 236	1007	0.243	6 _n 039 559	1408
0.044	6 _n 184 471	200	0.094	6 _n 168 757	437	0.144	6 _n 140 638	700	0.194	6 _n 098 229	1013	0.244	6 _n 038 151	1417
0.045	6 _n 184 271	205	0.095	6 _n 168 320	441	0.145	6 _n 139 938	706	0.195	6 _n 097 216	1021	0.245	6 _n 036 734	1427
0.046	6 _n 184 066	209	0.096	6 _n 167 879	446	0.146	6 _n 139 232	711	0.196	6 _n 096 195	1028	0.246	6 _n 035 307	1436
0.047	6 _n 183 857	214	0.097	6 _n 167 433	451	0.147	6 _n 138 521	717	0.197	6 _n 095 167	1035	0.247	6 _n 033 871	1446
0.048	6 _n 183 643	218	0.098	6 _n 166 982	456	0.148	6 _n 137 804	722	0.198	6 _n 094 132	1042	0.248	6 _n 032 425	1455
0.049	6 _n 183 425	223	0.099	6 _n 166 526	461	0.149	6 _n 137 082	729	0.199	6 _n 093 090	1049	0.249	6 _n 030 970	1465
0.050	6 _n 183 202		0.100	6 _n 166 065		0.150	6 _n 136 353		0.200	6 _n 092 041		0.250	6 _n 029 505	

Tafel VI.

 $\log \{Q_1^{10}(n)\}$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	5.723 538	0	0.050	5.722 610	37	0.100	5.719 821	74	0.150	5.715 156	113	0.200	5.708 586	151
0.001	5.723 538	1	0.051	5.722 573	39	0.101	5.719 747	76	0.151	5.715 043	113	0.201	5.708 435	152
0.002	5.723 537	2	0.052	5.722 534	39	0.102	5.719 671	76	0.152	5.714 930	115	0.202	5.708 283	153
0.003	5.723 535	3	0.053	5.722 495	39	0.103	5.719 595	77	0.153	5.714 815	114	0.203	5.708 130	153
0.004	5.723 532	3	0.054	5.722 456	41	0.104	5.719 518	78	0.154	5.714 701	116	0.204	5.707 977	154
0.005	5.723 529	4	0.055	5.722 415	41	0.105	5.719 440	79	0.155	5.714 585	117	0.205	5.707 823	155
0.006	5.723 525	5	0.056	5.722 374	42	0.106	5.719 361	79	0.156	5.714 468	117	0.206	5.707 668	156
0.007	5.723 520	6	0.057	5.722 332	43	0.107	5.719 282	80	0.157	5.714 351	118	0.207	5.707 512	156
0.008	5.723 514	6	0.058	5.722 289	43	0.108	5.719 202	81	0.158	5.714 233	118	0.208	5.707 356	158
0.009	5.723 508	7	0.059	5.722 246	44	0.109	5.719 121	82	0.159	5.714 115	120	0.209	5.707 198	158
0.010	5.723 501	8	0.060	5.722 202	45	0.110	5.719 039	82	0.160	5.713 995	120	0.210	5.707 040	159
0.011	5.723 493	8	0.061	5.722 157	46	0.111	5.718 957	83	0.161	5.713 875	121	0.211	5.706 881	159
0.012	5.723 485	10	0.062	5.722 111	46	0.112	5.718 874	84	0.162	5.713 754	122	0.212	5.706 722	161
0.013	5.723 475	10	0.063	5.722 065	48	0.113	5.718 790	85	0.163	5.713 632	123	0.213	5.706 561	161
0.014	5.723 465	10	0.064	5.722 017	48	0.114	5.718 705	85	0.164	5.713 509	123	0.214	5.706 400	162
0.015	5.723 455	12	0.065	5.721 969	48	0.115	5.718 620	86	0.165	5.713 386	124	0.215	5.706 238	163
0.016	5.723 443	12	0.066	5.721 921	50	0.116	5.718 534	87	0.166	5.713 262	125	0.216	5.706 075	163
0.017	5.723 431	13	0.067	5.721 871	50	0.117	5.718 447	88	0.167	5.713 137	125	0.217	5.705 912	164
0.018	5.723 418	14	0.068	5.721 821	51	0.118	5.718 359	88	0.168	5.713 012	127	0.218	5.705 748	166
0.019	5.723 404	14	0.069	5.721 770	51	0.119	5.718 271	89	0.169	5.712 885	127	0.219	5.705 582	165
0.020	5.723 390	16	0.070	5.721 719	53	0.120	5.718 182	90	0.170	5.712 758	128	0.220	5.705 417	167
0.021	5.723 374	16	0.071	5.721 666	53	0.121	5.718 092	91	0.171	5.712 630	128	0.221	5.705 250	168
0.022	5.723 358	16	0.072	5.721 613	54	0.122	5.718 001	91	0.172	5.712 502	130	0.222	5.705 082	168
0.023	5.723 342	18	0.073	5.721 559	54	0.123	5.717 910	93	0.173	5.712 372	130	0.223	5.704 914	169
0.024	5.723 324	18	0.074	5.721 505	56	0.124	5.717 817	92	0.174	5.712 242	131	0.224	5.704 745	170
0.025	5.723 306	19	0.075	5.721 449	56	0.125	5.717 725	94	0.175	5.712 111	132	0.225	5.704 575	170
0.026	5.723 287	19	0.076	5.721 393	57	0.126	5.717 631	95	0.176	5.711 979	132	0.226	5.704 405	172
0.027	5.723 268	21	0.077	5.721 336	57	0.127	5.717 536	95	0.177	5.711 847	134	0.227	5.704 233	172
0.028	5.723 247	21	0.078	5.721 279	59	0.128	5.717 441	96	0.178	5.711 713	134	0.228	5.704 061	173
0.029	5.723 226	22	0.079	5.721 220	59	0.129	5.717 345	96	0.179	5.711 579	135	0.229	5.703 888	174
0.030	5.723 204	22	0.080	5.721 161	60	0.130	5.717 249	98	0.180	5.711 444	135	0.230	5.703 714	174
0.031	5.723 182	24	0.081	5.721 101	60	0.131	5.717 151	98	0.181	5.711 309	137	0.231	5.703 540	175
0.032	5.723 158	24	0.082	5.721 041	62	0.132	5.717 053	99	0.182	5.711 172	137	0.232	5.703 365	177
0.033	5.723 134	25	0.083	5.720 979	62	0.133	5.716 954	100	0.183	5.711 035	138	0.233	5.703 188	178
0.034	5.723 109	25	0.084	5.720 917	63	0.134	5.716 854	100	0.184	5.710 897	138	0.234	5.703 012	178
0.035	5.723 084	27	0.085	5.720 854	63	0.135	5.716 754	101	0.185	5.710 759	140	0.235	5.702 834	179
0.036	5.723 057	27	0.086	5.720 791	65	0.136	5.716 653	102	0.186	5.710 619	140	0.236	5.702 655	179
0.037	5.723 030	28	0.087	5.720 726	65	0.137	5.716 551	103	0.187	5.710 479	141	0.237	5.702 476	180
0.038	5.723 002	28	0.088	5.720 661	66	0.138	5.716 448	104	0.188	5.710 338	142	0.238	5.702 296	181
0.039	5.722 974	30	0.089	5.720 595	66	0.139	5.716 344	104	0.189	5.710 196	142	0.239	5.702 115	182
0.040	5.722 944	30	0.090	5.720 529	68	0.140	5.716 240	105	0.190	5.710 054	143	0.240	5.701 933	182
0.041	5.722 914	31	0.091	5.720 461	68	0.141	5.716 135	106	0.191	5.709 911	145	0.241	5.701 751	183
0.042	5.722 883	31	0.092	5.720 393	69	0.142	5.716 029	106	0.192	5.709 766	144	0.242	5.701 568	184
0.043	5.722 852	32	0.093	5.720 324	69	0.143	5.715 923	108	0.193	5.709 622	146	0.243	5.701 384	185
0.044	5.722 820	32	0.094	5.720 255	71	0.144	5.715 815	108	0.194	5.709 476	146	0.244	5.701 199	186
0.045	5.722 787	33	0.095	5.720 184	71	0.145	5.715 707	108	0.195	5.709 330	148	0.245	5.701 013	186
0.046	5.722 753	35	0.096	5.720 113	71	0.146	5.715 599	110	0.196	5.709 182	148	0.246	5.700 827	187
0.047	5.722 718	35	0.097	5.720 042	73	0.147	5.715 489	110	0.197	5.709 034	148	0.247	5.700 640	188
0.048	5.722 683	36	0.098	5.719 969	73	0.148	5.715 379	111	0.198	5.708 886	150	0.248	5.700 452	189
0.049	5.722 647	37	0.099	5.719 896	75	0.149	5.715 268	112	0.199	5.708 736	150	0.249	5.700 263	190
0.050	5.722 610		0.100	5.719 821		0.150	5.715 156		0.200	5.708 586		0.250	5.700 073	

Tafel VII.

 $\log \{P_1^1(m)\}$.

vergl. pag. 42.

$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$
0.000	8.619 789	5	0.050	8.632 626	511	0.100	8.669 007	934	0.150	8.723 593	1233	0.200	8.790 051	1409
0.001	8.619 794	16	0.051	8.633 137	520	0.101	8.669 941	942	0.151	8.724 826	1238	0.201	8.791 460	1412
0.002	8.619 810	26	0.052	8.633 657	530	0.102	8.670 883	948	0.152	8.726 064	1243	0.202	8.792 872	1415
0.003	8.619 836	36	0.053	8.634 187	539	0.103	8.671 831	956	0.153	8.727 307	1247	0.203	8.794 287	1417
0.004	8.619 872	47	0.054	8.634 726	548	0.104	8.672 787	963	0.154	8.728 554	1252	0.204	8.795 704	1419
0.005	8.619 919	57	0.055	8.635 274	558	0.105	8.673 750	970	0.155	8.729 806	1256	0.205	8.797 123	1422
0.006	8.619 976	68	0.056	8.635 832	567	0.106	8.674 720	977	0.156	8.731 062	1261	0.206	8.798 545	1424
0.007	8.620 044	78	0.057	8.636 399	577	0.107	8.675 697	984	0.157	8.732 323	1265	0.207	8.799 969	1426
0.008	8.620 122	89	0.058	8.636 976	586	0.108	8.676 681	991	0.158	8.733 588	1269	0.208	8.801 395	1428
0.009	8.620 211	99	0.059	8.637 562	594	0.109	8.677 672	998	0.159	8.734 857	1274	0.209	8.802 823	1430
0.010	8.620 310	109	0.060	8.638 156	605	0.110	8.678 670	1005	0.160	8.736 131	1278	0.210	8.804 253	1432
0.011	8.620 419	120	0.061	8.638 761	613	0.111	8.679 675	1011	0.161	8.737 409	1282	0.211	8.805 685	1435
0.012	8.620 539	130	0.062	8.639 374	622	0.112	8.680 686	1018	0.162	8.738 691	1286	0.212	8.807 120	1436
0.013	8.620 669	140	0.063	8.639 996	631	0.113	8.681 704	1025	0.163	8.739 977	1290	0.213	8.808 556	1439
0.014	8.620 809	151	0.064	8.640 627	641	0.114	8.682 729	1031	0.164	8.741 267	1294	0.214	8.809 995	1440
0.015	8.620 960	161	0.065	8.641 268	649	0.115	8.683 760	1038	0.165	8.742 561	1299	0.215	8.811 435	1443
0.016	8.621 121	171	0.066	8.641 917	658	0.116	8.684 798	1044	0.166	8.743 860	1302	0.216	8.812 878	1444
0.017	8.621 292	182	0.067	8.642 575	667	0.117	8.685 842	1050	0.167	8.745 162	1306	0.217	8.814 322	1444
0.018	8.621 474	192	0.068	8.643 242	676	0.118	8.686 892	1057	0.168	8.746 468	1310	0.218	8.815 768	1448
0.019	8.621 666	202	0.069	8.643 918	685	0.119	8.687 949	1064	0.169	8.747 778	1314	0.219	8.817 216	1450
0.020	8.621 868	213	0.070	8.644 603	693	0.120	8.688 013	1069	0.170	8.749 092	1317	0.220	8.818 666	1451
0.021	8.622 081	223	0.071	8.645 296	702	0.121	8.690 082	1076	0.171	8.750 409	1322	0.221	8.820 117	1453
0.022	8.622 304	233	0.072	8.645 998	711	0.122	8.691 158	1082	0.172	8.751 731	1325	0.222	8.821 570	1455
0.023	8.622 537	243	0.073	8.646 709	720	0.123	8.692 240	1088	0.173	8.753 056	1328	0.223	8.823 025	1457
0.024	8.622 780	254	0.074	8.647 429	728	0.124	8.693 328	1094	0.174	8.754 384	1332	0.224	8.824 482	1458
0.025	8.623 034	264	0.075	8.648 157	736	0.125	8.694 422	1101	0.175	8.755 716	1336	0.225	8.825 940	1460
0.026	8.623 298	273	0.076	8.648 893	745	0.126	8.695 523	1106	0.176	8.757 052	1339	0.226	8.827 400	1461
0.027	8.623 571	285	0.077	8.649 638	754	0.127	8.696 629	1112	0.177	8.758 391	1342	0.227	8.828 861	1463
0.028	8.623 856	294	0.078	8.650 392	762	0.128	8.697 741	1118	0.178	8.759 733	1346	0.228	8.830 324	1464
0.029	8.624 150	304	0.079	8.651 154	770	0.129	8.698 859	1123	0.179	8.761 079	1350	0.229	8.831 788	1465
0.030	8.624 454	314	0.080	8.651 924	778	0.130	8.699 982	1130	0.180	8.762 429	1352	0.230	8.833 253	1468
0.031	8.624 768	325	0.081	8.652 702	787	0.131	8.701 112	1135	0.181	8.763 781	1356	0.231	8.834 721	1470
0.032	8.625 093	334	0.082	8.653 489	795	0.132	8.702 247	1140	0.182	8.765 137	1359	0.232	8.836 189	1470
0.033	8.625 427	345	0.083	8.654 284	803	0.133	8.703 387	1147	0.183	8.766 496	1362	0.233	8.837 659	1471
0.034	8.625 772	354	0.084	8.655 087	811	0.134	8.704 534	1152	0.184	8.767 858	1366	0.234	8.839 130	1473
0.035	8.626 126	365	0.085	8.655 898	820	0.135	8.705 686	1157	0.185	8.769 224	1368	0.235	8.840 603	1474
0.036	8.626 491	374	0.086	8.656 718	827	0.136	8.706 843	1163	0.186	8.770 592	1371	0.236	8.842 077	1475
0.037	8.626 865	385	0.087	8.657 545	835	0.137	8.708 006	1168	0.187	8.771 963	1375	0.237	8.843 552	1476
0.038	8.627 250	394	0.088	8.658 380	843	0.138	8.709 174	1174	0.188	8.773 338	1377	0.238	8.845 028	1477
0.039	8.627 644	404	0.089	8.659 223	852	0.139	8.710 348	1178	0.189	8.774 715	1381	0.239	8.846 505	1479
0.040	8.628 048	414	0.090	8.660 075	858	0.140	8.711 526	1184	0.190	8.776 096	1383	0.240	8.847 984	1479
0.041	8.628 462	424	0.091	8.660 933	867	0.141	8.712 710	1189	0.191	8.777 479	1386	0.241	8.849 463	1481
0.042	8.628 886	434	0.092	8.661 800	874	0.142	8.713 899	1195	0.192	8.778 865	1389	0.242	8.850 944	1482
0.043	8.629 320	443	0.093	8.662 674	882	0.143	8.715 094	1199	0.193	8.780 254	1391	0.243	8.852 426	1483
0.044	8.629 763	453	0.094	8.663 556	890	0.144	8.716 293	1204	0.194	8.781 645	1395	0.244	8.853 909	1484
0.045	8.630 216	463	0.095	8.664 446	897	0.145	8.717 497	1210	0.195	8.783 040	1397	0.245	8.855 393	1485
0.046	8.630 679	472	0.096	8.665 343	905	0.146	8.718 707	1214	0.196	8.784 437	1399	0.246	8.856 878	1486
0.047	8.631 151	482	0.097	8.666 248	912	0.147	8.719 921	1219	0.197	8.785 836	1403	0.247	8.858 364	1487
0.048	8.631 633	492	0.098	8.667 160	920	0.148	8.721 140	1224	0.198	8.787 239	1408	0.248	8.859 851	1487
0.049	8.632 125	501	0.099	8.668 080	927	0.149	8.722 364	1229	0.199	8.788 643	1408	0.249	8.861 338	1489
0.050	8.632 626		0.100	8.669 007		0.150	8.723 593		0.200	8.790 051		0.250	8.862 827	

Tafel VII.

 $\log \{P_1^2(m)\}.$

$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$
0.000	9 ₀₀₉₆ 910		0.050	9 ₀₀₉₅ 460	59	0.100	9 ₀₀₉₁ 080	118	0.150	9 ₀₀₈₃ 682	180	0.200	9 ₀₀₇₃ 107	245
0.001	9 ₀₀₉₆ 909	1	0.051	9 ₀₀₉₅ 401	60	0.101	9 ₀₀₉₀ 962	119	0.151	9 ₀₀₈₃ 502	181	0.201	9 ₀₀₇₂ 862	247
0.002	9 ₀₀₉₆ 908	2	0.052	9 ₀₀₉₅ 341	61	0.102	9 ₀₀₉₀ 843	120	0.152	9 ₀₀₈₃ 321	182	0.202	9 ₀₀₇₂ 615	248
0.003	9 ₀₀₉₆ 905	3	0.053	9 ₀₀₉₅ 280	62	0.103	9 ₀₀₉₀ 723	122	0.153	9 ₀₀₈₃ 139	184	0.203	9 ₀₀₇₂ 367	249
0.004	9 ₀₀₉₆ 901	4	0.054	9 ₀₀₉₅ 218	63	0.104	9 ₀₀₉₀ 601	122	0.154	9 ₀₀₈₂ 955	185	0.204	9 ₀₀₇₂ 118	251
0.005	9 ₀₀₉₆ 896	5	0.055	9 ₀₀₉₅ 155	65	0.105	9 ₀₀₉₀ 479	124	0.155	9 ₀₀₈₂ 770	186	0.205	9 ₀₀₇₁ 867	252
0.006	9 ₀₀₉₆ 889	7	0.056	9 ₀₀₉₅ 090	65	0.106	9 ₀₀₉₀ 355	126	0.156	9 ₀₀₈₂ 584	187	0.206	9 ₀₀₇₁ 615	252
0.007	9 ₀₀₉₆ 882	7	0.057	9 ₀₀₉₅ 025	67	0.107	9 ₀₀₉₀ 229	126	0.157	9 ₀₀₈₂ 397	189	0.207	9 ₀₀₇₁ 361	255
0.008	9 ₀₀₉₆ 873	9	0.058	9 ₀₀₉₄ 958	68	0.108	9 ₀₀₉₀ 103	128	0.158	9 ₀₀₈₂ 208	190	0.208	9 ₀₀₇₁ 106	256
0.009	9 ₀₀₉₆ 863	10	0.059	9 ₀₀₉₄ 890	70	0.109	9 ₀₀₈₉ 975	129	0.159	9 ₀₀₈₂ 018	191	0.209	9 ₀₀₇₀ 850	258
		11			70									
0.010	9 ₀₀₉₆ 852	12	0.060	9 ₀₀₉₄ 820	70	0.110	9 ₀₀₈₉ 846	130	0.160	9 ₀₀₈₁ 827	192	0.210	9 ₀₀₇₀ 592	259
0.011	9 ₀₀₉₆ 840	13	0.061	9 ₀₀₉₄ 750	72	0.111	9 ₀₀₈₉ 716	131	0.161	9 ₀₀₈₁ 635	194	0.211	9 ₀₀₇₀ 333	261
0.012	9 ₀₀₉₆ 827	15	0.062	9 ₀₀₉₄ 678	72	0.112	9 ₀₀₈₉ 585	133	0.162	9 ₀₀₈₁ 441	195	0.212	9 ₀₀₇₀ 072	261
0.013	9 ₀₀₉₆ 812	15	0.063	9 ₀₀₉₄ 606	74	0.113	9 ₀₀₈₉ 452	133	0.163	9 ₀₀₈₁ 246	196	0.213	9 ₀₀₆₉ 811	264
0.014	9 ₀₀₉₆ 797	17	0.064	9 ₀₀₉₄ 532	74	0.114	9 ₀₀₈₉ 319	135	0.164	9 ₀₀₈₁ 050	198	0.214	9 ₀₀₆₉ 547	264
0.015	9 ₀₀₉₆ 780	17	0.065	9 ₀₀₉₄ 457	75	0.115	9 ₀₀₈₉ 184	136	0.165	9 ₀₀₈₀ 852	199	0.215	9 ₀₀₆₉ 283	266
0.016	9 ₀₀₉₆ 762	19	0.066	9 ₀₀₉₄ 380	77	0.116	9 ₀₀₈₉ 048	138	0.166	9 ₀₀₈₀ 653	200	0.216	9 ₀₀₆₉ 017	268
0.017	9 ₀₀₉₆ 743	21	0.067	9 ₀₀₉₄ 303	79	0.117	9 ₀₀₈₈ 910	138	0.167	9 ₀₀₈₀ 453	202	0.217	9 ₀₀₆₈ 749	269
0.018	9 ₀₀₉₆ 722	21	0.068	9 ₀₀₉₄ 224	80	0.118	9 ₀₀₈₈ 772	140	0.168	9 ₀₀₈₀ 251	203	0.218	9 ₀₀₆₈ 480	270
0.019	9 ₀₀₉₆ 701	23	0.069	9 ₀₀₉₄ 144	81	0.119	9 ₀₀₈₈ 632	141	0.169	9 ₀₀₈₀ 048	204	0.219	9 ₀₀₆₈ 210	272
		23			81									
0.020	9 ₀₀₉₆ 678	23	0.070	9 ₀₀₉₄ 063	82	0.120	9 ₀₀₈₈ 491	143	0.170	9 ₀₀₇₉ 844	205	0.220	9 ₀₀₆₇ 938	273
0.021	9 ₀₀₉₆ 655	25	0.071	9 ₀₀₉₃ 981	83	0.121	9 ₀₀₈₈ 348	143	0.171	9 ₀₀₇₉ 639	207	0.221	9 ₀₀₆₇ 665	274
0.022	9 ₀₀₉₆ 630	26	0.072	9 ₀₀₉₃ 898	85	0.122	9 ₀₀₈₈ 205	145	0.172	9 ₀₀₇₉ 432	208	0.222	9 ₀₀₆₇ 391	276
0.023	9 ₀₀₉₆ 604	28	0.073	9 ₀₀₉₃ 813	86	0.123	9 ₀₀₈₈ 060	146	0.173	9 ₀₀₇₉ 224	209	0.223	9 ₀₀₆₇ 115	277
0.024	9 ₀₀₉₆ 576	28	0.074	9 ₀₀₉₃ 727	86	0.124	9 ₀₀₈₇ 914	147	0.174	9 ₀₀₇₉ 015	211	0.224	9 ₀₀₆₆ 838	279
0.025	9 ₀₀₉₆ 548	30	0.075	9 ₀₀₉₃ 641	89	0.125	9 ₀₀₈₇ 767	147	0.175	9 ₀₀₇₈ 804	212	0.225	9 ₀₀₆₆ 559	280
0.026	9 ₀₀₉₆ 518	30	0.076	9 ₀₀₉₃ 552	89	0.126	9 ₀₀₈₇ 618	149	0.176	9 ₀₀₇₈ 592	213	0.226	9 ₀₀₆₆ 279	282
0.027	9 ₀₀₉₆ 488	32	0.077	9 ₀₀₉₃ 463	90	0.127	9 ₀₀₈₇ 469	151	0.177	9 ₀₀₇₈ 379	215	0.227	9 ₀₀₆₅ 997	283
0.028	9 ₀₀₉₆ 456	33	0.078	9 ₀₀₉₃ 373	92	0.128	9 ₀₀₈₇ 318	153	0.178	9 ₀₀₇₈ 164	216	0.228	9 ₀₀₆₅ 714	284
0.029	9 ₀₀₉₆ 423	34	0.079	9 ₀₀₉₃ 281	93	0.129	9 ₀₀₈₇ 165	153	0.179	9 ₀₀₇₇ 948	217	0.229	9 ₀₀₆₅ 430	286
		34			93									
0.030	9 ₀₀₉₆ 389	36	0.080	9 ₀₀₉₃ 188	94	0.130	9 ₀₀₈₇ 012	155	0.180	9 ₀₀₇₇ 731	218	0.230	9 ₀₀₆₅ 144	287
0.031	9 ₀₀₉₆ 353	36	0.081	9 ₀₀₉₃ 094	95	0.131	9 ₀₀₈₆ 857	156	0.181	9 ₀₀₇₇ 513	220	0.231	9 ₀₀₆₄ 857	289
0.032	9 ₀₀₉₆ 317	38	0.082	9 ₀₀₉₂ 999	97	0.132	9 ₀₀₈₆ 701	157	0.182	9 ₀₀₇₇ 293	221	0.232	9 ₀₀₆₄ 568	290
0.033	9 ₀₀₉₆ 279	39	0.083	9 ₀₀₉₂ 902	97	0.133	9 ₀₀₈₆ 544	158	0.183	9 ₀₀₇₇ 072	223	0.233	9 ₀₀₆₄ 278	292
0.034	9 ₀₀₉₆ 240	40	0.084	9 ₀₀₉₂ 805	99	0.134	9 ₀₀₈₆ 386	160	0.184	9 ₀₀₇₆ 849	224	0.234	9 ₀₀₆₃ 986	293
0.035	9 ₀₀₉₆ 200	41	0.085	9 ₀₀₉₂ 706	100	0.135	9 ₀₀₈₆ 226	161	0.185	9 ₀₀₇₆ 625	225	0.235	9 ₀₀₆₃ 693	294
0.036	9 ₀₀₉₆ 159	42	0.086	9 ₀₀₉₂ 606	101	0.136	9 ₀₀₈₆ 065	162	0.186	9 ₀₀₇₆ 400	226	0.236	9 ₀₀₆₃ 399	296
0.037	9 ₀₀₉₆ 117	44	0.087	9 ₀₀₉₂ 505	103	0.137	9 ₀₀₈₅ 903	163	0.187	9 ₀₀₇₆ 174	228	0.237	9 ₀₀₆₃ 103	298
0.038	9 ₀₀₉₆ 073	45	0.088	9 ₀₀₉₂ 402	103	0.138	9 ₀₀₈₅ 740	165	0.188	9 ₀₀₇₅ 946	229	0.238	9 ₀₀₆₂ 805	299
0.039	9 ₀₀₉₆ 028	45	0.089	9 ₀₀₉₂ 299	105	0.139	9 ₀₀₈₅ 575	165	0.189	9 ₀₀₇₅ 717	231	0.239	9 ₀₀₆₂ 506	300
		45			105									
0.040	9 ₀₀₉₅ 983	47	0.090	9 ₀₀₉₂ 194	106	0.140	9 ₀₀₈₅ 410	168	0.190	9 ₀₀₇₅ 486	232	0.240	9 ₀₀₆₂ 206	302
0.041	9 ₀₀₉₅ 936	49	0.091	9 ₀₀₉₂ 088	107	0.141	9 ₀₀₈₅ 242	168	0.191	9 ₀₀₇₅ 254	233	0.241	9 ₀₀₆₁ 904	303
0.042	9 ₀₀₉₅ 887	49	0.092	9 ₀₀₉₁ 981	108	0.142	9 ₀₀₈₅ 074	170	0.192	9 ₀₀₇₅ 021	234	0.242	9 ₀₀₆₁ 601	305
0.043	9 ₀₀₉₅ 838	50	0.093	9 ₀₀₉₁ 873	110	0.143	9 ₀₀₈₄ 904	170	0.193	9 ₀₀₇₄ 787	236	0.243	9 ₀₀₆₁ 296	306
0.044	9 ₀₀₉₅ 788	52	0.094	9 ₀₀₉₁ 763	111	0.144	9 ₀₀₈₄ 734	173	0.194	9 ₀₀₇₄ 551	237	0.244	9 ₀₀₆₀ 990	308
0.045	9 ₀₀₉₅ 736	53	0.095	9 ₀₀₉₁ 652	112	0.145	9 ₀₀₈₄ 561	173	0.195	9 ₀₀₇₄ 314	239	0.245	9 ₀₀₆₀ 682	309
0.046	9 ₀₀₉₅ 683	54	0.096	9 ₀₀₉₁ 540	113	0.146	9 ₀₀₈₄ 388	175	0.196	9 ₀₀₇₄ 075	240	0.246	9 ₀₀₆₀ 373	311
0.047	9 ₀₀₉₅ 629	55	0.097	9 ₀₀₉₁ 427	114	0.147	9 ₀₀₈₄ 213	176	0.197	9 ₀₀₇₃ 835	241	0.247	9 ₀₀₆₀ 062	312
0.048	9 ₀₀₉₅ 574	57	0.098	9 ₀₀₉₁ 313	116	0.148	9 ₀₀₈₄ 037	177	0.198	9 ₀₀₇₃ 594	243	0.248	9 ₀₀₅₉ 750	313
0.049	9 ₀₀₉₅ 517	57	0.099	9 ₀₀₉₁ 197	117	0.149	9 ₀₀₈₃ 860	178	0.199	9 ₀₀₇₃ 351	244	0.249	9 ₀₀₅₉ 437	315
0.050	9 ₀₀₉₅ 460	57	0.100	9 ₀₀₉₁ 080		0.150	9 ₀₀₈₃ 682		0.200	9 ₀₀₇₃ 107		0.250	9 ₀₀₅₉ 122	

Tafel VII.

 $\log \{P_1^3(m)\}.$

$\pm m$	P	$+$	$\pm m$	P	$+$	$\pm m$	P	$+$	$\pm m$	P	$+$	$\pm m$	P	$+$
0.000	7n470 026		0.050	7n477 586	301	0.100	7n499 076	553	0.150	7n531 357	728	0.200	7n570 316	818
0.001	7n470 030	4	0.051	7n477 887	307	0.101	7n499 629	557	0.151	7n532 085	731	0.201	7n571 134	819
0.002	7n470 039	9	0.052	7n478 194	312	0.102	7n500 186	561	0.152	7n532 816	733	0.202	7n571 953	820
0.003	7n470 054	15	0.053	7n478 506	318	0.103	7n500 747	565	0.153	7n533 549	736	0.203	7n572 773	821
0.004	7n470 076	22	0.054	7n478 824	323	0.104	7n501 312	570	0.154	7n534 285	738	0.204	7n573 594	822
0.005	7n470 103	27	0.055	7n479 147	329	0.105	7n501 882	574	0.155	7n535 023	741	0.205	7n574 416	823
0.006	7n470 137	34	0.056	7n479 476	335	0.106	7n502 456	578	0.156	7n535 764	743	0.206	7n575 239	824
0.007	7n470 177	40	0.057	7n479 811	340	0.107	7n503 034	582	0.157	7n536 507	746	0.207	7n576 062	825
0.008	7n470 223	46	0.058	7n480 151	345	0.108	7n503 616	587	0.158	7n537 253	748	0.208	7n576 886	826
0.009	7n470 275	52	0.059	7n480 496	351	0.109	7n504 203	590	0.159	7n538 001	751	0.209	7n577 711	827
		58												
0.010	7n470 333	64	0.060	7n480 847	357	0.110	7n504 793	595	0.160	7n538 752	752	0.210	7n578 537	828
0.011	7n470 397	71	0.061	7n481 204	362	0.111	7n505 388	598	0.161	7n539 504	756	0.211	7n579 363	829
0.012	7n470 468	76	0.062	7n481 566	366	0.112	7n505 986	602	0.162	7n540 260	757	0.212	7n580 190	830
0.013	7n470 544	83	0.063	7n481 932	373	0.113	7n506 588	607	0.163	7n541 017	760	0.213	7n581 018	831
0.014	7n470 627	88	0.064	7n482 305	378	0.114	7n507 195	610	0.164	7n541 777	761	0.214	7n581 846	832
0.015	7n470 715	95	0.065	7n482 683	383	0.115	7n507 805	614	0.165	7n542 538	764	0.215	7n582 675	833
0.016	7n470 810	101	0.066	7n483 066	389	0.116	7n508 419	618	0.166	7n543 302	766	0.216	7n583 504	834
0.017	7n470 911	107	0.067	7n483 455	393	0.117	7n509 037	622	0.167	7n544 068	768	0.217	7n584 334	835
0.018	7n471 018	113	0.068	7n483 848	399	0.118	7n509 659	625	0.168	7n544 836	771	0.218	7n585 164	836
0.019	7n471 131	119	0.069	7n484 247	405	0.119	7n510 284	629	0.169	7n545 607	772	0.219	7n585 994	837
0.020	7n471 250	125	0.070	7n484 652	409	0.120	7n510 913	633	0.170	7n546 379	774	0.220	7n586 825	838
0.021	7n471 375	131	0.071	7n485 061	415	0.121	7n511 546	637	0.171	7n547 153	776	0.221	7n587 657	839
0.022	7n471 506	137	0.072	7n485 476	419	0.122	7n512 183	640	0.172	7n547 929	778	0.222	7n588 489	840
0.023	7n471 643	144	0.073	7n485 895	425	0.123	7n512 823	644	0.173	7n548 707	780	0.223	7n589 321	841
0.024	7n471 787	149	0.074	7n486 320	430	0.124	7n513 467	647	0.174	7n549 487	782	0.224	7n590 153	842
0.025	7n471 936	155	0.075	7n486 750	435	0.125	7n514 114	651	0.175	7n550 269	783	0.225	7n590 986	843
0.026	7n472 091	161	0.076	7n487 185	441	0.126	7n514 765	655	0.176	7n551 052	786	0.226	7n591 818	844
0.027	7n472 252	167	0.077	7n487 626	444	0.127	7n515 420	657	0.177	7n551 838	787	0.227	7n592 651	845
0.028	7n472 419	174	0.078	7n488 070	451	0.128	7n516 077	662	0.178	7n552 625	789	0.228	7n593 485	846
0.029	7n472 593	179	0.079	7n488 521	455	0.129	7n516 739	664	0.179	7n553 414	790	0.229	7n594 318	847
0.030	7n472 772	185	0.080	7n488 976	460	0.130	7n517 403	668	0.180	7n554 204	792	0.230	7n595 151	848
0.031	7n472 957	191	0.081	7n489 436	465	0.131	7n518 071	672	0.181	7n554 996	794	0.231	7n595 985	849
0.032	7n473 148	197	0.082	7n489 901	469	0.132	7n518 743	674	0.182	7n555 790	795	0.232	7n596 818	850
0.033	7n473 345	203	0.083	7n490 370	475	0.133	7n519 417	679	0.183	7n556 585	797	0.233	7n597 652	851
0.034	7n473 548	209	0.084	7n490 845	480	0.134	7n520 096	681	0.184	7n557 382	799	0.234	7n598 486	852
0.035	7n473 757	214	0.085	7n491 325	484	0.135	7n520 777	684	0.185	7n558 181	800	0.235	7n599 319	853
0.036	7n473 971	221	0.086	7n491 809	489	0.136	7n521 461	688	0.186	7n558 981	801	0.236	7n600 153	854
0.037	7n474 192	226	0.087	7n492 298	493	0.137	7n522 149	690	0.187	7n559 782	803	0.237	7n600 986	855
0.038	7n474 418	232	0.088	7n492 791	499	0.138	7n522 839	694	0.188	7n560 585	804	0.238	7n601 819	856
0.039	7n474 650	238	0.089	7n493 290	503	0.139	7n523 533	696	0.189	7n561 389	805	0.239	7n602 652	857
0.040	7n474 888	244	0.090	7n493 793	508	0.140	7n524 229	700	0.190	7n562 194	807	0.240	7n603 485	858
0.041	7n475 132	250	0.091	7n494 301	513	0.141	7n524 929	703	0.191	7n563 001	808	0.241	7n604 318	859
0.042	7n475 382	255	0.092	7n494 814	516	0.142	7n525 632	705	0.192	7n563 809	810	0.242	7n605 151	860
0.043	7n475 637	262	0.093	7n495 330	522	0.143	7n526 337	709	0.193	7n564 619	812	0.243	7n605 983	861
0.044	7n475 899	267	0.094	7n495 852	526	0.144	7n527 046	712	0.194	7n565 429	814	0.244	7n606 815	862
0.045	7n476 166	272	0.095	7n496 378	531	0.145	7n527 758	714	0.195	7n566 241	815	0.245	7n607 646	863
0.046	7n476 438	279	0.096	7n496 909	535	0.146	7n528 472	717	0.196	7n567 054	816	0.246	7n608 478	864
0.047	7n476 717	284	0.097	7n497 444	539	0.147	7n529 189	720	0.197	7n567 868	817	0.247	7n609 309	865
0.048	7n477 001	290	0.098	7n497 983	545	0.148	7n529 909	723	0.198	7n568 683	818	0.248	7n610 139	866
0.049	7n477 291	295	0.099	7n498 528	548	0.149	7n530 632	725	0.199	7n569 499	819	0.249	7n610 969	867
0.050	7n477 586		0.100	7n499 076		0.150	7n531 357		0.200	7n570 316		0.250	7n611 799	

Tafel VII.

 $\log \{P_1^{1/m}\}$.

$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$
0.000	8.369 911	0	0.050	8.368 301	65	0.100	8.363 445	131	0.150	8.355 269	198	0.200	8.343 644	269
0.001	8.369 911	2	0.051	8.368 236	67	0.101	8.363 314	132	0.151	8.355 071	200	0.201	8.343 375	270
0.002	8.369 909	3	0.052	8.368 169	67	0.102	8.363 182	133	0.152	8.354 871	201	0.202	8.343 105	272
0.003	8.369 906	5	0.053	8.368 102	70	0.103	8.363 049	135	0.153	8.354 670	202	0.203	8.342 833	273
0.004	8.369 901	6	0.054	8.368 032	70	0.104	8.362 914	136	0.154	8.354 468	204	0.204	8.342 560	275
0.005	8.369 895	7	0.055	8.367 962	71	0.105	8.362 778	137	0.155	8.354 264	205	0.205	8.342 285	276
0.006	8.369 888	8	0.056	8.367 891	73	0.106	8.362 641	137	0.156	8.354 059	206	0.206	8.342 009	278
0.007	8.369 880	10	0.057	8.367 818	75	0.107	8.362 502	139	0.157	8.353 853	208	0.207	8.341 731	279
0.008	8.369 870	11	0.058	8.367 743	75	0.108	8.362 363	139	0.158	8.353 645	209	0.208	8.341 452	281
0.009	8.369 859	12	0.059	8.367 668	77	0.109	8.362 221	142	0.159	8.353 436	211	0.209	8.341 171	282
0.010	8.369 847	14	0.060	8.367 591	78	0.110	8.362 079	144	0.160	8.353 225	212	0.210	8.340 889	283
0.011	8.369 833	14	0.061	8.367 513	80	0.111	8.361 935	146	0.161	8.353 013	213	0.211	8.340 606	285
0.012	8.369 819	16	0.062	8.367 433	80	0.112	8.361 789	146	0.162	8.352 800	215	0.212	8.340 321	287
0.013	8.369 803	18	0.063	8.367 353	82	0.113	8.361 643	148	0.163	8.352 585	216	0.213	8.340 034	288
0.014	8.369 785	18	0.064	8.367 271	84	0.114	8.361 495	149	0.164	8.352 369	218	0.214	8.339 746	289
0.015	8.369 767	20	0.065	8.367 187	84	0.115	8.361 346	151	0.165	8.352 151	219	0.215	8.339 457	291
0.016	8.369 747	22	0.066	8.367 103	86	0.116	8.361 195	152	0.166	8.351 932	220	0.216	8.339 166	292
0.017	8.369 725	22	0.067	8.367 017	88	0.117	8.361 043	153	0.167	8.351 712	222	0.217	8.338 874	294
0.018	8.369 703	24	0.068	8.366 929	88	0.118	8.360 890	155	0.168	8.351 490	223	0.218	8.338 580	296
0.019	8.369 679	25	0.069	8.366 841	90	0.119	8.360 735	156	0.169	8.351 267	225	0.219	8.338 284	296
0.020	8.369 654	26	0.070	8.366 751	91	0.120	8.360 579	158	0.170	8.351 042	226	0.220	8.337 988	299
0.021	8.369 628	28	0.071	8.366 660	93	0.121	8.360 421	158	0.171	8.350 816	227	0.221	8.337 689	300
0.022	8.369 600	29	0.072	8.366 567	93	0.122	8.360 263	160	0.172	8.350 589	229	0.222	8.337 389	301
0.023	8.369 571	30	0.073	8.366 474	96	0.123	8.360 103	162	0.173	8.350 360	230	0.223	8.337 088	303
0.024	8.369 541	32	0.074	8.366 378	96	0.124	8.359 941	162	0.174	8.350 130	232	0.224	8.336 785	304
0.025	8.369 509	33	0.075	8.366 282	98	0.125	8.359 779	164	0.175	8.349 898	233	0.225	8.336 481	306
0.026	8.369 476	34	0.076	8.366 184	99	0.126	8.359 615	166	0.176	8.349 665	235	0.226	8.336 175	308
0.027	8.369 442	35	0.077	8.366 085	100	0.127	8.359 449	167	0.177	8.349 430	235	0.227	8.335 867	308
0.028	8.369 407	37	0.078	8.365 985	102	0.128	8.359 282	168	0.178	8.349 195	238	0.228	8.335 559	311
0.029	8.369 370	38	0.079	8.365 883	103	0.129	8.359 114	169	0.179	8.348 957	239	0.229	8.335 248	312
0.030	8.369 332	39	0.080	8.365 780	104	0.130	8.358 945	171	0.180	8.348 718	240	0.230	8.334 936	313
0.031	8.369 293	41	0.081	8.365 676	106	0.131	8.358 774	172	0.181	8.348 478	241	0.231	8.334 623	315
0.032	8.369 252	42	0.082	8.365 570	106	0.132	8.358 602	174	0.182	8.348 237	243	0.232	8.334 308	316
0.033	8.369 210	43	0.083	8.365 464	109	0.133	8.358 428	175	0.183	8.347 994	245	0.233	8.333 992	318
0.034	8.369 167	44	0.084	8.365 355	109	0.134	8.358 253	176	0.184	8.347 749	245	0.234	8.333 674	320
0.035	8.369 123	46	0.085	8.365 246	111	0.135	8.358 077	178	0.185	8.347 504	248	0.235	8.333 354	321
0.036	8.369 077	47	0.086	8.365 135	112	0.136	8.357 899	179	0.186	8.347 256	248	0.236	8.333 033	322
0.037	8.369 030	48	0.087	8.365 023	114	0.137	8.357 720	180	0.187	8.347 008	250	0.237	8.332 711	324
0.038	8.368 982	50	0.088	8.364 909	114	0.138	8.357 540	182	0.188	8.346 758	252	0.238	8.332 387	326
0.039	8.368 932	51	0.089	8.364 795	116	0.139	8.357 358	183	0.189	8.346 506	253	0.239	8.332 061	327
0.040	8.368 881	52	0.090	8.364 679	118	0.140	8.357 175	184	0.190	8.346 253	254	0.240	8.331 734	329
0.041	8.368 829	54	0.091	8.364 561	119	0.141	8.356 991	186	0.191	8.345 999	256	0.241	8.331 405	330
0.042	8.368 775	54	0.092	8.364 442	120	0.142	8.356 805	187	0.192	8.345 743	258	0.242	8.331 075	332
0.043	8.368 721	56	0.093	8.364 322	121	0.143	8.356 618	189	0.193	8.345 485	258	0.243	8.330 743	333
0.044	8.368 665	58	0.094	8.364 201	123	0.144	8.356 429	190	0.194	8.345 227	261	0.244	8.330 410	335
0.045	8.368 607	59	0.095	8.364 078	124	0.145	8.356 239	191	0.195	8.344 966	261	0.245	8.330 075	336
0.046	8.368 548	60	0.096	8.363 954	125	0.146	8.356 048	193	0.196	8.344 705	263	0.246	8.329 739	338
0.047	8.368 488	61	0.097	8.363 829	127	0.147	8.355 855	194	0.197	8.344 442	265	0.247	8.329 401	339
0.048	8.368 427	62	0.098	8.363 702	128	0.148	8.355 661	195	0.198	8.344 177	266	0.248	8.329 062	342
0.049	8.368 365	64	0.099	8.363 574	129	0.149	8.355 466	197	0.199	8.343 911	267	0.249	8.328 720	342
0.050	8.368 301		0.100	8.363 445		0.150	8.355 269		0.200	8.343 644		0.250	8.328 378	

Tafel VII.

 $\log \{P_1^{(5)}(m)\}$.

$\pm m$	P	$+$	$\pm m$	P	$+$	$\pm m$	P	$+$	$\pm m$	P	$+$	$\pm m$	P	$+$
0.000	6.578 934	3	0.050	6.585 556	264	0.100	6.604 416	486	0.150	6.632 833	642	0.200	6.667 232	723
0.001	6.578 937	8	0.051	6.585 820	269	0.101	6.604 902	489	0.151	6.633 475	644	0.201	6.667 955	724
0.002	6.578 945	14	0.052	6.586 089	273	0.102	6.605 391	493	0.152	6.634 119	647	0.202	6.668 679	725
0.003	6.578 959	18	0.053	6.586 362	279	0.103	6.605 884	498	0.153	6.634 766	649	0.203	6.669 404	726
0.004	6.578 977	24	0.054	6.586 641	284	0.104	6.606 382	500	0.154	6.635 415	651	0.204	6.670 130	726
0.005	6.579 001	30	0.055	6.586 925	288	0.105	6.606 882	505	0.155	6.636 066	653	0.205	6.670 856	728
0.006	6.579 031	35	0.056	6.587 213	293	0.106	6.607 387	508	0.156	6.636 719	656	0.206	6.671 584	728
0.007	6.579 066	40	0.057	6.587 506	298	0.107	6.607 895	512	0.157	6.637 375	658	0.207	6.672 312	728
0.008	6.579 106	46	0.058	6.587 804	303	0.108	6.608 407	516	0.158	6.638 033	660	0.208	6.673 040	730
0.009	6.579 152	51	0.059	6.588 107	308	0.109	6.608 923	519	0.159	6.638 693	662	0.209	6.673 770	730
0.010	6.579 203	56	0.060	6.588 415	312	0.110	6.609 442	523	0.160	6.639 355	664	0.210	6.674 500	731
0.011	6.579 259	61	0.061	6.588 727	318	0.111	6.609 965	526	0.161	6.640 019	666	0.211	6.675 231	731
0.012	6.579 320	67	0.062	6.589 045	322	0.112	6.610 491	530	0.162	6.640 685	669	0.212	6.675 962	732
0.013	6.579 387	73	0.063	6.589 367	326	0.113	6.611 021	533	0.163	6.641 354	670	0.213	6.676 694	732
0.014	6.579 460	78	0.064	6.589 693	332	0.114	6.611 554	537	0.164	6.642 024	672	0.214	6.677 426	733
0.015	6.579 538	83	0.065	6.590 025	336	0.115	6.612 091	540	0.165	6.642 696	674	0.215	6.678 159	734
0.016	6.579 621	88	0.066	6.590 361	340	0.116	6.612 631	543	0.166	6.643 370	676	0.216	6.678 893	734
0.017	6.579 709	93	0.067	6.590 701	346	0.117	6.613 174	547	0.167	6.644 046	678	0.217	6.679 627	734
0.018	6.579 802	99	0.068	6.591 047	350	0.118	6.613 721	551	0.168	6.644 724	680	0.218	6.680 361	735
0.019	6.579 901	105	0.069	6.591 397	354	0.119	6.614 272	553	0.169	6.645 404	682	0.219	6.681 096	735
0.020	6.580 006	109	0.070	6.591 751	360	0.120	6.614 825	557	0.170	6.646 086	683	0.220	6.681 831	735
0.021	6.580 115	115	0.071	6.592 111	363	0.121	6.615 382	560	0.171	6.646 769	685	0.221	6.682 566	736
0.022	6.580 230	120	0.072	6.592 474	369	0.122	6.615 942	564	0.172	6.647 454	687	0.222	6.683 302	736
0.023	6.580 350	125	0.073	6.592 843	372	0.123	6.616 506	567	0.173	6.648 141	689	0.223	6.684 038	736
0.024	6.580 475	131	0.074	6.593 215	378	0.124	6.617 073	569	0.174	6.648 830	690	0.224	6.684 774	737
0.025	6.580 606	136	0.075	6.593 593	381	0.125	6.617 642	573	0.175	6.649 520	692	0.225	6.685 511	736
0.026	6.580 742	141	0.076	6.593 974	386	0.126	6.618 215	576	0.176	6.650 212	693	0.226	6.686 247	737
0.027	6.580 883	147	0.077	6.594 360	391	0.127	6.618 791	580	0.177	6.650 905	695	0.227	6.686 984	737
0.028	6.581 030	151	0.078	6.594 751	395	0.128	6.619 371	582	0.178	6.651 600	697	0.228	6.687 721	737
0.029	6.581 181	157	0.079	6.595 146	399	0.129	6.619 953	585	0.179	6.652 297	698	0.229	6.688 458	738
0.030	6.581 338	162	0.080	6.595 545	404	0.130	6.620 538	588	0.180	6.652 995	700	0.230	6.689 196	737
0.031	6.581 500	168	0.081	6.595 949	408	0.131	6.621 126	592	0.181	6.653 695	701	0.231	6.689 933	737
0.032	6.581 668	172	0.082	6.596 357	413	0.132	6.621 718	594	0.182	6.654 396	702	0.232	6.690 670	738
0.033	6.581 840	178	0.083	6.596 770	416	0.133	6.622 312	597	0.183	6.655 098	704	0.233	6.691 408	738
0.034	6.582 018	183	0.084	6.597 186	421	0.134	6.622 909	600	0.184	6.655 802	706	0.234	6.692 145	738
0.035	6.582 201	188	0.085	6.597 607	425	0.135	6.623 509	603	0.185	6.656 508	706	0.235	6.692 883	737
0.036	6.582 389	193	0.086	6.598 032	430	0.136	6.624 112	605	0.186	6.657 214	708	0.236	6.693 620	738
0.037	6.582 582	198	0.087	6.598 462	433	0.137	6.624 717	609	0.187	6.657 922	709	0.237	6.694 358	737
0.038	6.582 780	204	0.088	6.598 895	438	0.138	6.625 326	611	0.188	6.658 631	711	0.238	6.695 095	737
0.039	6.582 984	208	0.089	6.599 333	442	0.139	6.625 937	614	0.189	6.659 342	712	0.239	6.695 832	737
0.040	6.583 192	214	0.090	6.599 775	446	0.140	6.626 551	616	0.190	6.660 054	713	0.240	6.696 569	737
0.041	6.583 406	219	0.091	6.600 221	450	0.141	6.627 167	619	0.191	6.660 767	714	0.241	6.697 306	736
0.042	6.583 625	223	0.092	6.600 671	454	0.142	6.627 786	622	0.192	6.661 481	715	0.242	6.698 042	736
0.043	6.583 848	229	0.093	6.601 125	458	0.143	6.628 408	625	0.193	6.662 196	716	0.243	6.698 778	736
0.044	6.584 077	234	0.094	6.601 583	463	0.144	6.629 033	627	0.194	6.662 912	718	0.244	6.699 514	736
0.045	6.584 311	239	0.095	6.602 046	466	0.145	6.629 660	630	0.195	6.663 630	718	0.245	6.700 250	736
0.046	6.584 550	244	0.096	6.602 512	470	0.146	6.630 290	632	0.196	6.664 348	719	0.246	6.700 986	735
0.047	6.584 794	249	0.097	6.602 982	474	0.147	6.630 922	634	0.197	6.665 067	721	0.247	6.701 721	735
0.048	6.585 043	254	0.098	6.603 456	478	0.148	6.631 556	637	0.198	6.665 788	721	0.248	6.702 456	734
0.049	6.585 297	259	0.099	6.603 934	482	0.149	6.632 193	640	0.199	6.666 509	723	0.249	6.703 190	734
0.050	6.585 556		0.100	6.604 416		0.150	6.632 833		0.200	6.667 232		0.250	6.703 924	

Tafel VII.

$$\log \{P_1^{6/m}\}.$$

$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$
0.000	7 _n 688 670	1	0.050	7 _n 687 002	68	0.100	7 _n 681 975	135	0.150	7 _n 673 520	204	0.200	7 _n 661 521	277
0.001	7 _n 688 669	2	0.051	7 _n 686 934	68	0.101	7 _n 681 840	137	0.151	7 _n 673 316	207	0.201	7 _n 661 244	279
0.002	7 _n 688 667	3	0.052	7 _n 686 866	71	0.102	7 _n 681 703	138	0.152	7 _n 673 109	207	0.202	7 _n 660 965	280
0.003	7 _n 688 664	5	0.053	7 _n 686 795	71	0.103	7 _n 681 565	139	0.153	7 _n 672 902	209	0.203	7 _n 660 685	282
0.004	7 _n 688 659	6	0.054	7 _n 686 724	73	0.104	7 _n 681 426	141	0.154	7 _n 672 693	211	0.204	7 _n 660 403	283
0.005	7 _n 688 653	7	0.055	7 _n 686 651	74	0.105	7 _n 681 285	142	0.155	7 _n 672 482	211	0.205	7 _n 660 120	285
0.006	7 _n 688 646	9	0.056	7 _n 686 577	76	0.106	7 _n 681 143	143	0.156	7 _n 672 271	214	0.206	7 _n 659 835	286
0.007	7 _n 688 637	10	0.057	7 _n 686 501	76	0.107	7 _n 681 000	145	0.157	7 _n 672 057	214	0.207	7 _n 659 549	287
0.008	7 _n 688 627	11	0.058	7 _n 686 425	79	0.108	7 _n 680 855	146	0.158	7 _n 671 843	216	0.208	7 _n 659 262	290
0.009	7 _n 688 616	13	0.059	7 _n 686 346	79	0.109	7 _n 680 709	148	0.159	7 _n 671 627	218	0.209	7 _n 658 972	290
0.010	7 _n 688 603	14	0.060	7 _n 686 267	81	0.110	7 _n 680 561	149	0.160	7 _n 671 409	219	0.210	7 _n 658 682	292
0.011	7 _n 688 589	15	0.061	7 _n 686 186	82	0.111	7 _n 680 412	150	0.161	7 _n 671 190	220	0.211	7 _n 658 390	294
0.012	7 _n 688 574	17	0.062	7 _n 686 104	84	0.112	7 _n 680 262	152	0.162	7 _n 670 970	222	0.212	7 _n 658 096	295
0.013	7 _n 688 557	18	0.063	7 _n 686 020	85	0.113	7 _n 680 110	153	0.163	7 _n 670 748	224	0.213	7 _n 657 801	297
0.014	7 _n 688 539	19	0.064	7 _n 685 935	86	0.114	7 _n 679 957	154	0.164	7 _n 670 524	224	0.214	7 _n 657 504	298
0.015	7 _n 688 520	21	0.065	7 _n 685 849	88	0.115	7 _n 679 803	156	0.165	7 _n 670 300	226	0.215	7 _n 657 206	300
0.016	7 _n 688 499	22	0.066	7 _n 685 761	89	0.116	7 _n 679 647	157	0.166	7 _n 670 074	228	0.216	7 _n 656 906	301
0.017	7 _n 688 477	23	0.067	7 _n 685 672	90	0.117	7 _n 679 491	159	0.167	7 _n 669 846	229	0.217	7 _n 656 605	303
0.018	7 _n 688 454	25	0.068	7 _n 685 582	92	0.118	7 _n 679 330	160	0.168	7 _n 669 617	230	0.218	7 _n 656 302	304
0.019	7 _n 688 429	26	0.069	7 _n 685 490	93	0.119	7 _n 679 171	161	0.169	7 _n 669 387	232	0.219	7 _n 655 998	306
0.020	7 _n 688 403	27	0.070	7 _n 685 397	95	0.120	7 _n 679 010	163	0.170	7 _n 669 155	234	0.220	7 _n 655 692	307
0.021	7 _n 688 376	29	0.071	7 _n 685 302	95	0.121	7 _n 678 847	164	0.171	7 _n 668 921	234	0.221	7 _n 655 385	309
0.022	7 _n 688 347	30	0.072	7 _n 685 207	97	0.122	7 _n 678 683	166	0.172	7 _n 668 687	237	0.222	7 _n 655 076	311
0.023	7 _n 688 317	31	0.073	7 _n 685 110	99	0.123	7 _n 678 517	167	0.173	7 _n 668 450	237	0.223	7 _n 654 765	311
0.024	7 _n 688 286	33	0.074	7 _n 685 011	100	0.124	7 _n 678 350	168	0.174	7 _n 668 213	239	0.224	7 _n 654 454	314
0.025	7 _n 688 253	34	0.075	7 _n 684 911	101	0.125	7 _n 678 182	170	0.175	7 _n 667 974	241	0.225	7 _n 654 140	315
0.026	7 _n 688 219	35	0.076	7 _n 684 810	102	0.126	7 _n 678 012	171	0.176	7 _n 667 733	242	0.226	7 _n 653 825	316
0.027	7 _n 688 184	37	0.077	7 _n 684 708	104	0.127	7 _n 677 841	172	0.177	7 _n 667 491	244	0.227	7 _n 653 509	318
0.028	7 _n 688 147	38	0.078	7 _n 684 604	105	0.128	7 _n 677 669	174	0.178	7 _n 667 247	244	0.228	7 _n 653 191	320
0.029	7 _n 688 109	39	0.079	7 _n 684 499	107	0.129	7 _n 677 495	175	0.179	7 _n 667 003	247	0.229	7 _n 652 871	321
0.030	7 _n 688 070	41	0.080	7 _n 684 392	108	0.130	7 _n 677 320	177	0.180	7 _n 666 756	248	0.230	7 _n 652 550	322
0.031	7 _n 688 029	42	0.081	7 _n 684 284	109	0.131	7 _n 677 143	178	0.181	7 _n 666 508	249	0.231	7 _n 652 228	325
0.032	7 _n 687 987	43	0.082	7 _n 684 175	111	0.132	7 _n 676 965	179	0.182	7 _n 666 259	251	0.232	7 _n 651 903	325
0.033	7 _n 687 944	45	0.083	7 _n 684 064	112	0.133	7 _n 676 786	181	0.183	7 _n 666 008	252	0.233	7 _n 651 578	328
0.034	7 _n 687 899	46	0.084	7 _n 683 952	113	0.134	7 _n 676 605	182	0.184	7 _n 665 756	254	0.234	7 _n 651 250	328
0.035	7 _n 687 853	47	0.085	7 _n 683 839	115	0.135	7 _n 676 423	184	0.185	7 _n 665 502	255	0.235	7 _n 650 922	331
0.036	7 _n 687 806	49	0.086	7 _n 683 724	116	0.136	7 _n 676 239	185	0.186	7 _n 665 247	256	0.236	7 _n 650 591	332
0.037	7 _n 687 757	50	0.087	7 _n 683 608	118	0.137	7 _n 676 054	186	0.187	7 _n 664 991	258	0.237	7 _n 650 259	333
0.038	7 _n 687 707	51	0.088	7 _n 683 490	118	0.138	7 _n 675 868	188	0.188	7 _n 664 733	260	0.238	7 _n 649 926	335
0.039	7 _n 687 656	53	0.089	7 _n 683 372	121	0.139	7 _n 675 680	190	0.189	7 _n 664 473	261	0.239	7 _n 649 591	337
0.040	7 _n 687 603	54	0.090	7 _n 683 251	121	0.140	7 _n 675 490	190	0.190	7 _n 664 212	262	0.240	7 _n 649 254	338
0.041	7 _n 687 549	56	0.091	7 _n 683 130	123	0.141	7 _n 675 300	192	0.191	7 _n 663 950	264	0.241	7 _n 648 916	339
0.042	7 _n 687 493	56	0.092	7 _n 683 007	124	0.142	7 _n 675 108	194	0.192	7 _n 663 686	266	0.242	7 _n 648 577	342
0.043	7 _n 687 437	59	0.093	7 _n 682 883	126	0.143	7 _n 674 914	195	0.193	7 _n 663 420	266	0.243	7 _n 648 235	343
0.044	7 _n 687 378	59	0.094	7 _n 682 757	127	0.144	7 _n 674 719	196	0.194	7 _n 663 154	269	0.244	7 _n 647 892	344
0.045	7 _n 687 319	61	0.095	7 _n 682 630	128	0.145	7 _n 674 523	198	0.195	7 _n 662 885	270	0.245	7 _n 647 548	346
0.046	7 _n 687 258	62	0.096	7 _n 682 502	130	0.146	7 _n 674 325	199	0.196	7 _n 662 615	271	0.246	7 _n 647 202	347
0.047	7 _n 687 196	63	0.097	7 _n 682 372	131	0.147	7 _n 674 126	200	0.197	7 _n 662 344	273	0.247	7 _n 646 855	350
0.048	7 _n 687 133	65	0.098	7 _n 682 241	132	0.148	7 _n 673 926	202	0.198	7 _n 662 071	274	0.248	7 _n 646 505	350
0.049	7 _n 687 068	66	0.099	7 _n 682 109	134	0.149	7 _n 673 724	204	0.199	7 _n 661 797	276	0.249	7 _n 646 155	353
0.050	7 _n 687 002		0.100	7 _n 681 975		0.150	7 _n 673 520		0.200	7 _n 661 521		0.250	7 _n 645 802	

Tafel VII.

 $\log \{P_1^7(m)\}.$

$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$
0.000	511777 993		0.050	511784 225	248	0.100	511801 992		0.150	511828 803		0.200	511861 312	684
0.001	511777 995	2	0.051	511784 473	253	0.101	511802 450	458	0.151	511829 410	607	0.201	511861 996	684
0.002	511778 003	8	0.052	511784 726	258	0.102	511802 911	461	0.152	511830 018	608	0.202	511862 680	686
0.003	511778 015	12	0.053	511784 984	262	0.103	511803 377	466	0.153	511830 629	611	0.203	511863 366	686
0.004	511778 033	18	0.054	511785 246	267	0.104	511803 845	468	0.154	511831 241	612	0.204	511864 052	688
0.005	511778 056	23	0.055	511785 513	272	0.105	511804 317	472	0.155	511831 856	615	0.205	511864 740	688
0.006	511778 083	27	0.056	511785 785	276	0.106	511804 793	476	0.156	511832 473	617	0.206	511865 428	688
0.007	511778 116	33	0.057	511786 061	281	0.107	511805 272	479	0.157	511833 093	620	0.207	511866 116	690
0.008	511778 155	39	0.058	511786 342	285	0.108	511805 755	483	0.158	511833 714	621	0.208	511866 806	690
0.009	511778 197	42	0.059	511786 627	290	0.109	511806 241	486	0.159	511834 337	623	0.209	511867 496	690
		48						490			626			690
0.010	511778 245		0.060	511786 917	294	0.110	511806 731		0.160	511834 963		0.210	511868 186	691
0.011	511778 298	53	0.061	511787 211	299	0.111	511807 224	493	0.161	511835 590	627	0.211	511868 877	692
0.012	511778 356	58	0.062	511787 510	303	0.112	511807 720	496	0.162	511836 220	630	0.212	511869 569	693
0.013	511778 419	63	0.063	511787 813	307	0.113	511808 219	499	0.163	511836 851	631	0.213	511870 262	693
0.014	511778 487	68	0.064	511788 120	312	0.114	511808 722	503	0.164	511837 484	633	0.214	511870 955	693
0.015	511778 560	73	0.065	511788 432	317	0.115	511809 229	507	0.165	511838 119	635	0.215	511871 648	694
0.016	511778 638	78	0.066	511788 749	321	0.116	511809 738	509	0.166	511838 756	637	0.216	511872 342	694
0.017	511778 721	83	0.067	511789 070	325	0.117	511810 251	513	0.167	511839 395	639	0.217	511873 036	695
0.018	511778 809	88	0.068	511789 395	330	0.118	511810 767	516	0.168	511840 035	640	0.218	511873 731	695
0.019	511778 903	94	0.069	511789 725	334	0.119	511811 286	519	0.169	511840 678	643	0.219	511874 426	695
		98						522			644			695
0.020	511779 001		0.070	511790 059	338	0.120	511811 808		0.170	511841 322		0.220	511875 121	696
0.021	511779 104	103	0.071	511790 397	343	0.121	511812 333	525	0.171	511841 967	645	0.221	511875 817	696
0.022	511779 212	108	0.072	511790 740	346	0.122	511812 862	529	0.172	511842 615	648	0.222	511876 513	697
0.023	511779 325	113	0.073	511791 086	351	0.123	511813 394	532	0.173	511843 264	649	0.223	511877 210	697
0.024	511779 443	118	0.074	511791 437	355	0.124	511813 928	534	0.174	511843 915	651	0.224	511877 906	697
0.025	511779 566	123	0.075	511791 793	359	0.125	511814 465	537	0.175	511844 567	652	0.225	511878 603	697
0.026	511779 694	128	0.076	511792 152	364	0.126	511815 006	541	0.176	511845 221	654	0.226	511879 300	698
0.027	511779 827	133	0.077	511792 516	368	0.127	511815 550	544	0.177	511845 876	655	0.227	511879 998	698
0.028	511779 964	137	0.078	511792 884	372	0.128	511816 096	546	0.178	511846 533	657	0.228	511880 695	698
0.029	511780 107	143	0.079	511793 256	377	0.129	511816 645	549	0.179	511847 192	659	0.229	511881 393	698
		148						553			659			698
0.030	511780 255		0.080	511793 633	380	0.130	511817 198		0.180	511847 851		0.230	511882 091	697
0.031	511780 407	152	0.081	511794 013	384	0.131	511817 753	555	0.181	511848 513	662	0.231	511882 788	698
0.032	511780 565	158	0.082	511794 397	389	0.132	511818 311	558	0.182	511849 175	662	0.232	511883 486	698
0.033	511780 727	162	0.083	511794 786	393	0.133	511818 872	561	0.183	511849 840	665	0.233	511884 184	698
0.034	511780 895	168	0.084	511795 179	396	0.134	511819 435	563	0.184	511850 505	665	0.234	511884 882	698
0.035	511781 067	172	0.085	511795 575	401	0.135	511820 001	566	0.185	511851 172	667	0.235	511885 580	698
0.036	511781 244	177	0.086	511795 976	404	0.136	511820 570	569	0.186	511851 840	668	0.236	511886 278	698
0.037	511781 425	181	0.087	511796 380	409	0.137	511821 141	571	0.187	511852 509	669	0.237	511886 976	698
0.038	511781 612	187	0.088	511796 789	412	0.138	511821 716	575	0.188	511853 180	671	0.238	511887 673	698
0.039	511781 804	192	0.089	511797 201	417	0.139	511822 293	577	0.189	511853 851	671	0.239	511888 371	698
		196						579			673			698
0.040	511782 000		0.090	511797 618	420	0.140	511822 872		0.190	511854 524		0.240	511889 069	697
0.041	511782 201	201	0.091	511798 038	424	0.141	511823 454	582	0.191	511855 198	674	0.241	511889 766	697
0.042	511782 407	206	0.092	511798 462	428	0.142	511824 039	585	0.192	511855 873	675	0.242	511890 463	697
0.043	511782 617	210	0.093	511798 890	432	0.143	511824 626	587	0.193	511856 550	677	0.243	511891 160	697
0.044	511782 833	216	0.094	511799 322	436	0.144	511825 215	589	0.194	511857 227	678	0.244	511891 857	697
0.045	511783 053	220	0.095	511799 758	439	0.145	511825 807	592	0.195	511857 905	680	0.245	511892 553	696
0.046	511783 278	225	0.096	511800 197	443	0.146	511826 402	595	0.196	511858 585	680	0.246	511893 249	696
0.047	511783 508	230	0.097	511800 640	447	0.147	511826 999	597	0.197	511859 265	681	0.247	511893 945	695
0.048	511783 742	234	0.098	511801 087	451	0.148	511827 598	599	0.198	511859 946	682	0.248	511894 640	696
0.049	511783 981	239	0.099	511801 538	454	0.149	511828 199	601	0.199	511860 628	684	0.249	511895 336	696
0.050	511784 225	244	0.100	511801 992		0.150	511828 803	604	0.200	511861 312	684	0.250	511896 030	694

Tafel VII.

 $\log \{P_1(m)\}$.

$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$
0.000	7.028 618		0.050	7.026 920	68	0.100	7.021 806	137	0.150	7.013 210	208	0.200	7.001 021	282
0.001	7.028 617	1	0.051	7.026 852	70	0.101	7.021 669	139	0.151	7.013 002	210	0.201	7.000 739	283
0.002	7.028 615	2	0.052	7.026 782	72	0.102	7.021 530	141	0.152	7.012 792	211	0.202	7.000 456	284
0.003	7.028 612	3	0.053	7.026 710	72	0.103	7.021 389	141	0.153	7.012 581	212	0.203	7.000 172	286
0.004	7.028 607	5	0.054	7.026 638	75	0.104	7.021 248	143	0.154	7.012 369	214	0.204	6.999 886	288
0.005	7.028 601	6	0.055	7.026 563	75	0.105	7.021 105	145	0.155	7.012 155	215	0.205	6.999 598	289
0.006	7.028 594	7	0.056	7.026 488	77	0.106	7.020 960	146	0.156	7.011 940	217	0.206	6.999 309	290
0.007	7.028 585	9	0.057	7.026 411	78	0.107	7.020 814	147	0.157	7.011 723	218	0.207	6.999 019	292
0.008	7.028 575	10	0.058	7.026 333	80	0.108	7.020 667	149	0.158	7.011 505	220	0.208	6.998 727	294
0.009	7.028 563	12	0.059	7.026 253	81	0.109	7.020 518	150	0.159	7.011 285	221	0.209	6.998 433	295
		13												
0.010	7.028 550		0.060	7.026 172	82	0.110	7.020 368	151	0.160	7.011 064	222	0.210	6.998 138	297
0.011	7.028 536	14	0.061	7.026 090	84	0.111	7.020 217	153	0.161	7.010 842	224	0.211	6.997 841	298
0.012	7.028 520	16	0.062	7.026 006	85	0.112	7.020 064	154	0.162	7.010 618	226	0.212	6.997 543	299
0.013	7.028 504	19	0.063	7.025 921	86	0.113	7.019 910	156	0.163	7.010 392	227	0.213	6.997 244	301
0.014	7.028 485	19	0.064	7.025 835	88	0.114	7.019 754	157	0.164	7.010 165	228	0.214	6.996 943	303
0.015	7.028 466	21	0.065	7.025 747	89	0.115	7.019 597	159	0.165	7.009 937	230	0.215	6.996 640	304
0.016	7.028 445	23	0.066	7.025 658	91	0.116	7.019 438	159	0.166	7.009 707	231	0.216	6.996 336	306
0.017	7.028 422	24	0.067	7.025 567	92	0.117	7.019 279	162	0.167	7.009 476	233	0.217	6.996 030	307
0.018	7.028 398	25	0.068	7.025 475	93	0.118	7.019 117	162	0.168	7.009 243	234	0.218	6.995 723	309
0.019	7.028 373		0.069	7.025 382	95	0.119	7.018 955	164	0.169	7.009 009	235	0.219	6.995 414	310
		26												
0.020	7.028 347	28	0.070	7.025 287	96	0.120	7.018 791	166	0.170	7.008 774	238	0.220	6.995 104	312
0.021	7.028 319	29	0.071	7.025 191	97	0.121	7.018 625	167	0.171	7.008 536	238	0.221	6.994 792	314
0.022	7.028 290	31	0.072	7.025 094	99	0.122	7.018 458	168	0.172	7.008 298	240	0.222	6.994 478	315
0.023	7.028 259	32	0.073	7.024 995	100	0.123	7.018 290	170	0.173	7.008 058	242	0.223	6.994 163	316
0.024	7.028 227	33	0.074	7.024 895	102	0.124	7.018 120	171	0.174	7.007 816	242	0.224	6.993 847	318
0.025	7.028 194	35	0.075	7.024 793	103	0.125	7.017 949	172	0.175	7.007 574	245	0.225	6.993 529	320
0.026	7.028 159	36	0.076	7.024 690	104	0.126	7.017 777	174	0.176	7.007 329	246	0.226	6.993 209	321
0.027	7.028 123	37	0.077	7.024 586	106	0.127	7.017 603	176	0.177	7.007 083	247	0.227	6.992 888	322
0.028	7.028 086	39	0.078	7.024 480	107	0.128	7.017 427	176	0.178	7.006 836	249	0.228	6.992 566	325
0.029	7.028 047		0.079	7.024 373	108	0.129	7.017 251	179	0.179	7.006 587	250	0.229	6.992 241	325
		40												
0.030	7.028 007	41	0.080	7.024 265	110	0.130	7.017 072	179	0.180	7.006 337	252	0.230	6.991 916	328
0.031	7.027 966	43	0.081	7.024 155	111	0.131	7.016 893	181	0.181	7.006 085	253	0.231	6.991 588	329
0.032	7.027 923	44	0.082	7.024 044	113	0.132	7.016 712	183	0.182	7.005 832	255	0.232	6.991 259	330
0.033	7.027 879	45	0.083	7.023 931	114	0.133	7.016 529	184	0.183	7.005 577	256	0.233	6.990 929	332
0.034	7.027 834	47	0.084	7.023 817	115	0.134	7.016 345	185	0.184	7.005 321	257	0.234	6.990 597	333
0.035	7.027 787	48	0.085	7.023 702	117	0.135	7.016 160	187	0.185	7.005 064	260	0.235	6.990 264	336
0.036	7.027 739	50	0.086	7.023 585	118	0.136	7.015 973	188	0.186	7.004 804	260	0.236	6.989 928	336
0.037	7.027 689	51	0.087	7.023 467	119	0.137	7.015 785	189	0.187	7.004 544	262	0.237	6.989 592	338
0.038	7.027 638	52	0.088	7.023 348	121	0.138	7.015 596	191	0.188	7.004 282	264	0.238	6.989 254	340
0.039	7.027 586		0.089	7.023 227	122	0.139	7.015 405	193	0.189	7.004 018	265	0.239	6.988 914	342
		54												
0.040	7.027 532	55	0.090	7.023 105	124	0.140	7.015 212	193	0.190	7.003 753	266	0.240	6.988 572	342
0.041	7.027 477	56	0.091	7.022 981	125	0.141	7.015 019	196	0.191	7.003 487	268	0.241	6.988 230	345
0.042	7.027 421	58	0.092	7.022 856	126	0.142	7.014 823	196	0.192	7.003 219	270	0.242	6.987 885	346
0.043	7.027 363	59	0.093	7.022 730	128	0.143	7.014 627	198	0.193	7.002 949	271	0.243	6.987 539	348
0.044	7.027 304	61	0.094	7.022 602	129	0.144	7.014 429	200	0.194	7.002 678	272	0.244	6.987 191	349
0.045	7.027 243	62	0.095	7.022 473	131	0.145	7.014 229	201	0.195	7.002 406	274	0.245	6.986 842	351
0.046	7.027 181	63	0.096	7.022 342	132	0.146	7.014 028	202	0.196	7.002 132	276	0.246	6.986 491	352
0.047	7.027 118	64	0.097	7.022 210	133	0.147	7.013 826	204	0.197	7.001 856	277	0.247	6.986 139	354
0.048	7.027 054	66	0.098	7.022 077	135	0.148	7.013 622	205	0.198	7.001 579	278	0.248	6.985 785	356
0.049	7.026 988	68	0.099	7.021 942	136	0.149	7.013 417	207	0.199	7.001 301	280	0.249	6.985 429	357
0.050	7.026 920		0.100	7.021 806		0.150	7.013 210		0.200	7.001 021		0.250	6.985 072	

Tafel VII.

log $\{P_1^q(m)\}$.

$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$
0.000	5.023 962		0.050	5.029 981		0.100	5.047 150		0.150	5.073 082		0.200	5.104 555	
0.001	5.023 965	3	0.051	5.030 221	240	0.101	5.047 593	443	0.151	5.073 669	587	0.201	5.105 218	663
0.002	5.023 972	7	0.052	5.030 466	245	0.102	5.048 039	446	0.152	5.074 258	589	0.202	5.105 881	663
0.003	5.023 984	12	0.053	5.030 715	249	0.103	5.048 489	450	0.153	5.074 849	591	0.203	5.106 545	664
0.004	5.024 001	17	0.054	5.030 968	253	0.104	5.048 942	453	0.154	5.075 442	593	0.204	5.107 210	665
0.005	5.024 023	22	0.055	5.031 226	258	0.105	5.049 398	456	0.155	5.076 037	595	0.205	5.107 876	666
0.006	5.024 050	27	0.056	5.031 488	262	0.106	5.049 858	460	0.156	5.076 634	597	0.206	5.108 542	666
0.007	5.024 082	32	0.057	5.031 755	267	0.107	5.050 322	464	0.157	5.077 233	599	0.207	5.109 209	667
0.008	5.024 118	36	0.058	5.032 026	271	0.108	5.050 788	466	0.158	5.077 835	602	0.208	5.109 877	668
0.009	5.024 160	42	0.059	5.032 302	276	0.109	5.051 258	470	0.159	5.078 438	603	0.209	5.110 546	669
		46			279			474			605			669
0.010	5.024 206	51	0.060	5.032 581	285	0.110	5.051 732	476	0.160	5.079 043	607	0.210	5.111 215	669
0.011	5.024 257	56	0.061	5.032 866	288	0.111	5.052 208	480	0.161	5.079 650	610	0.211	5.111 884	670
0.012	5.024 313	61	0.062	5.033 154	293	0.112	5.052 688	483	0.162	5.080 260	611	0.212	5.112 554	671
0.013	5.024 374	66	0.063	5.033 447	297	0.113	5.053 171	486	0.163	5.080 871	613	0.213	5.113 225	671
0.014	5.024 440	70	0.064	5.033 744	302	0.114	5.053 657	490	0.164	5.081 484	614	0.214	5.113 896	672
0.015	5.024 510	76	0.065	5.034 046	306	0.115	5.054 147	493	0.165	5.082 098	617	0.215	5.114 568	672
0.016	5.024 586	80	0.066	5.034 352	310	0.116	5.054 640	495	0.166	5.082 715	618	0.216	5.115 240	673
0.017	5.024 666	85	0.067	5.034 662	314	0.117	5.055 135	499	0.167	5.083 333	620	0.217	5.115 913	673
0.018	5.024 751	90	0.068	5.034 976	319	0.118	5.055 634	502	0.168	5.083 953	622	0.218	5.116 586	673
0.019	5.024 841	95	0.069	5.035 295	322	0.119	5.056 136	505	0.169	5.084 575	623	0.219	5.117 259	674
		99			327			508	0.170	5.085 198	625	0.220	5.117 933	674
0.020	5.024 936	105	0.070	5.035 617	331	0.120	5.056 641	512	0.171	5.085 823	627	0.221	5.118 607	675
0.021	5.025 035	109	0.071	5.035 944	335	0.121	5.057 149	514	0.172	5.086 450	629	0.222	5.119 282	675
0.022	5.025 140	114	0.072	5.036 275	340	0.122	5.057 661	517	0.173	5.087 079	630	0.223	5.119 957	675
0.023	5.025 249	118	0.073	5.036 610	343	0.123	5.058 175	520	0.174	5.087 709	631	0.224	5.120 632	675
0.024	5.025 363	124	0.074	5.036 950	347	0.124	5.058 692	522	0.175	5.088 340	633	0.225	5.121 307	675
0.025	5.025 481	128	0.075	5.037 293	352	0.125	5.059 212	526	0.176	5.088 973	635	0.226	5.121 982	676
0.026	5.025 605	133	0.076	5.037 640	356	0.126	5.059 734	529	0.177	5.089 608	636	0.227	5.122 658	676
0.027	5.025 733	138	0.077	5.037 992	359	0.127	5.060 260	531	0.178	5.090 244	637	0.228	5.123 334	676
0.028	5.025 866	143	0.078	5.038 348	364	0.128	5.060 789	534	0.179	5.090 881	639	0.229	5.124 010	676
0.029	5.026 004	147	0.079	5.038 707	367	0.129	5.061 320	537						
		152			372	0.130	5.061 854	540	0.180	5.091 520	640	0.230	5.124 686	676
0.030	5.026 147	157	0.080	5.039 071	375	0.131	5.062 391	542	0.181	5.092 160	642	0.231	5.125 362	676
0.031	5.026 294	162	0.081	5.039 438	380	0.132	5.062 931	545	0.182	5.092 802	643	0.232	5.126 038	677
0.032	5.026 446	166	0.082	5.039 810	383	0.133	5.063 473	548	0.183	5.093 445	645	0.233	5.126 715	677
0.033	5.026 603	171	0.083	5.040 185	387	0.134	5.064 018	550	0.184	5.094 090	647	0.234	5.127 391	677
0.034	5.026 765	175	0.084	5.040 565	391	0.135	5.064 566	553	0.185	5.094 735	648	0.235	5.128 067	677
0.035	5.026 931	181	0.085	5.040 948	395	0.136	5.065 116	556	0.186	5.095 382	650	0.236	5.128 744	676
0.036	5.027 102	185	0.086	5.041 335	399	0.137	5.065 669	558	0.187	5.096 030	652	0.237	5.129 420	676
0.037	5.027 277	189	0.087	5.041 726	402	0.138	5.066 225	560	0.188	5.096 680	654	0.238	5.130 096	676
0.038	5.027 458		0.088	5.042 121	407	0.139	5.066 783	564	0.189	5.097 330	656	0.239	5.130 772	676
0.039	5.027 643		0.089	5.042 520	410			565			657			
					413	0.140	5.067 343	568	0.190	5.097 982	659	0.240	5.131 448	676
0.040	5.027 832	194	0.090	5.042 922	418	0.141	5.067 907	571	0.191	5.098 634	661	0.241	5.132 124	676
0.041	5.028 026	204	0.091	5.043 329	421	0.142	5.068 472	572	0.192	5.099 288	663	0.242	5.132 800	675
0.042	5.028 225	208	0.092	5.043 739	424	0.143	5.069 040	574	0.193	5.099 943	665	0.243	5.133 475	675
0.043	5.028 429	213	0.093	5.044 152	427	0.144	5.069 611	576	0.194	5.100 599	667	0.244	5.134 150	675
0.044	5.028 637	217	0.094	5.044 570	429	0.145	5.070 183	577	0.195	5.101 256	669	0.245	5.134 825	675
0.045	5.028 850	222	0.095	5.044 991	432	0.146	5.070 759	580	0.196	5.101 914	671	0.246	5.135 500	674
0.046	5.029 067	226	0.096	5.045 415	435	0.147	5.071 336	582	0.197	5.102 573	673	0.247	5.136 174	674
0.047	5.029 289	231	0.097	5.045 844	439	0.148	5.071 916	584	0.198	5.103 233	675	0.248	5.136 848	674
0.048	5.029 515	235	0.098	5.046 276	443	0.149	5.072 498	587	0.199	5.103 894	677	0.249	5.137 522	673
0.049	5.029 746		0.099	5.046 711	447	0.150	5.073 082	589	0.200	5.104 555	679	0.250	5.138 195	673
0.050	5.029 981		0.100	5.047 150	451			591			681			

Tafel VII.

 $\log \{P_1^{10}(m)\}.$

$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$
0.000	6 _n 380 801	1	0.050	6 _n 379 085	69	0.100	6 _n 373 918	139	0.150	6 _n 365 236	210	0.200	6 _n 352 932	284
0.001	6 _n 380 800	2	0.051	6 _n 379 016	71	0.101	6 _n 373 779	140	0.151	6 _n 365 026	211	0.201	6 _n 352 648	286
0.002	6 _n 380 798	3	0.052	6 _n 378 945	72	0.102	6 _n 373 639	142	0.152	6 _n 364 815	213	0.202	6 _n 352 362	287
0.003	6 _n 380 795	5	0.053	6 _n 378 873	74	0.103	6 _n 373 497	143	0.153	6 _n 364 602	215	0.203	6 _n 352 075	288
0.004	6 _n 380 790	6	0.054	6 _n 378 799	75	0.104	6 _n 373 354	145	0.154	6 _n 364 387	216	0.204	6 _n 351 787	290
0.005	6 _n 380 784	8	0.055	6 _n 378 724	76	0.105	6 _n 373 209	146	0.155	6 _n 364 171	217	0.205	6 _n 351 497	292
0.006	6 _n 380 776	9	0.056	6 _n 378 648	77	0.106	6 _n 373 063	147	0.156	6 _n 363 954	219	0.206	6 _n 351 205	293
0.007	6 _n 380 767	10	0.057	6 _n 378 571	80	0.107	6 _n 372 916	149	0.157	6 _n 363 735	220	0.207	6 _n 350 912	295
0.008	6 _n 380 757	12	0.058	6 _n 378 491	80	0.108	6 _n 372 767	150	0.158	6 _n 363 515	222	0.208	6 _n 350 617	296
0.009	6 _n 380 745	13	0.059	6 _n 378 411	82	0.109	6 _n 372 617	151	0.159	6 _n 363 293	223	0.209	6 _n 350 321	298
0.010	6 _n 380 732	14	0.060	6 _n 378 329	83	0.110	6 _n 372 466	153	0.160	6 _n 363 070	225	0.210	6 _n 350 023	299
0.011	6 _n 380 718	16	0.061	6 _n 378 246	85	0.111	6 _n 372 313	155	0.161	6 _n 362 845	226	0.211	6 _n 349 724	301
0.012	6 _n 380 702	17	0.062	6 _n 378 161	85	0.112	6 _n 372 158	155	0.162	6 _n 362 619	228	0.212	6 _n 349 423	302
0.013	6 _n 380 685	19	0.063	6 _n 378 076	88	0.113	6 _n 372 003	158	0.163	6 _n 362 391	229	0.213	6 _n 349 121	304
0.014	6 _n 380 666	20	0.064	6 _n 377 988	89	0.114	6 _n 371 845	158	0.164	6 _n 362 162	230	0.214	6 _n 348 817	305
0.015	6 _n 380 646	21	0.065	6 _n 377 899	90	0.115	6 _n 371 687	160	0.165	6 _n 361 932	232	0.215	6 _n 348 512	307
0.016	6 _n 380 625	22	0.066	6 _n 377 809	91	0.116	6 _n 371 527	162	0.166	6 _n 361 700	234	0.216	6 _n 348 205	309
0.017	6 _n 380 603	24	0.067	6 _n 377 718	93	0.117	6 _n 371 365	163	0.167	6 _n 361 466	235	0.217	6 _n 347 896	309
0.018	6 _n 380 579	26	0.068	6 _n 377 625	94	0.118	6 _n 371 202	164	0.168	6 _n 361 231	236	0.218	6 _n 347 587	312
0.019	6 _n 380 553	27	0.069	6 _n 377 531	96	0.119	6 _n 371 038	166	0.169	6 _n 360 995	238	0.219	6 _n 347 275	313
0.020	6 _n 380 526	28	0.070	6 _n 377 435	97	0.120	6 _n 370 872	167	0.170	6 _n 360 757	239	0.220	6 _n 346 962	315
0.021	6 _n 380 498	29	0.071	6 _n 377 338	98	0.121	6 _n 370 705	169	0.171	6 _n 360 518	241	0.221	6 _n 346 647	316
0.022	6 _n 380 469	31	0.072	6 _n 377 240	100	0.122	6 _n 370 536	170	0.172	6 _n 360 277	242	0.222	6 _n 346 331	317
0.023	6 _n 380 438	32	0.073	6 _n 377 140	101	0.123	6 _n 370 366	171	0.173	6 _n 360 035	244	0.223	6 _n 346 014	320
0.024	6 _n 380 406	34	0.074	6 _n 377 039	103	0.124	6 _n 370 195	173	0.174	6 _n 359 791	245	0.224	6 _n 345 694	320
0.025	6 _n 380 372	35	0.075	6 _n 376 936	104	0.125	6 _n 370 022	174	0.175	6 _n 359 546	247	0.225	6 _n 345 374	323
0.026	6 _n 380 337	36	0.076	6 _n 376 832	105	0.126	6 _n 369 848	176	0.176	6 _n 359 299	248	0.226	6 _n 345 051	324
0.027	6 _n 380 301	38	0.077	6 _n 376 727	107	0.127	6 _n 369 672	177	0.177	6 _n 359 051	250	0.227	6 _n 344 727	325
0.028	6 _n 380 263	39	0.078	6 _n 376 620	108	0.128	6 _n 369 495	178	0.178	6 _n 358 801	251	0.228	6 _n 344 402	327
0.029	6 _n 380 224	41	0.079	6 _n 376 512	110	0.129	6 _n 369 317	180	0.179	6 _n 358 550	253	0.229	6 _n 344 075	329
0.030	6 _n 380 183	41	0.080	6 _n 376 402	111	0.130	6 _n 369 137	182	0.180	6 _n 358 297	254	0.230	6 _n 343 746	330
0.031	6 _n 380 142	44	0.081	6 _n 376 291	112	0.131	6 _n 368 955	183	0.181	6 _n 358 043	255	0.231	6 _n 343 416	332
0.032	6 _n 380 098	44	0.082	6 _n 376 179	114	0.132	6 _n 368 772	184	0.182	6 _n 357 788	257	0.232	6 _n 343 084	333
0.033	6 _n 380 054	46	0.083	6 _n 376 065	115	0.133	6 _n 368 588	185	0.183	6 _n 357 531	259	0.233	6 _n 342 751	335
0.034	6 _n 380 008	48	0.084	6 _n 375 950	116	0.134	6 _n 368 403	188	0.184	6 _n 357 272	260	0.234	6 _n 342 416	336
0.035	6 _n 379 960	48	0.085	6 _n 375 834	118	0.135	6 _n 368 215	188	0.185	6 _n 357 012	261	0.235	6 _n 342 080	338
0.036	6 _n 379 912	50	0.086	6 _n 375 716	120	0.136	6 _n 368 027	190	0.186	6 _n 356 751	263	0.236	6 _n 341 742	340
0.037	6 _n 379 862	52	0.087	6 _n 375 596	120	0.137	6 _n 367 837	192	0.187	6 _n 356 488	265	0.237	6 _n 341 402	341
0.038	6 _n 379 810	53	0.088	6 _n 375 476	123	0.138	6 _n 367 645	192	0.188	6 _n 356 223	266	0.238	6 _n 341 061	343
0.039	6 _n 379 757	54	0.089	6 _n 375 353	123	0.139	6 _n 367 453	195	0.189	6 _n 355 957	267	0.239	6 _n 340 718	344
0.040	6 _n 379 703	55	0.090	6 _n 375 230	125	0.140	6 _n 367 258	195	0.190	6 _n 355 690	269	0.240	6 _n 340 374	346
0.041	6 _n 379 648	57	0.091	6 _n 375 105	126	0.141	6 _n 367 063	198	0.191	6 _n 355 421	271	0.241	6 _n 340 028	347
0.042	6 _n 379 591	59	0.092	6 _n 374 979	128	0.142	6 _n 366 865	198	0.192	6 _n 355 150	272	0.242	6 _n 339 681	349
0.043	6 _n 379 532	60	0.093	6 _n 374 851	129	0.143	6 _n 366 667	200	0.193	6 _n 354 878	273	0.243	6 _n 339 332	351
0.044	6 _n 379 472	61	0.094	6 _n 374 722	130	0.144	6 _n 366 467	202	0.194	6 _n 354 605	275	0.244	6 _n 338 981	352
0.045	6 _n 379 411	62	0.095	6 _n 374 592	132	0.145	6 _n 366 265	202	0.195	6 _n 354 330	277	0.245	6 _n 338 629	354
0.046	6 _n 379 349	64	0.096	6 _n 374 460	134	0.146	6 _n 366 063	205	0.196	6 _n 354 053	278	0.246	6 _n 338 275	355
0.047	6 _n 379 285	65	0.097	6 _n 374 326	134	0.147	6 _n 365 858	206	0.197	6 _n 353 775	279	0.247	6 _n 337 920	357
0.048	6 _n 379 220	67	0.098	6 _n 374 192	136	0.148	6 _n 365 652	207	0.198	6 _n 353 496	282	0.248	6 _n 337 563	358
0.049	6 _n 379 153	68	0.099	6 _n 374 056	138	0.149	6 _n 365 445	209	0.199	6 _n 353 214	282	0.249	6 _n 337 205	360
0.050	6 _n 379 085		0.100	6 _n 373 918		0.150	6 _n 365 236		0.200	6 _n 352 932		0.250	6 _n 336 845	

Tafel VIII.

log $\{Q_2^n(n)\}$.

vergl. pag. 56.

$\pm n$	Q	$+J$	$\pm n$	Q	$+J$	$\pm n$	Q	$+J$	$\pm n$	Q	$+J$	$\pm n$	Q	$+J$
0.000	8.920 819	2	0.050	8.927 285	259	0.100	8.946 125	494	0.150	8.975 815	690	0.200	9.014 240	842
0.001	8.920 821	8	0.051	8.927 544	264	0.101	8.946 619	498	0.151	8.976 505	694	0.201	9.015 082	845
0.002	8.920 829	13	0.052	8.927 808	269	0.102	8.947 117	502	0.152	8.977 199	698	0.202	9.015 927	847
0.003	8.920 842	19	0.053	8.928 077	274	0.103	8.947 619	507	0.153	8.977 897	700	0.203	9.016 774	849
0.004	8.920 861	23	0.054	8.928 351	280	0.104	8.948 126	511	0.154	8.978 597	705	0.204	9.017 623	852
0.005	8.920 884	29	0.055	8.928 631	284	0.105	8.948 637	515	0.155	8.979 302	707	0.205	9.018 475	855
0.006	8.920 913	33	0.056	8.928 915	288	0.106	8.949 152	520	0.156	8.980 009	712	0.206	9.019 330	857
0.007	8.920 946	40	0.057	8.929 203	294	0.107	8.949 672	524	0.157	8.980 721	714	0.207	9.020 187	859
0.008	8.920 986	44	0.058	8.929 497	299	0.108	8.950 196	528	0.158	8.981 435	718	0.208	9.021 046	862
0.009	8.921 030	49	0.059	8.929 796	304	0.109	8.950 724	533	0.159	8.982 153	721	0.209	9.021 908	864
0.010	8.921 079	55	0.060	8.930 100	308	0.110	8.951 257	536	0.160	8.982 874	725	0.210	9.022 772	867
0.011	8.921 134	60	0.061	8.930 408	314	0.111	8.951 793	541	0.161	8.983 599	727	0.211	9.023 639	869
0.012	8.921 194	65	0.062	8.930 722	318	0.112	8.952 334	545	0.162	8.984 326	731	0.212	9.024 508	871
0.013	8.921 259	70	0.063	8.931 040	323	0.113	8.952 879	549	0.163	8.985 057	735	0.213	9.025 379	874
0.014	8.921 329	76	0.064	8.931 363	328	0.114	8.953 428	553	0.164	8.985 792	737	0.214	9.026 253	876
0.015	8.921 405	80	0.065	8.931 691	333	0.115	8.953 981	557	0.165	8.986 529	741	0.215	9.027 129	878
0.016	8.921 485	86	0.066	8.932 024	337	0.116	8.954 538	562	0.166	8.987 270	744	0.216	9.028 007	881
0.017	8.921 571	91	0.067	8.932 361	343	0.117	8.955 100	565	0.167	8.988 014	747	0.217	9.028 888	883
0.018	8.921 662	96	0.068	8.932 704	347	0.118	8.955 665	570	0.168	8.988 761	750	0.218	9.029 771	885
0.019	8.921 758	102	0.069	8.933 051	352	0.119	8.956 235	574	0.169	8.989 511	754	0.219	9.030 656	887
0.020	8.921 860	106	0.070	8.933 403	357	0.120	8.956 809	577	0.170	8.990 265	757	0.220	9.031 543	890
0.021	8.921 966	112	0.071	8.933 760	361	0.121	8.957 386	582	0.171	8.991 022	759	0.221	9.032 433	892
0.022	8.922 078	117	0.072	8.934 121	367	0.122	8.957 968	586	0.172	8.991 781	763	0.222	9.033 325	894
0.023	8.922 195	122	0.073	8.934 488	371	0.123	8.958 554	589	0.173	8.992 544	766	0.223	9.034 219	896
0.024	8.922 317	127	0.074	8.934 859	375	0.124	8.959 143	594	0.174	8.993 310	769	0.224	9.035 115	898
0.025	8.922 444	133	0.075	8.935 234	381	0.125	8.959 737	597	0.175	8.994 079	772	0.225	9.036 013	901
0.026	8.922 577	137	0.076	8.935 615	385	0.126	8.960 334	602	0.176	8.994 851	775	0.226	9.036 914	902
0.027	8.922 714	143	0.077	8.936 000	390	0.127	8.960 936	605	0.177	8.995 626	778	0.227	9.037 816	905
0.028	8.922 857	148	0.078	8.936 390	394	0.128	8.961 541	610	0.178	8.996 404	781	0.228	9.038 721	907
0.029	8.923 005	153	0.079	8.936 784	400	0.129	8.962 151	613	0.179	8.997 185	784	0.229	9.039 628	908
0.030	8.923 158	158	0.080	8.937 184	403	0.130	8.962 764	617	0.180	8.997 969	787	0.230	9.040 536	911
0.031	8.923 316	163	0.081	8.937 587	409	0.131	8.963 381	621	0.181	8.998 756	789	0.231	9.041 447	913
0.032	8.923 479	168	0.082	8.937 996	413	0.132	8.964 002	625	0.182	8.999 545	793	0.232	9.042 360	915
0.033	8.923 647	174	0.083	8.938 409	418	0.133	8.964 627	628	0.183	9.000 338	796	0.233	9.043 275	917
0.034	8.923 821	178	0.084	8.938 827	422	0.134	8.965 255	632	0.184	9.001 134	798	0.234	9.044 192	919
0.035	8.923 999	184	0.085	8.939 249	427	0.135	8.965 887	637	0.185	9.001 932	801	0.235	9.045 111	921
0.036	8.924 183	189	0.086	8.939 676	431	0.136	8.966 524	639	0.186	9.002 733	804	0.236	9.046 032	923
0.037	8.924 372	193	0.087	8.940 107	436	0.137	8.967 163	644	0.187	9.003 537	807	0.237	9.046 955	925
0.038	8.924 565	199	0.088	8.940 543	441	0.138	8.967 807	647	0.188	9.004 344	810	0.238	9.047 880	926
0.039	8.924 764	204	0.089	8.940 984	445	0.139	8.968 454	651	0.189	9.005 154	813	0.239	9.048 806	929
0.040	8.924 968	209	0.090	8.941 429	449	0.140	8.969 105	655	0.190	9.005 967	815	0.240	9.049 735	930
0.041	8.925 177	214	0.091	8.941 878	454	0.141	8.969 760	658	0.191	9.006 782	818	0.241	9.050 665	933
0.042	8.925 391	219	0.092	8.942 332	459	0.142	8.970 418	662	0.192	9.007 600	821	0.242	9.051 598	934
0.043	8.925 610	224	0.093	8.942 791	463	0.143	8.971 080	666	0.193	9.008 421	823	0.243	9.052 532	936
0.044	8.925 834	230	0.094	8.943 254	467	0.144	8.971 746	669	0.194	9.009 244	826	0.244	9.053 468	938
0.045	8.926 064	234	0.095	8.943 721	472	0.145	8.972 415	673	0.195	9.010 070	829	0.245	9.054 406	939
0.046	8.926 298	239	0.096	8.944 193	476	0.146	8.973 088	676	0.196	9.010 899	831	0.246	9.055 345	942
0.047	8.926 537	244	0.097	8.944 669	481	0.147	8.973 764	680	0.197	9.011 730	835	0.247	9.056 287	943
0.048	8.926 781	250	0.098	8.945 150	485	0.148	8.974 444	684	0.198	9.012 565	836	0.248	9.057 230	945
0.049	8.927 031	254	0.099	8.945 635	490	0.149	8.975 128	687	0.199	9.013 401	839	0.249	9.058 175	945
0.050	8.927 285		0.100	8.946 125		0.150	8.975 815		0.200	9.014 240		0.250	9.059 121	946

Tafel VIII.

 $\log \{Q_2^1(n)\}.$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	8 _n 920 819	1	0.050	8 _n 918 642	88	0.100	8 _n 912 045	178	0.150	8 _n 900 822	274	0.200	8 _n 884 607	379
0.001	8 _n 920 818	3	0.051	8 _n 918 554	90	0.101	8 _n 911 867	180	0.151	8 _n 900 548	276	0.201	8 _n 884 228	381
0.002	8 _n 920 815	4	0.052	8 _n 918 464	92	0.102	8 _n 911 687	182	0.152	8 _n 900 272	277	0.202	8 _n 883 847	383
0.003	8 _n 920 811	6	0.053	8 _n 918 372	93	0.103	8 _n 911 505	184	0.153	8 _n 899 995	280	0.203	8 _n 883 464	386
0.004	8 _n 920 805	8	0.054	8 _n 918 279	96	0.104	8 _n 911 321	186	0.154	8 _n 899 715	282	0.204	8 _n 883 078	388
0.005	8 _n 920 797	9	0.055	8 _n 918 183	97	0.105	8 _n 911 135	187	0.155	8 _n 899 433	284	0.205	8 _n 882 690	390
0.006	8 _n 920 788	12	0.056	8 _n 918 086	98	0.106	8 _n 910 948	189	0.156	8 _n 899 149	286	0.206	8 _n 882 300	392
0.007	8 _n 920 776	13	0.057	8 _n 917 988	101	0.107	8 _n 910 759	191	0.157	8 _n 898 863	288	0.207	8 _n 881 908	394
0.008	8 _n 920 763	15	0.058	8 _n 917 887	102	0.108	8 _n 910 568	194	0.158	8 _n 898 575	290	0.208	8 _n 881 514	397
0.009	8 _n 920 748	16	0.059	8 _n 917 785	104	0.109	8 _n 910 374	194	0.159	8 _n 898 285	291	0.209	8 _n 881 117	399
0.010	8 _n 920 732	18	0.060	8 _n 917 681	106	0.110	8 _n 910 180	197	0.160	8 _n 897 994	294	0.210	8 _n 880 718	401
0.011	8 _n 920 714	20	0.061	8 _n 917 575	108	0.111	8 _n 909 983	199	0.161	8 _n 897 700	296	0.211	8 _n 880 317	403
0.012	8 _n 920 694	22	0.062	8 _n 917 467	109	0.112	8 _n 909 784	200	0.162	8 _n 897 404	298	0.212	8 _n 879 914	406
0.013	8 _n 920 672	23	0.063	8 _n 917 358	112	0.113	8 _n 909 584	203	0.163	8 _n 897 106	301	0.213	8 _n 879 508	408
0.014	8 _n 920 649	26	0.064	8 _n 917 246	113	0.114	8 _n 909 381	204	0.164	8 _n 896 805	302	0.214	8 _n 879 100	411
0.015	8 _n 920 623	27	0.065	8 _n 917 133	114	0.115	8 _n 909 177	206	0.165	8 _n 896 503	304	0.215	8 _n 878 689	412
0.016	8 _n 920 596	28	0.066	8 _n 917 019	117	0.116	8 _n 908 971	208	0.166	8 _n 896 199	306	0.216	8 _n 878 277	415
0.017	8 _n 920 568	31	0.067	8 _n 916 902	118	0.117	8 _n 908 763	210	0.167	8 _n 895 893	308	0.217	8 _n 877 862	418
0.018	8 _n 920 537	32	0.068	8 _n 916 784	120	0.118	8 _n 908 553	212	0.168	8 _n 895 585	311	0.218	8 _n 877 444	419
0.019	8 _n 920 505	34	0.069	8 _n 916 664	122	0.119	8 _n 908 341	214	0.169	8 _n 895 274	312	0.219	8 _n 877 025	422
0.020	8 _n 920 471	35	0.070	8 _n 916 542	124	0.120	8 _n 908 127	215	0.170	8 _n 894 962	315	0.220	8 _n 876 603	425
0.021	8 _n 920 436	38	0.071	8 _n 916 418	125	0.121	8 _n 907 912	218	0.171	8 _n 894 647	316	0.221	8 _n 876 178	426
0.022	8 _n 920 398	39	0.072	8 _n 916 293	128	0.122	8 _n 907 694	219	0.172	8 _n 894 331	319	0.222	8 _n 875 752	429
0.023	8 _n 920 359	41	0.073	8 _n 916 165	129	0.123	8 _n 907 475	221	0.173	8 _n 894 012	320	0.223	8 _n 875 323	432
0.024	8 _n 920 318	42	0.074	8 _n 916 036	131	0.124	8 _n 907 254	223	0.174	8 _n 893 692	323	0.224	8 _n 874 891	433
0.025	8 _n 920 276	45	0.075	8 _n 915 905	132	0.125	8 _n 907 031	226	0.175	8 _n 893 369	325	0.225	8 _n 874 458	436
0.026	8 _n 920 231	46	0.076	8 _n 915 773	135	0.126	8 _n 906 805	227	0.176	8 _n 893 044	327	0.226	8 _n 874 022	439
0.027	8 _n 920 185	48	0.077	8 _n 915 638	136	0.127	8 _n 906 578	229	0.177	8 _n 892 717	329	0.227	8 _n 873 583	441
0.028	8 _n 920 137	49	0.078	8 _n 915 502	138	0.128	8 _n 906 349	230	0.178	8 _n 892 388	331	0.228	8 _n 873 142	443
0.029	8 _n 920 088	52	0.079	8 _n 915 364	140	0.129	8 _n 906 119	233	0.179	8 _n 892 057	334	0.229	8 _n 872 699	446
0.030	8 _n 920 036	53	0.080	8 _n 915 224	142	0.130	8 _n 905 886	235	0.180	8 _n 891 723	335	0.230	8 _n 872 253	448
0.031	8 _n 919 983	55	0.081	8 _n 915 082	143	0.131	8 _n 905 651	236	0.181	8 _n 891 388	338	0.231	8 _n 871 805	450
0.032	8 _n 919 928	56	0.082	8 _n 914 939	146	0.132	8 _n 905 415	239	0.182	8 _n 891 050	339	0.232	8 _n 871 355	453
0.033	8 _n 919 872	58	0.083	8 _n 914 793	147	0.133	8 _n 905 176	240	0.183	8 _n 890 711	342	0.233	8 _n 870 902	455
0.034	8 _n 919 814	61	0.084	8 _n 914 646	149	0.134	8 _n 904 936	243	0.184	8 _n 890 369	344	0.234	8 _n 870 447	458
0.035	8 _n 919 753	61	0.085	8 _n 914 497	150	0.135	8 _n 904 693	244	0.185	8 _n 890 025	346	0.235	8 _n 869 989	460
0.036	8 _n 919 692	64	0.086	8 _n 914 347	153	0.136	8 _n 904 449	247	0.186	8 _n 889 679	348	0.236	8 _n 869 529	463
0.037	8 _n 919 628	65	0.087	8 _n 914 194	154	0.137	8 _n 904 202	248	0.187	8 _n 889 331	351	0.237	8 _n 869 066	465
0.038	8 _n 919 563	67	0.088	8 _n 914 040	156	0.138	8 _n 903 954	250	0.188	8 _n 888 980	352	0.238	8 _n 868 601	467
0.039	8 _n 919 496	69	0.089	8 _n 913 884	158	0.139	8 _n 903 704	252	0.189	8 _n 888 628	355	0.239	8 _n 868 134	470
0.040	8 _n 919 427	71	0.090	8 _n 913 726	160	0.140	8 _n 903 452	254	0.190	8 _n 888 273	357	0.240	8 _n 867 664	473
0.041	8 _n 919 356	72	0.091	8 _n 913 566	162	0.141	8 _n 903 198	256	0.191	8 _n 887 916	359	0.241	8 _n 867 191	474
0.042	8 _n 919 284	74	0.092	8 _n 913 404	163	0.142	8 _n 902 942	258	0.192	8 _n 887 557	361	0.242	8 _n 866 717	478
0.043	8 _n 919 210	76	0.093	8 _n 913 241	166	0.143	8 _n 902 684	260	0.193	8 _n 887 196	363	0.243	8 _n 866 239	480
0.044	8 _n 919 134	78	0.094	8 _n 913 075	167	0.144	8 _n 902 424	262	0.194	8 _n 886 833	366	0.244	8 _n 865 759	482
0.045	8 _n 919 056	79	0.095	8 _n 912 908	169	0.145	8 _n 902 162	264	0.195	8 _n 886 467	367	0.245	8 _n 865 277	485
0.046	8 _n 918 977	81	0.096	8 _n 912 739	171	0.146	8 _n 901 898	266	0.196	8 _n 886 100	370	0.246	8 _n 864 792	488
0.047	8 _n 918 896	83	0.097	8 _n 912 568	172	0.147	8 _n 901 632	268	0.197	8 _n 885 730	372	0.247	8 _n 864 304	489
0.048	8 _n 918 813	85	0.098	8 _n 912 396	175	0.148	8 _n 901 364	270	0.198	8 _n 885 358	375	0.248	8 _n 863 815	493
0.049	8 _n 918 728	86	0.099	8 _n 912 221	176	0.149	8 _n 901 094	272	0.199	8 _n 884 983	376	0.249	8 _n 863 322	495
0.050	8 _n 918 642		0.100	8 _n 912 045		0.150	8 _n 900 822		0.200	8 _n 884 607		0.250	8 _n 862 827	

Tafel VIII.

 $\log \{Q_2^2(n)\}.$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	7 _n 619 789	0	0.050	7 _n 619 762	3	0.100	7 _n 619 354	17	0.150	7 _n 617 585	60	0.200	7 _n 612 784	142
0.001	7 _n 619 789	0	0.051	7 _n 619 759	2	0.101	7 _n 619 337	19	0.151	7 _n 617 525	61	0.201	7 _n 612 642	145
0.002	7 _n 619 789	0	0.052	7 _n 619 757	3	0.102	7 _n 619 318	18	0.152	7 _n 617 464	62	0.202	7 _n 612 497	147
0.003	7 _n 619 789	0	0.053	7 _n 619 754	2	0.103	7 _n 619 300	20	0.153	7 _n 617 402	63	0.203	7 _n 612 350	149
0.004	7 _n 619 789	0	0.054	7 _n 619 752	3	0.104	7 _n 619 280	19	0.154	7 _n 617 339	64	0.204	7 _n 612 201	151
0.005	7 _n 619 789	0	0.055	7 _n 619 749	3	0.105	7 _n 619 261	21	0.155	7 _n 617 275	66	0.205	7 _n 612 050	153
0.006	7 _n 619 789	0	0.056	7 _n 619 746	3	0.106	7 _n 619 240	21	0.156	7 _n 617 209	67	0.206	7 _n 611 897	156
0.007	7 _n 619 789	0	0.057	7 _n 619 743	3	0.107	7 _n 619 219	21	0.157	7 _n 617 142	68	0.207	7 _n 611 741	158
0.008	7 _n 619 789	0	0.058	7 _n 619 740	3	0.108	7 _n 619 198	21	0.158	7 _n 617 074	70	0.208	7 _n 611 583	161
0.009	7 _n 619 789	0	0.059	7 _n 619 736	4	0.109	7 _n 619 175	23	0.159	7 _n 617 004	71	0.209	7 _n 611 422	163
		0			3			22						
0.010	7 _n 619 789	0	0.060	7 _n 619 733	4	0.110	7 _n 619 153	24	0.160	7 _n 616 933	72	0.210	7 _n 611 259	165
0.011	7 _n 619 789	0	0.061	7 _n 619 729	4	0.111	7 _n 619 129	24	0.161	7 _n 616 861	74	0.211	7 _n 611 094	168
0.012	7 _n 619 789	0	0.062	7 _n 619 725	4	0.112	7 _n 619 105	25	0.162	7 _n 616 787	75	0.212	7 _n 610 926	170
0.013	7 _n 619 789	0	0.063	7 _n 619 721	5	0.113	7 _n 619 080	25	0.163	7 _n 616 712	76	0.213	7 _n 610 756	172
0.014	7 _n 619 789	0	0.064	7 _n 619 716	5	0.114	7 _n 619 055	26	0.164	7 _n 616 636	78	0.214	7 _n 610 584	176
0.015	7 _n 619 789	1	0.065	7 _n 619 711	5	0.115	7 _n 619 029	27	0.165	7 _n 616 558	79	0.215	7 _n 610 408	177
0.016	7 _n 619 788	0	0.066	7 _n 619 706	5	0.116	7 _n 619 002	28	0.166	7 _n 616 479	81	0.216	7 _n 610 231	180
0.017	7 _n 619 788	0	0.067	7 _n 619 701	5	0.117	7 _n 618 974	28	0.167	7 _n 616 398	83	0.217	7 _n 610 051	183
0.018	7 _n 619 788	0	0.068	7 _n 619 696	6	0.118	7 _n 618 946	29	0.168	7 _n 616 315	83	0.218	7 _n 609 868	186
0.019	7 _n 619 788	0	0.069	7 _n 619 690	5	0.119	7 _n 618 917	30	0.169	7 _n 616 232	86	0.219	7 _n 609 682	188
		0			5			30						
0.020	7 _n 619 788	0	0.070	7 _n 619 685	7	0.120	7 _n 618 887	30	0.170	7 _n 616 146	87	0.220	7 _n 609 494	191
0.021	7 _n 619 788	0	0.071	7 _n 619 678	6	0.121	7 _n 618 857	31	0.171	7 _n 616 059	88	0.221	7 _n 609 303	193
0.022	7 _n 619 788	0	0.072	7 _n 619 672	6	0.122	7 _n 618 826	32	0.172	7 _n 615 971	90	0.222	7 _n 609 110	196
0.023	7 _n 619 788	1	0.073	7 _n 619 666	7	0.123	7 _n 618 794	33	0.173	7 _n 615 881	91	0.223	7 _n 608 914	199
0.024	7 _n 619 787	0	0.074	7 _n 619 659	8	0.124	7 _n 618 761	34	0.174	7 _n 615 790	94	0.224	7 _n 608 715	202
0.025	7 _n 619 787	0	0.075	7 _n 619 651	7	0.125	7 _n 618 727	34	0.175	7 _n 615 696	94	0.225	7 _n 608 513	204
0.026	7 _n 619 787	1	0.076	7 _n 619 644	8	0.126	7 _n 618 693	35	0.176	7 _n 615 602	97	0.226	7 _n 608 309	208
0.027	7 _n 619 786	0	0.077	7 _n 619 636	8	0.127	7 _n 618 658	37	0.177	7 _n 615 505	98	0.227	7 _n 608 101	210
0.028	7 _n 619 786	0	0.078	7 _n 619 628	8	0.128	7 _n 618 621	36	0.178	7 _n 615 407	100	0.228	7 _n 607 891	213
0.029	7 _n 619 786	1	0.079	7 _n 619 620	9	0.129	7 _n 618 585	38	0.179	7 _n 615 307	101	0.229	7 _n 607 678	216
		1			9			38						
0.030	7 _n 619 785	0	0.080	7 _n 619 611	9	0.130	7 _n 618 547	39	0.180	7 _n 615 206	104	0.230	7 _n 607 462	219
0.031	7 _n 619 785	1	0.081	7 _n 619 602	10	0.131	7 _n 618 508	40	0.181	7 _n 615 102	105	0.231	7 _n 607 243	222
0.032	7 _n 619 784	0	0.082	7 _n 619 592	9	0.132	7 _n 618 468	40	0.182	7 _n 614 997	106	0.232	7 _n 607 021	225
0.033	7 _n 619 784	1	0.083	7 _n 619 583	10	0.133	7 _n 618 428	42	0.183	7 _n 614 891	109	0.233	7 _n 606 796	227
0.034	7 _n 619 783	1	0.084	7 _n 619 573	11	0.134	7 _n 618 386	42	0.184	7 _n 614 782	110	0.234	7 _n 606 569	231
0.035	7 _n 619 782	1	0.085	7 _n 619 562	11	0.135	7 _n 618 344	43	0.185	7 _n 614 672	112	0.235	7 _n 606 338	235
0.036	7 _n 619 781	0	0.086	7 _n 619 551	11	0.136	7 _n 618 301	45	0.186	7 _n 614 560	115	0.236	7 _n 606 103	237
0.037	7 _n 619 781	1	0.087	7 _n 619 540	12	0.137	7 _n 618 256	45	0.187	7 _n 614 445	115	0.237	7 _n 605 866	240
0.038	7 _n 619 780	1	0.088	7 _n 619 528	12	0.138	7 _n 618 211	46	0.188	7 _n 614 330	118	0.238	7 _n 605 626	244
0.039	7 _n 619 779	1	0.089	7 _n 619 516	12	0.139	7 _n 618 165	48	0.189	7 _n 614 212	120	0.239	7 _n 605 382	246
		1			12			48						
0.040	7 _n 619 778	2	0.090	7 _n 619 504	13	0.140	7 _n 618 117	48	0.190	7 _n 614 092	122	0.240	7 _n 605 136	250
0.041	7 _n 619 776	1	0.091	7 _n 619 491	13	0.141	7 _n 618 069	50	0.191	7 _n 613 970	123	0.241	7 _n 604 886	254
0.042	7 _n 619 775	1	0.092	7 _n 619 478	14	0.142	7 _n 618 019	50	0.192	7 _n 613 847	126	0.242	7 _n 604 632	256
0.043	7 _n 619 774	1	0.093	7 _n 619 464	14	0.143	7 _n 617 969	52	0.193	7 _n 613 721	128	0.243	7 _n 604 376	260
0.044	7 _n 619 773	2	0.094	7 _n 619 450	15	0.144	7 _n 617 917	52	0.194	7 _n 613 593	129	0.244	7 _n 604 116	264
0.045	7 _n 619 771	1	0.095	7 _n 619 435	15	0.145	7 _n 617 865	54	0.195	7 _n 613 464	132	0.245	7 _n 603 852	266
0.046	7 _n 619 769	2	0.096	7 _n 619 420	16	0.146	7 _n 617 811	55	0.196	7 _n 613 332	134	0.246	7 _n 603 586	271
0.047	7 _n 619 768	2	0.097	7 _n 619 404	16	0.147	7 _n 617 756	56	0.197	7 _n 613 198	136	0.247	7 _n 603 315	273
0.048	7 _n 619 766	2	0.098	7 _n 619 388	17	0.148	7 _n 617 700	57	0.198	7 _n 613 062	138	0.248	7 _n 603 042	277
0.049	7 _n 619 764	2	0.099	7 _n 619 371	17	0.149	7 _n 617 643	58	0.199	7 _n 612 924	140	0.249	7 _n 602 765	281
0.050	7 _n 619 762	2	0.100	7 _n 619 354	17	0.150	7 _n 617 585		0.200	7 _n 612 784		0.250	7 _n 602 484	

Tafel VIII.

 $\log \{Q_2^3(n)\}.$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	8.184 060		0.050	8.182 083	80	0.100	8.176 115	160	0.150	8.166 045	244	0.200	8.151 676	333
0.001	8.184 059	1	0.051	8.182 003	81	0.101	8.175 955	163	0.151	8.165 801	247	0.201	8.151 343	335
0.002	8.184 057	2	0.052	8.181 922	84	0.102	8.175 792	164	0.152	8.165 554	247	0.202	8.151 008	336
0.003	8.184 053	4	0.053	8.181 838	84	0.103	8.175 628	165	0.153	8.165 307	250	0.203	8.150 672	339
0.004	8.184 048	5	0.054	8.181 754	87	0.104	8.175 463	167	0.154	8.165 057	251	0.204	8.150 333	340
0.005	8.184 040	8	0.055	8.181 667	88	0.105	8.175 296	169	0.155	8.164 806	253	0.205	8.149 993	343
0.006	8.184 032	8	0.056	8.181 579	89	0.106	8.175 127	171	0.156	8.164 553	255	0.206	8.149 650	344
0.007	8.184 021	11	0.057	8.181 490	92	0.107	8.174 956	172	0.157	8.164 298	257	0.207	8.149 306	346
0.008	8.184 010	11	0.058	8.181 398	92	0.108	8.174 784	174	0.158	8.164 041	258	0.208	8.148 960	348
0.009	8.183 996	14	0.059	8.181 306	95	0.109	8.174 610	175	0.159	8.163 783	260	0.209	8.148 612	349
		15			95			175			260			349
0.010	8.183 981		0.060	8.181 211	96	0.110	8.174 435	177	0.160	8.163 523	262	0.210	8.148 263	352
0.011	8.183 965	16	0.061	8.181 115	97	0.111	8.174 258	179	0.161	8.163 261	263	0.211	8.147 911	353
0.012	8.183 947	18	0.062	8.181 018	99	0.112	8.174 079	181	0.162	8.162 998	265	0.212	8.147 558	355
0.013	8.183 927	20	0.063	8.180 919	101	0.113	8.173 898	182	0.163	8.162 733	267	0.213	8.147 203	358
0.014	8.183 905	22	0.064	8.180 818	103	0.114	8.173 716	184	0.164	8.162 466	269	0.214	8.146 845	359
0.015	8.183 883	22	0.065	8.180 715	104	0.115	8.173 532	185	0.165	8.162 197	270	0.215	8.146 486	360
0.016	8.183 858	25	0.066	8.180 611	105	0.116	8.173 347	187	0.166	8.161 927	273	0.216	8.146 126	363
0.017	8.183 832	26	0.067	8.180 506	107	0.117	8.173 160	189	0.167	8.161 654	273	0.217	8.145 763	365
0.018	8.183 804	28	0.068	8.180 399	109	0.118	8.172 971	190	0.168	8.161 381	276	0.218	8.145 398	366
0.019	8.183 775	29	0.069	8.180 290	111	0.119	8.172 781	192	0.169	8.161 105	278	0.219	8.145 032	369
		31			111			192			278			369
0.020	8.183 744		0.070	8.180 179	112	0.120	8.172 589	194	0.170	8.160 827	279	0.220	8.144 663	370
0.021	8.183 712	32	0.071	8.180 067	113	0.121	8.172 395	196	0.171	8.160 548	281	0.221	8.144 293	372
0.022	8.183 678	34	0.072	8.179 954	115	0.122	8.172 199	197	0.172	8.160 267	283	0.222	8.143 921	374
0.023	8.183 642	36	0.073	8.179 839	117	0.123	8.172 002	198	0.173	8.159 984	284	0.223	8.143 547	377
0.024	8.183 605	37	0.074	8.179 722	119	0.124	8.171 804	201	0.174	8.159 700	286	0.224	8.143 170	377
0.025	8.183 567	38	0.075	8.179 603	120	0.125	8.171 603	202	0.175	8.159 414	288	0.225	8.142 793	380
0.026	8.183 526	41	0.076	8.179 483	121	0.126	8.171 401	204	0.176	8.159 126	290	0.226	8.142 413	382
0.027	8.183 484	42	0.077	8.179 362	124	0.127	8.171 197	205	0.177	8.158 836	292	0.227	8.142 031	384
0.028	8.183 441	43	0.078	8.179 238	125	0.128	8.170 992	207	0.178	8.158 544	293	0.228	8.141 647	385
0.029	8.183 396	45	0.079	8.179 113	126	0.129	8.170 785	209	0.179	8.158 251	295	0.229	8.141 262	388
		47			126			209			295			388
0.030	8.183 349		0.080	8.178 987	128	0.130	8.170 576	210	0.180	8.157 956	297	0.230	8.140 874	389
0.031	8.183 301	48	0.081	8.178 859	130	0.131	8.170 366	213	0.181	8.157 659	299	0.231	8.140 485	392
0.032	8.183 251	50	0.082	8.178 729	131	0.132	8.170 153	213	0.182	8.157 360	300	0.232	8.140 093	393
0.033	8.183 200	51	0.083	8.178 598	133	0.133	8.169 940	216	0.183	8.157 060	302	0.233	8.139 700	395
0.034	8.183 147	53	0.084	8.178 465	135	0.134	8.169 724	217	0.184	8.156 758	304	0.234	8.139 305	397
0.035	8.183 092	55	0.085	8.178 330	136	0.135	8.169 507	219	0.185	8.156 454	306	0.235	8.138 908	399
0.036	8.183 036	56	0.086	8.178 194	138	0.136	8.169 288	221	0.186	8.156 148	308	0.236	8.138 509	402
0.037	8.182 978	58	0.087	8.178 056	140	0.137	8.169 067	222	0.187	8.155 840	309	0.237	8.138 107	403
0.038	8.182 919	59	0.088	8.177 916	141	0.138	8.168 845	224	0.188	8.155 531	312	0.238	8.137 704	405
0.039	8.182 858	61	0.089	8.177 775	143	0.139	8.168 621	226	0.189	8.155 219	313	0.239	8.137 299	406
		62			143			226			313			406
0.040	8.182 796		0.090	8.177 632	144	0.140	8.168 395	227	0.190	8.154 906	315	0.240	8.136 893	409
0.041	8.182 732	64	0.091	8.177 488	146	0.141	8.168 168	229	0.191	8.154 591	316	0.241	8.136 484	411
0.042	8.182 666	66	0.092	8.177 342	148	0.142	8.167 939	231	0.192	8.154 275	319	0.242	8.136 073	413
0.043	8.182 599	67	0.093	8.177 194	149	0.143	8.167 708	232	0.193	8.153 956	320	0.243	8.135 660	415
0.044	8.182 530	69	0.094	8.177 045	151	0.144	8.167 476	234	0.194	8.153 636	322	0.244	8.135 245	417
0.045	8.182 459	71	0.095	8.176 894	152	0.145	8.167 242	236	0.195	8.153 314	324	0.245	8.134 828	418
0.046	8.182 387	72	0.096	8.176 742	154	0.146	8.167 006	238	0.196	8.152 990	326	0.246	8.134 410	421
0.047	8.182 314	73	0.097	8.176 588	156	0.147	8.166 768	239	0.197	8.152 664	327	0.247	8.133 989	423
0.048	8.182 238	76	0.098	8.176 432	157	0.148	8.166 529	241	0.198	8.152 337	330	0.248	8.133 566	424
0.049	8.182 162	76	0.099	8.176 275	160	0.149	8.166 288	243	0.199	8.152 007	331	0.249	8.133 142	427
0.050	8.182 083	79	0.100	8.176 115	160	0.150	8.166 045	243	0.200	8.151 676	333	0.250	8.132 715	427

Tafel VIII.

 $\log \{Q_2^4(n)\}.$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	6.709 750	0	0.050	6.709 732	2	0.100	6.709 457	12	0.150	6.708 271	39	0.200	6.705 093	93
0.001	6.709 750	0	0.051	6.709 730	1	0.101	6.709 445	12	0.151	6.708 232	41	0.201	6.705 000	95
0.002	6.709 750	0	0.052	6.709 729	2	0.102	6.709 433	13	0.152	6.708 191	41	0.202	6.704 905	97
0.003	6.709 750	0	0.053	6.709 727	2	0.103	6.709 420	13	0.153	6.708 150	42	0.203	6.704 808	98
0.004	6.709 750	0	0.054	6.709 725	2	0.104	6.709 407	13	0.154	6.708 108	43	0.204	6.704 710	99
0.005	6.709 750	0	0.055	6.709 723	2	0.105	6.709 394	14	0.155	6.708 065	44	0.205	6.704 611	101
0.006	6.709 750	0	0.056	6.709 721	2	0.106	6.709 380	14	0.156	6.708 021	44	0.206	6.704 510	102
0.007	6.709 750	0	0.057	6.709 719	2	0.107	6.709 366	15	0.157	6.707 977	46	0.207	6.704 408	104
0.008	6.709 750	0	0.058	6.709 717	3	0.108	6.709 351	14	0.158	6.707 931	46	0.208	6.704 304	105
0.009	6.709 750	0	0.059	6.709 714	2	0.109	6.709 337	16	0.159	6.707 885	47	0.209	6.704 199	106
0.010	6.709 750	0	0.060	6.709 712	3	0.110	6.709 321	16	0.160	6.707 838	49	0.210	6.704 093	109
0.011	6.709 750	0	0.061	6.709 709	3	0.111	6.709 305	16	0.161	6.707 789	49	0.211	6.703 984	110
0.012	6.709 750	0	0.062	6.709 706	2	0.112	6.709 289	16	0.162	6.707 740	50	0.212	6.703 874	111
0.013	6.709 750	0	0.063	6.709 704	3	0.113	6.709 273	18	0.163	6.707 690	50	0.213	6.703 763	113
0.014	6.709 750	0	0.064	6.709 701	3	0.114	6.709 255	17	0.164	6.707 640	52	0.214	6.703 650	114
0.015	6.709 750	0	0.065	6.709 698	4	0.115	6.709 238	18	0.165	6.707 588	53	0.215	6.703 536	117
0.016	6.709 750	0	0.066	6.709 694	3	0.116	6.709 220	19	0.166	6.707 535	54	0.216	6.703 419	117
0.017	6.709 750	0	0.067	6.709 691	4	0.117	6.709 201	19	0.167	6.707 481	54	0.217	6.703 302	120
0.018	6.709 750	0	0.068	6.709 687	4	0.118	6.709 182	19	0.168	6.707 427	56	0.218	6.703 182	121
0.019	6.709 750	1	0.069	6.709 683	4	0.119	6.709 163	20	0.169	6.707 371	57	0.219	6.703 061	123
0.020	6.709 749	0	0.070	6.709 679	4	0.120	6.709 143	21	0.170	6.707 314	57	0.220	6.702 938	124
0.021	6.709 749	0	0.071	6.709 675	4	0.121	6.709 122	20	0.171	6.707 257	59	0.221	6.702 814	126
0.022	6.709 749	0	0.072	6.709 671	4	0.122	6.709 102	22	0.172	6.707 198	60	0.222	6.702 688	128
0.023	6.709 749	0	0.073	6.709 667	5	0.123	6.709 080	22	0.173	6.707 138	60	0.223	6.702 560	130
0.024	6.709 749	0	0.074	6.709 662	5	0.124	6.709 058	22	0.174	6.707 078	62	0.224	6.702 430	131
0.025	6.709 749	0	0.075	6.709 657	5	0.125	6.709 036	24	0.175	6.707 016	63	0.225	6.702 299	133
0.026	6.709 749	1	0.076	6.709 652	5	0.126	6.709 012	23	0.176	6.706 953	64	0.226	6.702 166	135
0.027	6.709 748	0	0.077	6.709 647	6	0.127	6.708 989	24	0.177	6.706 889	65	0.227	6.702 031	137
0.028	6.709 748	0	0.078	6.709 641	5	0.128	6.708 965	25	0.178	6.706 824	66	0.228	6.701 894	138
0.029	6.709 748	0	0.079	6.709 636	6	0.129	6.708 940	25	0.179	6.706 758	67	0.229	6.701 756	140
0.030	6.709 748	1	0.080	6.709 630	6	0.130	6.708 915	26	0.180	6.706 691	68	0.230	6.701 616	143
0.031	6.709 747	0	0.081	6.709 624	7	0.131	6.708 889	27	0.181	6.706 623	70	0.231	6.701 473	144
0.032	6.709 747	1	0.082	6.709 617	6	0.132	6.708 862	27	0.182	6.706 553	71	0.232	6.701 329	146
0.033	6.709 746	0	0.083	6.709 611	7	0.133	6.708 835	28	0.183	6.706 482	71	0.233	6.701 183	147
0.034	6.709 746	1	0.084	6.709 604	7	0.134	6.708 807	28	0.184	6.706 411	73	0.234	6.701 036	150
0.035	6.709 745	0	0.085	6.709 597	8	0.135	6.708 779	29	0.185	6.706 338	75	0.235	6.700 886	152
0.036	6.709 745	1	0.086	6.709 589	7	0.136	6.708 750	30	0.186	6.706 263	75	0.236	6.700 734	153
0.037	6.709 744	0	0.087	6.709 582	8	0.137	6.708 720	30	0.187	6.706 188	76	0.237	6.700 581	156
0.038	6.709 744	1	0.088	6.709 574	8	0.138	6.708 690	31	0.188	6.706 112	78	0.238	6.700 425	158
0.039	6.709 743	1	0.089	6.709 566	8	0.139	6.708 659	32	0.189	6.706 034	79	0.239	6.700 267	159
0.040	6.709 742	0	0.090	6.709 558	9	0.140	6.708 627	32	0.190	6.705 955	81	0.240	6.700 108	162
0.041	6.709 742	1	0.091	6.709 549	9	0.141	6.708 595	33	0.191	6.705 874	81	0.241	6.699 946	163
0.042	6.709 741	1	0.092	6.709 540	9	0.142	6.708 562	34	0.192	6.705 793	83	0.242	6.699 783	166
0.043	6.709 740	1	0.093	6.709 531	10	0.143	6.708 528	34	0.193	6.705 710	84	0.243	6.699 617	168
0.044	6.709 739	1	0.094	6.709 521	10	0.144	6.708 494	36	0.194	6.705 626	85	0.244	6.699 449	170
0.045	6.709 738	1	0.095	6.709 511	10	0.145	6.708 458	35	0.195	6.705 541	87	0.245	6.699 279	172
0.046	6.709 737	1	0.096	6.709 501	11	0.146	6.708 423	37	0.196	6.705 454	88	0.246	6.699 107	174
0.047	6.709 736	2	0.097	6.709 490	10	0.147	6.708 386	37	0.197	6.705 366	90	0.247	6.698 933	176
0.048	6.709 734	1	0.098	6.709 480	12	0.148	6.708 349	39	0.198	6.705 276	91	0.248	6.698 757	178
0.049	6.709 733	1	0.099	6.709 468	11	0.149	6.708 310	39	0.199	6.705 185	92	0.249	6.698 579	181
0.050	6.709 732	1	0.100	6.709 457	11	0.150	6.708 271	39	0.200	6.705 093	92	0.250	6.698 398	181

Tafel VIII.

$$\log \{Q_2^{5/n}\}.$$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	7 _n 499 422	1	0.050	7 _n 497 509	77	0.100	7 _n 491 743	155	0.150	7 _n 482 033	235	0.200	7 _n 468 224	319
0.001	7 _n 499 421	2	0.051	7 _n 497 432	79	0.101	7 _n 491 588	157	0.151	7 _n 481 798	237	0.201	7 _n 467 905	321
0.002	7 _n 499 419	4	0.052	7 _n 497 353	80	0.102	7 _n 491 431	158	0.152	7 _n 481 561	239	0.202	7 _n 467 584	323
0.003	7 _n 499 415	6	0.053	7 _n 497 273	82	0.103	7 _n 491 273	160	0.153	7 _n 481 322	240	0.203	7 _n 467 261	325
0.004	7 _n 499 409	6	0.054	7 _n 497 191	84	0.104	7 _n 491 113	162	0.154	7 _n 481 082	242	0.204	7 _n 466 936	326
0.005	7 _n 499 403	9	0.055	7 _n 497 107	85	0.105	7 _n 490 951	163	0.155	7 _n 480 840	244	0.205	7 _n 466 610	328
0.006	7 _n 499 394	10	0.056	7 _n 497 022	87	0.106	7 _n 490 788	164	0.156	7 _n 480 596	245	0.206	7 _n 466 282	330
0.007	7 _n 499 384	11	0.057	7 _n 496 935	88	0.107	7 _n 490 624	167	0.157	7 _n 480 351	247	0.207	7 _n 465 952	332
0.008	7 _n 499 373	13	0.058	7 _n 496 847	89	0.108	7 _n 490 457	167	0.158	7 _n 480 104	248	0.208	7 _n 465 620	333
0.009	7 _n 499 360	15	0.059	7 _n 496 758	92	0.109	7 _n 490 290	170	0.159	7 _n 479 856	251	0.209	7 _n 465 287	335
0.010	7 _n 499 345	16	0.060	7 _n 496 666	93	0.110	7 _n 490 120	171	0.160	7 _n 479 605	251	0.210	7 _n 464 952	337
0.011	7 _n 499 329	17	0.061	7 _n 496 573	94	0.111	7 _n 489 949	172	0.161	7 _n 479 354	254	0.211	7 _n 464 615	339
0.012	7 _n 499 312	19	0.062	7 _n 496 479	96	0.112	7 _n 489 777	174	0.162	7 _n 479 100	255	0.212	7 _n 464 276	340
0.013	7 _n 499 293	21	0.063	7 _n 496 383	97	0.113	7 _n 489 603	176	0.163	7 _n 478 845	257	0.213	7 _n 463 936	342
0.014	7 _n 499 272	22	0.064	7 _n 496 286	99	0.114	7 _n 489 427	177	0.164	7 _n 478 588	258	0.214	7 _n 463 594	344
0.015	7 _n 499 250	24	0.065	7 _n 496 187	101	0.115	7 _n 489 250	179	0.165	7 _n 478 330	260	0.215	7 _n 463 250	346
0.016	7 _n 499 226	25	0.066	7 _n 496 086	102	0.116	7 _n 489 071	181	0.166	7 _n 478 070	262	0.216	7 _n 462 904	347
0.017	7 _n 499 201	27	0.067	7 _n 495 984	103	0.117	7 _n 488 890	182	0.167	7 _n 477 808	264	0.217	7 _n 462 557	349
0.018	7 _n 499 174	28	0.068	7 _n 495 881	106	0.118	7 _n 488 708	183	0.168	7 _n 477 544	265	0.218	7 _n 462 208	351
0.019	7 _n 499 146	30	0.069	7 _n 495 775	106	0.119	7 _n 488 525	186	0.169	7 _n 477 279	267	0.219	7 _n 461 857	353
0.020	7 _n 499 116	31	0.070	7 _n 495 669	109	0.120	7 _n 488 339	187	0.170	7 _n 477 012	268	0.220	7 _n 461 504	354
0.021	7 _n 499 085	33	0.071	7 _n 495 560	109	0.121	7 _n 488 152	188	0.171	7 _n 476 744	270	0.221	7 _n 461 150	357
0.022	7 _n 499 052	35	0.072	7 _n 495 451	112	0.122	7 _n 487 964	190	0.172	7 _n 476 474	272	0.222	7 _n 460 793	357
0.023	7 _n 499 017	36	0.073	7 _n 495 339	113	0.123	7 _n 487 774	192	0.173	7 _n 476 202	273	0.223	7 _n 460 436	360
0.024	7 _n 498 981	37	0.074	7 _n 495 226	114	0.124	7 _n 487 582	193	0.174	7 _n 475 929	275	0.224	7 _n 460 076	362
0.025	7 _n 498 944	39	0.075	7 _n 495 112	116	0.125	7 _n 487 389	195	0.175	7 _n 475 654	277	0.225	7 _n 459 714	363
0.026	7 _n 498 905	41	0.076	7 _n 494 996	118	0.126	7 _n 487 194	197	0.176	7 _n 475 377	279	0.226	7 _n 459 351	366
0.027	7 _n 498 864	42	0.077	7 _n 494 878	119	0.127	7 _n 486 997	198	0.177	7 _n 475 098	280	0.227	7 _n 458 985	367
0.028	7 _n 498 822	43	0.078	7 _n 494 759	121	0.128	7 _n 486 799	199	0.178	7 _n 474 818	282	0.228	7 _n 458 618	368
0.029	7 _n 498 779	45	0.079	7 _n 494 638	122	0.129	7 _n 486 600	202	0.179	7 _n 474 536	283	0.229	7 _n 458 250	371
0.030	7 _n 498 734	47	0.080	7 _n 494 516	124	0.130	7 _n 486 398	202	0.180	7 _n 474 253	286	0.230	7 _n 457 879	372
0.031	7 _n 498 687	48	0.081	7 _n 494 392	125	0.131	7 _n 486 196	205	0.181	7 _n 473 967	287	0.231	7 _n 457 507	375
0.032	7 _n 498 639	50	0.082	7 _n 494 267	127	0.132	7 _n 485 991	206	0.182	7 _n 473 680	288	0.232	7 _n 457 132	375
0.033	7 _n 498 589	51	0.083	7 _n 494 140	128	0.133	7 _n 485 785	208	0.183	7 _n 473 392	290	0.233	7 _n 456 757	378
0.034	7 _n 498 538	53	0.084	7 _n 494 012	131	0.134	7 _n 485 577	209	0.184	7 _n 473 102	292	0.234	7 _n 456 379	380
0.035	7 _n 498 485	54	0.085	7 _n 493 881	131	0.135	7 _n 485 368	211	0.185	7 _n 472 810	294	0.235	7 _n 455 999	381
0.036	7 _n 498 431	56	0.086	7 _n 493 750	133	0.136	7 _n 485 157	213	0.186	7 _n 472 516	296	0.236	7 _n 455 618	384
0.037	7 _n 498 375	57	0.087	7 _n 493 617	135	0.137	7 _n 484 944	214	0.187	7 _n 472 220	297	0.237	7 _n 455 234	385
0.038	7 _n 498 318	59	0.088	7 _n 493 482	136	0.138	7 _n 484 730	216	0.188	7 _n 471 923	299	0.238	7 _n 454 849	387
0.039	7 _n 498 259	61	0.089	7 _n 493 346	138	0.139	7 _n 484 514	217	0.189	7 _n 471 624	300	0.239	7 _n 454 462	388
0.040	7 _n 498 198	62	0.090	7 _n 493 208	140	0.140	7 _n 484 297	219	0.190	7 _n 471 324	302	0.240	7 _n 454 074	391
0.041	7 _n 498 136	63	0.091	7 _n 493 068	141	0.141	7 _n 484 078	221	0.191	7 _n 471 022	304	0.241	7 _n 453 683	392
0.042	7 _n 498 073	65	0.092	7 _n 492 927	142	0.142	7 _n 483 857	222	0.192	7 _n 470 718	306	0.242	7 _n 453 291	394
0.043	7 _n 498 008	67	0.093	7 _n 492 785	144	0.143	7 _n 483 635	224	0.193	7 _n 470 412	307	0.243	7 _n 452 897	397
0.044	7 _n 497 941	68	0.094	7 _n 492 641	146	0.144	7 _n 483 411	226	0.194	7 _n 470 105	309	0.244	7 _n 452 500	397
0.045	7 _n 497 873	70	0.095	7 _n 492 495	147	0.145	7 _n 483 185	227	0.195	7 _n 469 796	311	0.245	7 _n 452 103	400
0.046	7 _n 497 803	71	0.096	7 _n 492 348	149	0.146	7 _n 482 958	229	0.196	7 _n 469 485	313	0.246	7 _n 451 703	402
0.047	7 _n 497 732	73	0.097	7 _n 492 199	151	0.147	7 _n 482 729	230	0.197	7 _n 469 172	314	0.247	7 _n 451 301	403
0.048	7 _n 497 659	74	0.098	7 _n 492 048	152	0.148	7 _n 482 499	232	0.198	7 _n 468 858	316	0.248	7 _n 450 898	405
0.049	7 _n 497 585	76	0.099	7 _n 491 896	153	0.149	7 _n 482 267	234	0.199	7 _n 468 542	318	0.249	7 _n 450 493	408
0.050	7 _n 497 509		0.100	7 _n 491 743		0.150	7 _n 482 033		0.200	7 _n 468 224		0.250	7 _n 450 085	

Tafel VIII.

 $\log \{Q_2^6(n)\}.$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	5n901 135	0	0.050	5n901 119	1	0.100	5n900 884	11	0.150	5n899 869	34	0.200	5n897 158	80
0.001	5n901 135	0	0.051	5n901 118	2	0.101	5n900 873	10	0.151	5n899 835	34	0.201	5n897 078	81
0.002	5n901 135	0	0.052	5n901 116	1	0.102	5n900 863	11	0.152	5n899 801	36	0.202	5n896 997	82
0.003	5n901 135	0	0.053	5n901 115	2	0.103	5n900 852	11	0.153	5n899 765	36	0.203	5n896 915	83
0.004	5n901 135	0	0.054	5n901 113	1	0.104	5n900 841	11	0.154	5n899 729	36	0.204	5n896 832	85
0.005	5n901 135	0	0.055	5n901 112	2	0.105	5n900 830	12	0.155	5n899 693	38	0.205	5n896 747	85
0.006	5n901 135	0	0.056	5n901 110	2	0.106	5n900 818	12	0.156	5n899 655	38	0.206	5n896 662	87
0.007	5n901 135	0	0.057	5n901 108	2	0.107	5n900 806	13	0.157	5n899 617	39	0.207	5n896 575	89
0.008	5n901 135	0	0.058	5n901 106	2	0.108	5n900 793	13	0.158	5n899 578	39	0.208	5n896 486	89
0.009	5n901 135	0	0.059	5n901 104	2	0.109	5n900 780	13	0.159	5n899 539	41	0.209	5n896 397	91
		0			2			13			41			91
0.010	5n901 135	0	0.060	5n901 102	2	0.110	5n900 767	13	0.160	5n899 498	41	0.210	5n896 306	92
0.011	5n901 135	0	0.061	5n901 100	2	0.111	5n900 754	14	0.161	5n899 457	42	0.211	5n896 214	94
0.012	5n901 135	0	0.062	5n901 098	3	0.112	5n900 740	14	0.162	5n899 415	42	0.212	5n896 120	96
0.013	5n901 135	0	0.063	5n901 095	2	0.113	5n900 726	15	0.163	5n899 373	44	0.213	5n896 026	94
0.014	5n901 135	0	0.064	5n901 093	3	0.114	5n900 711	15	0.164	5n899 329	44	0.214	5n895 930	98
0.015	5n901 135	0	0.065	5n901 090	3	0.115	5n900 696	15	0.165	5n899 285	45	0.215	5n895 832	99
0.016	5n901 135	0	0.066	5n901 087	3	0.116	5n900 681	16	0.166	5n899 240	46	0.216	5n895 733	100
0.017	5n901 135	0	0.067	5n901 084	3	0.117	5n900 665	16	0.167	5n899 194	46	0.217	5n895 633	101
0.018	5n901 135	0	0.068	5n901 081	3	0.118	5n900 649	17	0.168	5n899 148	48	0.218	5n895 532	103
0.019	5n901 135	0	0.069	5n901 078	4	0.119	5n900 632	17	0.169	5n899 100	48	0.219	5n895 429	105
		0			4			17			48			105
0.020	5n901 135	1	0.070	5n901 074	3	0.120	5n900 615	18	0.170	5n899 052	49	0.220	5n895 324	105
0.021	5n901 134	0	0.071	5n901 071	4	0.121	5n900 597	18	0.171	5n899 003	51	0.221	5n895 219	108
0.022	5n901 134	0	0.072	5n901 067	4	0.122	5n900 579	18	0.172	5n898 952	51	0.222	5n895 111	108
0.023	5n901 134	0	0.073	5n901 063	4	0.123	5n900 561	19	0.173	5n898 901	51	0.223	5n895 003	110
0.024	5n901 134	0	0.074	5n901 059	4	0.124	5n900 542	19	0.174	5n898 850	53	0.224	5n894 893	112
0.025	5n901 134	0	0.075	5n901 055	4	0.125	5n900 523	20	0.175	5n898 797	54	0.225	5n894 781	113
0.026	5n901 134	0	0.076	5n901 051	5	0.126	5n900 503	20	0.176	5n898 743	54	0.226	5n894 668	115
0.027	5n901 134	1	0.077	5n901 046	4	0.127	5n900 483	21	0.177	5n898 689	56	0.227	5n894 553	116
0.028	5n901 133	0	0.078	5n901 042	5	0.128	5n900 462	21	0.178	5n898 633	56	0.228	5n894 437	117
0.029	5n901 133	0	0.079	5n901 037	5	0.129	5n900 441	22	0.179	5n898 577	57	0.229	5n894 320	119
		0			5			22			57			119
0.030	5n901 133	0	0.080	5n901 032	5	0.130	5n900 419	22	0.180	5n898 520	59	0.230	5n894 201	121
0.031	5n901 133	1	0.081	5n901 027	6	0.131	5n900 397	23	0.181	5n898 461	59	0.231	5n894 080	122
0.032	5n901 132	0	0.082	5n901 021	5	0.132	5n900 374	23	0.182	5n898 402	60	0.232	5n893 958	124
0.033	5n901 132	1	0.083	5n901 016	6	0.133	5n900 351	24	0.183	5n898 342	61	0.233	5n893 834	126
0.034	5n901 131	0	0.084	5n901 010	6	0.134	5n900 327	24	0.184	5n898 281	63	0.234	5n893 708	127
0.035	5n901 131	0	0.085	5n901 004	7	0.135	5n900 303	25	0.185	5n898 218	63	0.235	5n893 581	128
0.036	5n901 131	1	0.086	5n900 997	6	0.136	5n900 278	25	0.186	5n898 155	64	0.236	5n893 453	131
0.037	5n901 130	0	0.087	5n900 991	7	0.137	5n900 253	26	0.187	5n898 091	66	0.237	5n893 322	132
0.038	5n901 130	1	0.088	5n900 984	7	0.138	5n900 227	26	0.188	5n898 025	66	0.238	5n893 190	133
0.039	5n901 129	1	0.089	5n900 977	7	0.139	5n900 201	28	0.189	5n897 959	67	0.239	5n893 057	136
		1			7			28			67			136
0.040	5n901 128	0	0.090	5n900 970	8	0.140	5n900 173	27	0.190	5n897 892	69	0.240	5n892 921	137
0.041	5n901 128	1	0.091	5n900 962	7	0.141	5n900 146	28	0.191	5n897 823	69	0.241	5n892 784	138
0.042	5n901 127	1	0.092	5n900 955	8	0.142	5n900 118	29	0.192	5n897 754	71	0.242	5n892 646	141
0.043	5n901 126	1	0.093	5n900 947	8	0.143	5n900 089	30	0.193	5n897 683	71	0.243	5n892 505	142
0.044	5n901 125	0	0.094	5n900 939	9	0.144	5n900 059	30	0.194	5n897 612	73	0.244	5n892 363	144
0.045	5n901 125	1	0.095	5n900 930	9	0.145	5n900 029	31	0.195	5n897 539	74	0.245	5n892 219	146
0.046	5n901 124	1	0.096	5n900 921	9	0.146	5n899 998	31	0.196	5n897 465	75	0.246	5n892 073	147
0.047	5n901 123	2	0.097	5n900 912	9	0.147	5n899 967	32	0.197	5n897 390	76	0.247	5n891 926	149
0.048	5n901 121	1	0.098	5n900 903	10	0.148	5n899 935	32	0.198	5n897 314	78	0.248	5n891 777	152
0.049	5n901 120	1	0.099	5n900 893	9	0.149	5n899 903	34	0.199	5n897 236	78	0.249	5n891 625	153
0.050	5n901 119	1	0.100	5n900 884	9	0.150	5n899 869		0.200	5n897 158		0.250	5n891 472	

Tafel VIII.

$\log \{Q_2^{-1} n\}$.

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	6.837 656		0.050	6.835 775		0.100	6.830 107		0.150	6.820 573		0.200	6.807 035	
0.001	6.837 655	1	0.051	6.835 699	76	0.101	6.829 955	152	0.151	6.820 342	231	0.201	6.806 722	313
0.002	6.837 653	2	0.052	6.835 621	78	0.102	6.829 801	154	0.152	6.820 110	232	0.202	6.806 407	315
0.003	6.837 649	4	0.053	6.835 542	79	0.103	6.829 645	156	0.153	6.819 875	235	0.203	6.806 091	316
0.004	6.837 644	5	0.054	6.835 462	80	0.104	6.829 488	157	0.154	6.819 640	235	0.204	6.805 773	318
0.005	6.837 637	7	0.055	6.835 380	82	0.105	6.829 330	158	0.155	6.819 402	238	0.205	6.805 453	320
0.006	6.837 629	8	0.056	6.835 296	84	0.106	6.829 170	160	0.156	6.819 163	239	0.206	6.805 132	321
0.007	6.837 619	10	0.057	6.835 211	85	0.107	6.829 008	162	0.157	6.818 923	240	0.207	6.804 809	323
0.008	6.837 608	11	0.058	6.835 124	87	0.108	6.828 845	163	0.158	6.818 681	242	0.208	6.804 484	325
0.009	6.837 595	13	0.059	6.835 036	88	0.109	6.828 680	165	0.159	6.818 437	244	0.209	6.804 158	326
		15			90			167			246			328
0.010	6.837 580		0.060	6.834 946		0.110	6.828 513		0.160	6.818 191		0.210	6.803 830	
0.011	6.837 565	15	0.061	6.834 855	91	0.111	6.828 345	168	0.161	6.817 944	247	0.211	6.803 500	330
0.012	6.837 547	18	0.062	6.834 762	93	0.112	6.828 176	169	0.162	6.817 696	248	0.212	6.803 169	331
0.013	6.837 529	21	0.063	6.834 668	94	0.113	6.828 005	171	0.163	6.817 445	251	0.213	6.802 835	334
0.014	6.837 508	21	0.064	6.834 572	96	0.114	6.827 832	173	0.164	6.817 194	251	0.214	6.802 500	335
0.015	6.837 487	24	0.065	6.834 475	97	0.115	6.827 658	174	0.165	6.816 940	254	0.215	6.802 164	336
0.016	6.837 463	25	0.066	6.834 376	99	0.116	6.827 482	176	0.166	6.816 685	255	0.216	6.801 825	339
0.017	6.837 438	26	0.067	6.834 276	100	0.117	6.827 305	177	0.167	6.816 428	257	0.217	6.801 485	340
0.018	6.837 412	28	0.068	6.834 174	102	0.118	6.827 126	179	0.168	6.816 170	258	0.218	6.801 144	341
0.019	6.837 384		0.069	6.834 070	104	0.119	6.826 946	180	0.169	6.815 910	260	0.219	6.800 800	344
		29			104			182			262			345
0.020	6.837 355		0.070	6.833 966		0.120	6.826 764		0.170	6.815 648		0.220	6.800 455	
0.021	6.837 324	31	0.071	6.833 859	107	0.121	6.826 581	183	0.171	6.815 385	263	0.221	6.800 108	347
0.022	6.837 292	32	0.072	6.833 751	108	0.122	6.826 395	186	0.172	6.815 120	265	0.222	6.799 759	349
0.023	6.837 258	34	0.073	6.833 642	109	0.123	6.826 209	186	0.173	6.814 854	266	0.223	6.799 409	350
0.024	6.837 223	35	0.074	6.833 531	111	0.124	6.826 021	188	0.174	6.814 585	269	0.224	6.799 057	352
0.025	6.837 186	37	0.075	6.833 418	113	0.125	6.825 831	190	0.175	6.814 316	269	0.225	6.798 703	354
0.026	6.837 148	38	0.076	6.833 304	114	0.126	6.825 639	192	0.176	6.814 044	272	0.226	6.798 347	356
0.027	6.837 108	40	0.077	6.833 189	115	0.127	6.825 446	193	0.177	6.813 771	273	0.227	6.797 990	357
0.028	6.837 066	42	0.078	6.833 071	118	0.128	6.825 252	194	0.178	6.813 496	275	0.228	6.797 631	359
0.029	6.837 023	43	0.079	6.832 953	118	0.129	6.825 056	196	0.179	6.813 220	276	0.229	6.797 270	361
		44			120			198			278			362
0.030	6.836 979		0.080	6.832 833		0.130	6.824 858		0.180	6.812 942		0.230	6.796 908	
0.031	6.836 933	46	0.081	6.832 711	122	0.131	6.824 659	199	0.181	6.812 662	280	0.231	6.796 543	365
0.032	6.836 886	47	0.082	6.832 588	123	0.132	6.824 458	201	0.182	6.812 381	281	0.232	6.796 177	366
0.033	6.836 837	49	0.083	6.832 463	125	0.133	6.824 256	202	0.183	6.812 098	283	0.233	6.795 810	367
0.034	6.836 786	51	0.084	6.832 337	126	0.134	6.824 052	204	0.184	6.811 814	284	0.234	6.795 440	370
0.035	6.836 735	51	0.085	6.832 209	128	0.135	6.823 846	206	0.185	6.811 527	287	0.235	6.795 069	371
0.036	6.836 681	54	0.086	6.832 080	129	0.136	6.823 639	207	0.186	6.811 240	287	0.236	6.794 696	373
0.037	6.836 626	55	0.087	6.831 949	131	0.137	6.823 431	208	0.187	6.810 950	290	0.237	6.794 321	375
0.038	6.836 570	56	0.088	6.831 816	133	0.138	6.823 220	211	0.188	6.810 659	291	0.238	6.793 944	377
0.039	6.836 512	58	0.089	6.831 682	134	0.139	6.823 009	211	0.189	6.810 366	293	0.239	6.793 566	378
		60			135			214			295			380
0.040	6.836 452		0.090	6.831 547		0.140	6.822 795		0.190	6.810 071		0.240	6.793 186	
0.041	6.836 392	60	0.091	6.831 410	137	0.141	6.822 580	215	0.191	6.809 775	296	0.241	6.792 804	382
0.042	6.836 329	63	0.092	6.831 271	139	0.142	6.822 363	217	0.192	6.809 477	298	0.242	6.792 421	383
0.043	6.836 265	64	0.093	6.831 131	140	0.143	6.822 145	218	0.193	6.809 178	299	0.243	6.792 035	386
0.044	6.836 200	65	0.094	6.830 990	141	0.144	6.821 925	220	0.194	6.808 877	301	0.244	6.791 648	387
0.045	6.836 133	67	0.095	6.830 846	144	0.145	6.821 704	221	0.195	6.808 574	303	0.245	6.791 259	389
0.046	6.836 064	69	0.096	6.830 702	144	0.146	6.821 481	223	0.196	6.808 270	304	0.246	6.790 868	391
0.047	6.835 994	70	0.097	6.830 555	147	0.147	6.821 256	225	0.197	6.807 963	307	0.247	6.790 476	392
0.048	6.835 923	71	0.098	6.830 408	147	0.148	6.821 030	226	0.198	6.807 656	307	0.248	6.790 082	394
0.049	6.835 850	73	0.099	6.830 258	150	0.149	6.820 803	227	0.199	6.807 346	310	0.249	6.789 685	397
0.050	6.835 775	75	0.100	6.830 107	151	0.150	6.820 573	230	0.200	6.807 035	311	0.250	6.789 288	397

Tafel VIII.

 $\log \{Q_2^s/n\}$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	5.142 942	0	0.050	5.142 927	1	0.100	5.142 710	9	0.150	5.141 777	31	0.200	5.139 287	73
0.001	5.142 942	0	0.051	5.142 926	1	0.101	5.142 701	10	0.151	5.141 746	32	0.201	5.139 214	75
0.002	5.142 942	0	0.052	5.142 925	2	0.102	5.142 691	10	0.152	5.141 714	32	0.202	5.139 139	75
0.003	5.142 942	0	0.053	5.142 923	1	0.103	5.142 681	10	0.153	5.141 682	33	0.203	5.139 064	76
0.004	5.142 942	0	0.054	5.142 922	2	0.104	5.142 671	10	0.154	5.141 649	33	0.204	5.138 988	78
0.005	5.142 942	0	0.055	5.142 920	1	0.105	5.142 661	11	0.155	5.141 615	34	0.205	5.138 910	79
0.006	5.142 942	0	0.056	5.142 919	2	0.106	5.142 650	11	0.156	5.141 581	35	0.206	5.138 831	79
0.007	5.142 942	0	0.057	5.142 917	2	0.107	5.142 639	12	0.157	5.141 546	36	0.207	5.138 752	81
0.008	5.142 942	0	0.058	5.142 915	1	0.108	5.142 627	12	0.158	5.141 510	36	0.208	5.138 671	83
0.009	5.142 942	0	0.059	5.142 914	2	0.109	5.142 615	12	0.159	5.141 474	38	0.209	5.138 588	83
0.010	5.142 942	0	0.060	5.142 912	3	0.110	5.142 603	12	0.160	5.141 436	37	0.210	5.138 505	84
0.011	5.142 942	0	0.061	5.142 909	2	0.111	5.142 591	13	0.161	5.141 399	39	0.211	5.138 421	86
0.012	5.142 942	0	0.062	5.142 907	2	0.112	5.142 578	13	0.162	5.141 360	39	0.212	5.138 335	87
0.013	5.142 942	0	0.063	5.142 905	2	0.113	5.142 565	13	0.163	5.141 321	40	0.213	5.138 248	88
0.014	5.142 942	0	0.064	5.142 903	3	0.114	5.142 551	14	0.164	5.141 281	41	0.214	5.138 160	90
0.015	5.142 942	0	0.065	5.142 900	2	0.115	5.142 538	15	0.165	5.141 240	41	0.215	5.138 070	90
0.016	5.142 941	1	0.066	5.142 898	3	0.116	5.142 523	15	0.166	5.141 199	42	0.216	5.137 980	92
0.017	5.142 941	0	0.067	5.142 895	3	0.117	5.142 509	15	0.167	5.141 157	43	0.217	5.137 888	93
0.018	5.142 941	0	0.068	5.142 892	3	0.118	5.142 494	15	0.168	5.141 114	44	0.218	5.137 795	95
0.019	5.142 941	0	0.069	5.142 889	3	0.119	5.142 479	16	0.169	5.141 070	44	0.219	5.137 700	95
0.020	5.142 941	0	0.070	5.142 886	3	0.120	5.142 463	16	0.170	5.141 026	45	0.220	5.137 605	97
0.021	5.142 941	0	0.071	5.142 883	4	0.121	5.142 447	17	0.171	5.140 981	46	0.221	5.137 508	99
0.022	5.142 941	0	0.072	5.142 879	3	0.122	5.142 430	17	0.172	5.140 935	47	0.222	5.137 409	99
0.023	5.142 941	0	0.073	5.142 876	4	0.123	5.142 413	17	0.173	5.140 888	48	0.223	5.137 310	101
0.024	5.142 941	0	0.074	5.142 872	4	0.124	5.142 396	18	0.174	5.140 840	48	0.224	5.137 209	102
0.025	5.142 941	0	0.075	5.142 868	4	0.125	5.142 378	18	0.175	5.140 792	49	0.225	5.137 107	104
0.026	5.142 941	1	0.076	5.142 864	4	0.126	5.142 360	18	0.176	5.140 743	51	0.226	5.137 003	105
0.027	5.142 940	0	0.077	5.142 860	4	0.127	5.142 342	19	0.177	5.140 692	50	0.227	5.136 898	107
0.028	5.142 940	0	0.078	5.142 856	5	0.128	5.142 323	20	0.178	5.140 642	52	0.228	5.136 791	107
0.029	5.142 940	0	0.079	5.142 851	4	0.129	5.142 303	20	0.179	5.140 590	53	0.229	5.136 684	110
0.030	5.142 940	1	0.080	5.142 847	5	0.130	5.142 283	20	0.180	5.140 537	54	0.230	5.136 574	110
0.031	5.142 939	0	0.081	5.142 842	5	0.131	5.142 263	21	0.181	5.140 483	54	0.231	5.136 464	112
0.032	5.142 939	0	0.082	5.142 837	5	0.132	5.142 242	22	0.182	5.140 429	55	0.232	5.136 352	114
0.033	5.142 939	0	0.083	5.142 832	6	0.133	5.142 220	21	0.183	5.140 374	56	0.233	5.136 238	115
0.034	5.142 939	1	0.084	5.142 826	5	0.134	5.142 199	23	0.184	5.140 318	58	0.234	5.136 123	116
0.035	5.142 938	0	0.085	5.142 821	6	0.135	5.142 176	22	0.185	5.140 260	58	0.235	5.136 007	118
0.036	5.142 938	1	0.086	5.142 815	6	0.136	5.142 154	24	0.186	5.140 202	59	0.236	5.135 889	120
0.037	5.142 937	0	0.087	5.142 809	6	0.137	5.142 130	24	0.187	5.140 143	60	0.237	5.135 769	121
0.038	5.142 937	1	0.088	5.142 803	7	0.138	5.142 106	24	0.188	5.140 083	61	0.238	5.135 648	122
0.039	5.142 936	0	0.089	5.142 796	6	0.139	5.142 082	25	0.189	5.140 022	61	0.239	5.135 526	124
0.040	5.142 936	1	0.090	5.142 790	7	0.140	5.142 057	25	0.190	5.139 961	63	0.240	5.135 402	125
0.041	5.142 935	0	0.091	5.142 783	8	0.141	5.142 032	26	0.191	5.139 898	64	0.241	5.135 277	127
0.042	5.142 934	0	0.092	5.142 776	8	0.142	5.142 006	27	0.192	5.139 834	65	0.242	5.135 150	129
0.043	5.142 934	1	0.093	5.142 768	7	0.143	5.141 979	27	0.193	5.139 769	66	0.243	5.135 021	130
0.044	5.142 933	0	0.094	5.142 761	8	0.144	5.141 952	28	0.194	5.139 703	67	0.244	5.134 891	132
0.045	5.142 932	1	0.095	5.142 753	8	0.145	5.141 924	28	0.195	5.139 636	67	0.245	5.134 759	134
0.046	5.142 931	0	0.096	5.142 745	8	0.146	5.141 896	29	0.196	5.139 569	69	0.246	5.134 625	135
0.047	5.142 930	1	0.097	5.142 737	9	0.147	5.141 867	29	0.197	5.139 500	70	0.247	5.134 490	136
0.048	5.142 929	0	0.098	5.142 728	9	0.148	5.141 838	30	0.198	5.139 430	71	0.248	5.134 354	139
0.049	5.142 928	1	0.099	5.142 719	9	0.149	5.141 808	31	0.199	5.139 359	72	0.249	5.134 215	140
0.050	5.142 927	1	0.100	5.142 710	9	0.150	5.141 777	31	0.200	5.139 287	72	0.250	5.134 075	140

Tafel VIII.

 $\log \{Q_2^9(n)\}$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	6 _n 188 807	1	0.050	6 _n 186 945	75	0.100	6 _n 181 336	151	0.150	6 _n 171 906	229	0.200	6 _n 158 526	309
0.001	6 _n 188 806	2	0.051	6 _n 186 870	77	0.101	6 _n 181 185	152	0.151	6 _n 171 677	230	0.201	6 _n 158 217	310
0.002	6 _n 188 804	3	0.052	6 _n 186 793	78	0.102	6 _n 181 033	154	0.152	6 _n 171 447	231	0.202	6 _n 157 907	313
0.003	6 _n 188 800	4	0.053	6 _n 186 715	80	0.103	6 _n 180 879	155	0.153	6 _n 171 216	233	0.203	6 _n 157 594	314
0.004	6 _n 188 795	5	0.054	6 _n 186 635	81	0.104	6 _n 180 724	157	0.154	6 _n 170 983	235	0.204	6 _n 157 280	316
0.005	6 _n 188 788	7	0.055	6 _n 186 554	83	0.105	6 _n 180 567	159	0.155	6 _n 170 748	236	0.205	6 _n 156 964	317
0.006	6 _n 188 780	8	0.056	6 _n 186 471	84	0.106	6 _n 180 408	160	0.156	6 _n 170 512	238	0.206	6 _n 156 647	319
0.007	6 _n 188 770	10	0.057	6 _n 186 387	86	0.107	6 _n 180 248	161	0.157	6 _n 170 274	239	0.207	6 _n 156 328	321
0.008	6 _n 188 759	11	0.058	6 _n 186 301	87	0.108	6 _n 180 087	163	0.158	6 _n 170 035	242	0.208	6 _n 156 007	322
0.009	6 _n 188 746	13	0.059	6 _n 186 214	89	0.109	6 _n 179 924	165	0.159	6 _n 169 793	242	0.209	6 _n 155 685	324
		14												
0.010	6 _n 188 732	15	0.060	6 _n 186 125	91	0.110	6 _n 179 759	166	0.160	6 _n 169 551	244	0.210	6 _n 155 361	326
0.011	6 _n 188 717	17	0.061	6 _n 186 034	91	0.111	6 _n 179 593	168	0.161	6 _n 169 307	246	0.211	6 _n 155 035	327
0.012	6 _n 188 700	19	0.062	6 _n 185 943	94	0.112	6 _n 179 425	169	0.162	6 _n 169 061	247	0.212	6 _n 154 708	329
0.013	6 _n 188 681	20	0.063	6 _n 185 849	94	0.113	6 _n 179 256	171	0.163	6 _n 168 814	249	0.213	6 _n 154 379	331
0.014	6 _n 188 661	22	0.064	6 _n 185 755	97	0.114	6 _n 179 085	172	0.164	6 _n 168 565	251	0.214	6 _n 154 048	332
0.015	6 _n 188 639	23	0.065	6 _n 185 658	97	0.115	6 _n 178 913	174	0.165	6 _n 168 314	252	0.215	6 _n 153 716	334
0.016	6 _n 188 616	24	0.066	6 _n 185 561	100	0.116	6 _n 178 739	175	0.166	6 _n 168 062	254	0.216	6 _n 153 382	336
0.017	6 _n 188 592	26	0.067	6 _n 185 461	101	0.117	6 _n 178 564	177	0.167	6 _n 167 808	255	0.217	6 _n 153 046	337
0.018	6 _n 188 566	28	0.068	6 _n 185 360	102	0.118	6 _n 178 387	179	0.168	6 _n 167 553	257	0.218	6 _n 152 709	339
0.019	6 _n 188 538	29	0.069	6 _n 185 258	104	0.119	6 _n 178 208	180	0.169	6 _n 167 296	259	0.219	6 _n 152 370	341
0.020	6 _n 188 509	30	0.070	6 _n 185 154	105	0.120	6 _n 178 028	181	0.170	6 _n 167 037	260	0.220	6 _n 152 029	343
0.021	6 _n 188 479	32	0.071	6 _n 185 049	107	0.121	6 _n 177 847	183	0.171	6 _n 166 777	262	0.221	6 _n 151 686	344
0.022	6 _n 188 447	34	0.072	6 _n 184 942	108	0.122	6 _n 177 664	185	0.172	6 _n 166 515	263	0.222	6 _n 151 342	346
0.023	6 _n 188 413	35	0.073	6 _n 184 834	110	0.123	6 _n 177 479	186	0.173	6 _n 166 252	265	0.223	6 _n 150 996	347
0.024	6 _n 188 378	36	0.074	6 _n 184 724	111	0.124	6 _n 177 293	188	0.174	6 _n 165 987	267	0.224	6 _n 150 649	350
0.025	6 _n 188 342	38	0.075	6 _n 184 613	113	0.125	6 _n 177 105	189	0.175	6 _n 165 720	268	0.225	6 _n 150 299	351
0.026	6 _n 188 304	40	0.076	6 _n 184 500	115	0.126	6 _n 176 916	191	0.176	6 _n 165 452	270	0.226	6 _n 149 948	352
0.027	6 _n 188 264	41	0.077	6 _n 184 385	116	0.127	6 _n 176 725	192	0.177	6 _n 165 182	272	0.227	6 _n 149 596	355
0.028	6 _n 188 223	42	0.078	6 _n 184 269	117	0.128	6 _n 176 533	194	0.178	6 _n 164 910	273	0.228	6 _n 149 241	356
0.029	6 _n 188 181	44	0.079	6 _n 184 152	119	0.129	6 _n 176 339	196	0.179	6 _n 164 637	274	0.229	6 _n 148 885	358
0.030	6 _n 188 137	45	0.080	6 _n 184 033	120	0.130	6 _n 176 143	197	0.180	6 _n 164 363	277	0.230	6 _n 148 527	359
0.031	6 _n 188 092	47	0.081	6 _n 183 913	122	0.131	6 _n 175 946	198	0.181	6 _n 164 086	278	0.231	6 _n 148 168	362
0.032	6 _n 188 045	49	0.082	6 _n 183 791	124	0.132	6 _n 175 748	200	0.182	6 _n 163 808	279	0.232	6 _n 147 806	362
0.033	6 _n 187 996	50	0.083	6 _n 183 667	125	0.133	6 _n 175 548	202	0.183	6 _n 163 529	281	0.233	6 _n 147 444	365
0.034	6 _n 187 946	51	0.084	6 _n 183 542	126	0.134	6 _n 175 346	203	0.184	6 _n 163 248	283	0.234	6 _n 147 079	367
0.035	6 _n 187 895	53	0.085	6 _n 183 416	128	0.135	6 _n 175 143	205	0.185	6 _n 162 965	285	0.235	6 _n 146 712	368
0.036	6 _n 187 842	54	0.086	6 _n 183 288	130	0.136	6 _n 174 938	207	0.186	6 _n 162 680	286	0.236	6 _n 146 344	370
0.037	6 _n 187 788	56	0.087	6 _n 183 158	131	0.137	6 _n 174 731	208	0.187	6 _n 162 394	287	0.237	6 _n 145 974	371
0.038	6 _n 187 732	57	0.088	6 _n 183 027	132	0.138	6 _n 174 523	209	0.188	6 _n 162 107	290	0.238	6 _n 145 603	373
0.039	6 _n 187 675	59	0.089	6 _n 182 895	135	0.139	6 _n 174 314	211	0.189	6 _n 161 817	291	0.239	6 _n 145 230	375
0.040	6 _n 187 616	61	0.090	6 _n 182 760	135	0.140	6 _n 174 103	213	0.190	6 _n 161 526	292	0.240	6 _n 144 855	377
0.041	6 _n 187 555	61	0.091	6 _n 182 625	137	0.141	6 _n 173 890	214	0.191	6 _n 161 234	295	0.241	6 _n 144 478	379
0.042	6 _n 187 494	64	0.092	6 _n 182 488	139	0.142	6 _n 173 676	216	0.192	6 _n 160 939	295	0.242	6 _n 144 099	380
0.043	6 _n 187 430	65	0.093	6 _n 182 349	140	0.143	6 _n 173 460	217	0.193	6 _n 160 644	298	0.243	6 _n 143 719	382
0.044	6 _n 187 365	66	0.094	6 _n 182 209	142	0.144	6 _n 173 243	219	0.194	6 _n 160 346	299	0.244	6 _n 143 337	384
0.045	6 _n 187 299	68	0.095	6 _n 182 067	143	0.145	6 _n 173 024	221	0.195	6 _n 160 047	301	0.245	6 _n 142 953	385
0.046	6 _n 187 231	69	0.096	6 _n 181 924	145	0.146	6 _n 172 803	222	0.196	6 _n 159 746	302	0.246	6 _n 142 568	387
0.047	6 _n 187 162	71	0.097	6 _n 181 779	146	0.147	6 _n 172 581	223	0.197	6 _n 159 444	304	0.247	6 _n 142 181	389
0.048	6 _n 187 091	72	0.098	6 _n 181 633	148	0.148	6 _n 172 358	225	0.198	6 _n 159 140	306	0.248	6 _n 141 792	391
0.049	6 _n 187 019	74	0.099	6 _n 181 485	149	0.149	6 _n 172 133	227	0.199	6 _n 158 834	308	0.249	6 _n 141 401	393
0.050	6 _n 186 945		0.100	6 _n 181 336		0.150	6 _n 171 906		0.200	6 _n 158 526		0.250	6 _n 141 008	

Tafel VIII.

 $\log \{Q_2^{10}(n)\}.$

$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$	$\pm n$	Q	$-J$
0.000	4n+15 201	0	0.050	4n+15 188	2	0.100	4n+14 982	9	0.150	4n+14 096	29	0.200	4n+11 734	69
0.001	4n+15 201	0	0.051	4n+15 186	1	0.101	4n+14 973	9	0.151	4n+14 067	30	0.201	4n+11 665	71
0.002	4n+15 201	0	0.052	4n+15 185	1	0.102	4n+14 964	10	0.152	4n+14 037	31	0.202	4n+11 594	71
0.003	4n+15 201	0	0.053	4n+15 184	1	0.103	4n+14 954	9	0.153	4n+14 006	32	0.203	4n+11 523	72
0.004	4n+15 201	0	0.054	4n+15 183	2	0.104	4n+14 945	10	0.154	4n+13 974	32	0.204	4n+11 451	74
0.005	4n+15 201	0	0.055	4n+15 181	1	0.105	4n+14 935	11	0.155	4n+13 942	32	0.205	4n+11 377	75
0.006	4n+15 201	0	0.056	4n+15 180	2	0.106	4n+14 924	10	0.156	4n+13 910	33	0.206	4n+11 302	75
0.007	4n+15 201	0	0.057	4n+15 178	2	0.107	4n+14 914	11	0.157	4n+13 876	33	0.207	4n+11 227	77
0.008	4n+15 201	0	0.058	4n+15 176	1	0.108	4n+14 903	11	0.158	4n+13 843	35	0.208	4n+11 150	78
0.009	4n+15 201	0	0.059	4n+15 175	2	0.109	4n+14 892	12	0.159	4n+13 808	35	0.209	4n+11 072	79
0.010	4n+15 201	0	0.060	4n+15 173	2	0.110	4n+14 880	12	0.160	4n+13 773	36	0.210	4n+10 993	80
0.011	4n+15 201	0	0.061	4n+15 171	2	0.111	4n+14 868	12	0.161	4n+13 737	37	0.211	4n+10 913	81
0.012	4n+15 201	0	0.062	4n+15 169	2	0.112	4n+14 856	12	0.162	4n+13 700	37	0.212	4n+10 832	82
0.013	4n+15 201	0	0.063	4n+15 167	3	0.113	4n+14 844	13	0.163	4n+13 663	38	0.213	4n+10 750	84
0.014	4n+15 201	0	0.064	4n+15 164	2	0.114	4n+14 831	13	0.164	4n+13 625	38	0.214	4n+10 666	85
0.015	4n+15 201	0	0.065	4n+15 162	2	0.115	4n+14 818	14	0.165	4n+13 587	39	0.215	4n+10 581	85
0.016	4n+15 201	0	0.066	4n+15 160	3	0.116	4n+14 804	13	0.166	4n+13 548	40	0.216	4n+10 496	87
0.017	4n+15 201	0	0.067	4n+15 157	3	0.117	4n+14 791	15	0.167	4n+13 508	41	0.217	4n+10 409	89
0.018	4n+15 201	0	0.068	4n+15 154	3	0.118	4n+14 776	14	0.168	4n+13 467	41	0.218	4n+10 320	89
0.019	4n+15 201	0	0.069	4n+15 151	3	0.119	4n+14 762	15	0.169	4n+13 426	43	0.219	4n+10 231	91
0.020	4n+15 201	0	0.070	4n+15 148	3	0.120	4n+14 747	15	0.170	4n+13 383	43	0.220	4n+10 140	92
0.021	4n+15 201	0	0.071	4n+15 145	3	0.121	4n+14 732	16	0.171	4n+13 340	43	0.221	4n+10 048	93
0.022	4n+15 201	0	0.072	4n+15 142	3	0.122	4n+14 716	16	0.172	4n+13 297	45	0.222	4n+09 955	94
0.023	4n+15 201	0	0.073	4n+15 139	4	0.123	4n+14 700	16	0.173	4n+13 252	45	0.223	4n+09 861	96
0.024	4n+15 201	1	0.074	4n+15 135	3	0.124	4n+14 684	17	0.174	4n+13 207	46	0.224	4n+09 765	97
0.025	4n+15 200	0	0.075	4n+15 132	4	0.125	4n+14 667	18	0.175	4n+13 161	46	0.225	4n+09 668	98
0.026	4n+15 200	0	0.076	4n+15 128	4	0.126	4n+14 649	17	0.176	4n+13 115	48	0.226	4n+09 570	99
0.027	4n+15 200	0	0.077	4n+15 124	4	0.127	4n+14 632	18	0.177	4n+13 067	48	0.227	4n+09 471	101
0.028	4n+15 200	0	0.078	4n+15 120	4	0.128	4n+14 614	19	0.178	4n+13 019	49	0.228	4n+09 370	102
0.029	4n+15 200	0	0.079	4n+15 116	5	0.129	4n+14 595	19	0.179	4n+12 970	50	0.229	4n+09 268	104
0.030	4n+15 200	1	0.080	4n+15 111	4	0.130	4n+14 576	19	0.180	4n+12 920	51	0.230	4n+09 164	105
0.031	4n+15 199	0	0.081	4n+15 107	5	0.131	4n+14 557	20	0.181	4n+12 869	52	0.231	4n+09 059	106
0.032	4n+15 199	0	0.082	4n+15 102	5	0.132	4n+14 537	20	0.182	4n+12 817	52	0.232	4n+08 953	107
0.033	4n+15 199	1	0.083	4n+15 097	5	0.133	4n+14 517	21	0.183	4n+12 765	53	0.233	4n+08 846	109
0.034	4n+15 198	0	0.084	4n+15 092	5	0.134	4n+14 496	21	0.184	4n+12 712	55	0.234	4n+08 737	110
0.035	4n+15 198	0	0.085	4n+15 087	6	0.135	4n+14 475	22	0.185	4n+12 657	55	0.235	4n+08 627	112
0.036	4n+15 198	1	0.086	4n+15 081	6	0.136	4n+14 453	22	0.186	4n+12 602	56	0.236	4n+08 515	113
0.037	4n+15 197	0	0.087	4n+15 075	5	0.137	4n+14 431	23	0.187	4n+12 546	57	0.237	4n+08 402	115
0.038	4n+15 197	1	0.088	4n+15 070	5	0.138	4n+14 408	23	0.188	4n+12 489	57	0.238	4n+08 287	116
0.039	4n+15 196	0	0.089	4n+15 063	6	0.139	4n+14 385	23	0.189	4n+12 432	59	0.239	4n+08 171	117
0.040	4n+15 196	1	0.090	4n+15 057	6	0.140	4n+14 362	24	0.190	4n+12 373	59	0.240	4n+08 054	119
0.041	4n+15 195	1	0.091	4n+15 051	7	0.141	4n+14 338	25	0.191	4n+12 314	61	0.241	4n+07 935	120
0.042	4n+15 194	0	0.092	4n+15 044	7	0.142	4n+14 313	25	0.192	4n+12 253	61	0.242	4n+07 815	122
0.043	4n+15 194	1	0.093	4n+15 037	7	0.143	4n+14 288	26	0.193	4n+12 192	63	0.243	4n+07 693	123
0.044	4n+15 193	1	0.094	4n+15 030	8	0.144	4n+14 262	26	0.194	4n+12 129	63	0.244	4n+07 570	125
0.045	4n+15 192	1	0.095	4n+15 022	7	0.145	4n+14 236	27	0.195	4n+12 066	64	0.245	4n+07 445	126
0.046	4n+15 191	1	0.096	4n+15 015	8	0.146	4n+14 209	27	0.196	4n+12 002	66	0.246	4n+07 319	128
0.047	4n+15 191	1	0.097	4n+15 007	8	0.147	4n+14 182	28	0.197	4n+11 936	66	0.247	4n+07 191	130
0.048	4n+15 190	1	0.098	4n+14 999	9	0.148	4n+14 154	29	0.198	4n+11 870	67	0.248	4n+07 061	131
0.049	4n+15 189	1	0.099	4n+14 990	8	0.149	4n+14 125	29	0.199	4n+11 803	69	0.249	4n+06 930	132
0.050	4n+15 188	1	0.100	4n+14 982		0.150	4n+14 096		0.200	4n+11 734		0.250	4n+06 798	

Tafel IX.

 $\log \{P_2^0(m)\}.$

vergl. pag. 58.

$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$
0.000	8 _n 619 789		0.050	8 _n 606 561		0.100	8 _n 564 271		0.150	8 _n 483 112		0.200	8 _n 335 792	
0.001	8 _n 619 784	5	0.051	8 _n 606 018	543	0.101	8 _n 563 079	1192	0.151	8 _n 480 957	2155	0.201	8 _n 331 755	4037
0.002	8 _n 619 768	16	0.052	8 _n 605 463	555	0.102	8 _n 561 872	1207	0.152	8 _n 478 778	2179	0.202	8 _n 327 659	4096
0.003	8 _n 619 742	26	0.053	8 _n 604 897	566	0.103	8 _n 560 650	1222	0.153	8 _n 476 573	2205	0.203	8 _n 323 503	4156
0.004	8 _n 619 705	37	0.054	8 _n 604 320	577	0.104	8 _n 559 412	1238	0.154	8 _n 474 342	2231	0.204	8 _n 319 287	4216
0.005	8 _n 619 659	46	0.055	8 _n 603 731	589	0.105	8 _n 558 158	1254	0.155	8 _n 472 086	2256	0.205	8 _n 315 008	4279
0.006	8 _n 619 601	58	0.056	8 _n 603 130	601	0.106	8 _n 556 889	1269	0.156	8 _n 469 802	2284	0.206	8 _n 310 665	4343
0.007	8 _n 619 533	68	0.057	8 _n 602 518	612	0.107	8 _n 555 604	1285	0.157	8 _n 467 492	2310	0.207	8 _n 306 257	4408
0.008	8 _n 619 455	78	0.058	8 _n 601 894	624	0.108	8 _n 554 303	1301	0.158	8 _n 465 155	2337	0.208	8 _n 301 782	4475
0.009	8 _n 619 366	89	0.059	8 _n 601 258	636	0.109	8 _n 552 986	1317	0.159	8 _n 462 790	2365	0.209	8 _n 297 239	4543
		99			648			1333			2393			4614
0.010	8 _n 619 267	109	0.060	8 _n 600 610	660	0.110	8 _n 551 653	1349	0.160	8 _n 460 397	2422	0.210	8 _n 292 625	4685
0.011	8 _n 619 158	120	0.061	8 _n 599 950	671	0.111	8 _n 550 304	1366	0.161	8 _n 457 975	2450	0.211	8 _n 287 940	4759
0.012	8 _n 619 038	131	0.062	8 _n 599 279	683	0.112	8 _n 548 938	1383	0.162	8 _n 455 525	2479	0.212	8 _n 283 181	4835
0.013	8 _n 618 907	141	0.063	8 _n 598 596	696	0.113	8 _n 547 555	1399	0.163	8 _n 453 046	2509	0.213	8 _n 278 346	4913
0.014	8 _n 618 766	151	0.064	8 _n 597 900	708	0.114	8 _n 546 156	1416	0.164	8 _n 450 537	2540	0.214	8 _n 273 433	4991
0.015	8 _n 618 615	162	0.065	8 _n 597 192	719	0.115	8 _n 544 740	1434	0.165	8 _n 447 997	2569	0.215	8 _n 268 442	5074
0.016	8 _n 618 453	173	0.066	8 _n 596 473	732	0.116	8 _n 543 306	1450	0.166	8 _n 445 428	2601	0.216	8 _n 263 368	5158
0.017	8 _n 618 280	183	0.067	8 _n 595 741	745	0.117	8 _n 541 856	1468	0.167	8 _n 442 827	2632	0.217	8 _n 258 210	5244
0.018	8 _n 618 097	194	0.068	8 _n 594 996	756	0.118	8 _n 540 388	1485	0.168	8 _n 440 195	2664	0.218	8 _n 252 966	5332
0.019	8 _n 617 903	204	0.069	8 _n 594 240	769	0.119	8 _n 538 903	1504	0.169	8 _n 437 531	2696	0.219	8 _n 247 634	5424
0.020	8 _n 617 699	215	0.070	8 _n 593 471	782	0.120	8 _n 537 399	1521	0.170	8 _n 434 835	2729	0.220	8 _n 242 210	5517
0.021	8 _n 617 484	225	0.071	8 _n 592 689	794	0.121	8 _n 535 878	1539	0.171	8 _n 432 106	2763	0.221	8 _n 236 693	5614
0.022	8 _n 617 259	236	0.072	8 _n 591 895	806	0.122	8 _n 534 339	1557	0.172	8 _n 429 343	2796	0.222	8 _n 231 079	5714
0.023	8 _n 617 023	246	0.073	8 _n 591 089	819	0.123	8 _n 532 782	1576	0.173	8 _n 426 547	2832	0.223	8 _n 225 365	5815
0.024	8 _n 616 777	258	0.074	8 _n 590 270	832	0.124	8 _n 531 206	1594	0.174	8 _n 423 715	2866	0.224	8 _n 219 550	5922
0.025	8 _n 616 519	268	0.075	8 _n 589 438	845	0.125	8 _n 529 612	1613	0.175	8 _n 420 849	2901	0.225	8 _n 213 628	6030
0.026	8 _n 616 251	278	0.076	8 _n 588 593	858	0.126	8 _n 527 999	1632	0.176	8 _n 417 948	2938	0.226	8 _n 207 598	6142
0.027	8 _n 615 973	289	0.077	8 _n 587 735	870	0.127	8 _n 526 367	1651	0.177	8 _n 415 010	2975	0.227	8 _n 201 456	6258
0.028	8 _n 615 684	300	0.078	8 _n 586 865	884	0.128	8 _n 524 716	1670	0.178	8 _n 412 035	3012	0.228	8 _n 195 198	6377
0.029	8 _n 615 384	311	0.079	8 _n 585 981	896	0.129	8 _n 523 046	1690	0.179	8 _n 409 023	3051	0.229	8 _n 188 821	6501
0.030	8 _n 615 073	322	0.080	8 _n 585 085	910	0.130	8 _n 521 356	1710	0.180	8 _n 405 972	3089	0.230	8 _n 182 320	6629
0.031	8 _n 614 751	332	0.081	8 _n 584 175	923	0.131	8 _n 519 646	1729	0.181	8 _n 402 883	3128	0.231	8 _n 175 691	6762
0.032	8 _n 614 419	343	0.082	8 _n 583 252	937	0.132	8 _n 517 917	1750	0.182	8 _n 399 755	3169	0.232	8 _n 168 929	6898
0.033	8 _n 614 076	354	0.083	8 _n 582 315	949	0.133	8 _n 516 167	1770	0.183	8 _n 396 586	3210	0.233	8 _n 162 031	7039
0.034	8 _n 613 722	365	0.084	8 _n 581 366	964	0.134	8 _n 514 397	1790	0.184	8 _n 393 376	3251	0.234	8 _n 154 992	7187
0.035	8 _n 613 357	375	0.085	8 _n 580 402	977	0.135	8 _n 512 607	1812	0.185	8 _n 390 125	3293	0.235	8 _n 147 805	7339
0.036	8 _n 612 982	387	0.086	8 _n 579 425	990	0.136	8 _n 510 795	1832	0.186	8 _n 386 832	3337	0.236	8 _n 140 466	7497
0.037	8 _n 612 595	398	0.087	8 _n 578 435	1004	0.137	8 _n 508 963	1854	0.187	8 _n 383 495	3380	0.237	8 _n 132 969	7661
0.038	8 _n 612 197	408	0.088	8 _n 577 431	1019	0.138	8 _n 507 109	1875	0.188	8 _n 380 115	3425	0.238	8 _n 125 308	7832
0.039	8 _n 611 789	420	0.089	8 _n 576 412	1032	0.139	8 _n 505 234	1897	0.189	8 _n 376 690	3471	0.239	8 _n 117 476	8010
0.040	8 _n 611 369	430	0.090	8 _n 575 380	1046	0.140	8 _n 503 337	1919	0.190	8 _n 373 219	3518	0.240	8 _n 109 466	8194
0.041	8 _n 610 939	442	0.091	8 _n 574 334	1060	0.141	8 _n 501 418	1942	0.191	8 _n 369 701	3564	0.241	8 _n 101 272	8388
0.042	8 _n 610 497	453	0.092	8 _n 573 274	1074	0.142	8 _n 499 476	1964	0.192	8 _n 366 137	3614	0.242	8 _n 092 884	8588
0.043	8 _n 610 044	464	0.093	8 _n 572 200	1089	0.143	8 _n 497 512	1986	0.193	8 _n 362 523	3662	0.243	8 _n 084 296	8798
0.044	8 _n 609 580	475	0.094	8 _n 571 111	1103	0.144	8 _n 495 526	2010	0.194	8 _n 358 861	3713	0.244	8 _n 075 498	9016
0.045	8 _n 609 105	486	0.095	8 _n 570 008	1118	0.145	8 _n 493 516	2033	0.195	8 _n 355 148	3764	0.245	8 _n 066 482	9246
0.046	8 _n 608 619	498	0.096	8 _n 568 890	1133	0.146	8 _n 491 483	2057	0.196	8 _n 351 384	3816	0.246	8 _n 057 236	9487
0.047	8 _n 608 121	509	0.097	8 _n 567 757	1147	0.147	8 _n 489 426	2080	0.197	8 _n 347 568	3871	0.247	8 _n 047 749	9739
0.048	8 _n 607 612	520	0.098	8 _n 566 610	1162	0.148	8 _n 487 346	2105	0.198	8 _n 343 697	3924	0.248	8 _n 038 010	10001
0.049	8 _n 607 092	531	0.099	8 _n 565 448	1177	0.149	8 _n 485 241	2129	0.199	8 _n 339 773	3981	0.249	8 _n 028 009	10280
0.050	8 _n 606 561		0.100	8 _n 564 271		0.150	8 _n 483 112		0.200	8 _n 335 792		0.250	8 _n 017 729	

Tafel IX.

 $\log \{P_2^1 m\}$.

$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$
0.000	8.619 789		0.050	8.624 110		0.100	8.636 822		0.150	8.657 215		0.200	8.684 247	
0.001	8.619 791	2	0.051	8.624 284	174	0.101	8.637 158	336	0.151	8.657 695	480	0.201	8.684 847	600
0.002	8.619 796	5	0.052	8.624 461	177	0.102	8.637 496	338	0.152	8.658 177	482	0.202	8.685 449	602
0.003	8.619 805	9	0.053	8.624 641	180	0.103	8.637 838	342	0.153	8.658 662	485	0.203	8.686 054	605
0.004	8.619 817	12	0.054	8.624 825	184	0.104	8.638 183	345	0.154	8.659 149	487	0.204	8.686 660	606
0.005	8.619 832	15	0.055	8.625 012	187	0.105	8.638 531	348	0.155	8.659 639	490	0.205	8.687 269	609
0.006	8.619 851	19	0.056	8.625 203	191	0.106	8.638 882	351	0.156	8.660 132	493	0.206	8.687 880	611
0.007	8.619 874	23	0.057	8.625 397	194	0.107	8.639 236	354	0.157	8.660 627	495	0.207	8.688 493	613
0.008	8.619 900	26	0.058	8.625 594	197	0.108	8.639 593	357	0.158	8.661 125	498	0.208	8.689 108	615
0.009	8.619 930	30	0.059	8.625 794	200	0.109	8.639 953	360	0.159	8.661 625	500	0.209	8.689 725	617
		33			204			363			503			619
0.010	8.619 963		0.060	8.625 998		0.110	8.640 316		0.160	8.662 128		0.210	8.690 344	
0.011	8.619 999	36	0.061	8.626 205	207	0.111	8.640 682	366	0.161	8.662 634	506	0.211	8.690 965	621
0.012	8.620 039	40	0.062	8.626 416	211	0.112	8.641 051	369	0.162	8.663 142	508	0.212	8.691 588	623
0.013	8.620 082	43	0.063	8.626 630	214	0.113	8.641 423	372	0.163	8.663 652	510	0.213	8.692 214	626
0.014	8.620 129	47	0.064	8.626 847	217	0.114	8.641 798	375	0.164	8.664 165	513	0.214	8.692 841	627
0.015	8.620 180	51	0.065	8.627 067	220	0.115	8.642 176	378	0.165	8.664 681	516	0.215	8.693 471	630
0.016	8.620 233	53	0.066	8.627 291	224	0.116	8.642 557	381	0.166	8.665 199	518	0.216	8.694 102	631
0.017	8.620 291	58	0.067	8.627 518	227	0.117	8.642 941	384	0.167	8.665 720	521	0.217	8.694 735	633
0.018	8.620 351	60	0.068	8.627 748	230	0.118	8.643 328	387	0.168	8.666 243	523	0.218	8.695 371	636
0.019	8.620 416	65	0.069	8.627 982	234	0.119	8.643 718	390	0.169	8.666 769	526	0.219	8.696 008	637
		67			237			392			528			640
0.020	8.620 483		0.070	8.628 219		0.120	8.644 110		0.170	8.667 297		0.220	8.696 648	
0.021	8.620 554	71	0.071	8.628 459	240	0.121	8.644 506	396	0.171	8.667 828	531	0.221	8.697 289	641
0.022	8.620 629	75	0.072	8.628 702	243	0.122	8.644 905	399	0.172	8.668 361	533	0.222	8.697 932	643
0.023	8.620 707	78	0.073	8.628 949	247	0.123	8.645 306	401	0.173	8.668 897	536	0.223	8.698 578	646
0.024	8.620 788	81	0.074	8.629 199	250	0.124	8.645 710	404	0.174	8.669 435	538	0.224	8.699 225	647
0.025	8.620 873	85	0.075	8.629 452	253	0.125	8.646 118	408	0.175	8.669 975	540	0.225	8.699 874	649
0.026	8.620 962	89	0.076	8.629 709	257	0.126	8.646 528	410	0.176	8.670 518	543	0.226	8.700 525	651
0.027	8.621 053	91	0.077	8.629 968	259	0.127	8.646 941	413	0.177	8.671 063	545	0.227	8.701 178	653
0.028	8.621 149	96	0.078	8.630 231	263	0.128	8.647 357	416	0.178	8.671 611	548	0.228	8.701 833	655
0.029	8.621 247	98	0.079	8.630 497	266	0.129	8.647 776	419	0.179	8.672 161	550	0.229	8.702 490	657
		102			270			421			552			658
0.030	8.621 349		0.080	8.630 767		0.130	8.648 197		0.180	8.672 713		0.230	8.703 148	
0.031	8.621 455	106	0.081	8.631 039	272	0.131	8.648 622	425	0.181	8.673 268	555	0.231	8.703 809	661
0.032	8.621 564	109	0.082	8.631 315	276	0.132	8.649 049	427	0.182	8.673 825	557	0.232	8.704 471	662
0.033	8.621 676	112	0.083	8.631 594	279	0.133	8.649 479	430	0.183	8.674 385	560	0.233	8.705 135	664
0.034	8.621 792	116	0.084	8.631 877	283	0.134	8.649 912	433	0.184	8.674 947	562	0.234	8.705 801	666
0.035	8.621 912	120	0.085	8.632 162	285	0.135	8.650 348	436	0.185	8.675 511	564	0.235	8.706 469	668
0.036	8.622 034	122	0.086	8.632 451	289	0.136	8.650 787	439	0.186	8.676 078	567	0.236	8.707 139	670
0.037	8.622 161	127	0.087	8.632 742	291	0.137	8.651 228	441	0.187	8.676 646	568	0.237	8.707 810	671
0.038	8.622 290	129	0.088	8.633 037	294	0.138	8.651 672	444	0.188	8.677 218	572	0.238	8.708 483	673
0.039	8.622 423	133	0.089	8.633 336	299	0.139	8.652 119	447	0.189	8.677 791	573	0.239	8.709 158	675
		136			301			450			576			677
0.040	8.622 559		0.090	8.633 637		0.140	8.652 569		0.190	8.678 367		0.240	8.709 835	
0.041	8.622 699	140	0.091	8.633 941	304	0.141	8.653 021	452	0.191	8.678 945	578	0.241	8.710 514	679
0.042	8.622 842	143	0.092	8.634 249	308	0.142	8.653 476	455	0.192	8.679 525	580	0.242	8.711 194	682
0.043	8.622 989	147	0.093	8.634 560	311	0.143	8.653 934	458	0.193	8.680 107	582	0.243	8.711 876	684
0.044	8.623 139	150	0.094	8.634 873	313	0.144	8.654 395	461	0.194	8.680 692	585	0.244	8.712 560	686
0.045	8.623 292	153	0.095	8.635 190	317	0.145	8.654 858	463	0.195	8.681 279	587	0.245	8.713 246	687
0.046	8.623 449	157	0.096	8.635 511	321	0.146	8.655 324	466	0.196	8.681 868	589	0.246	8.713 933	689
0.047	8.623 609	160	0.097	8.635 834	323	0.147	8.655 793	469	0.197	8.682 460	592	0.247	8.714 622	691
0.048	8.623 773	164	0.098	8.636 160	326	0.148	8.656 264	471	0.198	8.683 053	593	0.248	8.715 313	692
0.049	8.623 940	167	0.099	8.636 490	330	0.149	8.656 738	474	0.199	8.683 649	596	0.249	8.716 005	694
0.050	8.624 110	170	0.100	8.636 822	332	0.150	8.657 215	477	0.200	8.684 247	598	0.250	8.716 699	694

Tafel IX.

 $\log \{P_2^2(m)\}.$

$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$
0.000	7.947 148		0.050	7.939 428		0.100	7.915 576		0.150	7.873 263		0.200	7.807 591	
0.001	7.947 145	3	0.051	7.939 114	314	0.101	7.914 922	654	0.151	7.872 201	1062	0.201	7.805 984	1607
0.002	7.947 135	10	0.052	7.938 793	321	0.102	7.914 260	662	0.152	7.871 130	1071	0.202	7.804 364	1620
0.003	7.947 120	15	0.053	7.938 466	327	0.103	7.913 591	669	0.153	7.870 049	1081	0.203	7.802 730	1634
0.004	7.947 099	21	0.054	7.938 133	333	0.104	7.912 915	676	0.154	7.868 959	1090	0.204	7.801 083	1647
0.005	7.947 071	24	0.055	7.937 793	340	0.105	7.912 231	684	0.155	7.867 860	1099	0.205	7.799 423	1660
0.006	7.947 037	38	0.056	7.937 447	346	0.106	7.911 540	691	0.156	7.866 751	1109	0.206	7.797 749	1674
0.007	7.946 997	40	0.057	7.937 094	353	0.107	7.910 841	699	0.157	7.865 632	1119	0.207	7.796 061	1688
0.008	7.946 951	46	0.058	7.936 734	360	0.108	7.910 135	706	0.158	7.864 504	1128	0.208	7.794 360	1701
0.009	7.946 899	52	0.059	7.936 368	366	0.109	7.909 422	713	0.159	7.863 367	1137	0.209	7.792 644	1716
		58			372			722			1148			1729
0.010	7.946 841		0.060	7.935 996		0.110	7.908 700		0.160	7.862 219		0.210	7.790 915	
0.011	7.946 777	64	0.061	7.935 617	379	0.111	7.907 972	728	0.161	7.861 062	1157	0.211	7.789 171	1744
0.012	7.946 706	71	0.062	7.935 232	385	0.112	7.907 235	737	0.162	7.859 895	1167	0.212	7.787 413	1758
0.013	7.946 629	77	0.063	7.934 840	392	0.113	7.906 491	744	0.163	7.858 719	1176	0.213	7.785 641	1772
0.014	7.946 547	82	0.064	7.934 441	399	0.114	7.905 739	752	0.164	7.857 532	1187	0.214	7.783 854	1787
0.015	7.946 458	89	0.065	7.934 036	405	0.115	7.904 980	759	0.165	7.856 335	1197	0.215	7.782 052	1802
0.016	7.946 362	96	0.066	7.933 624	412	0.116	7.904 213	767	0.166	7.855 129	1206	0.216	7.780 236	1816
0.017	7.946 261	101	0.067	7.933 206	418	0.117	7.903 438	775	0.167	7.853 912	1217	0.217	7.778 404	1832
0.018	7.946 154	107	0.068	7.932 781	425	0.118	7.902 655	783	0.168	7.852 685	1227	0.218	7.776 558	1846
0.019	7.946 040	114	0.069	7.932 349	432	0.119	7.901 865	790	0.169	7.851 447	1238	0.219	7.774 696	1862
		120			438			799			1247			1878
0.020	7.945 920		0.070	7.931 911		0.120	7.901 066		0.170	7.850 200		0.220	7.772 818	
0.021	7.945 794	126	0.071	7.931 466	445	0.121	7.900 260	806	0.171	7.848 942	1258	0.221	7.770 925	1893
0.022	7.945 662	132	0.072	7.931 015	451	0.122	7.899 446	814	0.172	7.847 673	1269	0.222	7.769 017	1908
0.023	7.945 524	138	0.073	7.930 556	459	0.123	7.898 623	823	0.173	7.846 394	1279	0.223	7.767 092	1925
0.024	7.945 379	145	0.074	7.930 091	465	0.124	7.897 793	830	0.174	7.845 105	1289	0.224	7.765 152	1940
0.025	7.945 228	151	0.075	7.929 619	472	0.125	7.896 955	838	0.175	7.843 805	1300	0.225	7.763 195	1957
0.026	7.945 071	157	0.076	7.929 141	478	0.126	7.896 108	847	0.176	7.842 494	1311	0.226	7.761 222	1973
0.027	7.944 908	163	0.077	7.928 655	486	0.127	7.895 254	854	0.177	7.841 172	1322	0.227	7.759 233	1989
0.028	7.944 739	169	0.078	7.928 163	492	0.128	7.894 391	863	0.178	7.839 839	1333	0.228	7.757 226	2007
0.029	7.944 563	176	0.079	7.927 664	499	0.129	7.893 520	871	0.179	7.838 495	1344	0.229	7.755 203	2023
		181			505			879			1355			2040
0.030	7.944 382		0.080	7.927 159		0.130	7.892 641		0.180	7.837 140		0.230	7.753 163	
0.031	7.944 194	188	0.081	7.926 646	513	0.131	7.891 753	888	0.181	7.835 775	1365	0.231	7.751 106	2057
0.032	7.943 999	195	0.082	7.926 126	520	0.132	7.890 858	895	0.182	7.834 397	1378	0.232	7.749 031	2075
0.033	7.943 799	200	0.083	7.925 606	526	0.133	7.889 954	904	0.183	7.833 009	1388	0.233	7.746 938	2093
0.034	7.943 592	207	0.084	7.925 067	533	0.134	7.889 041	913	0.184	7.831 609	1400	0.234	7.744 828	2110
0.035	7.943 379	213	0.085	7.924 526	541	0.135	7.888 120	921	0.185	7.830 198	1411	0.235	7.742 700	2128
0.036	7.943 160	219	0.086	7.923 979	547	0.136	7.887 191	929	0.186	7.828 775	1423	0.236	7.740 554	2146
0.037	7.942 934	226	0.087	7.923 425	554	0.137	7.886 253	938	0.187	7.827 341	1434	0.237	7.738 389	2165
0.038	7.942 703	231	0.088	7.922 864	561	0.138	7.885 306	947	0.188	7.825 894	1447	0.238	7.736 206	2183
0.039	7.942 465	238	0.089	7.922 296	568	0.139	7.884 351	955	0.189	7.824 436	1458	0.239	7.734 004	2202
		245			576			964			1470			2221
0.040	7.942 220		0.090	7.921 720		0.140	7.883 387		0.190	7.822 966		0.240	7.731 783	
0.041	7.941 969	251	0.091	7.921 138	582	0.141	7.882 415	972	0.191	7.821 485	1481	0.241	7.729 543	2240
0.042	7.941 712	257	0.092	7.920 549	589	0.142	7.881 434	981	0.192	7.819 991	1494	0.242	7.727 283	2260
0.043	7.941 449	263	0.093	7.919 952	597	0.143	7.880 444	990	0.193	7.818 484	1507	0.243	7.725 004	2279
0.044	7.941 180	269	0.094	7.919 349	603	0.144	7.879 445	999	0.194	7.816 966	1518	0.244	7.722 705	2299
0.045	7.940 904	276	0.095	7.918 738	611	0.145	7.878 437	1008	0.195	7.815 435	1531	0.245	7.720 385	2320
0.046	7.940 621	283	0.096	7.918 120	618	0.146	7.877 420	1017	0.196	7.813 892	1543	0.246	7.718 046	2339
0.047	7.940 333	288	0.097	7.917 495	625	0.147	7.876 395	1025	0.197	7.812 336	1556	0.247	7.715 685	2361
0.048	7.940 038	295	0.098	7.916 862	633	0.148	7.875 360	1035	0.198	7.810 767	1569	0.248	7.713 304	2381
0.049	7.939 736	302	0.099	7.916 223	639	0.149	7.874 316	1044	0.199	7.809 186	1581	0.249	7.710 902	2402
0.050	7.939 428	308	0.100	7.915 576	647	0.150	7.873 263	1053	0.200	7.807 591	1595	0.250	7.708 478	2424

Tafel IX.

 $\log \{P_2^3(m)\}.$

$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$
0.000	7470 026	1	0.050	7472 566	102	0.100	7480 007	196	0.150	7491 841	276	0.200	7507 294	339
0.001	7470 027	4	0.051	7472 668	104	0.101	7480 203	197	0.151	7492 117	278	0.201	7507 633	341
0.002	7470 031	5	0.052	7472 772	106	0.102	7480 400	200	0.152	7492 395	280	0.202	7507 974	342
0.003	7470 036	7	0.053	7472 878	108	0.103	7480 600	201	0.153	7492 675	280	0.203	7508 316	343
0.004	7470 043	9	0.054	7472 986	110	0.104	7480 801	203	0.154	7492 955	283	0.204	7508 659	343
0.005	7470 052	11	0.055	7473 096	111	0.105	7481 004	204	0.155	7493 238	283	0.205	7509 002	343
0.006	7470 063	14	0.056	7473 207	114	0.106	7481 208	207	0.156	7493 521	285	0.206	7509 347	346
0.007	7470 077	15	0.057	7473 321	116	0.107	7481 415	208	0.157	7493 806	287	0.207	7509 693	347
0.008	7470 092	17	0.058	7473 437	117	0.108	7481 623	209	0.158	7494 093	288	0.208	7510 040	348
0.009	7470 109	20	0.059	7473 554	120	0.109	7481 832	212	0.159	7494 381	289	0.209	7510 388	349
0.010	7470 129	21	0.060	7473 674	121	0.110	7482 044	213	0.160	7494 670	291	0.210	7510 737	350
0.011	7470 150	24	0.061	7473 795	124	0.111	7482 257	215	0.161	7494 961	292	0.211	7511 087	351
0.012	7470 174	25	0.062	7473 919	125	0.112	7482 472	216	0.162	7495 253	293	0.212	7511 438	352
0.013	7470 199	28	0.063	7474 044	128	0.113	7482 688	219	0.163	7495 546	295	0.213	7511 790	352
0.014	7470 227	29	0.064	7474 172	129	0.114	7482 907	220	0.164	7495 841	296	0.214	7512 142	354
0.015	7470 256	32	0.065	7474 301	131	0.115	7483 127	221	0.165	7496 137	298	0.215	7512 496	355
0.016	7470 288	34	0.066	7474 432	133	0.116	7483 348	224	0.166	7496 435	298	0.216	7512 851	356
0.017	7470 322	35	0.067	7474 565	135	0.117	7483 572	225	0.167	7496 733	301	0.217	7513 207	356
0.018	7470 357	38	0.068	7474 700	137	0.118	7483 797	226	0.168	7497 034	301	0.218	7513 563	358
0.019	7470 395	40	0.069	7474 837	139	0.119	7484 023	229	0.169	7497 335	303	0.219	7513 921	358
0.020	7470 435	42	0.070	7474 976	141	0.120	7484 252	229	0.170	7497 638	304	0.220	7514 279	360
0.021	7470 477	43	0.071	7475 117	142	0.121	7484 481	232	0.171	7497 942	305	0.221	7514 639	361
0.022	7470 520	46	0.072	7475 259	145	0.122	7484 713	233	0.172	7498 247	307	0.222	7514 999	360
0.023	7470 566	48	0.073	7475 404	146	0.123	7484 946	235	0.173	7498 554	308	0.223	7515 360	362
0.024	7470 614	50	0.074	7475 550	149	0.124	7485 181	237	0.174	7498 862	309	0.224	7515 722	363
0.025	7470 664	52	0.075	7475 699	150	0.125	7485 418	238	0.175	7499 171	310	0.225	7516 085	364
0.026	7470 716	54	0.076	7475 849	152	0.126	7485 656	240	0.176	7499 481	312	0.226	7516 449	364
0.027	7470 770	56	0.077	7475 991	154	0.127	7485 896	241	0.177	7499 793	313	0.227	7516 813	366
0.028	7470 826	58	0.078	7476 135	156	0.128	7486 137	243	0.178	7500 106	314	0.228	7517 179	366
0.029	7470 884	60	0.079	7476 311	157	0.129	7486 380	245	0.179	7500 420	316	0.229	7517 545	367
0.030	7470 944	62	0.080	7476 468	160	0.130	7486 625	246	0.180	7500 736	317	0.230	7517 912	368
0.031	7471 006	64	0.081	7476 628	161	0.131	7486 871	247	0.181	7501 053	318	0.231	7518 280	369
0.032	7471 070	66	0.082	7476 789	163	0.132	7487 118	250	0.182	7501 371	319	0.232	7518 649	369
0.033	7471 136	69	0.083	7476 952	166	0.133	7487 368	251	0.183	7501 690	320	0.233	7519 018	371
0.034	7471 205	70	0.084	7477 118	167	0.134	7487 619	252	0.184	7502 010	322	0.234	7519 389	371
0.035	7471 275	72	0.085	7477 285	168	0.135	7487 871	254	0.185	7502 332	322	0.235	7519 760	372
0.036	7471 347	74	0.086	7477 453	171	0.136	7488 125	256	0.186	7502 654	324	0.236	7520 132	373
0.037	7471 421	76	0.087	7477 624	172	0.137	7488 381	257	0.187	7502 978	326	0.237	7520 505	373
0.038	7471 497	78	0.088	7477 796	175	0.138	7488 638	258	0.188	7503 304	326	0.238	7520 878	374
0.039	7471 575	80	0.089	7477 971	176	0.139	7488 896	260	0.189	7503 630	327	0.239	7521 252	375
0.040	7471 655	82	0.090	7478 147	178	0.140	7489 156	262	0.190	7503 957	329	0.240	7521 627	376
0.041	7471 737	85	0.091	7478 325	180	0.141	7489 418	263	0.191	7504 286	330	0.241	7522 003	376
0.042	7471 822	86	0.092	7478 505	181	0.142	7489 681	265	0.192	7504 616	330	0.242	7522 379	378
0.043	7471 908	88	0.093	7478 686	184	0.143	7489 946	266	0.193	7504 946	332	0.243	7522 757	378
0.044	7471 996	90	0.094	7478 870	185	0.144	7490 212	268	0.194	7505 278	334	0.244	7523 135	378
0.045	7472 086	92	0.095	7479 055	186	0.145	7490 480	269	0.195	7505 612	334	0.245	7523 513	379
0.046	7472 178	94	0.096	7479 241	189	0.146	7490 749	271	0.196	7505 946	335	0.246	7523 892	380
0.047	7472 272	96	0.097	7479 430	191	0.147	7491 020	272	0.197	7506 281	336	0.247	7524 272	381
0.048	7472 368	98	0.098	7479 621	192	0.148	7491 292	274	0.198	7506 617	338	0.248	7524 653	381
0.049	7472 466	100	0.099	7479 813	194	0.149	7491 566	275	0.199	7506 955	339	0.249	7525 034	382
0.050	7472 566		0.100	7480 007		0.150	7491 841		0.200	7507 294		0.250	7525 416	

Tafel IX.

 $\log \{P_2^4 m\}$.

$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$
0.000	7 ₂₇₇ 904		0.050	7 ₂₇₁ 155		0.100	7 ₂₅₀ 412		0.150	7 ₂₁₄ 047		0.200	7 ₁₅₈ 766	
0.001	7 ₂₇₇ 902	2	0.051	7 ₂₇₀ 881	274	0.101	7 ₂₄₉ 846	566	0.151	7 ₂₁₃ 142	905	0.201	7 ₁₅₇ 431	1335
0.002	7 ₂₇₇ 894	8	0.052	7 ₂₇₀ 601	280	0.102	7 ₂₄₉ 273	573	0.152	7 ₂₁₂ 229	913	0.202	7 ₁₅₆ 087	1344
0.003	7 ₂₇₇ 880	14	0.053	7 ₂₇₀ 315	286	0.103	7 ₂₄₈ 694	579	0.153	7 ₂₁₁ 308	921	0.203	7 ₁₅₅ 732	1355
0.004	7 ₂₇₇ 861	19	0.054	7 ₂₇₀ 024	291	0.104	7 ₂₄₈ 109	585	0.154	7 ₂₁₀ 380	928	0.204	7 ₁₅₃ 368	1364
0.005	7 ₂₇₇ 837	24	0.055	7 ₂₆₉ 727	297	0.105	7 ₂₄₇ 517	592	0.155	7 ₂₀₉ 444	936	0.205	7 ₁₅₁ 993	1375
0.006	7 ₂₇₇ 808	29	0.056	7 ₂₆₉ 425	302	0.106	7 ₂₄₆ 919	598	0.156	7 ₂₀₈ 501	943	0.206	7 ₁₅₀ 608	1385
0.007	7 ₂₇₇ 773	35	0.057	7 ₂₆₉ 117	308	0.107	7 ₂₄₆ 315	604	0.157	7 ₂₀₇ 550	951	0.207	7 ₁₄₉ 213	1395
0.008	7 ₂₇₇ 733	40	0.058	7 ₂₆₈ 804	313	0.108	7 ₂₄₅ 705	610	0.158	7 ₂₀₆ 591	959	0.208	7 ₁₄₇ 807	1406
0.009	7 ₂₇₇ 687	46	0.059	7 ₂₆₈ 484	320	0.109	7 ₂₄₅ 088	617	0.159	7 ₂₀₅ 624	967	0.209	7 ₁₄₆ 391	1416
		51			324			623			974			1427
0.010	7 ₂₇₇ 636		0.060	7 ₂₆₈ 160		0.110	7 ₂₄₄ 465		0.160	7 ₂₀₄ 650		0.210	7 ₁₄₄ 964	
0.011	7 ₂₇₇ 579	57	0.061	7 ₂₆₇ 829	331	0.111	7 ₂₄₃ 836	629	0.161	7 ₂₀₃ 668	982	0.211	7 ₁₄₃ 527	1437
0.012	7 ₂₇₇ 518	61	0.062	7 ₂₆₇ 493	336	0.112	7 ₂₄₃ 200	636	0.162	7 ₂₀₂ 678	990	0.212	7 ₁₄₂ 079	1448
0.013	7 ₂₇₇ 451	67	0.063	7 ₂₆₇ 151	342	0.113	7 ₂₄₂ 557	643	0.163	7 ₂₀₁ 680	998	0.213	7 ₁₄₀ 621	1458
0.014	7 ₂₇₇ 378	73	0.064	7 ₂₆₆ 804	347	0.114	7 ₂₄₁ 908	649	0.164	7 ₂₀₀ 674	1006	0.214	7 ₁₃₉ 151	1470
0.015	7 ₂₇₇ 300	78	0.065	7 ₂₆₆ 451	353	0.115	7 ₂₄₁ 253	655	0.165	7 ₁₉₉ 660	1014	0.215	7 ₁₃₇ 670	1481
0.016	7 ₂₇₇ 217	83	0.066	7 ₂₆₆ 092	359	0.116	7 ₂₄₀ 591	662	0.166	7 ₁₉₈ 637	1023	0.216	7 ₁₃₆ 179	1491
0.017	7 ₂₇₇ 128	89	0.067	7 ₂₆₅ 727	365	0.117	7 ₂₃₉ 923	668	0.167	7 ₁₉₇ 607	1030	0.217	7 ₁₃₄ 676	1503
0.018	7 ₂₇₇ 034	94	0.068	7 ₂₆₅ 357	370	0.118	7 ₂₃₉ 248	675	0.168	7 ₁₉₆ 569	1038	0.218	7 ₁₃₃ 163	1513
0.019	7 ₂₇₆ 935	99	0.069	7 ₂₆₄ 981	376	0.119	7 ₂₃₈ 567	681	0.169	7 ₁₉₅ 523	1046	0.219	7 ₁₃₁ 638	1525
		105			382			688			1055			1537
0.020	7 ₂₇₆ 830		0.070	7 ₂₆₄ 599		0.120	7 ₂₃₇ 879		0.170	7 ₁₉₄ 468		0.220	7 ₁₃₀ 101	
0.021	7 ₂₇₆ 719	111	0.071	7 ₂₆₄ 212	387	0.121	7 ₂₃₇ 184	695	0.171	7 ₁₉₃ 405	1063	0.221	7 ₁₂₈ 554	1547
0.022	7 ₂₇₆ 604	115	0.072	7 ₂₆₃ 818	394	0.122	7 ₂₃₆ 483	701	0.172	7 ₁₉₂ 334	1071	0.222	7 ₁₂₆ 994	1560
0.023	7 ₂₇₆ 483	121	0.073	7 ₂₆₃ 419	399	0.123	7 ₂₃₅ 775	708	0.173	7 ₁₉₁ 254	1080	0.223	7 ₁₂₅ 424	1570
0.024	7 ₂₇₆ 356	127	0.074	7 ₂₆₃ 015	404	0.124	7 ₂₃₅ 061	714	0.174	7 ₁₉₀ 166	1088	0.224	7 ₁₂₃ 841	1583
0.025	7 ₂₇₆ 224	132	0.075	7 ₂₆₂ 604	411	0.125	7 ₂₃₄ 339	722	0.175	7 ₁₈₉ 070	1096	0.225	7 ₁₂₂ 247	1594
0.026	7 ₂₇₆ 087	137	0.076	7 ₂₆₂ 187	417	0.126	7 ₂₃₃ 611	728	0.176	7 ₁₈₇ 965	1105	0.226	7 ₁₂₀ 641	1605
0.027	7 ₂₇₅ 944	143	0.077	7 ₂₆₁ 765	422	0.127	7 ₂₃₂ 876	735	0.177	7 ₁₈₆ 851	1114	0.227	7 ₁₁₉ 022	1619
0.028	7 ₂₇₅ 796	148	0.078	7 ₂₆₁ 337	428	0.128	7 ₂₃₂ 135	741	0.178	7 ₁₈₅ 730	1121	0.228	7 ₁₁₇ 392	1630
0.029	7 ₂₇₅ 643	153	0.079	7 ₂₆₀ 903	434	0.129	7 ₂₃₁ 386	749	0.179	7 ₁₈₄ 599	1131	0.229	7 ₁₁₅ 750	1642
		159			440			755			1140			1655
0.030	7 ₂₇₅ 484		0.080	7 ₂₆₀ 463		0.130	7 ₂₃₀ 631		0.180	7 ₁₈₃ 459		0.230	7 ₁₁₄ 095	
0.031	7 ₂₇₅ 319	165	0.081	7 ₂₆₀ 018	445	0.131	7 ₂₂₉ 869	762	0.181	7 ₁₈₂ 311	1148	0.231	7 ₁₁₂ 428	1667
0.032	7 ₂₇₅ 149	170	0.082	7 ₂₅₉ 566	452	0.132	7 ₂₂₉ 100	769	0.182	7 ₁₈₁ 154	1157	0.232	7 ₁₁₀ 748	1680
0.033	7 ₂₇₄ 974	175	0.083	7 ₂₅₉ 109	457	0.133	7 ₂₂₈ 324	776	0.183	7 ₁₇₉ 989	1165	0.233	7 ₁₀₉ 056	1692
0.034	7 ₂₇₄ 793	181	0.084	7 ₂₅₈ 645	464	0.134	7 ₂₂₇ 542	782	0.184	7 ₁₇₈ 814	1175	0.234	7 ₁₀₇ 351	1705
0.035	7 ₂₇₄ 607	186	0.085	7 ₂₅₈ 176	469	0.135	7 ₂₂₆ 752	790	0.185	7 ₁₇₇ 631	1183	0.235	7 ₁₀₅ 633	1718
0.036	7 ₂₇₄ 415	192	0.086	7 ₂₅₇ 700	476	0.136	7 ₂₂₅ 955	797	0.186	7 ₁₇₆ 438	1193	0.236	7 ₁₀₃ 902	1731
0.037	7 ₂₇₄ 218	197	0.087	7 ₂₅₇ 219	481	0.137	7 ₂₂₅ 151	804	0.187	7 ₁₇₅ 236	1202	0.237	7 ₁₀₂ 159	1743
0.038	7 ₂₇₄ 016	202	0.088	7 ₂₅₆ 732	487	0.138	7 ₂₂₄ 340	811	0.188	7 ₁₇₄ 026	1210	0.238	7 ₁₀₀ 402	1757
0.039	7 ₂₇₃ 808	208	0.089	7 ₂₅₆ 238	494	0.139	7 ₂₂₃ 522	818	0.189	7 ₁₇₃ 806	1220	0.239	7 ₀₉₈ 632	1770
		214			499			825			1229			1784
0.040	7 ₂₇₃ 594		0.090	7 ₂₅₅ 739		0.140	7 ₂₂₂ 697		0.190	7 ₁₇₁ 577		0.240	7 ₀₉₆ 848	
0.041	7 ₂₇₃ 375	219	0.091	7 ₂₅₅ 234	505	0.141	7 ₂₂₁ 865	832	0.191	7 ₁₇₀ 338	1239	0.241	7 ₀₉₅ 052	1796
0.042	7 ₂₇₃ 150	225	0.092	7 ₂₅₄ 722	512	0.142	7 ₂₂₁ 025	840	0.192	7 ₁₆₉ 091	1247	0.242	7 ₀₉₃ 241	1811
0.043	7 ₂₇₂ 920	230	0.093	7 ₂₅₄ 205	517	0.143	7 ₂₂₀ 179	846	0.193	7 ₁₆₇ 834	1257	0.243	7 ₀₉₁ 417	1824
0.044	7 ₂₇₂ 685	235	0.094	7 ₂₅₃ 682	523	0.144	7 ₂₁₉ 325	854	0.194	7 ₁₆₆ 567	1267	0.244	7 ₀₈₉ 579	1838
0.045	7 ₂₇₂ 444	241	0.095	7 ₂₅₃ 152	530	0.145	7 ₂₁₈ 464	861	0.195	7 ₁₆₅ 291	1276	0.245	7 ₀₈₇ 727	1852
0.046	7 ₂₇₂ 197	247	0.096	7 ₂₅₂ 616	536	0.146	7 ₂₁₇ 595	869	0.196	7 ₁₆₄ 005	1286	0.246	7 ₀₈₅ 860	1867
0.047	7 ₂₇₁ 945	252	0.097	7 ₂₅₂ 074	542	0.147	7 ₂₁₆ 719	876	0.197	7 ₁₆₂ 710	1295	0.247	7 ₀₈₃ 980	1880
0.048	7 ₂₇₁ 687	258	0.098	7 ₂₅₁ 526	548	0.148	7 ₂₁₅ 836	883	0.198	7 ₁₆₁ 405	1305	0.248	7 ₀₈₂ 085	1895
0.049	7 ₂₇₁ 424	263	0.099	7 ₂₅₀ 972	554	0.149	7 ₂₁₄ 945	891	0.199	7 ₁₆₀ 090	1315	0.249	7 ₀₈₀ 176	1909
0.050	7 ₂₇₁ 155	269	0.100	7 ₂₅₀ 412	560	0.150	7 ₂₁₄ 047	898	0.200	7 ₁₅₈ 766	1324	0.250	7 ₀₇₈ 252	1924

Tafel IX.

 $\log \{P_2^5(m)\}.$

$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$	$\pm m$	P	$+J$
0.000	6.578 934		0.050	6.581 158	89	0.100	6.587 673	172	0.150	6.598 036	242	0.200	6.611 568	297
0.001	6.578 935	1	0.051	6.581 247	91	0.101	6.587 845	173	0.151	6.598 278	243	0.201	6.611 865	299
0.002	6.578 938	3	0.052	6.581 338	93	0.102	6.588 018	174	0.152	6.598 521	245	0.202	6.612 164	299
0.003	6.578 942	4	0.053	6.581 431	94	0.103	6.588 192	176	0.153	6.598 766	246	0.203	6.612 463	300
0.004	6.578 949	7	0.054	6.581 525	96	0.104	6.588 368	178	0.154	6.599 012	247	0.204	6.612 763	301
0.005	6.578 957	8	0.055	6.581 621	98	0.105	6.588 546	179	0.155	6.599 259	248	0.205	6.613 064	302
0.006	6.578 966	9	0.056	6.581 719	100	0.106	6.588 725	181	0.156	6.599 507	250	0.206	6.613 366	303
0.007	6.578 978	12	0.057	6.581 819	101	0.107	6.588 906	182	0.157	6.599 757	251	0.207	6.613 669	304
0.008	6.578 992	14	0.058	6.581 920	103	0.108	6.589 088	183	0.158	6.600 008	252	0.208	6.613 973	304
0.009	6.579 007	15	0.059	6.582 023	105	0.109	6.589 271	186	0.159	6.600 260	253	0.209	6.614 277	306
		17												
0.010	6.579 024		0.060	6.582 128	106	0.110	6.589 457	186	0.160	6.600 513	255	0.210	6.614 583	306
0.011	6.579 043	19	0.061	6.582 234	108	0.111	6.589 643	188	0.161	6.600 768	256	0.211	6.614 889	307
0.012	6.579 063	20	0.062	6.582 342	110	0.112	6.589 831	190	0.162	6.601 024	257	0.212	6.615 196	309
0.013	6.579 085	22	0.063	6.582 452	111	0.113	6.590 021	191	0.163	6.601 281	258	0.213	6.615 505	309
0.014	6.579 110	25	0.064	6.582 563	114	0.114	6.590 212	193	0.164	6.601 539	259	0.214	6.615 814	309
0.015	6.579 136	26	0.065	6.582 677	114	0.115	6.590 405	194	0.165	6.601 798	261	0.215	6.616 123	311
0.016	6.579 163	27	0.066	6.582 791	117	0.116	6.590 599	196	0.166	6.602 059	261	0.216	6.616 434	311
0.017	6.579 193	30	0.067	6.582 908	118	0.117	6.590 795	197	0.167	6.602 320	263	0.217	6.616 745	312
0.018	6.579 224	31	0.068	6.583 026	120	0.118	6.590 992	198	0.168	6.602 583	264	0.218	6.617 057	313
0.019	6.579 257	33	0.069	6.583 146	122	0.119	6.591 190	200	0.169	6.602 847	266	0.219	6.617 370	314
		35												
0.020	6.579 292		0.070	6.583 268	123	0.120	6.591 390	201	0.170	6.603 113	266	0.220	6.617 684	315
0.021	6.579 328	36	0.071	6.583 391	125	0.121	6.591 591	203	0.171	6.603 379	267	0.221	6.617 999	315
0.022	6.579 367	39	0.072	6.583 516	126	0.122	6.591 794	204	0.172	6.603 646	269	0.222	6.618 314	316
0.023	6.579 407	40	0.073	6.583 642	129	0.123	6.591 998	206	0.173	6.603 915	269	0.223	6.618 630	317
0.024	6.579 449	42	0.074	6.583 771	129	0.124	6.592 204	207	0.174	6.604 184	271	0.224	6.618 947	318
0.025	6.579 493	44	0.075	6.583 900	132	0.125	6.592 411	209	0.175	6.604 455	272	0.225	6.619 265	319
0.026	6.579 538	45	0.076	6.584 032	133	0.126	6.592 620	210	0.176	6.604 727	273	0.226	6.619 584	319
0.027	6.579 585	47	0.077	6.584 165	135	0.127	6.592 830	211	0.177	6.605 000	274	0.227	6.619 903	320
0.028	6.579 635	50	0.078	6.584 300	136	0.128	6.593 041	213	0.178	6.605 274	275	0.228	6.620 223	320
0.029	6.579 685	50	0.079	6.584 436	138	0.129	6.593 254	214	0.179	6.605 549	277	0.229	6.620 543	322
		53												
0.030	6.579 738		0.080	6.584 574	140	0.130	6.593 468	216	0.180	6.605 826	277	0.230	6.620 865	322
0.031	6.579 792	54	0.081	6.584 714	141	0.131	6.593 684	217	0.181	6.606 103	278	0.231	6.621 187	323
0.032	6.579 848	56	0.082	6.584 855	143	0.132	6.593 901	218	0.182	6.606 381	280	0.232	6.621 510	323
0.033	6.579 906	58	0.083	6.584 998	145	0.133	6.594 119	220	0.183	6.606 661	280	0.233	6.621 833	324
0.034	6.579 966	60	0.084	6.585 143	146	0.134	6.594 339	221	0.184	6.606 941	282	0.234	6.622 157	325
0.035	6.580 027	61	0.085	6.585 289	148	0.135	6.594 560	222	0.185	6.607 223	283	0.235	6.622 482	326
0.036	6.580 090	63	0.086	6.585 437	149	0.136	6.594 782	224	0.186	6.607 506	283	0.236	6.622 808	326
0.037	6.580 155	65	0.087	6.585 586	151	0.137	6.595 006	225	0.187	6.607 789	285	0.237	6.623 134	327
0.038	6.580 222	67	0.088	6.585 737	153	0.138	6.595 231	226	0.188	6.608 074	286	0.238	6.623 461	327
0.039	6.580 290	68	0.089	6.585 890	154	0.139	6.595 457	228	0.189	6.608 360	286	0.239	6.623 788	329
		70												
0.040	6.580 360		0.090	6.586 044	156	0.140	6.595 685	229	0.190	6.608 646	288	0.240	6.624 117	328
0.041	6.580 432	72	0.091	6.586 200	157	0.141	6.595 914	231	0.191	6.608 934	289	0.241	6.624 445	330
0.042	6.580 506	74	0.092	6.586 357	159	0.142	6.596 145	232	0.192	6.609 223	290	0.242	6.624 775	330
0.043	6.580 581	75	0.093	6.586 516	161	0.143	6.596 377	233	0.193	6.609 513	290	0.243	6.625 105	331
0.044	6.580 658	77	0.094	6.586 677	162	0.144	6.596 610	234	0.194	6.609 803	292	0.244	6.625 436	331
0.045	6.580 737	79	0.095	6.586 839	164	0.145	6.596 844	236	0.195	6.610 095	293	0.245	6.625 767	332
0.046	6.580 818	81	0.096	6.587 003	165	0.146	6.597 080	237	0.196	6.610 388	293	0.246	6.626 099	333
0.047	6.580 900	82	0.097	6.587 168	167	0.147	6.597 317	238	0.197	6.610 681	295	0.247	6.626 432	333
0.048	6.580 984	84	0.098	6.587 335	168	0.148	6.597 555	240	0.198	6.610 976	295	0.248	6.626 765	333
0.049	6.581 070	86	0.099	6.587 503	170	0.149	6.597 795	241	0.199	6.611 271	297	0.249	6.627 098	333
0.050	6.581 158	88	0.100	6.587 673	170	0.150	6.598 036	241	0.200	6.611 568	297	0.250	6.627 433	335

Tafel IX.

 $\log \{P_2^6(m)\}.$

$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$
0.000	6.623 091		0.050	6.616 743	258	0.100	6.597 278	531	0.150	6.563 313	843	0.200	6.512 100	1230
0.001	6.623 088	3	0.051	6.616 485	263	0.101	6.596 747	537	0.151	6.562 470	849	0.201	6.510 870	1238
0.002	6.623 081	7	0.052	6.616 222	268	0.102	6.596 210	542	0.152	6.561 621	857	0.202	6.509 632	1248
0.003	6.623 068	13	0.053	6.615 954	274	0.103	6.595 668	548	0.153	6.560 764	864	0.203	6.508 384	1256
0.004	6.623 050	18	0.054	6.615 680	279	0.104	6.595 120	554	0.154	6.559 900	871	0.204	6.507 128	1266
0.005	6.623 028	22	0.055	6.615 401	284	0.105	6.594 566	559	0.155	6.559 029	877	0.205	6.505 862	1274
0.006	6.623 000	28	0.056	6.615 117	289	0.106	6.594 007	566	0.156	6.558 152	885	0.206	6.504 588	1284
0.007	6.622 967	33	0.057	6.614 828	295	0.107	6.593 441	571	0.157	6.557 267	891	0.207	6.503 304	1293
0.008	6.622 929	38	0.058	6.614 533	300	0.108	6.592 870	578	0.158	6.556 376	899	0.208	6.502 011	1302
0.009	6.622 886	43	0.059	6.614 233	305	0.109	6.592 292	583	0.159	6.555 477	906	0.209	6.500 709	1311
		48												
0.010	6.622 838		0.060	6.613 928	310	0.110	6.591 709	589	0.160	6.554 571	913	0.210	6.499 398	1321
0.011	6.622 785	53	0.061	6.613 618	316	0.111	6.591 120	595	0.161	6.553 658	920	0.211	6.498 077	1330
0.012	6.622 727	58	0.062	6.613 302	321	0.112	6.590 525	601	0.162	6.552 738	927	0.212	6.496 747	1340
0.013	6.622 664	63	0.063	6.612 981	326	0.113	6.589 924	607	0.163	6.551 811	935	0.213	6.495 407	1349
0.014	6.622 595	69	0.064	6.612 655	332	0.114	6.589 317	613	0.164	6.550 876	942	0.214	6.494 058	1359
0.015	6.622 522	73	0.065	6.612 323	337	0.115	6.588 704	619	0.165	6.549 934	949	0.215	6.492 699	1369
0.016	6.622 444	78	0.066	6.611 986	343	0.116	6.588 085	625	0.166	6.548 985	956	0.216	6.491 330	1378
0.017	6.622 360	84	0.067	6.611 643	347	0.117	6.587 460	631	0.167	6.548 029	964	0.217	6.489 952	1388
0.018	6.622 272	88	0.068	6.611 296	353	0.118	6.586 829	637	0.168	6.547 065	971	0.218	6.488 564	1398
0.019	6.622 178	94	0.069	6.610 943	359	0.119	6.586 192	644	0.169	6.546 094	979	0.219	6.487 166	1408
		98												
0.020	6.622 080		0.070	6.610 584	364	0.120	6.585 548	649	0.170	6.545 115	986	0.220	6.485 758	1418
0.021	6.621 976	104	0.071	6.610 220	369	0.121	6.584 899	655	0.171	6.544 129	993	0.221	6.484 340	1428
0.022	6.621 867	109	0.072	6.609 851	375	0.122	6.584 244	662	0.172	6.543 136	1002	0.222	6.482 912	1439
0.023	6.621 753	114	0.073	6.609 476	380	0.123	6.583 582	668	0.173	6.542 134	1008	0.223	6.481 473	1448
0.024	6.621 634	119	0.074	6.609 096	385	0.124	6.582 914	674	0.174	6.541 126	1017	0.224	6.480 025	1459
0.025	6.621 510	124	0.075	6.608 711	391	0.125	6.582 240	680	0.175	6.540 109	1024	0.225	6.478 566	1469
0.026	6.621 381	129	0.076	6.608 320	396	0.126	6.581 560	686	0.176	6.539 085	1032	0.226	6.477 097	1480
0.027	6.621 247	134	0.077	6.607 924	402	0.127	6.580 874	693	0.177	6.538 053	1039	0.227	6.475 617	1490
0.028	6.621 107	140	0.078	6.607 522	408	0.128	6.580 181	699	0.178	6.537 014	1047	0.228	6.474 127	1501
0.029	6.620 963	144	0.079	6.607 114	412	0.129	6.579 482	705	0.179	6.535 967	1055	0.229	6.472 626	1511
		150												
0.030	6.620 813		0.080	6.606 702	418	0.130	6.578 777	712	0.180	6.534 912	1063	0.230	6.471 115	1523
0.031	6.620 659	154	0.081	6.606 284	424	0.131	6.578 065	718	0.181	6.533 849	1071	0.231	6.469 592	1533
0.032	6.620 499	160	0.082	6.605 860	429	0.132	6.577 347	724	0.182	6.532 778	1079	0.232	6.468 059	1544
0.033	6.620 334	165	0.083	6.605 431	435	0.133	6.576 623	731	0.183	6.531 699	1087	0.233	6.466 515	1555
0.034	6.620 164	170	0.084	6.604 996	441	0.134	6.575 892	737	0.184	6.530 612	1095	0.234	6.464 960	1566
0.035	6.619 989	175	0.085	6.604 555	447	0.135	6.575 155	743	0.185	6.529 517	1102	0.235	6.463 394	1577
0.036	6.619 809	180	0.086	6.604 110	452	0.136	6.574 412	750	0.186	6.528 415	1111	0.236	6.461 817	1589
0.037	6.619 623	186	0.087	6.603 658	457	0.137	6.573 662	757	0.187	6.527 304	1120	0.237	6.460 228	1600
0.038	6.619 433	190	0.088	6.603 201	462	0.138	6.572 905	763	0.188	6.526 184	1127	0.238	6.458 628	1611
0.039	6.619 237	196	0.089	6.602 739	469	0.139	6.572 142	769	0.189	6.525 057	1136	0.239	6.457 017	1623
		201												
0.040	6.619 036		0.090	6.602 270	473	0.140	6.571 373	776	0.190	6.523 921	1144	0.240	6.455 394	1635
0.041	6.618 830	206	0.091	6.601 797	478	0.141	6.570 597	783	0.191	6.522 777	1152	0.241	6.453 759	1646
0.042	6.618 619	211	0.092	6.601 317	485	0.142	6.569 814	789	0.192	6.521 625	1161	0.242	6.452 113	1658
0.043	6.618 403	216	0.093	6.600 832	491	0.143	6.569 025	796	0.193	6.520 464	1169	0.243	6.450 455	1670
0.044	6.618 181	222	0.094	6.600 341	496	0.144	6.568 229	802	0.194	6.519 295	1178	0.244	6.448 785	1682
0.045	6.617 954	227	0.095	6.599 845	502	0.145	6.567 427	809	0.195	6.518 117	1186	0.245	6.447 103	1694
0.046	6.617 722	232	0.096	6.599 343	508	0.146	6.566 618	816	0.196	6.516 931	1195	0.246	6.445 409	1707
0.047	6.617 485	237	0.097	6.598 835	513	0.147	6.565 802	823	0.197	6.515 736	1203	0.247	6.443 702	1718
0.048	6.617 243	242	0.098	6.598 322	519	0.148	6.564 979	829	0.198	6.514 533	1212	0.248	6.441 984	1732
0.049	6.616 996	247	0.099	6.597 803	525	0.149	6.564 150	835	0.199	6.513 321	1221	0.249	6.440 252	1743
0.050	6.616 743	253	0.100	6.597 278		0.150	6.563 313		0.200	6.512 100		0.250	6.438 509	

Tafel IX.

 $\log \{P_2^7 m\}$.

$\pm m$	P	$+\angle$	$\pm m$	P	$+\angle$	$\pm m$	P	$+\angle$	$\pm m$	P	$+\angle$	$\pm m$	P	$+\angle$
0.000	5 _h 777 993		0.050	5 _h 780 085		0.100	5 _h 786 216		0.150	5 _h 795 971		0.200	5 _h 808 711	
0.001	5 _h 777 993	0	0.051	5 _h 780 169	84	0.101	5 _h 786 378	162	0.151	5 _h 796 199	228	0.201	5 _h 808 991	280
0.002	5 _h 777 996	3	0.052	5 _h 780 254	85	0.102	5 _h 786 541	163	0.152	5 _h 796 428	229	0.202	5 _h 809 272	281
0.003	5 _h 778 000	4	0.053	5 _h 780 342	88	0.103	5 _h 786 705	164	0.153	5 _h 796 658	230	0.203	5 _h 809 554	282
0.004	5 _h 778 006	6	0.054	5 _h 780 431	89	0.104	5 _h 786 871	166	0.154	5 _h 796 890	232	0.204	5 _h 809 836	284
0.005	5 _h 778 014	8	0.055	5 _h 780 521	90	0.105	5 _h 787 038	167	0.155	5 _h 797 122	232	0.205	5 _h 810 120	284
0.006	5 _h 778 023	9	0.056	5 _h 780 613	92	0.106	5 _h 787 206	168	0.156	5 _h 797 356	234	0.206	5 _h 810 404	285
0.007	5 _h 778 034	11	0.057	5 _h 780 707	94	0.107	5 _h 787 376	170	0.157	5 _h 797 591	235	0.207	5 _h 810 689	286
0.008	5 _h 778 046	12	0.058	5 _h 780 802	95	0.108	5 _h 787 548	172	0.158	5 _h 797 827	236	0.208	5 _h 810 975	287
0.009	5 _h 778 061	15	0.059	5 _h 780 899	97	0.109	5 _h 787 721	173	0.159	5 _h 798 065	238	0.209	5 _h 811 262	288
		16			99			174			238			288
0.010	5 _h 778 077		0.060	5 _h 780 998		0.110	5 _h 787 895		0.160	5 _h 798 303		0.210	5 _h 811 550	
0.011	5 _h 778 094	17	0.061	5 _h 781 098	100	0.111	5 _h 788 071	176	0.161	5 _h 798 543	240	0.211	5 _h 811 838	288
0.012	5 _h 778 114	20	0.062	5 _h 781 200	102	0.112	5 _h 788 248	177	0.162	5 _h 798 784	241	0.212	5 _h 812 128	290
0.013	5 _h 778 135	21	0.063	5 _h 781 303	103	0.113	5 _h 788 426	178	0.163	5 _h 799 026	242	0.213	5 _h 812 418	290
0.014	5 _h 778 157	22	0.064	5 _h 781 408	105	0.114	5 _h 788 606	180	0.164	5 _h 799 269	243	0.214	5 _h 812 709	291
0.015	5 _h 778 182	25	0.065	5 _h 781 514	106	0.115	5 _h 788 787	181	0.165	5 _h 799 513	244	0.215	5 _h 813 000	291
0.016	5 _h 778 208	26	0.066	5 _h 781 622	108	0.116	5 _h 788 970	183	0.166	5 _h 799 758	245	0.216	5 _h 813 293	293
0.017	5 _h 778 236	28	0.067	5 _h 781 732	110	0.117	5 _h 789 154	184	0.167	5 _h 800 004	246	0.217	5 _h 813 586	293
0.018	5 _h 778 265	29	0.068	5 _h 781 843	111	0.118	5 _h 789 340	186	0.168	5 _h 800 252	248	0.218	5 _h 813 880	294
0.019	5 _h 778 296	31	0.069	5 _h 781 956	113	0.119	5 _h 789 526	186	0.169	5 _h 800 500	248	0.219	5 _h 814 175	295
		33			114			189			250			295
0.020	5 _h 778 329		0.070	5 _h 782 070		0.120	5 _h 789 715		0.170	5 _h 800 750		0.220	5 _h 814 470	
0.021	5 _h 778 363	34	0.071	5 _h 782 186	116	0.121	5 _h 789 904	189	0.171	5 _h 801 001	251	0.221	5 _h 814 766	296
0.022	5 _h 778 399	36	0.072	5 _h 782 304	118	0.122	5 _h 790 095	191	0.172	5 _h 801 252	251	0.222	5 _h 815 063	297
0.023	5 _h 778 437	38	0.073	5 _h 782 423	119	0.123	5 _h 790 287	192	0.173	5 _h 801 505	253	0.223	5 _h 815 361	298
0.024	5 _h 778 477	40	0.074	5 _h 782 544	121	0.124	5 _h 790 481	194	0.174	5 _h 801 759	254	0.224	5 _h 815 660	299
0.025	5 _h 778 518	41	0.075	5 _h 782 666	122	0.125	5 _h 790 676	195	0.175	5 _h 802 014	255	0.225	5 _h 815 959	299
0.026	5 _h 778 561	43	0.076	5 _h 782 790	124	0.126	5 _h 790 872	196	0.176	5 _h 802 270	256	0.226	5 _h 816 258	300
0.027	5 _h 778 605	44	0.077	5 _h 782 915	125	0.127	5 _h 791 070	198	0.177	5 _h 802 527	257	0.227	5 _h 816 559	301
0.028	5 _h 778 651	46	0.078	5 _h 783 042	127	0.128	5 _h 791 269	199	0.178	5 _h 802 785	258	0.228	5 _h 816 860	301
0.029	5 _h 778 699	48	0.079	5 _h 783 170	128	0.129	5 _h 791 469	200	0.179	5 _h 803 044	259	0.229	5 _h 817 162	302
		50			130			202			260			303
0.030	5 _h 778 749		0.080	5 _h 783 300		0.130	5 _h 791 671		0.180	5 _h 803 304		0.230	5 _h 817 465	
0.031	5 _h 778 800	51	0.081	5 _h 783 432	132	0.131	5 _h 791 874	203	0.181	5 _h 803 566	262	0.231	5 _h 817 768	303
0.032	5 _h 778 852	52	0.082	5 _h 783 565	133	0.132	5 _h 792 078	204	0.182	5 _h 803 828	262	0.232	5 _h 818 072	304
0.033	5 _h 778 907	55	0.083	5 _h 783 699	134	0.133	5 _h 792 283	205	0.183	5 _h 804 091	263	0.233	5 _h 818 377	305
0.034	5 _h 778 963	56	0.084	5 _h 783 835	136	0.134	5 _h 792 490	207	0.184	5 _h 804 355	264	0.234	5 _h 818 682	305
0.035	5 _h 779 021	58	0.085	5 _h 783 973	138	0.135	5 _h 792 698	208	0.185	5 _h 804 620	265	0.235	5 _h 818 988	306
0.036	5 _h 779 080	59	0.086	5 _h 784 112	139	0.136	5 _h 792 908	210	0.186	5 _h 804 886	266	0.236	5 _h 819 294	306
0.037	5 _h 779 141	61	0.087	5 _h 784 252	140	0.137	5 _h 793 118	210	0.187	5 _h 805 153	267	0.237	5 _h 819 602	308
0.038	5 _h 779 204	63	0.088	5 _h 784 394	142	0.138	5 _h 793 330	212	0.188	5 _h 805 421	268	0.238	5 _h 819 910	308
0.039	5 _h 779 268	64	0.089	5 _h 784 538	144	0.139	5 _h 793 544	214	0.189	5 _h 805 690	269	0.239	5 _h 820 218	308
		66			145			214			270			309
0.040	5 _h 779 334		0.090	5 _h 784 683		0.140	5 _h 793 758		0.190	5 _h 805 960		0.240	5 _h 820 527	
0.041	5 _h 779 402	68	0.091	5 _h 784 830	147	0.141	5 _h 793 974	216	0.191	5 _h 806 231	271	0.241	5 _h 820 837	310
0.042	5 _h 779 471	69	0.092	5 _h 784 978	148	0.142	5 _h 794 191	217	0.192	5 _h 806 503	272	0.242	5 _h 821 147	311
0.043	5 _h 779 542	71	0.093	5 _h 785 128	150	0.143	5 _h 794 409	218	0.193	5 _h 806 776	273	0.243	5 _h 821 458	311
0.044	5 _h 779 615	73	0.094	5 _h 785 279	151	0.144	5 _h 794 628	219	0.194	5 _h 807 050	274	0.244	5 _h 821 769	311
0.045	5 _h 779 689	74	0.095	5 _h 785 431	152	0.145	5 _h 794 849	221	0.195	5 _h 807 324	274	0.245	5 _h 822 081	312
0.046	5 _h 779 765	76	0.096	5 _h 785 585	154	0.146	5 _h 795 071	222	0.196	5 _h 807 600	276	0.246	5 _h 822 394	313
0.047	5 _h 779 842	77	0.097	5 _h 785 741	156	0.147	5 _h 795 294	223	0.197	5 _h 807 876	276	0.247	5 _h 822 707	313
0.048	5 _h 779 922	80	0.098	5 _h 785 898	157	0.148	5 _h 795 518	224	0.198	5 _h 808 154	278	0.248	5 _h 823 021	314
0.049	5 _h 780 002	80	0.099	5 _h 786 056	158	0.149	5 _h 795 744	226	0.199	5 _h 808 432	278	0.249	5 _h 823 335	314
0.050	5 _h 780 085	83	0.100	5 _h 786 216	160	0.150	5 _h 795 971	227	0.200	5 _h 808 711	279	0.250	5 _h 823 650	315

Tafel IX.

 $\log \{P_2^s(m)\}.$

$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$
0.000	5 _n 978 205		0.050	5 _n 972 077		0.100	5 _n 953 307		0.150	5 _n 920 640		0.200	5 _n 871 595	
0.001	5 _n 978 202	3	0.051	5 _n 971 828	249	0.101	5 _n 952 796	511	0.151	5 _n 919 830	810	0.201	5 _n 870 421	1174
0.002	5 _n 978 195	7	0.052	5 _n 971 574	254	0.102	5 _n 952 279	517	0.152	5 _n 919 014	816	0.202	5 _n 869 238	1183
0.003	5 _n 978 183	12	0.053	5 _n 971 315	259	0.103	5 _n 951 756	523	0.153	5 _n 918 192	822	0.203	5 _n 868 047	1191
0.004	5 _n 978 166	17	0.054	5 _n 971 051	264	0.104	5 _n 951 229	527	0.154	5 _n 917 363	829	0.204	5 _n 866 848	1199
0.005	5 _n 978 144	22	0.055	5 _n 970 782	269	0.105	5 _n 950 695	534	0.155	5 _n 916 527	836	0.205	5 _n 865 640	1208
0.006	5 _n 978 117	27	0.056	5 _n 970 508	274	0.106	5 _n 950 156	539	0.156	5 _n 915 685	842	0.206	5 _n 864 424	1216
0.007	5 _n 978 085	32	0.057	5 _n 970 228	280	0.107	5 _n 949 611	545	0.157	5 _n 914 836	849	0.207	5 _n 863 199	1225
0.008	5 _n 978 049	36	0.058	5 _n 969 944	284	0.108	5 _n 949 061	550	0.158	5 _n 913 980	856	0.208	5 _n 861 966	1233
0.009	5 _n 978 007	42	0.059	5 _n 969 655	289	0.109	5 _n 948 505	556	0.159	5 _n 913 118	862	0.209	5 _n 860 724	1242
		46			295			562			869			1251
0.010	5 _n 977 961		0.060	5 _n 969 360		0.110	5 _n 947 943		0.160	5 _n 912 249		0.210	5 _n 859 473	
0.011	5 _n 977 909	52	0.061	5 _n 969 061	299	0.111	5 _n 947 376	567	0.161	5 _n 911 373	876	0.211	5 _n 858 214	1259
0.012	5 _n 977 853	56	0.062	5 _n 968 756	305	0.112	5 _n 946 803	573	0.162	5 _n 910 490	883	0.212	5 _n 856 945	1269
0.013	5 _n 977 792	61	0.063	5 _n 968 446	310	0.113	5 _n 946 225	578	0.163	5 _n 909 601	889	0.213	5 _n 855 668	1277
0.014	5 _n 977 726	66	0.064	5 _n 968 131	315	0.114	5 _n 945 640	585	0.164	5 _n 908 705	896	0.214	5 _n 854 382	1286
0.015	5 _n 977 656	70	0.065	5 _n 967 811	320	0.115	5 _n 945 050	590	0.165	5 _n 907 802	903	0.215	5 _n 853 087	1295
0.016	5 _n 977 580	76	0.066	5 _n 967 486	325	0.116	5 _n 944 454	596	0.166	5 _n 906 892	910	0.216	5 _n 851 783	1304
0.017	5 _n 977 499	81	0.067	5 _n 967 156	330	0.117	5 _n 943 853	601	0.167	5 _n 905 975	917	0.217	5 _n 850 470	1313
0.018	5 _n 977 414	85	0.068	5 _n 966 821	335	0.118	5 _n 943 245	608	0.168	5 _n 905 051	924	0.218	5 _n 849 148	1322
0.019	5 _n 977 324	90	0.069	5 _n 966 480	341	0.119	5 _n 942 632	613	0.169	5 _n 904 120	931	0.219	5 _n 847 817	1331
		96			346			619			938			1341
0.020	5 _n 977 228		0.070	5 _n 966 134		0.120	5 _n 942 013		0.170	5 _n 903 182		0.220	5 _n 846 476	
0.021	5 _n 977 128	100	0.071	5 _n 965 783	351	0.121	5 _n 941 388	625	0.171	5 _n 902 237	945	0.221	5 _n 845 126	1350
0.022	5 _n 977 023	105	0.072	5 _n 965 427	356	0.122	5 _n 940 758	630	0.172	5 _n 901 285	952	0.222	5 _n 843 767	1359
0.023	5 _n 976 913	110	0.073	5 _n 965 066	361	0.123	5 _n 940 121	637	0.173	5 _n 900 325	960	0.223	5 _n 842 398	1369
0.024	5 _n 976 798	115	0.074	5 _n 964 699	367	0.124	5 _n 939 479	642	0.174	5 _n 899 359	966	0.224	5 _n 841 019	1379
0.025	5 _n 976 678	120	0.075	5 _n 964 327	372	0.125	5 _n 938 830	649	0.175	5 _n 898 385	974	0.225	5 _n 839 632	1387
0.026	5 _n 976 554	124	0.076	5 _n 963 950	377	0.126	5 _n 938 176	654	0.176	5 _n 897 404	981	0.226	5 _n 838 234	1398
0.027	5 _n 976 424	130	0.077	5 _n 963 568	382	0.127	5 _n 937 516	660	0.177	5 _n 896 416	988	0.227	5 _n 836 827	1407
0.028	5 _n 976 290	134	0.078	5 _n 963 181	387	0.128	5 _n 936 849	667	0.178	5 _n 895 421	995	0.228	5 _n 835 410	1417
0.029	5 _n 976 150	140	0.079	5 _n 962 788	393	0.129	5 _n 936 177	672	0.179	5 _n 894 418	1003	0.229	5 _n 833 983	1427
		144			398			678			1010			1437
0.030	5 _n 976 006		0.080	5 _n 962 390		0.130	5 _n 935 499		0.180	5 _n 893 408		0.230	5 _n 832 546	
0.031	5 _n 975 856	150	0.081	5 _n 961 987	403	0.131	5 _n 934 815	684	0.181	5 _n 892 390	1018	0.231	5 _n 831 099	1447
0.032	5 _n 975 702	154	0.082	5 _n 961 578	409	0.132	5 _n 934 124	691	0.182	5 _n 891 365	1025	0.232	5 _n 829 643	1456
0.033	5 _n 975 543	159	0.083	5 _n 961 164	414	0.133	5 _n 933 428	696	0.183	5 _n 890 333	1032	0.233	5 _n 828 176	1467
0.034	5 _n 975 379	164	0.084	5 _n 960 745	419	0.134	5 _n 932 725	703	0.184	5 _n 889 293	1040	0.234	5 _n 826 699	1477
0.035	5 _n 975 210	169	0.085	5 _n 960 321	424	0.135	5 _n 932 017	708	0.185	5 _n 888 245	1048	0.235	5 _n 825 211	1488
0.036	5 _n 975 036	174	0.086	5 _n 959 891	430	0.136	5 _n 931 302	715	0.186	5 _n 887 190	1055	0.236	5 _n 823 714	1497
0.037	5 _n 974 857	179	0.087	5 _n 959 456	435	0.137	5 _n 930 581	721	0.187	5 _n 886 127	1063	0.237	5 _n 822 206	1508
0.038	5 _n 974 673	184	0.088	5 _n 959 015	441	0.138	5 _n 929 854	727	0.188	5 _n 885 056	1071	0.238	5 _n 820 687	1519
0.039	5 _n 974 484	189	0.089	5 _n 958 569	446	0.139	5 _n 929 121	733	0.189	5 _n 883 978	1078	0.239	5 _n 819 158	1529
		194			451			739			1086			1540
0.040	5 _n 974 290		0.090	5 _n 958 118		0.140	5 _n 928 382		0.190	5 _n 882 892		0.240	5 _n 817 618	
0.041	5 _n 974 091	199	0.091	5 _n 957 661	457	0.141	5 _n 927 636	746	0.191	5 _n 881 798	1094	0.241	5 _n 816 068	1550
0.042	5 _n 973 887	204	0.092	5 _n 957 199	462	0.142	5 _n 926 884	752	0.192	5 _n 880 697	1101	0.242	5 _n 814 507	1561
0.043	5 _n 973 678	209	0.093	5 _n 956 732	467	0.143	5 _n 926 126	758	0.193	5 _n 879 587	1110	0.243	5 _n 812 935	1572
0.044	5 _n 973 465	213	0.094	5 _n 956 259	473	0.144	5 _n 925 361	765	0.194	5 _n 878 469	1118	0.244	5 _n 811 351	1584
0.045	5 _n 973 246	219	0.095	5 _n 955 781	478	0.145	5 _n 924 590	771	0.195	5 _n 877 344	1125	0.245	5 _n 809 757	1594
0.046	5 _n 973 022	224	0.096	5 _n 955 297	484	0.146	5 _n 923 813	777	0.196	5 _n 876 210	1134	0.246	5 _n 808 152	1605
0.047	5 _n 972 793	229	0.097	5 _n 954 808	489	0.147	5 _n 923 029	784	0.197	5 _n 875 069	1141	0.247	5 _n 806 536	1616
0.048	5 _n 972 559	234	0.098	5 _n 954 313	495	0.148	5 _n 922 239	790	0.198	5 _n 873 919	1150	0.248	5 _n 804 908	1628
0.049	5 _n 972 320	239	0.099	5 _n 953 813	500	0.149	5 _n 921 443	796	0.199	5 _n 872 761	1158	0.249	5 _n 803 269	1639
0.050	5 _n 972 077	243	0.100	5 _n 953 307	506	0.150	5 _n 920 640	803	0.200	5 _n 871 595	1166	0.250	5 _n 801 618	1651

Tafel IX.

 $\log \{P_2^m m\}$.

$\pm m$	P	$+$	$\pm m$	P	$+$	$\pm m$	P	$+$	$\pm m$	P	$+$	$\pm m$	P	$+$
0.000	5.023 962	1	0.050	5.025 983	81	0.100	5.031 904	156	0.150	5.041 326	220	0.200	5.053 634	271
0.001	5.023 963	2	0.051	5.026 064	82	0.101	5.032 060	157	0.151	5.041 546	222	0.201	5.053 905	271
0.002	5.023 965	4	0.052	5.026 146	85	0.102	5.032 217	159	0.152	5.041 768	222	0.202	5.054 176	273
0.003	5.023 969	6	0.053	5.026 231	85	0.103	5.032 376	160	0.153	5.041 990	224	0.203	5.054 449	273
0.004	5.023 975	7	0.054	5.026 316	88	0.104	5.032 536	162	0.154	5.042 214	225	0.204	5.054 722	274
0.005	5.023 982	9	0.055	5.026 404	89	0.105	5.032 698	162	0.155	5.042 439	226	0.205	5.054 996	274
0.006	5.023 991	11	0.056	5.026 493	90	0.106	5.032 860	165	0.156	5.042 665	227	0.206	5.055 270	276
0.007	5.024 002	12	0.057	5.026 583	92	0.107	5.033 025	165	0.157	5.042 892	228	0.207	5.055 546	276
0.008	5.024 014	14	0.058	5.026 675	94	0.108	5.033 190	167	0.158	5.043 120	229	0.208	5.055 822	277
0.009	5.024 028	15	0.059	5.026 769	95	0.109	5.033 357	169	0.159	5.043 349	231	0.209	5.056 099	278
0.010	5.024 043	17	0.060	5.026 864	97	0.110	5.033 526	169	0.160	5.043 580	231	0.210	5.056 377	279
0.011	5.024 060	19	0.061	5.026 961	98	0.111	5.033 695	171	0.161	5.043 811	233	0.211	5.056 656	279
0.012	5.024 079	20	0.062	5.027 059	100	0.112	5.033 866	173	0.162	5.044 044	233	0.212	5.056 935	281
0.013	5.024 099	22	0.063	5.027 159	101	0.113	5.034 039	174	0.163	5.044 277	235	0.213	5.057 216	281
0.014	5.024 121	24	0.064	5.027 260	103	0.114	5.034 213	175	0.164	5.044 512	236	0.214	5.057 497	282
0.015	5.024 145	25	0.065	5.027 363	104	0.115	5.034 388	176	0.165	5.044 748	237	0.215	5.057 779	282
0.016	5.024 170	27	0.066	5.027 467	106	0.116	5.034 564	178	0.166	5.044 985	238	0.216	5.058 061	283
0.017	5.024 197	28	0.067	5.027 573	108	0.117	5.034 742	179	0.167	5.045 223	239	0.217	5.058 344	284
0.018	5.024 225	30	0.068	5.027 681	109	0.118	5.034 921	180	0.168	5.045 462	240	0.218	5.058 628	285
0.019	5.024 255	32	0.069	5.027 790	110	0.119	5.035 101	182	0.169	5.045 702	241	0.219	5.058 913	286
0.020	5.024 287	33	0.070	5.027 900	112	0.120	5.035 283	183	0.170	5.045 943	242	0.220	5.059 199	286
0.021	5.024 320	35	0.071	5.028 012	114	0.121	5.035 466	185	0.171	5.046 185	244	0.221	5.059 485	287
0.022	5.024 355	37	0.072	5.028 126	115	0.122	5.035 651	185	0.172	5.046 429	244	0.222	5.059 772	288
0.023	5.024 392	38	0.073	5.028 241	116	0.123	5.035 836	187	0.173	5.046 673	245	0.223	5.060 060	288
0.024	5.024 430	39	0.074	5.028 357	118	0.124	5.036 023	189	0.174	5.046 918	246	0.224	5.060 348	289
0.025	5.024 469	42	0.075	5.028 475	120	0.125	5.036 212	189	0.175	5.047 164	248	0.225	5.060 637	290
0.026	5.024 511	43	0.076	5.028 595	121	0.126	5.036 401	191	0.176	5.047 412	248	0.226	5.060 927	290
0.027	5.024 554	44	0.077	5.028 716	122	0.127	5.036 592	192	0.177	5.047 660	249	0.227	5.061 217	291
0.028	5.024 598	46	0.078	5.028 838	124	0.128	5.036 784	194	0.178	5.047 909	251	0.228	5.061 508	292
0.029	5.024 644	48	0.079	5.028 962	126	0.129	5.036 978	195	0.179	5.048 160	251	0.229	5.061 800	293
0.030	5.024 692	50	0.080	5.029 088	127	0.130	5.037 173	196	0.180	5.048 411	252	0.230	5.062 093	293
0.031	5.024 742	51	0.081	5.029 215	128	0.131	5.037 369	197	0.181	5.048 663	253	0.231	5.062 386	293
0.032	5.024 793	52	0.082	5.029 343	130	0.132	5.037 566	198	0.182	5.048 916	255	0.232	5.062 679	295
0.033	5.024 845	54	0.083	5.029 473	131	0.133	5.037 764	200	0.183	5.049 171	255	0.233	5.062 974	295
0.034	5.024 899	56	0.084	5.029 604	133	0.134	5.037 964	201	0.184	5.049 426	256	0.234	5.063 269	295
0.035	5.024 955	58	0.085	5.029 737	135	0.135	5.038 165	202	0.185	5.049 682	257	0.235	5.063 564	296
0.036	5.025 013	58	0.086	5.029 872	135	0.136	5.038 367	204	0.186	5.049 939	258	0.236	5.063 860	297
0.037	5.025 071	61	0.087	5.030 007	138	0.137	5.038 571	205	0.187	5.050 197	259	0.237	5.064 157	298
0.038	5.025 132	62	0.088	5.030 145	138	0.138	5.038 776	206	0.188	5.050 456	260	0.238	5.064 455	298
0.039	5.025 194	64	0.089	5.030 283	141	0.139	5.038 982	207	0.189	5.050 716	261	0.239	5.064 753	298
0.040	5.025 258	65	0.090	5.030 424	141	0.140	5.039 189	208	0.190	5.050 977	262	0.240	5.065 051	299
0.041	5.025 323	67	0.091	5.030 565	143	0.141	5.039 397	210	0.191	5.051 239	262	0.241	5.065 350	300
0.042	5.025 390	69	0.092	5.030 708	145	0.142	5.039 607	210	0.192	5.051 501	264	0.242	5.065 650	301
0.043	5.025 459	70	0.093	5.030 853	146	0.143	5.039 817	212	0.193	5.051 765	264	0.243	5.065 951	301
0.044	5.025 529	72	0.094	5.030 999	147	0.144	5.040 029	214	0.194	5.052 029	266	0.244	5.066 252	301
0.045	5.025 601	73	0.095	5.031 146	149	0.145	5.040 243	214	0.195	5.052 295	266	0.245	5.066 553	302
0.046	5.025 674	75	0.096	5.031 295	150	0.146	5.040 457	216	0.196	5.052 561	267	0.246	5.066 855	303
0.047	5.025 749	76	0.097	5.031 445	152	0.147	5.040 673	216	0.197	5.052 828	268	0.247	5.067 158	303
0.048	5.025 825	78	0.098	5.031 597	153	0.148	5.040 889	218	0.198	5.053 096	269	0.248	5.067 461	303
0.049	5.025 903	80	0.099	5.031 750	154	0.149	5.041 107	219	0.199	5.053 365	269	0.249	5.067 764	305
0.050	5.025 983		0.100	5.031 904		0.150	5.041 326		0.200	5.053 634		0.250	5.068 069	

Tafel IX.

 $\log \{P_2^{10} m\}$.

$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$	$\pm m$	P	$-J$
0.000	5.340 229		0.050	5.334 239		0.100	5.315 907		0.150	5.284 052		0.200	5.236 355	
0.001	5.340 226	3	0.051	5.333 996	243	0.101	5.315 408	499	0.151	5.283 263	789	0.201	5.235 215	1140
0.002	5.340 219	7	0.052	5.333 748	248	0.102	5.314 903	505	0.152	5.282 468	795	0.202	5.234 067	1148
0.003	5.340 207	12	0.053	5.333 495	253	0.103	5.314 393	510	0.153	5.281 667	801	0.203	5.232 911	1156
0.004	5.340 191	16	0.054	5.333 237	258	0.104	5.313 878	515	0.154	5.280 860	807	0.204	5.231 747	1164
0.005	5.340 169	22	0.055	5.332 974	263	0.105	5.313 358	520	0.155	5.280 046	814	0.205	5.230 575	1172
0.006	5.340 143	26	0.056	5.332 706	268	0.106	5.312 831	527	0.156	5.279 226	820	0.206	5.229 395	1180
0.007	5.340 112	31	0.057	5.332 433	273	0.107	5.312 300	531	0.157	5.278 399	827	0.207	5.228 207	1188
0.008	5.340 076	36	0.058	5.332 155	278	0.108	5.311 763	537	0.158	5.277 566	833	0.208	5.227 010	1197
0.009	5.340 036	40	0.059	5.331 872	283	0.109	5.311 220	543	0.159	5.276 726	840	0.209	5.225 805	1205
		46			287			548			846			1213
0.010	5.339 990		0.060	5.331 585		0.110	5.310 672		0.160	5.275 880		0.210	5.224 592	
0.011	5.339 940	50	0.061	5.331 292	293	0.111	5.310 119	553	0.161	5.275 028	852	0.211	5.223 370	1222
0.012	5.339 885	55	0.062	5.330 994	298	0.112	5.309 560	559	0.162	5.274 168	860	0.212	5.222 140	1230
0.013	5.339 826	59	0.063	5.330 692	302	0.113	5.308 995	565	0.163	5.273 303	865	0.213	5.220 902	1238
0.014	5.339 761	65	0.064	5.330 384	308	0.114	5.308 425	570	0.164	5.272 430	873	0.214	5.219 655	1247
0.015	5.339 692	69	0.065	5.330 072	312	0.115	5.307 849	576	0.165	5.271 551	879	0.215	5.218 399	1256
0.016	5.339 618	74	0.066	5.329 754	318	0.116	5.307 268	581	0.166	5.270 665	886	0.216	5.217 135	1264
0.017	5.339 539	79	0.067	5.329 431	323	0.117	5.306 681	587	0.167	5.269 773	892	0.217	5.215 862	1273
0.018	5.339 456	83	0.068	5.329 104	327	0.118	5.306 088	593	0.168	5.268 874	899	0.218	5.214 581	1281
0.019	5.339 367	89	0.069	5.328 771	333	0.119	5.305 490	598	0.169	5.267 968	906	0.219	5.213 290	1291
		93			338			604			913			1299
0.020	5.339 274	98	0.070	5.328 433	343	0.120	5.304 886	609	0.170	5.267 055	919	0.220	5.211 991	1308
0.021	5.339 176	102	0.071	5.328 090	348	0.121	5.304 277	615	0.171	5.266 136	927	0.221	5.210 683	1317
0.022	5.339 074	108	0.072	5.327 742	353	0.122	5.303 662	621	0.172	5.265 209	933	0.222	5.209 366	1326
0.023	5.338 966	112	0.073	5.327 389	358	0.123	5.303 041	627	0.173	5.264 276	940	0.223	5.208 040	1336
0.024	5.338 854	117	0.074	5.327 031	363	0.124	5.302 414	632	0.174	5.263 336	947	0.224	5.206 704	1344
0.025	5.338 737	122	0.075	5.326 668	368	0.125	5.301 782	638	0.175	5.262 389	954	0.225	5.205 360	1353
0.026	5.338 615	127	0.076	5.326 300	374	0.126	5.301 144	644	0.176	5.261 435	961	0.226	5.204 007	1363
0.027	5.338 488	131	0.077	5.325 926	378	0.127	5.300 500	650	0.177	5.260 474	968	0.227	5.202 644	1372
0.028	5.338 357	137	0.078	5.325 548	384	0.128	5.299 850	655	0.178	5.259 506	975	0.228	5.201 272	1382
0.029	5.338 220		0.079	5.325 164		0.129	5.299 195		0.179	5.258 531		0.229	5.199 890	
		141			388			662			983			1391
0.030	5.338 079		0.080	5.324 776		0.130	5.298 533		0.180	5.257 548		0.230	5.198 499	
0.031	5.337 933	146	0.081	5.324 382	394	0.131	5.297 866	667	0.181	5.256 559	989	0.231	5.197 099	1400
0.032	5.337 782	151	0.082	5.323 983	399	0.132	5.297 193	673	0.182	5.255 562	997	0.232	5.195 689	1410
0.033	5.337 627	155	0.083	5.323 579	404	0.133	5.296 514	679	0.183	5.254 559	1003	0.233	5.194 270	1419
0.034	5.337 466	161	0.084	5.323 169	410	0.134	5.295 829	685	0.184	5.253 548	1011	0.234	5.192 840	1430
0.035	5.337 301	165	0.085	5.322 755	414	0.135	5.295 139	690	0.185	5.252 529	1019	0.235	5.191 401	1448
0.036	5.337 131	170	0.086	5.322 335	420	0.136	5.294 442	697	0.186	5.251 504	1025	0.236	5.189 953	1459
0.037	5.336 956	175	0.087	5.321 910	425	0.137	5.293 739	703	0.187	5.250 471	1033	0.237	5.188 494	1469
0.038	5.336 776	180	0.088	5.321 480	430	0.138	5.293 030	709	0.188	5.249 430	1041	0.238	5.187 025	1478
0.039	5.336 592	184	0.089	5.321 044	436	0.139	5.292 316	714	0.189	5.248 383	1047	0.239	5.185 547	1489
		190			440			721			1056			1499
0.040	5.336 402		0.090	5.320 604		0.140	5.291 595		0.190	5.247 327		0.240	5.184 058	
0.041	5.336 208	194	0.091	5.320 158	446	0.141	5.290 868	727	0.191	5.246 264	1063	0.241	5.182 559	1509
0.042	5.336 009	199	0.092	5.319 707	451	0.142	5.290 135	733	0.192	5.245 194	1070	0.242	5.181 050	1520
0.043	5.335 804	205	0.093	5.319 250	457	0.143	5.289 397	738	0.193	5.244 116	1078	0.243	5.179 530	1530
0.044	5.335 596	208	0.094	5.318 789	461	0.144	5.288 652	745	0.194	5.243 031	1085	0.244	5.178 000	1540
0.045	5.335 382	214	0.095	5.318 322	467	0.145	5.287 900	752	0.195	5.241 938	1093	0.245	5.176 460	1551
0.046	5.335 163	219	0.096	5.317 849	473	0.146	5.287 143	757	0.196	5.240 837	1101	0.246	5.174 909	1562
0.047	5.334 939	224	0.097	5.317 372	477	0.147	5.286 379	764	0.197	5.239 728	1109	0.247	5.173 347	1572
0.048	5.334 711	228	0.098	5.316 889	483	0.148	5.285 610	769	0.198	5.238 612	1116	0.248	5.171 775	1583
0.049	5.334 477	234	0.099	5.316 400	489	0.149	5.284 834	776	0.199	5.237 487	1125	0.249	5.170 192	1594
0.050	5.334 239	238	0.100	5.315 907	493	0.150	5.284 052	782	0.200	5.236 355	1132	0.250	5.168 598	

Tafel X.

vergl. pag. 38.

T	$\int_0^T e^{-tt} dt$	T	$\int_0^T e^{-tt} dt$	T	$\int_0^T e^{-tt} dt$
0.00	+ 0.000 0000 000	0.50	+ 0.461 2810 064	1.00	+ 0.746 8241 328
0.01	+ 0.009 9996 667	0.51	+ 0.469 0299 460	1.01	+ 0.750 4662 625
0.02	+ 0.019 9973 336	0.52	+ 0.476 7002 495	1.02	+ 0.754 0355 604
0.03	+ 0.029 9910 024	0.53	+ 0.484 2911 965	1.03	+ 0.757 5327 836
0.04	+ 0.039 9786 768	0.54	+ 0.491 8021 058	1.04	+ 0.760 9587 021
0.05	+ 0.049 9583 645	0.55	+ 0.499 2323 350	1.05	+ 0.764 3140 986
0.06	+ 0.059 9280 776	0.56	+ 0.506 5812 809	1.06	+ 0.767 5997 677
0.07	+ 0.069 8858 345	0.57	+ 0.513 8483 792	1.07	+ 0.770 8165 149
0.08	+ 0.079 8296 605	0.58	+ 0.521 0331 044	1.08	+ 0.773 9651 562
0.09	+ 0.089 7575 894	0.59	+ 0.528 1349 697	1.09	+ 0.777 0465 172
0.10	+ 0.099 6676 643	0.60	+ 0.535 1535 268	1.10	+ 0.780 0614 325
0.11	+ 0.109 5579 392	0.61	+ 0.542 0883 659	1.11	+ 0.783 0107 451
0.12	+ 0.119 4264 798	0.62	+ 0.548 9391 154	1.12	+ 0.785 8953 054
0.13	+ 0.129 2713 647	0.63	+ 0.555 7054 416	1.13	+ 0.788 7159 709
0.14	+ 0.139 0906 865	0.64	+ 0.562 3870 483	1.14	+ 0.791 4736 054
0.15	+ 0.148 8825 532	0.65	+ 0.568 9836 768	1.15	+ 0.794 1690 781
0.16	+ 0.158 6450 888	0.66	+ 0.575 4951 056	1.16	+ 0.796 8032 635
0.17	+ 0.168 3764 347	0.67	+ 0.581 9211 497	1.17	+ 0.799 3770 403
0.18	+ 0.178 0747 508	0.68	+ 0.588 2616 607	1.18	+ 0.801 8912 908
0.19	+ 0.187 7382 163	0.69	+ 0.594 5165 257	1.19	+ 0.804 3469 007
0.20	+ 0.197 3650 309	0.70	+ 0.600 6856 679	1.20	+ 0.806 7447 580
0.21	+ 0.206 9534 158	0.71	+ 0.606 7690 454	1.21	+ 0.809 0857 528
0.22	+ 0.216 5016 146	0.72	+ 0.612 7666 508	1.22	+ 0.811 3707 764
0.23	+ 0.226 0078 943	0.73	+ 0.618 6785 109	1.23	+ 0.813 6007 211
0.24	+ 0.235 4705 463	0.74	+ 0.624 5046 863	1.24	+ 0.815 7764 793
0.25	+ 0.244 8878 871	0.75	+ 0.630 2452 707	1.25	+ 0.817 8989 431
0.26	+ 0.254 2582 596	0.76	+ 0.635 9003 903	1.26	+ 0.819 9690 039
0.27	+ 0.263 5800 333	0.77	+ 0.641 4702 035	1.27	+ 0.821 9875 519
0.28	+ 0.272 8516 060	0.78	+ 0.646 9549 001	1.28	+ 0.823 9554 753
0.29	+ 0.282 0714 038	0.79	+ 0.652 3547 007	1.29	+ 0.825 8736 600
0.30	+ 0.291 2378 826	0.80	+ 0.657 6698 563	1.30	+ 0.827 7429 893
0.31	+ 0.300 3495 280	0.81	+ 0.662 9006 476	1.31	+ 0.829 5643 433
0.32	+ 0.309 4048 569	0.82	+ 0.668 0473 841	1.32	+ 0.831 3385 982
0.33	+ 0.318 4024 177	0.83	+ 0.673 1104 039	1.33	+ 0.833 0666 265
0.34	+ 0.327 3407 911	0.84	+ 0.678 0900 727	1.34	+ 0.834 7492 959
0.35	+ 0.336 2185 908	0.85	+ 0.682 9867 832	1.35	+ 0.836 3874 694
0.36	+ 0.345 0344 640	0.86	+ 0.687 8009 546	1.36	+ 0.837 9820 047
0.37	+ 0.353 7870 918	0.87	+ 0.692 5330 316	1.37	+ 0.839 5337 539
0.38	+ 0.362 4751 904	0.88	+ 0.697 1834 841	1.38	+ 0.841 0435 631
0.39	+ 0.371 0975 108	0.89	+ 0.701 7528 060	1.39	+ 0.842 5122 720
0.40	+ 0.379 6528 398	0.90	+ 0.706 2415 149	1.40	+ 0.843 9407 138
0.41	+ 0.388 1400 003	0.91	+ 0.710 6501 512	1.41	+ 0.845 3297 146
0.42	+ 0.396 5578 518	0.92	+ 0.714 9792 774	1.42	+ 0.846 6800 934
0.43	+ 0.404 9052 906	0.93	+ 0.719 2294 773	1.43	+ 0.847 9926 615
0.44	+ 0.413 1812 505	0.94	+ 0.723 4013 554	1.44	+ 0.849 2682 225
0.45	+ 0.421 3847 026	0.95	+ 0.727 4955 362	1.45	+ 0.850 5075 719
0.46	+ 0.429 5146 561	0.96	+ 0.731 5126 632	1.46	+ 0.851 7114 969
0.47	+ 0.437 5701 583	0.97	+ 0.735 4533 983	1.47	+ 0.852 8807 761
0.48	+ 0.445 5502 949	0.98	+ 0.739 3184 212	1.48	+ 0.854 0161 796
0.49	+ 0.453 4541 899	0.99	+ 0.743 1084 284	1.49	+ 0.855 1184 681
0.50	+ 0.461 2810 064	1.00	+ 0.746 8241 328	1.50	+ 0.856 1883 936

Tafel X.

T	$\int_0^T e^{-t'} dt$	T	$\int_0^T e^{-t'} dt$	T	$\int_0^T e^{-t'} dt$
1.50	+ 0.856 1883 936	2.00	+ 0.882 0813 908	2.50	+ 0.885 8662 738
1.51	+ 0.857 2266 985	2.01	+ 0.882 2609 265	2.51	+ 0.885 8851 030
1.52	+ 0.858 2341 160	2.02	+ 0.882 4333 881	2.52	+ 0.885 9030 104
1.53	+ 0.859 2113 692	2.03	+ 0.882 5990 212	2.53	+ 0.885 9200 376
1.54	+ 0.860 1591 718	2.04	+ 0.882 7580 644	2.54	+ 0.885 9362 247
1.55	+ 0.861 0782 276	2.05	+ 0.882 9107 494	2.55	+ 0.885 9516 100
1.56	+ 0.861 9692 302	2.06	+ 0.883 0573 010	2.56	+ 0.885 9662 304
1.57	+ 0.862 8328 632	2.07	+ 0.883 1979 374	2.57	+ 0.885 9801 210
1.58	+ 0.863 6697 998	2.08	+ 0.883 3328 705	2.58	+ 0.885 9933 157
1.59	+ 0.864 4807 032	2.09	+ 0.883 4623 056	2.59	+ 0.886 0058 469
1.60	+ 0.865 2662 260	2.10	+ 0.883 5864 419	2.60	+ 0.886 0177 455
1.61	+ 0.866 0270 104	2.11	+ 0.883 7054 725	2.61	+ 0.886 0290 412
1.62	+ 0.866 7636 881	2.12	+ 0.883 8195 846	2.62	+ 0.886 0397 623
1.63	+ 0.867 4768 803	2.13	+ 0.883 9289 596	2.63	+ 0.886 0499 362
1.64	+ 0.868 1671 978	2.14	+ 0.884 0337 732	2.64	+ 0.886 0595 888
1.65	+ 0.868 8352 405	2.15	+ 0.884 1341 954	2.65	+ 0.886 0687 449
1.66	+ 0.869 4815 979	2.16	+ 0.884 2303 911	2.66	+ 0.886 0774 284
1.67	+ 0.870 1068 490	2.17	+ 0.884 3225 197	2.67	+ 0.886 0856 620
1.68	+ 0.870 7115 619	2.18	+ 0.884 4107 355	2.68	+ 0.886 0934 675
1.69	+ 0.871 2962 943	2.19	+ 0.884 4951 878	2.69	+ 0.886 1008 657
1.70	+ 0.871 8615 934	2.20	+ 0.884 5760 210	2.70	+ 0.886 1078 763
1.71	+ 0.872 4079 957	2.21	+ 0.884 6533 747	2.71	+ 0.886 1145 184
1.72	+ 0.872 9360 272	2.22	+ 0.884 7273 838	2.72	+ 0.886 1208 101
1.73	+ 0.873 4462 037	2.23	+ 0.884 7981 789	2.73	+ 0.886 1267 686
1.74	+ 0.873 9390 302	2.24	+ 0.884 8658 859	2.74	+ 0.886 1324 106
1.75	+ 0.874 4150 016	2.25	+ 0.884 9306 267	2.75	+ 0.886 1377 517
1.76	+ 0.874 8746 025	2.26	+ 0.884 9925 188	2.76	+ 0.886 1428 070
1.77	+ 0.875 3183 070	2.27	+ 0.885 0516 756	2.77	+ 0.886 1475 908
1.78	+ 0.875 7465 794	2.28	+ 0.885 1082 069	2.78	+ 0.886 1521 168
1.79	+ 0.876 1598 738	2.29	+ 0.885 1622 182	2.79	+ 0.886 1563 980
1.80	+ 0.876 5586 342	2.30	+ 0.885 2138 117	2.80	+ 0.886 1604 469
1.81	+ 0.876 9432 948	2.31	+ 0.885 2630 857	2.81	+ 0.886 1642 753
1.82	+ 0.877 3142 799	2.32	+ 0.885 3101 350	2.82	+ 0.886 1678 944
1.83	+ 0.877 6720 042	2.33	+ 0.885 3550 511	2.83	+ 0.886 1713 151
1.84	+ 0.878 0168 727	2.34	+ 0.885 3979 222	2.84	+ 0.886 1745 475
1.85	+ 0.878 3492 809	2.35	+ 0.885 4388 332	2.85	+ 0.886 1776 015
1.86	+ 0.878 6696 149	2.36	+ 0.885 4778 659	2.86	+ 0.886 1804 863
1.87	+ 0.878 9782 517	2.37	+ 0.885 5150 991	2.87	+ 0.886 1832 107
1.88	+ 0.879 2755 588	2.38	+ 0.885 5506 086	2.88	+ 0.886 1857 831
1.89	+ 0.879 5618 949	2.39	+ 0.885 5844 675	2.89	+ 0.886 1882 115
1.90	+ 0.879 8376 097	2.40	+ 0.885 6167 460	2.90	+ 0.886 1905 036
1.91	+ 0.880 1030 440	2.41	+ 0.885 6475 118	2.91	+ 0.886 1926 665
1.92	+ 0.880 3585 302	2.42	+ 0.885 6768 299	2.92	+ 0.886 1947 071
1.93	+ 0.880 6043 918	2.43	+ 0.885 7047 628	2.93	+ 0.886 1966 320
1.94	+ 0.880 8409 442	2.44	+ 0.885 7313 706	2.94	+ 0.886 1984 472
1.95	+ 0.881 0684 942	2.45	+ 0.885 7567 112	2.95	+ 0.886 2001 589
1.96	+ 0.881 2873 407	2.46	+ 0.885 7808 401	2.96	+ 0.886 2017 725
1.97	+ 0.881 4977 746	2.47	+ 0.885 8038 105	2.97	+ 0.886 2032 933
1.98	+ 0.881 7000 787	2.48	+ 0.885 8256 738	2.98	+ 0.886 2047 264
1.99	+ 0.881 8945 283	2.49	+ 0.885 8464 792	2.99	+ 0.886 2060 766
2.00	+ 0.882 0813 908	2.50	+ 0.885 8662 738	3.00	+ 0.886 2073 485

Tafel X.

T	$\int_0^T e^{-t^2} dt$	T	$\int_0^T e^{-t^2} dt$	T	$\int_0^T e^{-t^2} dt$
3.00	+ 0.886 2073 485	3.50	+ 0.886 2262 670	4.00	+ 0.886 2269 118
3.01	+ 0.886 2085 463	3.51	+ 0.886 2263 132	4.01	+ 0.886 2269 129
3.02	+ 0.886 2096 741	3.52	+ 0.886 2263 563	4.02	+ 0.886 2269 139
3.03	+ 0.886 2107 357	3.53	+ 0.886 2263 965	4.03	+ 0.886 2269 149
3.04	+ 0.886 2117 350	3.54	+ 0.886 2264 339	4.04	+ 0.886 2269 157
3.05	+ 0.886 2126 753	3.55	+ 0.886 2264 688	4.05	+ 0.886 2269 165
3.06	+ 0.886 2135 600	3.56	+ 0.886 2265 012	4.06	+ 0.886 2269 172
3.07	+ 0.886 2143 921	3.57	+ 0.886 2265 315	4.07	+ 0.886 2269 179
3.08	+ 0.886 2151 747	3.58	+ 0.886 2265 596	4.08	+ 0.886 2269 185
3.09	+ 0.886 2159 105	3.59	+ 0.886 2265 858	4.09	+ 0.886 2269 190
3.10	+ 0.886 2166 023	3.60	+ 0.886 2266 102	4.10	+ 0.886 2269 195
3.11	+ 0.886 2172 525	3.61	+ 0.886 2266 329	4.11	+ 0.886 2269 200
3.12	+ 0.886 2178 634	3.62	+ 0.886 2266 540	4.12	+ 0.886 2269 204
3.13	+ 0.886 2184 374	3.63	+ 0.886 2266 737	4.13	+ 0.886 2269 209
3.14	+ 0.886 2189 765	3.64	+ 0.886 2266 919	4.14	+ 0.886 2269 212
3.15	+ 0.886 2194 829	3.65	+ 0.886 2267 089	4.15	+ 0.886 2269 216
3.16	+ 0.886 2199 583	3.66	+ 0.886 2267 247	4.16	+ 0.886 2269 219
3.17	+ 0.886 2204 046	3.67	+ 0.886 2267 394	4.17	+ 0.886 2269 222
3.18	+ 0.886 2208 235	3.68	+ 0.886 2267 531	4.18	+ 0.886 2269 224
3.19	+ 0.886 2212 166	3.69	+ 0.886 2267 657	4.19	+ 0.886 2269 227
3.20	+ 0.886 2215 854	3.70	+ 0.886 2267 775	4.20	+ 0.886 2269 229
3.21	+ 0.886 2219 313	3.71	+ 0.886 2267 884	4.21	+ 0.886 2269 231
3.22	+ 0.886 2222 558	3.72	+ 0.886 2267 986	4.22	+ 0.886 2269 233
3.23	+ 0.886 2225 600	3.73	+ 0.886 2268 080	4.23	+ 0.886 2269 235
3.24	+ 0.886 2228 451	3.74	+ 0.886 2268 167	4.24	+ 0.886 2269 236
3.25	+ 0.886 2231 124	3.75	+ 0.886 2268 248	4.25	+ 0.886 2269 238
3.26	+ 0.886 2233 628	3.76	+ 0.886 2268 323	4.26	+ 0.886 2269 239
3.27	+ 0.886 2235 975	3.77	+ 0.886 2268 393	4.27	+ 0.886 2269 241
3.28	+ 0.886 2238 173	3.78	+ 0.886 2268 457	4.28	+ 0.886 2269 242
3.29	+ 0.886 2240 231	3.79	+ 0.886 2268 517	4.29	+ 0.886 2269 243
3.30	+ 0.886 2242 158	3.80	+ 0.886 2268 573	4.30	+ 0.886 2269 244
3.31	+ 0.886 2243 962	3.81	+ 0.886 2268 625	4.31	+ 0.886 2269 245
3.32	+ 0.886 2245 651	3.82	+ 0.886 2268 672	4.32	+ 0.886 2269 245
3.33	+ 0.886 2247 231	3.83	+ 0.886 2268 717	4.33	+ 0.886 2269 246
3.34	+ 0.886 2248 709	3.84	+ 0.886 2268 758	4.34	+ 0.886 2269 247
3.35	+ 0.886 2250 092	3.85	+ 0.886 2268 796	4.35	+ 0.886 2269 247
3.36	+ 0.886 2251 385	3.86	+ 0.886 2268 831	4.36	+ 0.886 2269 247
3.37	+ 0.886 2252 594	3.87	+ 0.886 2268 863	4.37	+ 0.886 2269 248
3.38	+ 0.886 2253 724	3.88	+ 0.886 2268 894	4.38	+ 0.886 2269 249
3.39	+ 0.886 2254 781	3.89	+ 0.886 2268 921	4.39	+ 0.886 2269 250
3.40	+ 0.886 2255 768	3.90	+ 0.886 2268 947	4.40	+ 0.886 2269 250
3.41	+ 0.886 2256 690	3.91	+ 0.886 2268 971	4.41	+ 0.886 2269 250
3.42	+ 0.886 2257 551	3.92	+ 0.886 2268 992	4.42	+ 0.886 2269 251
3.43	+ 0.886 2258 356	3.93	+ 0.886 2269 013	4.43	+ 0.886 2269 251
3.44	+ 0.886 2259 107	3.94	+ 0.886 2269 031	4.44	+ 0.886 2269 252
3.45	+ 0.886 2259 808	3.95	+ 0.886 2269 049	4.45	+ 0.886 2269 252
3.46	+ 0.886 2260 462	3.96	+ 0.886 2269 065	4.46	+ 0.886 2269 252
3.47	+ 0.886 2261 073	3.97	+ 0.886 2269 080	4.47	+ 0.886 2269 252
3.48	+ 0.886 2261 643	3.98	+ 0.886 2269 094	4.48	+ 0.886 2269 253
3.49	+ 0.886 2262 174	3.99	+ 0.886 2269 106	4.49	+ 0.886 2269 253
3.50	+ 0.886 2262 670	4.00	+ 0.886 2269 118	von 4.52 bis +∞	+ 0.886 2269 254

Tafel XI.

 f' -Tafel.

vergl. pag. 77.

q	$\log f$	Diff.	$P. p.$	q	$\log f$	Diff.
— 0.030 0000	0.510 798	— 116	— 116	— 0.025 0000	0.505 026	— 115
— 0.029 9000	0.510 682	— 116	1 — 11.6	— 0.024 9000	0.504 911	— 114
— 0.029 8000	0.510 566	— 116	2 — 23.2	— 0.024 8000	0.504 797	— 115
— 0.029 7000	0.510 450	— 116	3 — 34.8	— 0.024 7000	0.504 682	— 115
— 0.029 6000	0.510 334	— 116	4 — 46.4	— 0.024 6000	0.504 567	— 114
— 0.029 5000	0.510 218	— 116	5 — 58.0	— 0.024 5000	0.504 453	— 115
— 0.029 4000	0.510 102	— 116	6 — 69.6	— 0.024 4000	0.504 338	— 115
— 0.029 3000	0.509 986	— 116	7 — 81.2	— 0.024 3000	0.504 223	— 114
— 0.029 2000	0.509 870	— 116	8 — 92.8	— 0.024 2000	0.504 109	— 115
— 0.029 1000	0.509 754	— 116	9 — 104.4	— 0.024 1000	0.503 994	— 114
— 0.029 0000	0.509 638	— 115	— 115	— 0.024 0000	0.503 880	— 115
— 0.028 9000	0.509 523	— 116	— 115	— 0.023 9000	0.503 765	— 114
— 0.028 8000	0.509 407	— 116	1 — 11.5	— 0.023 8000	0.503 651	— 115
— 0.028 7000	0.509 291	— 116	2 — 23.0	— 0.023 7000	0.503 536	— 114
— 0.028 6000	0.509 175	— 115	3 — 34.5	— 0.023 6000	0.503 422	— 114
— 0.028 5000	0.509 060	— 116	4 — 46.0	— 0.023 5000	0.503 308	— 115
— 0.028 4000	0.508 944	— 116	5 — 57.5	— 0.023 4000	0.503 193	— 114
— 0.028 3000	0.508 828	— 115	6 — 69.0	— 0.023 3000	0.503 079	— 114
— 0.028 2000	0.508 713	— 116	7 — 80.5	— 0.023 2000	0.502 965	— 115
— 0.028 1000	0.508 597	— 116	8 — 92.0	— 0.023 1000	0.502 850	— 114
— 0.028 0000	0.508 481	— 115	9 — 103.5	— 0.023 0000	0.502 736	— 114
— 0.027 9000	0.508 366	— 116	— 114	— 0.022 9000	0.502 622	— 115
— 0.027 8000	0.508 250	— 115	1 — 11.4	— 0.022 8000	0.502 507	— 114
— 0.027 7000	0.508 135	— 116	2 — 22.8	— 0.022 7000	0.502 393	— 114
— 0.027 6000	0.508 019	— 115	3 — 34.2	— 0.022 6000	0.502 279	— 114
— 0.027 5000	0.507 904	— 116	4 — 45.6	— 0.022 5000	0.502 165	— 114
— 0.027 4000	0.507 788	— 115	5 — 57.0	— 0.022 4000	0.502 051	— 114
— 0.027 3000	0.507 673	— 115	6 — 68.4	— 0.022 3000	0.501 937	— 114
— 0.027 2000	0.507 558	— 116	7 — 79.8	— 0.022 2000	0.501 823	— 114
— 0.027 1000	0.507 442	— 115	8 — 91.2	— 0.022 1000	0.501 709	— 114
— 0.027 0000	0.507 327	— 115	9 — 102.6	— 0.022 0000	0.501 595	— 114
— 0.026 9000	0.507 212	— 116	— 113	— 0.021 9000	0.501 481	— 114
— 0.026 8000	0.507 096	— 115	1 — 11.3	— 0.021 8000	0.501 367	— 114
— 0.026 7000	0.506 981	— 115	2 — 22.6	— 0.021 7000	0.501 253	— 114
— 0.026 6000	0.506 866	— 115	3 — 33.9	— 0.021 6000	0.501 139	— 114
— 0.026 5000	0.506 751	— 115	4 — 45.2	— 0.021 5000	0.501 025	— 114
— 0.026 4000	0.506 636	— 115	5 — 56.5	— 0.021 4000	0.500 911	— 114
— 0.026 3000	0.506 521	— 116	6 — 67.8	— 0.021 3000	0.500 797	— 113
— 0.026 2000	0.506 405	— 115	7 — 79.1	— 0.021 2000	0.500 684	— 114
— 0.026 1000	0.506 290	— 115	8 — 90.4	— 0.021 1000	0.500 570	— 114
— 0.026 0000	0.506 175	— 115	9 — 101.7	— 0.021 0000	0.500 456	— 114
— 0.025 9000	0.506 060	— 115	— 113	— 0.020 9000	0.500 342	— 113
— 0.025 8000	0.505 945	— 115	1 — 11.3	— 0.020 8000	0.500 229	— 114
— 0.025 7000	0.505 830	— 115	2 — 22.6	— 0.020 7000	0.500 115	— 114
— 0.025 6000	0.505 715	— 115	3 — 33.9	— 0.020 6000	0.500 001	— 113
— 0.025 5000	0.505 600	— 114	4 — 45.2	— 0.020 5000	0.499 888	— 114
— 0.025 4000	0.505 486	— 115	5 — 56.5	— 0.020 4000	0.499 774	— 114
— 0.025 3000	0.505 371	— 115	6 — 67.8	— 0.020 3000	0.499 660	— 113
— 0.025 2000	0.505 256	— 115	7 — 79.1	— 0.020 2000	0.499 547	— 114
— 0.025 1000	0.505 141	— 115	8 — 90.4	— 0.020 1000	0.499 433	— 113
— 0.025 0000	0.505 026	— 115	9 — 101.7	— 0.020 0000	0.499 320	— 113

Tafel XI.

f-Tafel.

<i>q</i>	log <i>f</i>	Diff.	<i>P. p.</i>	<i>q</i>	log <i>f</i>	Diff.
— 0.020 0000	0.499 320	— 114	— 114	— 0.015 0000	0.493 678	— 113
— 0.019 9000	0.499 206	— 113	1 — 11.4	— 0.014 9000	0.493 565	— 112
— 0.019 8000	0.499 093	— 113	2 — 22.8	— 0.014 8000	0.493 453	— 112
— 0.019 7000	0.498 980	— 114	3 — 34.2	— 0.014 7000	0.493 341	— 112
— 0.019 6000	0.498 866	— 113	4 — 45.6	— 0.014 6000	0.493 229	— 112
— 0.019 5000	0.498 753	— 114	5 — 57.0	— 0.014 5000	0.493 117	— 112
— 0.019 4000	0.498 639	— 113	6 — 68.4	— 0.014 4000	0.493 005	— 112
— 0.019 3000	0.498 526	— 113	7 — 79.8	— 0.014 3000	0.492 893	— 112
— 0.019 2000	0.498 413	— 113	8 — 91.2	— 0.014 2000	0.492 781	— 112
— 0.019 1000	0.498 300	— 114	9 — 102.6	— 0.014 1000	0.492 669	— 112
— 0.019 0000	0.498 186	— 113	— 113	— 0.014 0000	0.492 557	— 112
— 0.018 9000	0.498 073	— 113	— 113	0.013 9000	0.492 445	— 112
— 0.018 8000	0.497 960	— 113	1 — 11.3	— 0.013 8000	0.492 333	— 112
— 0.018 7000	0.497 847	— 113	2 — 22.6	— 0.013 7000	0.492 221	— 112
— 0.018 6000	0.497 734	— 113	3 — 33.9	— 0.013 6000	0.492 109	— 112
— 0.018 5000	0.497 621	— 114	4 — 45.2	— 0.013 5000	0.491 997	— 112
— 0.018 4000	0.497 507	— 113	5 — 56.5	— 0.013 4000	0.491 885	— 111
— 0.018 3000	0.497 394	— 113	6 — 67.8	— 0.013 3000	0.491 774	— 112
— 0.018 2000	0.497 281	— 113	7 — 79.1	— 0.013 2000	0.491 662	— 112
— 0.018 1000	0.497 168	— 113	8 — 90.4	— 0.013 1000	0.491 550	— 112
— 0.018 0000	0.497 055	— 113	9 — 101.7	— 0.013 0000	0.491 438	— 111
— 0.017 9000	0.496 942	— 113	— 112	0.012 9000	0.491 327	— 112
— 0.017 8000	0.496 829	— 112	1 — 11.2	— 0.012 8000	0.491 215	— 112
— 0.017 7000	0.496 717	— 113	2 — 22.4	— 0.012 7000	0.491 103	— 111
— 0.017 6000	0.496 604	— 113	3 — 33.6	— 0.012 6000	0.490 992	— 112
— 0.017 5000	0.496 491	— 113	4 — 44.8	— 0.012 5000	0.490 880	— 112
— 0.017 4000	0.496 378	— 113	5 — 56.0	— 0.012 4000	0.490 768	— 111
— 0.017 3000	0.496 265	— 113	6 — 67.2	— 0.012 3000	0.490 657	— 112
— 0.017 2000	0.496 152	— 112	7 — 78.4	— 0.012 2000	0.490 545	— 111
— 0.017 1000	0.496 040	— 113	8 — 89.6	— 0.012 1000	0.490 434	— 112
— 0.017 0000	0.495 927	— 113	9 — 100.8	— 0.012 0000	0.490 322	— 111
— 0.016 9000	0.495 814	— 112	— 111	0.011 9000	0.490 211	— 112
— 0.016 8000	0.495 702	— 113	1 — 11.1	— 0.011 8000	0.490 099	— 111
— 0.016 7000	0.495 589	— 113	2 — 22.2	— 0.011 7000	0.489 988	— 111
— 0.016 6000	0.495 476	— 112	3 — 33.3	— 0.011 6000	0.489 877	— 112
— 0.016 5000	0.495 364	— 113	4 — 44.4	— 0.011 5000	0.489 765	— 111
— 0.016 4000	0.495 251	— 112	5 — 55.5	— 0.011 4000	0.489 654	— 111
— 0.016 3000	0.495 138	— 112	6 — 66.6	— 0.011 3000	0.489 543	— 112
— 0.016 2000	0.495 026	— 113	7 — 77.7	— 0.011 2000	0.489 431	— 111
— 0.016 1000	0.494 913	— 112	8 — 88.8	— 0.011 1000	0.489 320	— 111
— 0.016 0000	0.494 801	— 112	9 — 99.9	— 0.011 0000	0.489 209	— 111
— 0.015 9000	0.494 689	— 113	— 111	0.010 9000	0.489 098	— 112
— 0.015 8000	0.494 576	— 112	1 — 11.1	— 0.010 8000	0.488 986	— 111
— 0.015 7000	0.494 464	— 113	2 — 22.2	— 0.010 7000	0.488 875	— 111
— 0.015 6000	0.494 351	— 112	3 — 33.3	— 0.010 6000	0.488 764	— 111
— 0.015 5000	0.494 239	— 112	4 — 44.4	— 0.010 5000	0.488 653	— 111
— 0.015 4000	0.494 127	— 113	5 — 55.5	— 0.010 4000	0.488 542	— 111
— 0.015 3000	0.494 014	— 112	6 — 66.6	— 0.010 3000	0.488 431	— 111
— 0.015 2000	0.493 902	— 112	7 — 77.7	— 0.010 2000	0.488 320	— 111
— 0.015 1000	0.493 790	— 112	8 — 88.8	— 0.010 1000	0.488 209	— 111
— 0.015 0000	0.493 678	— 112	9 — 99.9	— 0.010 0000	0.488 098	— 111

Tafel XI.

f-Tafel.

<i>q</i>	log <i>f</i>	Diff.	<i>P. p.</i>	<i>q</i>	log <i>f</i>	Diff.
— 0.010 0000	0.488 098		— 111	— 0.005 0000	0.482 580	
— 0.009 9000	0.487 987	— 111	1 — 11.1	— 0.004 9000	0.482 470	— 110
— 0.009 8000	0.487 876	— 111	2 — 22.2	— 0.004 8000	0.482 360	— 110
— 0.009 7000	0.487 765	— 111	3 — 33.3	— 0.004 7000	0.482 250	— 110
— 0.009 6000	0.487 654	— 111		— 0.004 6000	0.482 141	— 109
— 0.009 5000	0.487 543	— 111	4 — 44.4	— 0.004 5000	0.482 031	— 110
— 0.009 4000	0.487 432	— 110	5 — 55.5	— 0.004 4000	0.481 921	— 110
— 0.009 3000	0.487 322	— 111	6 — 66.6	— 0.004 3000	0.481 812	— 109
— 0.009 2000	0.487 211	— 111	7 — 77.7	— 0.004 2000	0.481 702	— 110
— 0.009 1000	0.487 100	— 111	8 — 88.8	— 0.004 1000	0.481 593	— 109
— 0.009 0000	0.486 989	— 110	9 — 99.9	— 0.004 0000	0.481 483	— 110
						— 109
— 0.008 9000	0.486 879	— 111	— 110	— 0.003 9000	0.481 374	— 110
— 0.008 8000	0.486 768	— 111		— 0.003 8000	0.481 264	— 109
— 0.008 7000	0.486 657	— 110		— 0.003 7000	0.481 155	— 110
— 0.008 6000	0.486 547	— 111	1 — 11.0	— 0.003 6000	0.481 045	— 109
— 0.008 5000	0.486 436	— 111	2 — 22.0	— 0.003 5000	0.480 936	— 110
— 0.008 4000	0.486 325	— 110	3 — 33.0	— 0.003 4000	0.480 826	— 109
— 0.008 3000	0.486 215	— 111		— 0.003 3000	0.480 717	— 109
— 0.008 2000	0.486 104	— 110	4 — 44.0	— 0.003 2000	0.480 608	— 110
— 0.008 1000	0.485 994	— 111	5 — 55.0	— 0.003 1000	0.480 498	— 109
— 0.008 0000	0.485 883	— 110	6 — 66.0	— 0.003 0000	0.480 389	— 109
						— 109
— 0.007 9000	0.485 773	— 111	7 — 77.0	— 0.002 9000	0.480 280	— 109
— 0.007 8000	0.485 662	— 110	8 — 88.0	— 0.002 8000	0.480 171	— 110
— 0.007 7000	0.485 552	— 110	9 — 99.0	— 0.002 7000	0.480 061	— 109
— 0.007 6000	0.485 442	— 111		— 0.002 6000	0.479 952	— 109
— 0.007 5000	0.485 331	— 110	— 109	— 0.002 5000	0.479 843	— 109
— 0.007 4000	0.485 221	— 111		— 0.002 4000	0.479 734	— 109
— 0.007 3000	0.485 110	— 110		— 0.002 3000	0.479 625	— 109
— 0.007 2000	0.485 000	— 110	1 — 10.9	— 0.002 2000	0.479 516	— 109
— 0.007 1000	0.484 890	— 110	2 — 21.8	— 0.002 1000	0.479 407	— 110
— 0.007 0000	0.484 780	— 111	3 — 32.7	— 0.002 0000	0.479 297	— 109
						— 109
— 0.006 9000	0.484 669	— 110	4 — 43.6	— 0.001 9000	0.479 188	— 109
— 0.006 8000	0.484 559	— 110	5 — 54.5	— 0.001 8000	0.479 079	— 109
— 0.006 7000	0.484 449	— 110	6 — 65.4	— 0.001 7000	0.478 970	— 109
— 0.006 6000	0.484 339	— 110		— 0.001 6000	0.478 861	— 108
— 0.006 5000	0.484 229	— 110	7 — 76.3	— 0.001 5000	0.478 753	— 109
— 0.006 4000	0.484 119	— 111	8 — 87.2	— 0.001 4000	0.478 644	— 109
— 0.006 3000	0.484 008	— 110	9 — 98.1	— 0.001 3000	0.478 535	— 109
— 0.006 2000	0.483 898	— 110		— 0.001 2000	0.478 426	— 109
— 0.006 1000	0.483 788	— 110	— 108	— 0.001 1000	0.478 317	— 109
— 0.006 0000	0.483 678	— 110		— 0.001 0000	0.478 208	— 109
						— 109
— 0.005 9000	0.483 568	— 110	1 — 10.8	— 0.000 9000	0.478 099	— 108
— 0.005 8000	0.483 458	— 110	2 — 21.6	— 0.000 8000	0.477 991	— 109
— 0.005 7000	0.483 348	— 109	3 — 32.4	— 0.000 7000	0.477 882	— 109
— 0.005 6000	0.483 239	— 110		— 0.000 6000	0.477 773	— 109
— 0.005 5000	0.483 129	— 110	4 — 43.2	— 0.000 5000	0.477 664	— 108
— 0.005 4000	0.483 019	— 110	5 — 54.0	— 0.000 4000	0.477 556	— 109
— 0.005 3000	0.482 909	— 110	6 — 64.8	— 0.000 3000	0.477 447	— 109
— 0.005 2000	0.482 799	— 110		— 0.000 2000	0.477 338	— 108
— 0.005 1000	0.482 689	— 109	7 — 75.6	— 0.000 1000	0.477 230	— 109
— 0.005 0000	0.482 580		8 — 86.4	0.000 0000	0.477 121	
			9 — 97.2			

Tafel XI.

f-Tafel.

<i>q</i>	log <i>f</i>	Diff.	<i>P. p.</i>	<i>q</i>	log <i>f</i>	Diff.
0.000 0000	0.477 121		— 109	+ 0.005 0000	0.471 722	
		— 108	1 — 10.9			— 108
+ 0.000 1000	0.477 013	— 109	2 — 21.8	+ 0.005 1000	0.471 614	— 107
+ 0.000 2000	0.476 904	— 108	3 — 32.7	+ 0.005 2000	0.471 507	— 107
+ 0.000 3000	0.476 796	— 109		+ 0.005 3000	0.471 400	— 108
+ 0.000 4000	0.476 687	— 108	4 — 43.6	+ 0.005 4000	0.471 292	— 107
+ 0.000 5000	0.476 579	— 109	5 — 54.5	+ 0.005 5000	0.471 185	— 107
+ 0.000 6000	0.476 470	— 108	6 — 65.4	+ 0.005 6000	0.471 078	— 108
+ 0.000 7000	0.476 362	— 109		+ 0.005 7000	0.470 970	— 107
+ 0.000 8000	0.476 253	— 108	7 — 76.3	+ 0.005 8000	0.470 863	— 107
+ 0.000 9000	0.476 145	— 108	8 — 87.2	+ 0.005 9000	0.470 756	— 107
+ 0.001 0000	0.476 037	— 109	9 — 98.1	+ 0.006 0000	0.470 649	
		— 108	— 108			— 107
+ 0.001 1000	0.475 928	— 108		+ 0.006 1000	0.470 542	— 107
+ 0.001 2000	0.475 820	— 108		+ 0.006 2000	0.470 435	— 108
+ 0.001 3000	0.475 712	— 108	1 — 10.8	+ 0.006 3000	0.470 327	— 107
+ 0.001 4000	0.475 604	— 109	2 — 21.6	+ 0.006 4000	0.470 220	— 107
+ 0.001 5000	0.475 495	— 108	3 — 32.4	+ 0.006 5000	0.470 113	— 107
+ 0.001 6000	0.475 387	— 108		+ 0.006 6000	0.470 006	— 107
+ 0.001 7000	0.475 279	— 108	4 — 43.2	+ 0.006 7000	0.469 899	— 107
+ 0.001 8000	0.475 171	— 108	5 — 54.0	+ 0.006 8000	0.469 792	— 107
+ 0.001 9000	0.475 063	— 109	6 — 64.8	+ 0.006 9000	0.469 685	— 107
+ 0.002 0000	0.474 954	— 108	7 — 75.6	+ 0.007 0000	0.469 578	
		— 108	8 — 86.4			— 107
+ 0.002 1000	0.474 846	— 108	9 — 97.2	+ 0.007 1000	0.469 471	— 107
+ 0.002 2000	0.474 738	— 108		+ 0.007 2000	0.469 364	— 107
+ 0.002 3000	0.474 630	— 108		+ 0.007 3000	0.469 257	— 106
+ 0.002 4000	0.474 522	— 108	— 107	+ 0.007 4000	0.469 151	— 107
+ 0.002 5000	0.474 414	— 108		+ 0.007 5000	0.469 044	— 107
+ 0.002 6000	0.474 306	— 108	1 — 10.7	+ 0.007 6000	0.468 937	— 107
+ 0.002 7000	0.474 198	— 108	2 — 21.4	+ 0.007 7000	0.468 830	— 107
+ 0.002 8000	0.474 090	— 108	3 — 32.1	+ 0.007 8000	0.468 723	— 106
+ 0.002 9000	0.473 982	— 107		+ 0.007 9000	0.468 617	— 107
+ 0.003 0000	0.473 875	— 108	4 — 42.8	+ 0.008 0000	0.468 510	
		— 108	5 — 53.5			— 107
+ 0.003 1000	0.473 767	— 108	6 — 64.2	+ 0.008 1000	0.468 403	— 107
+ 0.003 2000	0.473 659	— 108		+ 0.008 2000	0.468 296	— 106
+ 0.003 3000	0.473 551	— 108	7 — 74.9	+ 0.008 3000	0.468 190	— 107
+ 0.003 4000	0.473 443	— 107	8 — 85.6	+ 0.008 4000	0.468 083	— 107
+ 0.003 5000	0.473 336	— 108	9 — 96.3	+ 0.008 5000	0.467 976	— 106
+ 0.003 6000	0.473 228	— 108		+ 0.008 6000	0.467 870	— 106
+ 0.003 7000	0.473 120	— 108	— 106	+ 0.008 7000	0.467 763	— 106
+ 0.003 8000	0.473 012	— 107		+ 0.008 8000	0.467 657	— 107
+ 0.003 9000	0.472 905	— 108		+ 0.008 9000	0.467 550	— 106
+ 0.004 0000	0.472 797	— 108	1 — 10.6	+ 0.009 0000	0.467 444	
		— 108	2 — 21.2			— 107
+ 0.004 1000	0.472 689	— 107	3 — 31.8	+ 0.009 1000	0.467 337	— 106
+ 0.004 2000	0.472 582	— 108		+ 0.009 2000	0.467 231	— 107
+ 0.004 3000	0.472 474	— 107	4 — 42.4	+ 0.009 3000	0.467 124	— 106
+ 0.004 4000	0.472 367	— 108	5 — 53.0	+ 0.009 4000	0.467 018	— 106
+ 0.004 5000	0.472 259	— 107	6 — 63.6	+ 0.009 5000	0.466 912	— 107
+ 0.004 6000	0.472 152	— 108		+ 0.009 6000	0.466 805	— 106
+ 0.004 7000	0.472 044	— 107	7 — 74.2	+ 0.009 7000	0.466 699	— 107
+ 0.004 8000	0.471 937	— 108	8 — 84.8	+ 0.009 8000	0.466 592	— 106
+ 0.004 9000	0.471 829	— 107	9 — 95.4	+ 0.009 9000	0.466 486	— 106
+ 0.005 0000	0.471 722			+ 0.010 0000	0.466 380	

Tafel XI.

f-Tafel.

<i>q</i>	log <i>f</i>	Diff.	<i>P. p.</i>	<i>q</i>	log <i>f</i>	Diff.
+ 0.010 0000	0.466 380		— 107	+ 0.015 0000	0.461 094	
		— 106	1 — 10.7			— 105
+ 0.010 1000	0.466 274	— 107	2 — 21.4	+ 0.015 1000	0.460 989	— 105
+ 0.010 2000	0.466 167	— 106	3 — 32.1	+ 0.015 2000	0.460 884	— 105
+ 0.010 3000	0.466 061	— 106		+ 0.015 3000	0.460 779	— 105
+ 0.010 4000	0.465 955	— 106	4 — 42.8	+ 0.015 4000	0.460 674	— 105
+ 0.010 5000	0.465 849	— 106	5 — 53.5	+ 0.015 5000	0.460 569	— 105
+ 0.010 6000	0.465 743	— 106	6 — 64.2	+ 0.015 6000	0.460 464	— 105
+ 0.010 7000	0.465 637	— 107		+ 0.015 7000	0.460 359	— 105
+ 0.010 8000	0.465 530	— 106	7 — 74.9	+ 0.015 8000	0.460 254	— 105
+ 0.010 9000	0.465 424	— 106	8 — 85.6	+ 0.015 9000	0.460 149	— 105
+ 0.011 0000	0.465 318	— 106	9 — 96.3	+ 0.016 0000	0.460 044	— 105
		— 106				— 105
+ 0.011 1000	0.465 212	— 106	— 106	+ 0.016 1000	0.459 939	— 105
+ 0.011 2000	0.465 106	— 106		+ 0.016 2000	0.459 834	— 105
+ 0.011 3000	0.465 000	— 106		+ 0.016 3000	0.459 729	— 105
+ 0.011 4000	0.464 894	— 106	1 — 10.6	+ 0.016 4000	0.459 625	— 104
+ 0.011 5000	0.464 788	— 106	2 — 21.2	+ 0.016 5000	0.459 520	— 105
+ 0.011 6000	0.464 682	— 106	3 — 31.8	+ 0.016 6000	0.459 415	— 105
+ 0.011 7000	0.464 577	— 105		+ 0.016 7000	0.459 310	— 105
+ 0.011 8000	0.464 471	— 106	4 — 42.4	+ 0.016 8000	0.459 205	— 105
+ 0.011 9000	0.464 365	— 106	5 — 53.0	+ 0.016 9000	0.459 101	— 104
+ 0.012 0000	0.464 259	— 106	6 — 63.6	+ 0.017 0000	0.458 996	— 105
		— 106				— 105
+ 0.012 1000	0.464 153	— 106	7 — 74.2	+ 0.017 1000	0.458 891	— 105
+ 0.012 2000	0.464 047	— 106	8 — 84.8	+ 0.017 2000	0.458 786	— 105
+ 0.012 3000	0.463 942	— 105	9 — 95.4	+ 0.017 3000	0.458 682	— 104
+ 0.012 4000	0.463 836	— 106		+ 0.017 4000	0.458 577	— 105
+ 0.012 5000	0.463 730	— 106	— 105	+ 0.017 5000	0.458 473	— 104
+ 0.012 6000	0.463 625	— 105		+ 0.017 6000	0.458 368	— 105
+ 0.012 7000	0.463 519	— 106		+ 0.017 7000	0.458 263	— 105
+ 0.012 8000	0.463 413	— 106	1 — 10.5	+ 0.017 8000	0.458 159	— 104
+ 0.012 9000	0.463 308	— 105	2 — 21.0	+ 0.017 9000	0.458 054	— 105
+ 0.013 0000	0.463 202	— 106	3 — 31.5	+ 0.018 0000	0.457 950	— 104
		— 106				— 105
+ 0.013 1000	0.463 096	— 105	4 — 42.0	+ 0.018 1000	0.457 845	— 104
+ 0.013 2000	0.462 991	— 106	5 — 52.5	+ 0.018 2000	0.457 741	— 105
+ 0.013 3000	0.462 885	— 105	6 — 63.0	+ 0.018 3000	0.457 636	— 105
+ 0.013 4000	0.462 780	— 105		+ 0.018 4000	0.457 532	— 104
+ 0.013 5000	0.462 674	— 106	7 — 73.5	+ 0.018 5000	0.457 428	— 104
+ 0.013 6000	0.462 569	— 105	8 — 84.0	+ 0.018 6000	0.457 323	— 105
+ 0.013 7000	0.462 463	— 106	9 — 94.5	+ 0.018 7000	0.457 219	— 104
+ 0.013 8000	0.462 358	— 105		+ 0.018 8000	0.457 115	— 104
+ 0.013 9000	0.462 252	— 106	— 104	+ 0.018 9000	0.457 010	— 105
+ 0.014 0000	0.462 147	— 105		+ 0.019 0000	0.456 906	— 104
		— 105				— 104
+ 0.014 1000	0.462 042	— 106	1 — 10.4	+ 0.019 1000	0.456 802	— 104
+ 0.014 2000	0.461 936	— 105	2 — 20.8	+ 0.019 2000	0.456 698	— 104
+ 0.014 3000	0.461 831	— 105	3 — 31.2	+ 0.019 3000	0.456 593	— 105
+ 0.014 4000	0.461 726	— 105		+ 0.019 4000	0.456 489	— 104
+ 0.014 5000	0.461 621	— 105	4 — 41.6	+ 0.019 5000	0.456 385	— 104
+ 0.014 6000	0.461 515	— 106	5 — 52.0	+ 0.019 6000	0.456 281	— 104
+ 0.014 7000	0.461 410	— 105	6 — 62.4	+ 0.019 7000	0.456 177	— 104
+ 0.014 8000	0.461 305	— 105		+ 0.019 8000	0.456 073	— 104
+ 0.014 9000	0.461 200	— 105	7 — 72.8	+ 0.019 9000	0.455 968	— 105
+ 0.015 0000	0.461 094	— 106	8 — 83.2			— 105
			9 — 93.6	+ 0.020 0000	0.455 864	— 104

Tafel XI.

f' -Tafel.

q	$\log f$	Diff.	$P. p.$	q	$\log f$	Diff.
+ 0.020 0000	0.455 864			+ 0.025 0000	0.450 688	
		— 104				— 102
+ 0.020 1000	0.455 760	— 104		+ 0.025 1000	0.450 586	— 103
+ 0.020 2000	0.455 656	— 104		+ 0.025 2000	0.450 483	— 103
+ 0.020 3000	0.455 552	— 104		+ 0.025 3000	0.450 380	— 103
+ 0.020 4000	0.455 448	— 104		+ 0.025 4000	0.450 277	— 103
+ 0.020 5000	0.455 344	— 104		+ 0.025 5000	0.450 174	— 103
+ 0.020 6000	0.455 240	— 103	— 104	+ 0.025 6000	0.450 071	— 103
+ 0.020 7000	0.455 137	— 103		+ 0.025 7000	0.449 968	— 103
+ 0.020 8000	0.455 033	— 104	1 — 10.4	+ 0.025 8000	0.449 865	— 103
+ 0.020 9000	0.454 929	— 104	2 — 20.8	+ 0.025 9000	0.449 762	— 102
+ 0.021 0000	0.454 825	— 104	3 — 31.2	+ 0.026 0000	0.449 660	— 103
		— 104				— 103
+ 0.021 1000	0.454 721	— 104	4 — 41.6	+ 0.026 1000	0.449 557	— 103
+ 0.021 2000	0.454 617	— 104	5 — 52.0	+ 0.026 2000	0.449 454	— 103
+ 0.021 3000	0.454 513	— 103	6 — 62.4	+ 0.026 3000	0.449 351	— 102
+ 0.021 4000	0.454 410	— 104	7 — 72.8	+ 0.026 4000	0.449 249	— 103
+ 0.021 5000	0.454 306	— 104	8 — 83.2	+ 0.026 5000	0.449 146	— 103
+ 0.021 6000	0.454 202	— 103	9 — 93.6	+ 0.026 6000	0.449 043	— 102
+ 0.021 7000	0.454 099	— 104		+ 0.026 7000	0.448 941	— 103
+ 0.021 8000	0.453 995	— 104	— 103	+ 0.026 8000	0.448 838	— 102
+ 0.021 9000	0.453 891	— 103		+ 0.026 9000	0.448 736	— 103
+ 0.022 0000	0.453 788	— 104		+ 0.027 0000	0.448 633	— 102
		— 104				— 103
+ 0.022 1000	0.453 684	— 104	1 — 10.3	+ 0.027 1000	0.448 531	— 103
+ 0.022 2000	0.453 580	— 103	2 — 20.6	+ 0.027 2000	0.448 428	— 103
+ 0.022 3000	0.453 477	— 104	3 — 30.9	+ 0.027 3000	0.448 325	— 102
+ 0.022 4000	0.453 373	— 103	4 — 41.2	+ 0.027 4000	0.448 223	— 102
+ 0.022 5000	0.453 270	— 104	5 — 51.5	+ 0.027 5000	0.448 121	— 103
+ 0.022 6000	0.453 166	— 103	6 — 61.8	+ 0.027 6000	0.448 018	— 102
+ 0.022 7000	0.453 063	— 104	7 — 72.1	+ 0.027 7000	0.447 916	— 103
+ 0.022 8000	0.452 959	— 103	8 — 82.4	+ 0.027 8000	0.447 813	— 102
+ 0.022 9000	0.452 856	— 104	9 — 92.7	+ 0.027 9000	0.447 711	— 102
+ 0.023 0000	0.452 752	— 103		+ 0.028 0000	0.447 609	— 103
		— 103				— 102
+ 0.023 1000	0.452 649	— 103	— 102	+ 0.028 1000	0.447 506	— 102
+ 0.023 2000	0.452 546	— 104		+ 0.028 2000	0.447 404	— 102
+ 0.023 3000	0.452 442	— 103		+ 0.028 3000	0.447 302	— 103
+ 0.023 4000	0.452 339	— 103	1 — 10.2	+ 0.028 4000	0.447 199	— 102
+ 0.023 5000	0.452 236	— 104	2 — 20.4	+ 0.028 5000	0.447 097	— 102
+ 0.023 6000	0.452 132	— 103	3 — 30.6	+ 0.028 6000	0.446 995	— 102
+ 0.023 7000	0.452 029	— 103	4 — 40.8	+ 0.028 7000	0.446 893	— 103
+ 0.023 8000	0.451 926	— 103	5 — 51.0	+ 0.028 8000	0.446 790	— 102
+ 0.023 9000	0.451 823	— 104	6 — 61.2	+ 0.028 9000	0.446 688	— 102
+ 0.024 0000	0.451 719	— 103		+ 0.029 0000	0.446 586	— 102
		— 103				— 102
+ 0.024 1000	0.451 616	— 103	7 — 71.4	+ 0.029 1000	0.446 484	— 102
+ 0.024 2000	0.451 513	— 103	8 — 81.6	+ 0.029 2000	0.446 382	— 102
+ 0.024 3000	0.451 410	— 103	9 — 91.8	+ 0.029 3000	0.446 280	— 102
+ 0.024 4000	0.451 307	— 103		+ 0.029 4000	0.446 178	— 102
+ 0.024 5000	0.451 204	— 103		+ 0.029 5000	0.446 076	— 102
+ 0.024 6000	0.451 101	— 103		+ 0.029 6000	0.445 974	— 102
+ 0.024 7000	0.450 998	— 104		+ 0.029 7000	0.445 872	— 102
+ 0.024 8000	0.450 894	— 103		+ 0.029 8000	0.445 770	— 102
+ 0.024 9000	0.450 791	— 103		+ 0.029 9000	0.445 668	— 102
+ 0.025 0000	0.450 688			+ 0.030 0000	0.445 566	

Tafel XII.

vergl. pag. 108.

	$w = 10.$		
	$1 : m_1$	$\log (w k)^2 m_1 10^7$	$\log (w k'') m_1$
Merkur	7636410 (Asten)	9.7924—10	8.2692—10
Venus	101839	1.0712	9.5480—10
Erde und Mond	355499	1.1244	9.6012—10
Mars	2680337	0.2471	8.7239—10
Jupiter	1047.879	3.654972	2.131755
Saturn	3501.6	3.13102	1.60780
Uranus	22000	2.3329	0.8096
Neptun	19700	2.3808	0.8576
	$\log k$	8.235 5814 414	Gauss
	$\log k''$	3.550 0065 746	

vergl. pag. 35, 53, 51.

Uebersicht der Hauptformeln der mechanischen Quadraturen.

Untere Grenze: $(a - \frac{1}{2}w)$

$$f(a - \frac{1}{2}w) = -\frac{1}{24}f'(a - \frac{1}{2}w) + \frac{17}{5760}f'''(a - \frac{1}{2}w) - \frac{367}{967680}f^{(5)}(a - \frac{1}{2}w) + \dots$$

$${}^{11}f(a) = +\frac{1}{24}f'(a-w) - \frac{17}{5760}\{2f''(a-w) + f''(a)\} + \frac{367}{967680}\{3f^{(4)}(a-w) + 2f^{(4)}(a)\} - \dots$$

Untere Grenze: a

$$f(a - \frac{1}{2}w) = -\frac{1}{2}f'(a) + \frac{1}{12}f'''(a) - \frac{11}{720}f^{(5)}(a) + \frac{191}{60480}f^{(7)}(a) - \dots$$

$${}^{11}f(a) = -\frac{1}{12}f'(a) + \frac{1}{240}f'''(a) - \frac{31}{60480}f^{(5)}(a) + \dots$$

Obere Grenze: $(a + i + \frac{1}{2}w = x)$

$$\int_a^{a+i+\frac{1}{2}w} f(l) dl = w \left\{ f(x) + \frac{1}{24}f'(x) - \frac{17}{5760}f'''(x) + \frac{367}{967680}f^{(5)}(x) - \dots \right\}$$

$$\iint_a^{a+i+\frac{1}{2}w} f(l) dl^2 = w^2 \left\{ {}^{11}f(x) - \frac{1}{24}f'(x) + \frac{17}{1920}f'''(x) - \frac{367}{193536}f^{(5)}(x) + \dots \right\}$$

Obere Grenze: $(a + iw = y)$

$$\int_a^{a+iw} f(l) dl = w \left\{ f(y) - \frac{1}{12}f'(y) + \frac{11}{720}f'''(y) - \frac{191}{60480}f^{(5)}(y) + \dots \right\}$$

$$\iint_a^{a+iw} f(l) dl^2 = w^2 \left\{ f(y) + \frac{1}{12}f'(y) - \frac{1}{240}f'''(y) + \frac{31}{60480}f^{(5)}(y) - \dots \right\}$$

Tafel XIII.

σ -Tafel.

vergl. pag. 118.

ν	$\log \sigma$	Diff.	$P. p.$	ν	$\log \sigma$	Diff.
— 0.030 0000	4.922 983	— 68		— 0.025 0000	4.919 618	— 67
— 0.029 9000	4.922 915	— 67		— 0.024 9000	4.919 551	— 67
— 0.029 8000	4.922 848	— 68		— 0.024 8000	4.919 484	— 67
— 0.029 7000	4.922 780	— 67		— 0.024 7000	4.919 417	— 67
— 0.029 6000	4.922 713	— 68		— 0.024 6000	4.919 350	— 68
— 0.029 5000	4.922 645	— 67		— 0.024 5000	4.919 282	— 67
— 0.029 4000	4.922 578	— 68		— 0.024 4000	4.919 215	— 67
— 0.029 3000	4.922 510	— 67	— 68	— 0.024 3000	4.919 148	— 67
— 0.029 2000	4.922 443	— 67		— 0.024 2000	4.919 081	— 67
— 0.029 1000	4.922 376	— 68	1 — 6.8	— 0.024 1000	4.919 014	— 67
— 0.029 0000	4.922 308	— 67	2 — 13.6	— 0.024 0000	4.918 947	— 67
			3 — 20.4			
— 0.028 9000	4.922 241	— 68	4 — 27.2	— 0.023 9000	4.918 880	— 67
— 0.028 8000	4.922 173	— 67	5 — 34.0	— 0.023 8000	4.918 813	— 67
— 0.028 7000	4.922 106	— 67	6 — 40.8	— 0.023 7000	4.918 746	— 67
— 0.028 6000	4.922 039	— 68		— 0.023 6000	4.918 679	— 67
— 0.028 5000	4.921 971	— 67	7 — 47.6	— 0.023 5000	4.918 612	— 67
— 0.028 4000	4.921 904	— 68	8 — 54.4	— 0.023 4000	4.918 545	— 67
— 0.028 3000	4.921 836	— 67	9 — 61.2	— 0.023 3000	4.918 478	— 67
— 0.028 2000	4.921 769	— 67		— 0.023 2000	4.918 411	— 67
— 0.028 1000	4.921 702	— 68	— 67	— 0.023 1000	4.918 344	— 66
— 0.028 0000	4.921 634	— 67		— 0.023 0000	4.918 278	— 67
— 0.027 9000	4.921 567	— 67	1 — 6.7	— 0.022 9000	4.918 211	— 67
— 0.027 8000	4.921 500	— 68	2 — 13.4	— 0.022 8000	4.918 144	— 67
— 0.027 7000	4.921 432	— 67	3 — 20.1	— 0.022 7000	4.918 077	— 67
— 0.027 6000	4.921 365	— 67		— 0.022 6000	4.918 010	— 67
— 0.027 5000	4.921 298	— 68	4 — 26.8	— 0.022 5000	4.917 943	— 67
— 0.027 4000	4.921 230	— 67	5 — 33.5	— 0.022 4000	4.917 876	— 67
— 0.027 3000	4.921 163	— 67	6 — 40.2	— 0.022 3000	4.917 809	— 67
— 0.027 2000	4.921 096	— 67		— 0.022 2000	4.917 742	— 67
— 0.027 1000	4.921 029	— 68	7 — 46.9	— 0.022 1000	4.917 675	— 66
— 0.027 0000	4.920 961	— 67	8 — 53.6	— 0.022 0000	4.917 609	— 67
			9 — 60.3			
— 0.026 9000	4.920 894	— 67	— 66	— 0.021 9000	4.917 542	— 67
— 0.026 8000	4.920 827	— 67		— 0.021 8000	4.917 475	— 67
— 0.026 7000	4.920 760	— 68		— 0.021 7000	4.917 408	— 67
— 0.026 6000	4.920 692	— 67		— 0.021 6000	4.917 341	— 67
— 0.026 5000	4.920 625	— 67	1 — 6.6	— 0.021 5000	4.917 274	— 66
— 0.026 4000	4.920 558	— 67	2 — 13.2	— 0.021 4000	4.917 208	— 67
— 0.026 3000	4.920 491	— 67	3 — 19.8	— 0.021 3000	4.917 141	— 67
— 0.026 2000	4.920 424	— 68		— 0.021 2000	4.917 074	— 67
— 0.026 1000	4.920 356	— 67	4 — 26.4	— 0.021 1000	4.917 007	— 67
— 0.026 0000	4.920 289	— 67	5 — 33.0	— 0.021 0000	4.916 940	— 66
			6 — 39.6			
— 0.025 9000	4.920 222	— 67	7 — 46.2	— 0.020 9000	4.916 874	— 67
— 0.025 8000	4.920 155	— 67	8 — 52.8	— 0.020 8000	4.916 807	— 67
— 0.025 7000	4.920 088	— 67	9 — 59.4	— 0.020 7000	4.916 740	— 67
— 0.025 6000	4.920 021	— 68		— 0.020 6000	4.916 673	— 66
— 0.025 5000	4.919 953	— 67		— 0.020 5000	4.916 607	— 67
— 0.025 4000	4.919 886	— 67		— 0.020 4000	4.916 540	— 67
— 0.025 3000	4.919 819	— 67		— 0.020 3000	4.916 473	— 67
— 0.025 2000	4.919 752	— 67		— 0.020 2000	4.916 406	— 66
— 0.025 1000	4.919 685	— 67		— 0.020 1000	4.916 340	— 67
— 0.025 0000	4.919 618			— 0.020 0000	4.916 273	

Tafel XIII.

 σ -Tafel.

r	$\log \sigma$	Diff.	$P. p.$	r	$\log \sigma$	Diff.
— 0.020 0000	4.916 273	— 67		— 0.015 0000	4.912 948	— 66
— 0.019 9000	4.916 206	— 66		— 0.014 9000	4.912 882	— 67
— 0.019 8000	4.916 140	— 67		— 0.014 8000	4.912 815	— 66
— 0.019 7000	4.916 073	— 67		— 0.014 7000	4.912 749	— 66
— 0.019 6000	4.916 006	— 66		— 0.014 6000	4.912 683	— 66
— 0.019 5000	4.915 940	— 67		— 0.014 5000	4.912 617	— 67
— 0.019 4000	4.915 873	— 67	— 67	— 0.014 4000	4.912 550	— 66
— 0.019 3000	4.915 806	— 66		— 0.014 3000	4.912 484	— 66
— 0.019 2000	4.915 740	— 67		— 0.014 2000	4.912 418	— 66
— 0.019 1000	4.915 673	— 67	1 — 6.7	— 0.014 1000	4.912 352	— 67
— 0.019 0000	4.915 606	— 66	2 — 13.4	— 0.014 0000	4.912 285	— 66
			3 — 20.1			
— 0.018 9000	4.915 540	— 67	4 — 26.8	— 0.013 9000	4.912 219	— 66
— 0.018 8000	4.915 473	— 66	5 — 33.5	— 0.013 8000	4.912 153	— 66
— 0.018 7000	4.915 407	— 67	6 — 40.2	— 0.013 7000	4.912 087	— 66
— 0.018 6000	4.915 340	— 67		— 0.013 6000	4.912 021	— 67
— 0.018 5000	4.915 273	— 66	7 — 46.9	— 0.013 5000	4.911 954	— 66
— 0.018 4000	4.915 207	— 67	8 — 53.6	— 0.013 4000	4.911 888	— 66
— 0.018 3000	4.915 140	— 66	9 — 60.3	— 0.013 3000	4.911 822	— 66
— 0.018 2000	4.915 074	— 67		— 0.013 2000	4.911 756	— 66
— 0.018 1000	4.915 007	— 66	— 66	— 0.013 1000	4.911 690	— 66
— 0.018 0000	4.914 941	— 67		— 0.013 0000	4.911 624	— 67
			1 — 6.6	— 0.012 9000	4.911 557	— 66
— 0.017 9000	4.914 874	— 66	2 — 13.2	— 0.012 8000	4.911 491	— 66
— 0.017 8000	4.914 808	— 67	3 — 19.8	— 0.012 7000	4.911 425	— 66
— 0.017 7000	4.914 741	— 66		— 0.012 6000	4.911 359	— 66
— 0.017 6000	4.914 675	— 67	4 — 26.4	— 0.012 5000	4.911 293	— 66
— 0.017 5000	4.914 608	— 66	5 — 33.0	— 0.012 4000	4.911 227	— 66
— 0.017 4000	4.914 542	— 67	6 — 39.6	— 0.012 3000	4.911 161	— 66
— 0.017 3000	4.914 475	— 66		— 0.012 2000	4.911 095	— 66
— 0.017 2000	4.914 409	— 67	7 — 46.2	— 0.012 1000	4.911 029	— 67
— 0.017 1000	4.914 342	— 66	8 — 52.8	— 0.012 0000	4.910 962	— 66
— 0.017 0000	4.914 276	— 67	9 — 59.4			
			— 65	— 0.011 9000	4.910 896	— 66
— 0.016 9000	4.914 209	— 66		— 0.011 8000	4.910 830	— 66
— 0.016 8000	4.914 143	— 67		— 0.011 7000	4.910 764	— 66
— 0.016 7000	4.914 076	— 66		— 0.011 6000	4.910 698	— 66
— 0.016 6000	4.914 010	— 67	1 — 6.5	— 0.011 5000	4.910 632	— 66
— 0.016 5000	4.913 943	— 66	2 — 13.0	— 0.011 4000	4.910 566	— 66
— 0.016 4000	4.913 877	— 66	3 — 19.5	— 0.011 3000	4.910 500	— 66
— 0.016 3000	4.913 811	— 67		— 0.011 2000	4.910 434	— 66
— 0.016 2000	4.913 744	— 66	4 — 26.0	— 0.011 1000	4.910 368	— 66
— 0.016 1000	4.913 678	— 67	5 — 32.5	— 0.011 0000	4.910 302	— 66
— 0.016 0000	4.913 611	— 66	6 — 39.0			
			7 — 45.5	— 0.010 9000	4.910 236	— 66
— 0.015 9000	4.913 545	— 66	8 — 52.0	— 0.010 8000	4.910 170	— 66
— 0.015 8000	4.913 479	— 67	9 — 58.5	— 0.010 7000	4.910 104	— 66
— 0.015 7000	4.913 412	— 66		— 0.010 6000	4.910 038	— 66
— 0.015 6000	4.913 346	— 66		— 0.010 5000	4.909 972	— 66
— 0.015 5000	4.913 280	— 67		— 0.010 4000	4.909 906	— 66
— 0.015 4000	4.913 213	— 66		— 0.010 3000	4.909 840	— 65
— 0.015 3000	4.913 147	— 66		— 0.010 2000	4.909 775	— 66
— 0.015 2000	4.913 081	— 67		— 0.010 1000	4.909 709	— 66
— 0.015 1000	4.913 014	— 66		— 0.010 0000	4.909 643	
— 0.015 0000	4.912 948					

Tafel XIII.

 σ -Tafel.

ν	$\log \sigma$	Diff.	$P. p.$	ν	$\log \sigma$	Diff.
— 0.010 0000	4.909 643	— 66		— 0.005 0000	4.906 357	— 66
— 0.009 9000	4.909 577	— 66		— 0.004 9000	4.906 291	— 65
— 0.009 8000	4.909 511	— 66		— 0.004 8000	4.906 226	— 66
— 0.009 7000	4.909 445	— 66		— 0.004 7000	4.906 160	— 65
— 0.009 6000	4.909 379	— 66		— 0.004 6000	4.906 095	— 66
— 0.009 5000	4.909 313	— 66		— 0.004 5000	4.906 029	— 65
— 0.009 4000	4.909 247	— 66		— 0.004 4000	4.905 964	— 66
— 0.009 3000	4.909 181	— 65		— 0.004 3000	4.905 898	— 65
— 0.009 2000	4.909 116	— 66		— 0.004 2000	4.905 833	— 66
— 0.009 1000	4.909 050	— 66		— 0.004 1000	4.905 767	— 65
— 0.009 0000	4.908 984	— 66		— 0.004 0000	4.905 702	— 66
— 0.008 9000	4.908 918	— 66		— 0.003 9000	4.905 636	— 65
— 0.008 8000	4.908 852	— 66	— 66	— 0.003 8000	4.905 571	— 65
— 0.008 7000	4.908 786	— 65		— 0.003 7000	4.905 506	— 66
— 0.008 6000	4.908 721	— 66		— 0.003 6000	4.905 440	— 65
— 0.008 5000	4.908 655	— 66	1 — 6.6	— 0.003 5000	4.905 375	— 66
— 0.008 4000	4.908 589	— 66	2 — 13.2	— 0.003 4000	4.905 309	— 65
— 0.008 3000	4.908 523	— 65	3 — 19.8	— 0.003 3000	4.905 244	— 65
— 0.008 2000	4.908 458	— 66		— 0.003 2000	4.905 179	— 66
— 0.008 1000	4.908 392	— 66	4 — 26.4	— 0.003 1000	4.905 113	— 65
— 0.008 0000	4.908 326	— 66	5 — 33.0	— 0.003 0000	4.905 048	— 66
		— 66	6 — 39.6	— 0.002 9000	4.904 982	— 65
— 0.007 9000	4.908 260	— 66	7 — 46.2	— 0.002 8000	4.904 917	— 65
— 0.007 8000	4.908 194	— 65	8 — 52.8	— 0.002 7000	4.904 852	— 66
— 0.007 7000	4.908 129	— 66	9 — 59.4	— 0.002 6000	4.904 786	— 65
— 0.007 6000	4.908 063	— 66		— 0.002 5000	4.904 721	— 65
— 0.007 5000	4.907 997	— 65	— 65	— 0.002 4000	4.904 656	— 66
— 0.007 4000	4.907 932	— 66		— 0.002 3000	4.904 590	— 65
— 0.007 3000	4.907 866	— 66		— 0.002 2000	4.904 525	— 65
— 0.007 2000	4.907 800	— 66	1 — 6.5	— 0.002 1000	4.904 460	— 66
— 0.007 1000	4.907 734	— 65	2 — 13.0	— 0.002 0000	4.904 394	— 65
— 0.007 0000	4.907 669	— 66	3 — 19.5	— 0.001 9000	4.904 329	— 65
— 0.006 9000	4.907 603	— 66	4 — 26.0	— 0.001 8000	4.904 264	— 65
— 0.006 8000	4.907 537	— 65	5 — 32.5	— 0.001 7000	4.904 199	— 66
— 0.006 7000	4.907 472	— 66	6 — 39.0	— 0.001 6000	4.904 133	— 65
— 0.006 6000	4.907 406	— 66		— 0.001 5000	4.904 068	— 65
— 0.006 5000	4.907 340	— 65	7 — 45.5	— 0.001 4000	4.904 003	— 65
— 0.006 4000	4.907 275	— 66	8 — 52.0	— 0.001 3000	4.903 938	— 66
— 0.006 3000	4.907 209	— 65	9 — 58.5	— 0.001 2000	4.903 872	— 65
— 0.006 2000	4.907 144	— 66		— 0.001 1000	4.903 807	— 65
— 0.006 1000	4.907 078	— 66		— 0.001 0000	4.903 742	— 65
— 0.006 0000	4.907 012	— 65		— 0.000 9000	4.903 677	— 66
— 0.005 9000	4.906 947	— 66		— 0.000 8000	4.903 611	— 65
— 0.005 8000	4.906 881	— 65		— 0.000 7000	4.903 546	— 65
— 0.005 7000	4.906 816	— 66		— 0.000 6000	4.903 481	— 65
— 0.005 6000	4.906 750	— 66		— 0.000 5000	4.903 416	— 65
— 0.005 5000	4.906 684	— 65		— 0.000 4000	4.903 351	— 66
— 0.005 4000	4.906 619	— 66		— 0.000 3000	4.903 285	— 65
— 0.005 3000	4.906 553	— 65		— 0.000 2000	4.903 220	— 65
— 0.005 2000	4.906 488	— 66		— 0.000 1000	4.903 155	— 65
— 0.005 1000	4.906 422	— 65		0.000 0000	4.903 090	
— 0.005 0000	4.906 357					

Tafel XIII.

 σ -Tafel.

ν	$\log \sigma$	Diff.	$P. p.$	ν	$\log \sigma$	Diff.
0.000 0000	4.903 090	— 65		+ 0.005 0000	4.899 842	— 65
+ 0.000 1000	4.903 025	— 65		+ 0.005 1000	4.899 777	— 64
+ 0.000 2000	4.902 960	— 65		+ 0.005 2000	4.899 713	— 65
+ 0.000 3000	4.902 895	— 66		+ 0.005 3000	4.899 648	— 65
+ 0.000 4000	4.902 829	— 65		+ 0.005 4000	4.899 583	— 64
+ 0.000 5000	4.902 764	— 65		+ 0.005 5000	4.899 519	— 65
+ 0.000 6000	4.902 699	— 65		+ 0.005 6000	4.899 454	— 65
+ 0.000 7000	4.902 634	— 65	— 66	+ 0.005 7000	4.899 389	— 65
+ 0.000 8000	4.902 569	— 65		+ 0.005 8000	4.899 324	— 64
+ 0.000 9000	4.902 504	— 65	1 — 6.6	+ 0.005 9000	4.899 260	— 65
+ 0.001 0000	4.902 439	— 65	2 — 13.2	+ 0.006 0000	4.899 195	— 65
			3 — 19.8			
+ 0.001 1000	4.902 374	— 65	4 — 26.4	+ 0.006 1000	4.899 130	— 64
+ 0.001 2000	4.902 309	— 65	5 — 33.0	+ 0.006 2000	4.899 066	— 65
+ 0.001 3000	4.902 244	— 65	6 — 39.6	+ 0.006 3000	4.899 001	— 65
+ 0.001 4000	4.902 179	— 65		+ 0.006 4000	4.898 936	— 64
+ 0.001 5000	4.902 114	— 65	7 — 46.2	+ 0.006 5000	4.898 872	— 65
+ 0.001 6000	4.902 049	— 65	8 — 52.8	+ 0.006 6000	4.898 807	— 65
+ 0.001 7000	4.901 984	— 65	9 — 59.4	+ 0.006 7000	4.898 742	— 64
+ 0.001 8000	4.901 919	— 65		+ 0.006 8000	4.898 678	— 65
+ 0.001 9000	4.901 854	— 65	— 65	+ 0.006 9000	4.898 613	— 65
+ 0.002 0000	4.901 789	— 65		+ 0.007 0000	4.898 548	— 64
			1 — 6.5	+ 0.007 1000	4.898 484	— 65
+ 0.002 1000	4.901 724	— 65	2 — 13.0	+ 0.007 2000	4.898 419	— 64
+ 0.002 2000	4.901 659	— 65	3 — 19.5	+ 0.007 3000	4.898 355	— 65
+ 0.002 3000	4.901 594	— 65		+ 0.007 4000	4.898 290	— 65
+ 0.002 4000	4.901 529	— 65	4 — 26.0	+ 0.007 5000	4.898 225	— 64
+ 0.002 5000	4.901 464	— 65	5 — 32.5	+ 0.007 6000	4.898 161	— 65
+ 0.002 6000	4.901 399	— 65	6 — 39.0	+ 0.007 7000	4.898 096	— 64
+ 0.002 7000	4.901 334	— 65		+ 0.007 8000	4.898 032	— 65
+ 0.002 8000	4.901 269	— 65	7 — 45.5	+ 0.007 9000	4.897 967	— 64
+ 0.002 9000	4.901 204	— 65	8 — 52.0	+ 0.008 0000	4.897 903	— 65
+ 0.003 0000	4.901 139	— 65	9 — 58.5			
			— 64	+ 0.008 1000	4.897 838	— 64
+ 0.003 1000	4.901 074	— 65		+ 0.008 2000	4.897 774	— 65
+ 0.003 2000	4.901 009	— 65		+ 0.008 3000	4.897 709	— 64
+ 0.003 3000	4.900 944	— 65		+ 0.008 4000	4.897 645	— 65
+ 0.003 4000	4.900 879	— 64	1 — 6.4	+ 0.008 5000	4.897 580	— 64
+ 0.003 5000	4.900 815	— 65	2 — 12.8	+ 0.008 6000	4.897 516	— 65
+ 0.003 6000	4.900 750	— 65	3 — 19.2	+ 0.008 7000	4.897 451	— 64
+ 0.003 7000	4.900 685	— 65		+ 0.008 8000	4.897 387	— 65
+ 0.003 8000	4.900 620	— 65	4 — 25.6	+ 0.008 9000	4.897 322	— 64
+ 0.003 9000	4.900 555	— 65	5 — 32.0	+ 0.009 0000	4.897 258	— 65
+ 0.004 0000	4.900 490	— 65	6 — 38.4			
			7 — 44.8	+ 0.009 1000	4.897 193	— 64
+ 0.004 1000	4.900 425	— 64	8 — 51.2	+ 0.009 2000	4.897 129	— 65
+ 0.004 2000	4.900 361	— 65	9 — 57.6	+ 0.009 3000	4.897 064	— 64
+ 0.004 3000	4.900 296	— 65		+ 0.009 4000	4.897 000	— 65
+ 0.004 4000	4.900 231	— 65		+ 0.009 5000	4.896 935	— 64
+ 0.004 5000	4.900 166	— 65		+ 0.009 6000	4.896 871	— 64
+ 0.004 6000	4.900 101	— 64		+ 0.009 7000	4.896 807	— 65
+ 0.004 7000	4.900 037	— 65		+ 0.009 8000	4.896 742	— 64
+ 0.004 8000	4.899 972	— 65		+ 0.009 9000	4.896 678	— 65
+ 0.004 9000	4.899 907	— 65		+ 0.010 0000	4.896 613	— 65
+ 0.005 0000	4.899 842	— 65				

Tafel XIII.

 σ -Tafel.

r	$\log \sigma$	Diff.	$P. p.$	r	$\log \sigma$	Diff.
+ 0.010 0000	+ .896 613	— 64		+ 0.015 0000	+ .893 403	— 64
+ 0.010 1000	+ .896 549	— 64		+ 0.015 1000	+ .893 339	— 64
+ 0.010 2000	+ .896 485	— 65		+ 0.015 2000	+ .893 275	— 64
+ 0.010 3000	+ .896 420	— 64		+ 0.015 3000	+ .893 211	— 64
+ 0.010 4000	+ .896 356	— 65		+ 0.015 4000	+ .893 147	— 64
+ 0.010 5000	+ .896 291	— 64		+ 0.015 5000	+ .893 083	— 64
+ 0.010 6000	+ .896 227	— 64	— 65	+ 0.015 6000	+ .893 019	— 64
+ 0.010 7000	+ .896 163	— 65	— 65	+ 0.015 7000	+ .892 955	— 64
+ 0.010 8000	+ .896 098	— 64	1 — 6.5	+ 0.015 8000	+ .892 891	— 64
+ 0.010 9000	+ .896 034	— 64	2 — 13.0	+ 0.015 9000	+ .892 827	— 64
+ 0.011 0000	+ .895 970	— 65	3 — 19.5	+ 0.016 0000	+ .892 763	— 64
+ 0.011 1000	+ .895 905	— 64	4 — 26.0	+ 0.016 1000	+ .892 699	— 64
+ 0.011 2000	+ .895 841	— 64	5 — 32.5	+ 0.016 2000	+ .892 635	— 64
+ 0.011 3000	+ .895 777	— 64	6 — 39.0	+ 0.016 3000	+ .892 571	— 64
+ 0.011 4000	+ .895 713	— 65		+ 0.016 4000	+ .892 507	— 64
+ 0.011 5000	+ .895 648	— 64	7 — 45.5	+ 0.016 5000	+ .892 443	— 63
+ 0.011 6000	+ .895 584	— 64	8 — 52.0	+ 0.016 6000	+ .892 380	— 64
+ 0.011 7000	+ .895 520	— 65	9 — 58.5	+ 0.016 7000	+ .892 316	— 64
+ 0.011 8000	+ .895 455	— 64	— 64	+ 0.016 8000	+ .892 252	— 64
+ 0.011 9000	+ .895 391	— 64		+ 0.016 9000	+ .892 188	— 64
+ 0.012 0000	+ .895 327	— 64	— 64	+ 0.017 0000	+ .892 124	— 64
+ 0.012 1000	+ .895 263	— 65	1 — 6.4	+ 0.017 1000	+ .892 060	— 64
+ 0.012 2000	+ .895 198	— 64	2 — 12.8	+ 0.017 2000	+ .891 996	— 64
+ 0.012 3000	+ .895 134	— 64	3 — 19.2	+ 0.017 3000	+ .891 932	— 63
+ 0.012 4000	+ .895 070	— 64	4 — 25.6	+ 0.017 4000	+ .891 869	— 64
+ 0.012 5000	+ .895 006	— 64	5 — 32.0	+ 0.017 5000	+ .891 805	— 64
+ 0.012 6000	+ .894 942	— 65	6 — 38.4	+ 0.017 6000	+ .891 741	— 64
+ 0.012 7000	+ .894 877	— 64	7 — 44.8	+ 0.017 7000	+ .891 677	— 64
+ 0.012 8000	+ .894 813	— 64	8 — 51.2	+ 0.017 8000	+ .891 613	— 64
+ 0.012 9000	+ .894 749	— 64	9 — 57.6	+ 0.017 9000	+ .891 549	— 63
+ 0.013 0000	+ .894 685	— 64	— 64	+ 0.018 0000	+ .891 486	— 64
+ 0.013 1000	+ .894 621	— 64	— 63	+ 0.018 1000	+ .891 422	— 64
+ 0.013 2000	+ .894 557	— 65		+ 0.018 2000	+ .891 358	— 64
+ 0.013 3000	+ .894 492	— 64	1 — 6.3	+ 0.018 3000	+ .891 294	— 64
+ 0.013 4000	+ .894 428	— 64	2 — 12.6	+ 0.018 4000	+ .891 230	— 63
+ 0.013 5000	+ .894 364	— 64	3 — 18.9	+ 0.018 5000	+ .891 167	— 64
+ 0.013 6000	+ .894 300	— 64	4 — 25.2	+ 0.018 6000	+ .891 103	— 64
+ 0.013 7000	+ .894 236	— 64	5 — 31.5	+ 0.018 7000	+ .891 039	— 64
+ 0.013 8000	+ .894 172	— 64	6 — 37.8	+ 0.018 8000	+ .890 975	— 63
+ 0.013 9000	+ .894 108	— 64	7 — 44.1	+ 0.018 9000	+ .890 912	— 64
+ 0.014 0000	+ .894 044	— 65	8 — 50.4	+ 0.019 0000	+ .890 848	— 64
+ 0.014 1000	+ .893 979	— 64	9 — 56.7	+ 0.019 1000	+ .890 784	— 64
+ 0.014 2000	+ .893 915	— 64		+ 0.019 2000	+ .890 720	— 63
+ 0.014 3000	+ .893 851	— 64		+ 0.019 3000	+ .890 657	— 64
+ 0.014 4000	+ .893 787	— 64		+ 0.019 4000	+ .890 593	— 64
+ 0.014 5000	+ .893 723	— 64		+ 0.019 5000	+ .890 529	— 63
+ 0.014 6000	+ .893 659	— 64		+ 0.019 6000	+ .890 466	— 64
+ 0.014 7000	+ .893 595	— 64		+ 0.019 7000	+ .890 402	— 64
+ 0.014 8000	+ .893 531	— 64		+ 0.019 8000	+ .890 338	— 63
+ 0.014 9000	+ .893 467	— 64		+ 0.019 9000	+ .890 275	— 64
+ 0.015 0000	+ .893 403			+ 0.020 0000	+ .890 211	

Tafel XIII.

 σ -Tafel.

ν	$\log \sigma$	Diff.	$P. p.$	ν	$\log \sigma$	Diff.
+ 0.020 0000	4.890 211			+ 0.025 0000	4.887 037	
		— 64				— 63
+ 0.020 1000	4.890 147	— 63		+ 0.025 1000	4.886 974	— 63
+ 0.020 2000	4.890 084	— 64		+ 0.025 2000	4.886 911	— 63
+ 0.020 3000	4.890 020	— 64		+ 0.025 3000	4.886 847	— 64
+ 0.020 4000	4.889 956	— 64		+ 0.025 4000	4.886 784	— 63
+ 0.020 5000	4.889 893	— 63		+ 0.025 5000	4.886 721	— 63
+ 0.020 6000	4.889 829	— 64		+ 0.025 6000	4.886 658	— 63
+ 0.020 7000	4.889 766	— 63	— 64	+ 0.025 7000	4.886 594	— 64
+ 0.020 8000	4.889 702	— 64		+ 0.025 8000	4.886 531	— 63
+ 0.020 9000	4.889 638	— 63	1 — 6.4	+ 0.025 9000	4.886 468	— 63
+ 0.021 0000	4.889 575	— 63	2 — 12.8	+ 0.026 0000	4.886 405	— 63
		— 64	3 — 19.2			— 64
+ 0.021 1000	4.889 511	— 63	4 — 25.6	+ 0.026 1000	4.886 341	— 63
+ 0.021 2000	4.889 448	— 64	5 — 32.0	+ 0.026 2000	4.886 278	— 63
+ 0.021 3000	4.889 384	— 63	6 — 38.4	+ 0.026 3000	4.886 215	— 63
+ 0.021 4000	4.889 321	— 64		+ 0.026 4000	4.886 152	— 63
+ 0.021 5000	4.889 257	— 64	7 — 44.8	+ 0.026 5000	4.886 089	— 63
+ 0.021 6000	4.889 193	— 63	8 — 51.2	+ 0.026 6000	4.886 026	— 63
+ 0.021 7000	4.889 130	— 64	9 — 57.6	+ 0.026 7000	4.885 962	— 64
+ 0.021 8000	4.889 066	— 63		+ 0.026 8000	4.885 899	— 63
+ 0.021 9000	4.889 003	— 64	— 63	+ 0.026 9000	4.885 836	— 63
+ 0.022 0000	4.888 939	— 63		+ 0.027 0000	4.885 773	— 63
		— 64	1 — 6.3	+ 0.027 1000	4.885 710	— 63
+ 0.022 1000	4.888 876	— 63	2 — 12.6	+ 0.027 2000	4.885 647	— 64
+ 0.022 2000	4.888 812	— 63	3 — 18.9	+ 0.027 3000	4.885 583	— 63
+ 0.022 3000	4.888 749	— 64		+ 0.027 4000	4.885 520	— 63
+ 0.022 4000	4.888 685	— 63	4 — 25.2	+ 0.027 5000	4.885 457	— 63
+ 0.022 5000	4.888 622	— 64	5 — 31.5	+ 0.027 6000	4.885 394	— 63
+ 0.022 6000	4.888 558	— 63	6 — 37.8	+ 0.027 7000	4.885 331	— 63
+ 0.022 7000	4.888 495	— 64		+ 0.027 8000	4.885 268	— 63
+ 0.022 8000	4.888 431	— 63	7 — 44.1	+ 0.027 9000	4.885 205	— 63
+ 0.022 9000	4.888 368	— 63	8 — 50.4	+ 0.028 0000	4.885 142	— 63
+ 0.023 0000	4.888 305	— 64	9 — 56.7			— 63
		— 63	— 62	+ 0.028 1000	4.885 079	— 63
+ 0.023 1000	4.888 241	— 63		+ 0.028 2000	4.885 016	— 63
+ 0.023 2000	4.888 178	— 64		+ 0.028 3000	4.884 953	— 64
+ 0.023 3000	4.888 114	— 63		+ 0.028 4000	4.884 889	— 63
+ 0.023 4000	4.888 051	— 63	1 — 6.2	+ 0.028 5000	4.884 826	— 63
+ 0.023 5000	4.887 988	— 64	2 — 12.4	+ 0.028 6000	4.884 763	— 63
+ 0.023 6000	4.887 924	— 63	3 — 18.6	+ 0.028 7000	4.884 700	— 63
+ 0.023 7000	4.887 861	— 64		+ 0.028 8000	4.884 637	— 63
+ 0.023 8000	4.887 797	— 63	4 — 24.8	+ 0.028 9000	4.884 574	— 63
+ 0.023 9000	4.887 734	— 63	5 — 31.0	+ 0.029 0000	4.884 511	— 63
+ 0.024 0000	4.887 671	— 64	6 — 37.2			— 63
		— 63	7 — 43.4	+ 0.029 1000	4.884 448	— 63
+ 0.024 1000	4.887 607	— 63	8 — 49.6	+ 0.029 2000	4.884 385	— 63
+ 0.024 2000	4.887 544	— 63	9 — 55.8	+ 0.029 3000	4.884 322	— 63
+ 0.024 3000	4.887 481	— 64		+ 0.029 4000	4.884 259	— 63
+ 0.024 4000	4.887 417	— 63		+ 0.029 5000	4.884 196	— 63
+ 0.024 5000	4.887 354	— 63		+ 0.029 6000	4.884 133	— 63
+ 0.024 6000	4.887 291	— 63		+ 0.029 7000	4.884 070	— 63
+ 0.024 7000	4.887 227	— 64		+ 0.029 8000	4.884 007	— 62
+ 0.024 8000	4.887 164	— 63		+ 0.029 9000	4.883 945	— 63
+ 0.024 9000	4.887 101	— 64		+ 0.030 0000	4.883 882	— 63
+ 0.025 0000	4.887 037					

Tafel XIV.

vergl. pag. 297.

$h \setminus J$	$J(h \setminus J)$	Diff.	$h \setminus J$	$J(h \setminus J)$	Diff.	$h \setminus J$	$J(h \setminus J)$	Diff.	$h \setminus J$	$J(h \setminus J)$	Diff.
0.00	0.00000	1128	0.50	0.52050	874	1.00	0.84270	411	1.50	0.96611	117
0.01	0.01128	1128	0.51	0.52924	866	1.01	0.84681	403	1.51	0.96728	113
0.02	0.02256	1128	0.52	0.53790	856	1.02	0.85084	394	1.52	0.96841	111
0.03	0.03384	1127	0.53	0.54646	848	1.03	0.85478	387	1.53	0.96952	107
0.04	0.04511	1126	0.54	0.55494	838	1.04	0.85865	379	1.54	0.97059	103
0.05	0.05637	1125	0.55	0.56332	830	1.05	0.86244	370	1.55	0.97162	101
0.06	0.06762	1124	0.56	0.57162	820	1.06	0.86614	363	1.56	0.97263	97
0.07	0.07886	1122	0.57	0.57982	810	1.07	0.86977	356	1.57	0.97360	95
0.08	0.09008	1120	0.58	0.58792	802	1.08	0.87333	347	1.58	0.97455	91
0.09	0.10128	1118	0.59	0.59594	792	1.09	0.87680	341	1.59	0.97546	89
0.10	0.11246	1116	0.60	0.60386	782	1.10	0.88021	332	1.60	0.97635	86
0.11	0.12362	1114	0.61	0.61168	773	1.11	0.88353	326	1.61	0.97721	83
0.12	0.13476	1111	0.62	0.61941	764	1.12	0.88679	318	1.62	0.97804	80
0.13	0.14587	1108	0.63	0.62705	754	1.13	0.88997	311	1.63	0.97884	78
0.14	0.15695	1105	0.64	0.63459	744	1.14	0.89308	304	1.64	0.97962	76
0.15	0.16800	1101	0.65	0.64203	735	1.15	0.89612	298	1.65	0.98038	72
0.16	0.17901	1098	0.66	0.64938	725	1.16	0.89910	290	1.66	0.98110	71
0.17	0.18999	1095	0.67	0.65663	715	1.17	0.90200	284	1.67	0.98181	68
0.18	0.20094	1090	0.68	0.66378	706	1.18	0.90484	277	1.68	0.98249	66
0.19	0.21184	1086	0.69	0.67084	696	1.19	0.90761	270	1.69	0.98315	64
0.20	0.22270	1082	0.70	0.67780	687	1.20	0.91031	265	1.70	0.98379	62
0.21	0.23352	1078	0.71	0.68467	676	1.21	0.91296	257	1.71	0.98441	59
0.22	0.24430	1072	0.72	0.69143	667	1.22	0.91553	252	1.72	0.98500	58
0.23	0.25502	1068	0.73	0.69810	658	1.23	0.91805	246	1.73	0.98558	55
0.24	0.26570	1063	0.74	0.70468	648	1.24	0.92051	239	1.74	0.98613	54
0.25	0.27633	1057	0.75	0.71116	638	1.25	0.92290	234	1.75	0.98667	52
0.26	0.28690	1052	0.76	0.71754	628	1.26	0.92524	227	1.76	0.98719	50
0.27	0.29742	1046	0.77	0.72382	619	1.27	0.92751	222	1.77	0.98769	48
0.28	0.30788	1040	0.78	0.73001	609	1.28	0.92973	217	1.78	0.98817	47
0.29	0.31828	1035	0.79	0.73610	600	1.29	0.93190	211	1.79	0.98864	45
0.30	0.32863	1028	0.80	0.74210	590	1.30	0.93401	205	1.80	0.98909	43
0.31	0.33891	1022	0.81	0.74800	581	1.31	0.93606	201	1.81	0.98952	42
0.32	0.34913	1015	0.82	0.75381	571	1.32	0.93807	195	1.82	0.98994	41
0.33	0.35928	1008	0.83	0.75952	562	1.33	0.94002	189	1.83	0.99035	39
0.34	0.36936	1002	0.84	0.76514	553	1.34	0.94191	185	1.84	0.99074	37
0.35	0.37938	995	0.85	0.77067	543	1.35	0.94376	180	1.85	0.99111	36
0.36	0.38933	988	0.86	0.77610	534	1.36	0.94556	175	1.86	0.99147	35
0.37	0.39921	980	0.87	0.78144	525	1.37	0.94731	171	1.87	0.99182	34
0.38	0.40901	973	0.88	0.78669	515	1.38	0.94902	165	1.88	0.99216	32
0.39	0.41874	965	0.89	0.79184	507	1.39	0.95067	162	1.89	0.99248	31
0.40	0.42839	958	0.90	0.79691	497	1.40	0.95229	156	1.90	0.99279	30
0.41	0.43797	950	0.91	0.80188	489	1.41	0.95385	153	1.91	0.99309	29
0.42	0.44747	942	0.92	0.80677	479	1.42	0.95538	148	1.92	0.99338	28
0.43	0.45689	934	0.93	0.81156	471	1.43	0.95686	144	1.93	0.99366	26
0.44	0.46623	925	0.94	0.81627	462	1.44	0.95830	140	1.94	0.99392	26
0.45	0.47548	918	0.95	0.82089	453	1.45	0.95970	135	1.95	0.99418	25
0.46	0.48466	909	0.96	0.82542	445	1.46	0.96105	132	1.96	0.99443	23
0.47	0.49375	900	0.97	0.82987	436	1.47	0.96237	128	1.97	0.99466	23
0.48	0.50275	892	0.98	0.83423	428	1.48	0.96365	125	1.98	0.99489	22
0.49	0.51167	883	0.99	0.83851	419	1.49	0.96490	121	1.99	0.99511	21
0.50	0.52050		1.00	0.84270		1.50	0.96611		2.00	0.99532	

Tafel XV.

vergl. pag. 324.

H'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. p.	
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0	1
0.01	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004	1	0.0 0.1
0.02	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	2	0.0 0.2
0.03	0.0009	0.0010	0.0010	0.0011	0.0012	0.0012	0.0013	0.0014	0.0014	0.0015	3	0.0 0.3
0.04	0.0016	0.0017	0.0018	0.0018	0.0019	0.0020	0.0021	0.0022	0.0023	0.0024	4	0.0 0.4
0.05	0.0025	0.0026	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030	0.0031	0.0032	0.0034	0.0035	5	0.0 0.5
0.06	0.0036	0.0037	0.0038	0.0040	0.0041	0.0042	0.0044	0.0045	0.0046	0.0048	6	0.0 0.6
0.07	0.0049	0.0050	0.0052	0.0053	0.0055	0.0056	0.0058	0.0059	0.0061	0.0062	7	0.0 0.7
0.08	0.0064	0.0066	0.0067	0.0069	0.0071	0.0072	0.0074	0.0076	0.0077	0.0079	8	0.0 0.8
0.09	0.0081	0.0083	0.0085	0.0086	0.0088	0.0090	0.0092	0.0094	0.0096	0.0098	9	0.0 0.9
0.10	0.0100	0.0102	0.0104	0.0106	0.0108	0.0110	0.0112	0.0114	0.0117	0.0119	2	3
0.11	0.0121	0.0123	0.0125	0.0128	0.0130	0.0132	0.0135	0.0137	0.0139	0.0142	1	0.2 0.3
0.12	0.0144	0.0146	0.0149	0.0151	0.0154	0.0156	0.0159	0.0161	0.0164	0.0166	2	0.4 0.6
0.13	0.0169	0.0172	0.0174	0.0177	0.0180	0.0182	0.0185	0.0188	0.0190	0.0193	3	0.6 0.9
0.14	0.0196	0.0199	0.0202	0.0204	0.0207	0.0210	0.0213	0.0216	0.0219	0.0222	4	0.8 1.2
0.15	0.0225	0.0228	0.0231	0.0234	0.0237	0.0240	0.0243	0.0246	0.0250	0.0253	5	1.0 1.5
0.16	0.0256	0.0259	0.0262	0.0266	0.0269	0.0272	0.0276	0.0279	0.0282	0.0286	6	1.2 1.8
0.17	0.0289	0.0292	0.0296	0.0299	0.0303	0.0306	0.0310	0.0313	0.0317	0.0320	7	1.4 2.1
0.18	0.0324	0.0328	0.0331	0.0335	0.0339	0.0342	0.0346	0.0350	0.0353	0.0357	8	1.6 2.4
0.19	0.0361	0.0365	0.0369	0.0372	0.0376	0.0380	0.0384	0.0388	0.0392	0.0396	9	1.8 2.7
0.20	0.0400	0.0404	0.0408	0.0412	0.0416	0.0420	0.0424	0.0428	0.0433	0.0437	4	5
0.21	0.0441	0.0445	0.0449	0.0454	0.0458	0.0462	0.0467	0.0471	0.0475	0.0480	1	0.4 0.5
0.22	0.0484	0.0488	0.0493	0.0497	0.0502	0.0506	0.0511	0.0515	0.0520	0.0524	2	0.8 1.0
0.23	0.0529	0.0534	0.0538	0.0543	0.0548	0.0552	0.0557	0.0562	0.0566	0.0571	3	1.2 1.5
0.24	0.0576	0.0581	0.0586	0.0590	0.0595	0.0600	0.0605	0.0610	0.0615	0.0620	4	1.6 2.0
0.25	0.0625	0.0630	0.0635	0.0640	0.0645	0.0650	0.0655	0.0660	0.0666	0.0671	5	2.0 2.5
0.26	0.0676	0.0681	0.0686	0.0692	0.0697	0.0702	0.0708	0.0713	0.0718	0.0724	6	2.4 3.0
0.27	0.0729	0.0734	0.0740	0.0745	0.0751	0.0756	0.0762	0.0767	0.0773	0.0778	7	2.8 3.5
0.28	0.0784	0.0790	0.0795	0.0801	0.0807	0.0812	0.0818	0.0824	0.0829	0.0835	8	3.2 4.0
0.29	0.0841	0.0847	0.0853	0.0858	0.0864	0.0870	0.0876	0.0882	0.0888	0.0894	9	3.6 4.5
0.30	0.0900	0.0906	0.0912	0.0918	0.0924	0.0930	0.0936	0.0942	0.0949	0.0955	6	7
0.31	0.0961	0.0967	0.0973	0.0980	0.0986	0.0992	0.0999	0.1005	0.1011	0.1018	1	0.6 0.7
0.32	0.1024	0.1030	0.1037	0.1043	0.1050	0.1056	0.1063	0.1069	0.1076	0.1082	2	1.2 1.4
0.33	0.1089	0.1096	0.1102	0.1109	0.1116	0.1122	0.1129	0.1136	0.1142	0.1149	3	1.8 2.1
0.34	0.1156	0.1163	0.1170	0.1176	0.1183	0.1190	0.1197	0.1204	0.1211	0.1218	4	2.4 2.8
0.35	0.1225	0.1232	0.1239	0.1246	0.1253	0.1260	0.1267	0.1274	0.1282	0.1289	5	3.0 3.5
0.36	0.1296	0.1303	0.1310	0.1318	0.1325	0.1332	0.1340	0.1347	0.1354	0.1362	6	3.6 4.2
0.37	0.1369	0.1376	0.1384	0.1391	0.1399	0.1406	0.1414	0.1421	0.1429	0.1436	7	4.2 4.9
0.38	0.1444	0.1452	0.1459	0.1467	0.1475	0.1482	0.1490	0.1498	0.1505	0.1513	8	4.8 5.6
0.39	0.1521	0.1529	0.1537	0.1544	0.1552	0.1560	0.1568	0.1576	0.1584	0.1592	9	5.4 6.3
0.40	0.1600	0.1608	0.1616	0.1624	0.1632	0.1640	0.1648	0.1656	0.1665	0.1673	8	9
0.41	0.1681	0.1689	0.1697	0.1706	0.1714	0.1722	0.1731	0.1739	0.1747	0.1756	1	0.8 0.9
0.42	0.1764	0.1772	0.1781	0.1789	0.1798	0.1806	0.1815	0.1823	0.1832	0.1840	2	1.6 1.8
0.43	0.1849	0.1858	0.1866	0.1875	0.1884	0.1892	0.1901	0.1910	0.1918	0.1927	3	2.4 2.7
0.44	0.1936	0.1945	0.1954	0.1962	0.1971	0.1980	0.1989	0.1998	0.2007	0.2016	4	3.2 3.6
0.45	0.2025	0.2034	0.2043	0.2052	0.2061	0.2070	0.2079	0.2088	0.2098	0.2107	5	4.0 4.5
0.46	0.2116	0.2125	0.2134	0.2144	0.2153	0.2162	0.2172	0.2181	0.2190	0.2200	6	4.8 5.4
0.47	0.2209	0.2218	0.2228	0.2237	0.2247	0.2256	0.2266	0.2275	0.2285	0.2294	7	5.6 6.3
0.48	0.2304	0.2314	0.2323	0.2333	0.2343	0.2352	0.2362	0.2372	0.2381	0.2391	8	6.4 7.2
0.49	0.2401	0.2411	0.2421	0.2430	0.2440	0.2450	0.2460	0.2470	0.2480	0.2490	9	7.2 8.1
0.50	0.2500	0.2510	0.2520	0.2530	0.2540	0.2550	0.2560	0.2570	0.2581	0.2591	10	11
0.51	0.2600	0.2608	0.2616	0.2624	0.2632	0.2640	0.2648	0.2656	0.2665	0.2673	1	1.0 1.1
0.52	0.2681	0.2689	0.2697	0.2706	0.2714	0.2722	0.2731	0.2739	0.2747	0.2756	2	2.0 2.2
0.53	0.2764	0.2772	0.2781	0.2789	0.2798	0.2806	0.2815	0.2823	0.2832	0.2840	3	3.0 3.3
0.54	0.2849	0.2858	0.2866	0.2875	0.2884	0.2892	0.2901	0.2910	0.2918	0.2927	4	4.0 4.4
0.55	0.2936	0.2945	0.2954	0.2962	0.2971	0.2980	0.2989	0.2998	0.3007	0.3016	5	5.0 5.5
0.56	0.3025	0.3034	0.3043	0.3052	0.3061	0.3070	0.3079	0.3088	0.3098	0.3107	6	6.0 6.6
0.57	0.3116	0.3125	0.3134	0.3144	0.3153	0.3162	0.3172	0.3181	0.3190	0.3200	7	7.0 7.7
0.58	0.3209	0.3218	0.3228	0.3237	0.3247	0.3256	0.3266	0.3275	0.3285	0.3294	8	8.0 8.8
0.59	0.3304	0.3314	0.3323	0.3333	0.3343	0.3352	0.3362	0.3372	0.3381	0.3391	9	9.0 9.9
0.60	0.3401	0.3411	0.3421	0.3430	0.3440	0.3450	0.3460	0.3470	0.3480	0.3490		
H'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		

Tafel XV.

<i>W</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>P. p.</i>	
0.50	0.2500	0.2510	0.2520	0.2530	0.2540	0.2550	0.2560	0.2570	0.2581	0.2591	10	11
0.51	0.2601	0.2611	0.2621	0.2632	0.2642	0.2652	0.2663	0.2673	0.2683	0.2694	1	1.0
0.52	0.2704	0.2714	0.2725	0.2735	0.2746	0.2756	0.2767	0.2777	0.2788	0.2798	2	2.0
0.53	0.2809	0.2820	0.2830	0.2841	0.2852	0.2862	0.2873	0.2884	0.2894	0.2905	3	3.0
0.54	0.2916	0.2927	0.2938	0.2948	0.2959	0.2970	0.2981	0.2992	0.3003	0.3014	4	4.0
0.55	0.3025	0.3036	0.3047	0.3058	0.3069	0.3080	0.3091	0.3102	0.3114	0.3125	5	5.0
0.56	0.3136	0.3147	0.3158	0.3170	0.3181	0.3192	0.3204	0.3215	0.3226	0.3238	6	6.0
0.57	0.3249	0.3260	0.3272	0.3283	0.3295	0.3306	0.3318	0.3329	0.3341	0.3352	7	7.0
0.58	0.3364	0.3376	0.3387	0.3399	0.3411	0.3422	0.3434	0.3446	0.3457	0.3469	8	8.0
0.59	0.3481	0.3493	0.3505	0.3516	0.3528	0.3540	0.3552	0.3564	0.3576	0.3588	9	9.0
0.60	0.3600	0.3612	0.3624	0.3636	0.3648	0.3660	0.3672	0.3684	0.3697	0.3709	12	13
0.61	0.3721	0.3733	0.3745	0.3758	0.3770	0.3782	0.3795	0.3807	0.3819	0.3832	1	1.2
0.62	0.3844	0.3856	0.3869	0.3881	0.3894	0.3906	0.3919	0.3931	0.3944	0.3956	2	2.4
0.63	0.3969	0.3982	0.3994	0.4007	0.4020	0.4032	0.4045	0.4058	0.4070	0.4083	3	3.6
0.64	0.4096	0.4109	0.4122	0.4134	0.4147	0.4160	0.4173	0.4186	0.4199	0.4212	4	4.8
0.65	0.4225	0.4238	0.4251	0.4264	0.4277	0.4290	0.4303	0.4316	0.4330	0.4343	5	5.6
0.66	0.4356	0.4369	0.4382	0.4396	0.4409	0.4422	0.4436	0.4449	0.4462	0.4476	6	6.8
0.67	0.4489	0.4502	0.4516	0.4529	0.4543	0.4556	0.4570	0.4583	0.4597	0.4610	7	7.2
0.68	0.4624	0.4638	0.4651	0.4665	0.4679	0.4692	0.4706	0.4720	0.4733	0.4747	8	8.4
0.69	0.4761	0.4775	0.4789	0.4802	0.4816	0.4830	0.4844	0.4858	0.4872	0.4886	9	9.6
0.70	0.4900	0.4914	0.4928	0.4942	0.4956	0.4970	0.4984	0.4998	0.5013	0.5027	10	11
0.71	0.5041	0.5055	0.5069	0.5084	0.5098	0.5112	0.5127	0.5141	0.5155	0.5170	1	1.4
0.72	0.5184	0.5198	0.5213	0.5227	0.5242	0.5256	0.5271	0.5285	0.5300	0.5314	2	2.8
0.73	0.5329	0.5344	0.5358	0.5373	0.5388	0.5402	0.5417	0.5432	0.5446	0.5461	3	3.6
0.74	0.5476	0.5491	0.5506	0.5520	0.5535	0.5550	0.5565	0.5580	0.5595	0.5610	4	4.8
0.75	0.5625	0.5640	0.5655	0.5670	0.5685	0.5700	0.5715	0.5730	0.5746	0.5761	5	5.6
0.76	0.5776	0.5791	0.5806	0.5822	0.5837	0.5852	0.5868	0.5883	0.5898	0.5914	6	6.8
0.77	0.5929	0.5944	0.5960	0.5975	0.5991	0.6006	0.6022	0.6037	0.6053	0.6068	7	7.2
0.78	0.6084	0.6100	0.6115	0.6131	0.6147	0.6162	0.6178	0.6194	0.6209	0.6225	8	8.4
0.79	0.6241	0.6257	0.6273	0.6288	0.6304	0.6320	0.6336	0.6352	0.6368	0.6384	9	9.6
0.80	0.6400	0.6416	0.6432	0.6448	0.6464	0.6480	0.6496	0.6512	0.6529	0.6545	10	11
0.81	0.6561	0.6577	0.6593	0.6610	0.6626	0.6642	0.6659	0.6675	0.6691	0.6708	1	1.6
0.82	0.6724	0.6740	0.6757	0.6773	0.6790	0.6806	0.6823	0.6839	0.6856	0.6872	2	3.2
0.83	0.6889	0.6906	0.6922	0.6939	0.6956	0.6972	0.6989	0.7006	0.7022	0.7039	3	3.6
0.84	0.7056	0.7073	0.7090	0.7106	0.7123	0.7140	0.7157	0.7174	0.7191	0.7208	4	4.8
0.85	0.7225	0.7242	0.7259	0.7276	0.7293	0.7310	0.7327	0.7344	0.7362	0.7379	5	5.6
0.86	0.7396	0.7413	0.7430	0.7448	0.7465	0.7482	0.7500	0.7517	0.7534	0.7552	6	6.8
0.87	0.7569	0.7586	0.7604	0.7621	0.7639	0.7656	0.7674	0.7691	0.7709	0.7726	7	7.2
0.88	0.7744	0.7762	0.7779	0.7797	0.7815	0.7832	0.7850	0.7868	0.7885	0.7903	8	8.4
0.89	0.7921	0.7939	0.7957	0.7974	0.7992	0.8010	0.8028	0.8046	0.8064	0.8082	9	9.6
0.90	0.8100	0.8118	0.8136	0.8154	0.8172	0.8190	0.8208	0.8226	0.8245	0.8263	18	19
0.91	0.8281	0.8299	0.8317	0.8336	0.8354	0.8372	0.8391	0.8409	0.8427	0.8446	1	1.8
0.92	0.8464	0.8482	0.8501	0.8519	0.8538	0.8556	0.8575	0.8593	0.8612	0.8630	2	2.4
0.93	0.8649	0.8668	0.8686	0.8705	0.8724	0.8742	0.8761	0.8780	0.8798	0.8817	3	3.6
0.94	0.8836	0.8855	0.8874	0.8892	0.8911	0.8930	0.8949	0.8968	0.8987	0.9006	4	4.8
0.95	0.9025	0.9044	0.9063	0.9082	0.9101	0.9120	0.9139	0.9158	0.9178	0.9197	5	5.6
0.96	0.9216	0.9235	0.9254	0.9274	0.9293	0.9312	0.9332	0.9351	0.9370	0.9390	6	6.8
0.97	0.9409	0.9428	0.9448	0.9467	0.9487	0.9506	0.9526	0.9545	0.9565	0.9584	7	7.2
0.98	0.9604	0.9624	0.9643	0.9663	0.9683	0.9702	0.9722	0.9742	0.9761	0.9781	8	8.4
0.99	0.9801	0.9821	0.9841	0.9860	0.9880	0.9900	0.9920	0.9940	0.9960	0.9980	9	9.6
1.00	1.0000	1.0020	1.0040	1.0060	1.0080	1.0100	1.0120	1.0140	1.0161	1.0181	10	11
1.01	1.0201	1.0221	1.0241	1.0261	1.0281	1.0301	1.0321	1.0341	1.0361	1.0381	12	13
1.02	1.0401	1.0421	1.0441	1.0461	1.0481	1.0501	1.0521	1.0541	1.0561	1.0581	14	15
1.03	1.0601	1.0621	1.0641	1.0661	1.0681	1.0701	1.0721	1.0741	1.0761	1.0781	16	17
1.04	1.0801	1.0821	1.0841	1.0861	1.0881	1.0901	1.0921	1.0941	1.0961	1.0981	18	19
1.05	1.1001	1.1021	1.1041	1.1061	1.1081	1.1101	1.1121	1.1141	1.1161	1.1181	20	21
1.06	1.1201	1.1221	1.1241	1.1261	1.1281	1.1301	1.1321	1.1341	1.1361	1.1381	22	23
1.07	1.1401	1.1421	1.1441	1.1461	1.1481	1.1501	1.1521	1.1541	1.1561	1.1581	24	25
1.08	1.1601	1.1621	1.1641	1.1661	1.1681	1.1701	1.1721	1.1741	1.1761	1.1781	26	27
1.09	1.1801	1.1821	1.1841	1.1861	1.1881	1.1901	1.1921	1.1941	1.1961	1.1981	28	29
1.10	1.2001	1.2021	1.2041	1.2061	1.2081	1.2101	1.2121	1.2141	1.2161	1.2181	30	31

Tafel XV.

<i>H'</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>P. p.</i>		
1.00	1.0000	1.0020	1.0040	1.0060	1.0080	1.0100	1.0120	1.0140	1.0161	1.0181	20	21	
1.01	1.0201	1.0221	1.0241	1.0262	1.0282	1.0302	1.0323	1.0343	1.0363	1.0384	1	2.0 2.1	
1.02	1.0404	1.0424	1.0445	1.0465	1.0486	1.0506	1.0527	1.0547	1.0568	1.0588	2	4.0 4.2	
1.03	1.0609	1.0630	1.0650	1.0671	1.0692	1.0712	1.0733	1.0754	1.0774	1.0795	3	6.0 6.3	
1.04	1.0816	1.0837	1.0858	1.0878	1.0899	1.0920	1.0941	1.0962	1.0983	1.1004	4	8.0 8.4	
1.05	1.1025	1.1046	1.1067	1.1088	1.1109	1.1130	1.1151	1.1172	1.1194	1.1215	5	10.0 10.5	
1.06	1.1236	1.1257	1.1278	1.1300	1.1321	1.1342	1.1364	1.1385	1.1406	1.1428	6	12.0 12.6	
1.07	1.1449	1.1470	1.1492	1.1513	1.1535	1.1556	1.1578	1.1599	1.1621	1.1642	7	14.0 14.7	
1.08	1.1664	1.1686	1.1707	1.1729	1.1751	1.1772	1.1794	1.1816	1.1837	1.1859	8	16.0 16.8	
1.09	1.1881	1.1903	1.1925	1.1946	1.1968	1.1990	1.2012	1.2034	1.2056	1.2078	9	18.0 18.9	
1.10	1.2100	1.2122	1.2144	1.2166	1.2188	1.2210	1.2232	1.2254	1.2277	1.2299	22	23	
1.11	1.2321	1.2343	1.2365	1.2388	1.2410	1.2432	1.2455	1.2477	1.2499	1.2522	1	2.2 2.3	
1.12	1.2544	1.2566	1.2589	1.2611	1.2634	1.2656	1.2679	1.2701	1.2724	1.2746	2	4.4 4.6	
1.13	1.2769	1.2792	1.2814	1.2837	1.2860	1.2882	1.2905	1.2928	1.2950	1.2973	3	6.6 6.9	
1.14	1.2996	1.3019	1.3042	1.3064	1.3087	1.3110	1.3133	1.3156	1.3179	1.3202	4	8.8 9.2	
1.15	1.3225	1.3248	1.3271	1.3294	1.3317	1.3340	1.3363	1.3386	1.3410	1.3433	5	11.0 11.5	
1.16	1.3456	1.3479	1.3502	1.3526	1.3549	1.3572	1.3596	1.3619	1.3642	1.3666	6	13.2 13.8	
1.17	1.3689	1.3712	1.3736	1.3759	1.3783	1.3806	1.3830	1.3853	1.3877	1.3900	7	15.4 16.1	
1.18	1.3924	1.3948	1.3971	1.3995	1.4019	1.4042	1.4066	1.4090	1.4113	1.4137	8	17.6 18.4	
1.19	1.4161	1.4185	1.4209	1.4232	1.4256	1.4280	1.4304	1.4328	1.4352	1.4376	9	19.8 20.7	
1.20	1.4400	1.4424	1.4448	1.4472	1.4496	1.4520	1.4544	1.4568	1.4593	1.4617	24	25	
1.21	1.4641	1.4665	1.4689	1.4714	1.4738	1.4762	1.4787	1.4811	1.4835	1.4860	1	2.4 2.5	
1.22	1.4884	1.4908	1.4933	1.4957	1.4982	1.5006	1.5031	1.5055	1.5080	1.5104	2	4.8 5.0	
1.23	1.5129	1.5154	1.5178	1.5203	1.5228	1.5252	1.5277	1.5302	1.5326	1.5351	3	7.2 7.5	
1.24	1.5376	1.5401	1.5426	1.5450	1.5475	1.5500	1.5525	1.5550	1.5575	1.5600	4	9.6 10.0	
1.25	1.5625	1.5650	1.5675	1.5700	1.5725	1.5750	1.5775	1.5800	1.5826	1.5851	5	12.0 12.5	
1.26	1.5876	1.5901	1.5926	1.5952	1.5977	1.6002	1.6028	1.6053	1.6078	1.6104	6	14.4 15.0	
1.27	1.6129	1.6154	1.6180	1.6205	1.6231	1.6256	1.6282	1.6307	1.6333	1.6358	7	16.8 17.5	
1.28	1.6384	1.6410	1.6435	1.6461	1.6487	1.6512	1.6538	1.6564	1.6589	1.6615	8	19.2 20.0	
1.29	1.6641	1.6667	1.6693	1.6718	1.6744	1.6770	1.6796	1.6822	1.6848	1.6874	9	21.6 22.5	
1.30	1.6900	1.6926	1.6952	1.6978	1.7004	1.7030	1.7056	1.7082	1.7109	1.7135	26	27	
1.31	1.7161	1.7187	1.7213	1.7240	1.7266	1.7292	1.7319	1.7345	1.7371	1.7398	1	2.6 2.7	
1.32	1.7424	1.7450	1.7477	1.7503	1.7530	1.7556	1.7583	1.7609	1.7636	1.7662	2	5.2 5.4	
1.33	1.7689	1.7716	1.7742	1.7769	1.7796	1.7822	1.7849	1.7876	1.7902	1.7929	3	7.8 8.1	
1.34	1.7956	1.7983	1.8010	1.8036	1.8063	1.8090	1.8117	1.8144	1.8171	1.8198	4	10.4 10.8	
1.35	1.8225	1.8252	1.8279	1.8306	1.8333	1.8360	1.8387	1.8414	1.8442	1.8469	5	13.0 13.5	
1.36	1.8496	1.8523	1.8550	1.8578	1.8605	1.8632	1.8660	1.8687	1.8714	1.8742	6	15.6 16.2	
1.37	1.8769	1.8796	1.8824	1.8851	1.8879	1.8906	1.8934	1.8961	1.8989	1.9016	7	18.2 18.9	
1.38	1.9044	1.9072	1.9099	1.9127	1.9155	1.9182	1.9210	1.9238	1.9265	1.9293	8	20.8 21.6	
1.39	1.9321	1.9349	1.9377	1.9404	1.9432	1.9460	1.9488	1.9516	1.9544	1.9572	9	23.4 24.3	
1.40	1.9600	1.9628	1.9656	1.9684	1.9712	1.9740	1.9768	1.9796	1.9825	1.9853	28	29	
1.41	1.9881	1.9909	1.9937	1.9966	1.9994	2.0022	2.0051	2.0079	2.0107	2.0136	1	2.8 2.9	
1.42	2.0164	2.0192	2.0221	2.0249	2.0278	2.0306	2.0335	2.0363	2.0392	2.0420	2	5.6 5.8	
1.43	2.0449	2.0478	2.0506	2.0535	2.0564	2.0592	2.0621	2.0650	2.0678	2.0707	3	8.4 8.7	
1.44	2.0736	2.0765	2.0794	2.0822	2.0851	2.0880	2.0909	2.0938	2.0967	2.0996	4	11.2 11.6	
1.45	2.1025	2.1054	2.1083	2.1112	2.1141	2.1170	2.1199	2.1228	2.1258	2.1287	5	14.0 14.5	
1.46	2.1316	2.1345	2.1374	2.1404	2.1433	2.1462	2.1492	2.1521	2.1550	2.1580	6	16.8 17.4	
1.47	2.1609	2.1638	2.1668	2.1697	2.1727	2.1756	2.1786	2.1815	2.1845	2.1874	7	19.6 20.3	
1.48	2.1904	2.1934	2.1963	2.1993	2.2023	2.2052	2.2082	2.2112	2.2141	2.2171	8	22.4 23.2	
1.49	2.2201	2.2231	2.2261	2.2290	2.2320	2.2350	2.2380	2.2410	2.2440	2.2470	9	25.2 26.1	
1.50	2.2500	2.2530	2.2560	2.2590	2.2620	2.2650	2.2680	2.2710	2.2741	2.2771	30	31	
1	3.0 3.1	2	6.0 6.2	3	9.0 9.3	4	12.0 12.4	5	15.0 15.5	6	18.0 18.6	7	21.0 21.7
8	24.0 24.8	9	27.0 27.9										
<i>H'</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			

Tafel XV.

И	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. p.
1.50	2.2500	2.2530	2.2560	2.2590	2.2620	2.2650	2.2680	2.2710	2.2741	2.2771	30 31
1.51	2.2801	2.2831	2.2861	2.2892	2.2922	2.2952	2.2983	2.3013	2.3043	2.3074	1 3.0 3.1
1.52	2.3104	2.3134	2.3165	2.3195	2.3226	2.3256	2.3287	2.3317	2.3348	2.3378	2 6.0 6.2
1.53	2.3409	2.3440	2.3470	2.3501	2.3532	2.3562	2.3593	2.3624	2.3654	2.3685	3 9.0 9.3
1.54	2.3716	2.3747	2.3778	2.3808	2.3839	2.3870	2.3901	2.3932	2.3963	2.3994	4 12.0 12.4
1.55	2.4025	2.4056	2.4087	2.4118	2.4149	2.4180	2.4211	2.4242	2.4274	2.4305	5 15.0 15.5
1.56	2.4336	2.4367	2.4398	2.4430	2.4461	2.4492	2.4524	2.4555	2.4586	2.4618	6 18.0 18.6
1.57	2.4649	2.4680	2.4712	2.4743	2.4775	2.4806	2.4838	2.4869	2.4901	2.4932	7 21.0 21.7
1.58	2.4964	2.4996	2.5027	2.5059	2.5091	2.5122	2.5154	2.5186	2.5217	2.5249	8 24.0 24.8
1.59	2.5281	2.5313	2.5345	2.5376	2.5408	2.5440	2.5472	2.5504	2.5536	2.5568	9 27.0 27.9
1.60	2.5600	2.5632	2.5664	2.5696	2.5728	2.5760	2.5792	2.5824	2.5857	2.5889	32 33
1.61	2.5921	2.5953	2.5985	2.6018	2.6050	2.6082	2.6115	2.6147	2.6179	2.6212	1 3.2 3.3
1.62	2.6244	2.6276	2.6309	2.6341	2.6374	2.6406	2.6439	2.6471	2.6504	2.6536	2 6.4 6.6
1.63	2.6569	2.6602	2.6634	2.6667	2.6700	2.6732	2.6765	2.6798	2.6830	2.6863	3 9.6 9.9
1.64	2.6896	2.6929	2.6962	2.6994	2.7027	2.7060	2.7093	2.7126	2.7159	2.7192	4 12.8 13.2
1.65	2.7225	2.7258	2.7291	2.7324	2.7357	2.7390	2.7423	2.7456	2.7490	2.7523	5 16.0 16.5
1.66	2.7556	2.7589	2.7622	2.7656	2.7689	2.7722	2.7756	2.7789	2.7822	2.7856	6 19.2 19.8
1.67	2.7889	2.7922	2.7956	2.7989	2.8023	2.8056	2.8090	2.8123	2.8157	2.8190	7 22.4 23.1
1.68	2.8224	2.8258	2.8291	2.8325	2.8359	2.8392	2.8426	2.8460	2.8493	2.8527	8 25.6 26.4
1.69	2.8561	2.8595	2.8629	2.8662	2.8696	2.8730	2.8764	2.8798	2.8832	2.8866	9 28.8 29.7
1.70	2.8900	2.8934	2.8968	2.9002	2.9036	2.9070	2.9104	2.9138	2.9173	2.9207	34 35
1.71	2.9241	2.9275	2.9309	2.9344	2.9378	2.9412	2.9447	2.9481	2.9515	2.9550	1 3.4 3.5
1.72	2.9584	2.9618	2.9653	2.9687	2.9722	2.9756	2.9791	2.9825	2.9860	2.9894	2 6.8 7.0
1.73	2.9929	2.9964	2.9998	3.0033	3.0068	3.0102	3.0137	3.0172	3.0206	3.0241	3 10.2 10.5
1.74	3.0276	3.0311	3.0346	3.0380	3.0415	3.0450	3.0485	3.0520	3.0555	3.0590	4 13.6 14.0
1.75	3.0625	3.0660	3.0695	3.0730	3.0765	3.0800	3.0835	3.0870	3.0906	3.0941	5 17.0 17.5
1.76	3.0976	3.1011	3.1046	3.1082	3.1117	3.1152	3.1188	3.1223	3.1258	3.1294	6 20.4 21.0
1.77	3.1329	3.1364	3.1400	3.1435	3.1471	3.1506	3.1542	3.1577	3.1613	3.1648	7 23.8 24.5
1.78	3.1684	3.1720	3.1755	3.1791	3.1827	3.1862	3.1898	3.1934	3.1969	3.2005	8 27.2 28.0
1.79	3.2041	3.2077	3.2113	3.2148	3.2184	3.2220	3.2256	3.2292	3.2328	3.2364	9 30.6 31.5
1.80	3.2400	3.2436	3.2472	3.2508	3.2544	3.2580	3.2616	3.2652	3.2689	3.2725	36 37
1.81	3.2761	3.2797	3.2833	3.2870	3.2906	3.2942	3.2979	3.3015	3.3051	3.3088	1 3.6 3.7
1.82	3.3124	3.3160	3.3197	3.3233	3.3270	3.3306	3.3343	3.3379	3.3416	3.3452	2 7.2 7.4
1.83	3.3489	3.3526	3.3562	3.3599	3.3636	3.3672	3.3709	3.3746	3.3782	3.3819	3 10.8 11.1
1.84	3.3856	3.3893	3.3930	3.3966	3.4003	3.4040	3.4077	3.4114	3.4151	3.4188	4 14.4 14.8
1.85	3.4225	3.4262	3.4299	3.4336	3.4373	3.4410	3.4447	3.4484	3.4522	3.4559	5 18.0 18.5
1.86	3.4596	3.4633	3.4670	3.4708	3.4745	3.4782	3.4820	3.4857	3.4894	3.4932	6 21.6 22.2
1.87	3.4969	3.5006	3.5044	3.5081	3.5119	3.5156	3.5194	3.5231	3.5269	3.5306	7 25.2 25.9
1.88	3.5344	3.5382	3.5419	3.5457	3.5495	3.5532	3.5570	3.5608	3.5645	3.5683	8 28.8 29.6
1.89	3.5721	3.5759	3.5797	3.5834	3.5872	3.5910	3.5948	3.5986	3.6024	3.6062	9 32.4 33.3
1.90	3.6100	3.6138	3.6176	3.6214	3.6252	3.6290	3.6328	3.6366	3.6405	3.6443	38 39
1.91	3.6481	3.6519	3.6557	3.6596	3.6634	3.6672	3.6711	3.6749	3.6787	3.6826	1 3.8 3.9
1.92	3.6864	3.6902	3.6941	3.6979	3.7018	3.7056	3.7095	3.7133	3.7172	3.7210	2 7.6 7.8
1.93	3.7249	3.7288	3.7326	3.7365	3.7404	3.7442	3.7481	3.7520	3.7558	3.7597	3 11.4 11.7
1.94	3.7636	3.7675	3.7714	3.7752	3.7791	3.7830	3.7869	3.7908	3.7947	3.7986	4 15.2 15.6
1.95	3.8025	3.8064	3.8103	3.8142	3.8181	3.8220	3.8259	3.8298	3.8338	3.8377	5 19.0 19.5
1.96	3.8416	3.8455	3.8494	3.8533	3.8573	3.8612	3.8652	3.8691	3.8730	3.8770	6 22.8 23.4
1.97	3.8809	3.8848	3.8888	3.8927	3.8967	3.9006	3.9046	3.9085	3.9125	3.9164	7 26.6 27.3
1.98	3.9204	3.9244	3.9283	3.9323	3.9363	3.9402	3.9442	3.9482	3.9521	3.9561	8 30.4 31.2
1.99	3.9601	3.9641	3.9681	3.9720	3.9760	3.9800	3.9840	3.9880	3.9920	3.9960	9 34.2 35.1
2.00	4.0000	4.0040	4.0080	4.0120	4.0160	4.0200	4.0240	4.0280	4.0321	4.0361	40 41
И	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Tafel XVI.

vergl. pag. 401.

θ	$\log E_2'$	Diff.	$\log E_4'$	Diff.	E_0'	Diff.	$\log E_4''$	Diff.
— 0.400	9 _n 81 869	+ 61	9 _n 93 107	— 8	+ 1.56 086	+ 122	9.38 847	— 26
— 0.399	9 _n 81 930	+ 60	9 _n 93 099	— 8	+ 1.56 208	+ 122	9.38 821	— 26
— 0.398	9 _n 81 990	+ 60	9 _n 93 091	— 8	+ 1.56 330	+ 122	9.38 795	— 26
— 0.397	9 _n 82 050	+ 60	9 _n 93 083	— 8	+ 1.56 452	+ 121	9.38 769	— 26
— 0.396	9 _n 82 110	+ 60	9 _n 93 075	— 8	+ 1.56 573	+ 122	9.38 743	— 26
— 0.395	9 _n 82 170	+ 60	9 _n 93 067	— 8	+ 1.56 695	+ 121	9.38 717	— 26
— 0.394	9 _n 82 230	+ 59	9 _n 93 059	— 8	+ 1.56 816	+ 122	9.38 691	— 25
— 0.393	9 _n 82 289	+ 60	9 _n 93 051	— 8	+ 1.56 938	+ 121	9.38 666	— 26
— 0.392	9 _n 82 349	+ 59	9 _n 93 043	— 8	+ 1.57 059	+ 121	9.38 640	— 26
— 0.391	9 _n 82 408	+ 60	9 _n 93 035	— 8	+ 1.57 180	+ 122	9.38 614	— 26
— 0.390	9 _n 82 468	+ 59	9 _n 93 027	— 7	+ 1.57 302	+ 121	9.38 588	— 26
— 0.389	9 _n 82 527	+ 59	9 _n 93 020	— 8	+ 1.57 423	+ 121	9.38 562	— 26
— 0.388	9 _n 82 586	+ 59	9 _n 93 012	— 8	+ 1.57 544	+ 121	9.38 536	— 25
— 0.387	9 _n 82 645	+ 59	9 _n 93 004	— 8	+ 1.57 665	+ 121	9.38 511	— 26
— 0.386	9 _n 82 704	+ 59	9 _n 92 996	— 8	+ 1.57 786	+ 121	9.38 485	— 26
— 0.385	9 _n 82 763	+ 59	9 _n 92 988	— 8	+ 1.57 907	+ 120	9.38 459	— 25
— 0.384	9 _n 82 822	+ 58	9 _n 92 980	— 8	+ 1.58 027	+ 121	9.38 434	— 26
— 0.383	9 _n 82 880	+ 59	9 _n 92 972	— 8	+ 1.58 148	+ 121	9.38 408	— 26
— 0.382	9 _n 82 939	+ 58	9 _n 92 964	— 7	+ 1.58 269	+ 120	9.38 382	— 25
— 0.381	9 _n 82 997	+ 59	9 _n 92 957	— 8	+ 1.58 389	+ 121	9.38 357	— 26
— 0.380	9 _n 83 056	+ 58	9 _n 92 949	— 8	+ 1.58 510	+ 120	9.38 331	— 25
— 0.379	9 _n 83 114	+ 58	9 _n 92 941	— 8	+ 1.58 630	+ 120	9.38 306	— 26
— 0.378	9 _n 83 172	+ 58	9 _n 92 933	— 8	+ 1.58 750	+ 120	9.38 280	— 25
— 0.377	9 _n 83 230	+ 58	9 _n 92 925	— 8	+ 1.58 870	+ 121	9.38 255	— 26
— 0.376	9 _n 83 288	+ 58	9 _n 92 917	— 7	+ 1.58 991	+ 120	9.38 229	— 25
— 0.375	9 _n 83 346	+ 58	9 _n 92 910	— 8	+ 1.59 111	+ 120	9.38 204	— 25
— 0.374	9 _n 83 404	+ 57	9 _n 92 902	— 8	+ 1.59 231	+ 120	9.38 179	— 26
— 0.373	9 _n 83 461	+ 58	9 _n 92 894	— 8	+ 1.59 351	+ 120	9.38 153	— 25
— 0.372	9 _n 83 519	+ 57	9 _n 92 886	— 8	+ 1.59 471	+ 119	9.38 128	— 25
— 0.371	9 _n 83 576	+ 57	9 _n 92 878	— 7	+ 1.59 590	+ 120	9.38 103	— 26
— 0.370	9 _n 83 633	+ 58	9 _n 92 871	— 8	+ 1.59 710	+ 120	9.38 077	— 25
— 0.369	9 _n 83 691	+ 57	9 _n 92 863	— 8	+ 1.59 830	+ 119	9.38 052	— 25
— 0.368	9 _n 83 748	+ 57	9 _n 92 855	— 8	+ 1.59 949	+ 120	9.38 027	— 25
— 0.367	9 _n 83 805	+ 57	9 _n 92 847	— 8	+ 1.60 069	+ 119	9.38 002	— 26
— 0.366	9 _n 83 862	+ 57	9 _n 92 839	— 7	+ 1.60 188	+ 120	9.37 976	— 25
— 0.365	9 _n 83 919	+ 56	9 _n 92 832	— 8	+ 1.60 308	+ 119	9.37 951	— 25
— 0.364	9 _n 83 975	+ 57	9 _n 92 824	— 8	+ 1.60 427	+ 119	9.37 926	— 25
— 0.363	9 _n 84 032	+ 57	9 _n 92 816	— 8	+ 1.60 546	+ 119	9.37 901	— 25
— 0.362	9 _n 84 089	+ 56	9 _n 92 808	— 7	+ 1.60 665	+ 120	9.37 876	— 25
— 0.361	9 _n 84 145	+ 56	9 _n 92 801	— 8	+ 1.60 785	+ 119	9.37 851	— 25
— 0.360	9 _n 84 201	+ 57	9 _n 92 793	— 8	+ 1.60 904	+ 119	9.37 826	— 25
— 0.359	9 _n 84 258	+ 56	9 _n 92 785	— 8	+ 1.61 023	+ 118	9.37 801	— 25
— 0.358	9 _n 84 314	+ 56	9 _n 92 777	— 7	+ 1.61 141	+ 119	9.37 776	— 25
— 0.357	9 _n 84 370	+ 56	9 _n 92 770	— 8	+ 1.61 260	+ 119	9.37 751	— 25
— 0.356	9 _n 84 426	+ 56	9 _n 92 762	— 8	+ 1.61 379	+ 119	9.37 726	— 25
— 0.355	9 _n 84 482	+ 56	9 _n 92 754	— 7	+ 1.61 498	+ 118	9.37 701	— 25
— 0.354	9 _n 84 538	+ 55	9 _n 92 747	— 8	+ 1.61 616	+ 119	9.37 676	— 25
— 0.353	9 _n 84 593	+ 56	9 _n 92 739	— 8	+ 1.61 735	+ 118	9.37 651	— 24
— 0.352	9 _n 84 649	+ 56	9 _n 92 731	— 7	+ 1.61 853	+ 119	9.37 627	— 25
— 0.351	9 _n 84 705	+ 55	9 _n 92 724	— 8	+ 1.61 972	+ 118	9.37 602	— 25
— 0.350	9 _n 84 760		9 _n 92 716		+ 1.62 090		9.37 577	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2''$	Diff.	$\log E_4''$	Diff.	E_0''	Diff.	$\log E_4''$	Diff.
— 0.350	9 ₁₁ 84 760	+ 55	9 ₁₁ 92 716	— 8	+ 1.62 090	+ 118	9.37 577	— 25
— 0.349	9 ₁₁ 84 815	+ 56	9 ₁₁ 92 708	— 7	+ 1.62 208	+ 118	9.37 552	— 24
— 0.348	9 ₁₁ 84 871	+ 55	9 ₁₁ 92 701	— 8	+ 1.62 326	+ 118	9.37 528	— 25
— 0.347	9 ₁₁ 84 926	+ 55	9 ₁₁ 92 693	— 8	+ 1.62 444	+ 119	9.37 503	— 25
— 0.346	9 ₁₁ 84 981	+ 55	9 ₁₁ 92 685	— 7	+ 1.62 563	+ 118	9.37 478	— 25
— 0.345	9 ₁₁ 85 036	+ 55	9 ₁₁ 92 678	— 8	+ 1.62 681	+ 117	9.37 453	— 24
— 0.344	9 ₁₁ 85 091	+ 54	9 ₁₁ 92 670	— 8	+ 1.62 798	+ 118	9.37 429	— 25
— 0.343	9 ₁₁ 85 145	+ 55	9 ₁₁ 92 662	— 7	+ 1.62 916	+ 118	9.37 404	— 24
— 0.342	9 ₁₁ 85 200	+ 55	9 ₁₁ 92 655	— 8	+ 1.63 034	+ 118	9.37 380	— 25
— 0.341	9 ₁₁ 85 255	+ 54	9 ₁₁ 92 647	— 8	+ 1.63 152	+ 117	9.37 355	— 24
— 0.340	9 ₁₁ 85 309	+ 55	9 ₁₁ 92 639	— 7	+ 1.63 269	+ 118	9.37 331	— 25
— 0.339	9 ₁₁ 85 364	+ 54	9 ₁₁ 92 632	— 8	+ 1.63 387	+ 117	9.37 306	— 24
— 0.338	9 ₁₁ 85 418	+ 54	9 ₁₁ 92 624	— 8	+ 1.63 504	+ 118	9.37 282	— 25
— 0.337	9 ₁₁ 85 472	+ 55	9 ₁₁ 92 616	— 7	+ 1.63 622	+ 117	9.37 257	— 24
— 0.336	9 ₁₁ 85 527	+ 54	9 ₁₁ 92 609	— 8	+ 1.63 739	+ 118	9.37 233	— 25
— 0.335	9 ₁₁ 85 581	+ 54	9 ₁₁ 92 601	— 7	+ 1.63 857	+ 117	9.37 208	— 24
— 0.334	9 ₁₁ 85 635	+ 54	9 ₁₁ 92 594	— 8	+ 1.63 974	+ 117	9.37 184	— 25
— 0.333	9 ₁₁ 85 689	+ 53	9 ₁₁ 92 586	— 7	+ 1.64 091	+ 117	9.37 159	— 24
— 0.332	9 ₁₁ 85 742	+ 54	9 ₁₁ 92 579	— 8	+ 1.64 208	+ 117	9.37 135	— 24
— 0.331	9 ₁₁ 85 796	+ 54	9 ₁₁ 92 571	— 8	+ 1.64 325	+ 117	9.37 111	— 25
— 0.330	9 ₁₁ 85 850	+ 53	9 ₁₁ 92 563	— 7	+ 1.64 442	+ 117	9.37 086	— 24
— 0.329	9 ₁₁ 85 903	+ 54	9 ₁₁ 92 556	— 8	+ 1.64 559	+ 117	9.37 062	— 24
— 0.328	9 ₁₁ 85 957	+ 53	9 ₁₁ 92 548	— 7	+ 1.64 676	+ 117	9.37 038	— 24
— 0.327	9 ₁₁ 86 010	+ 53	9 ₁₁ 92 541	— 8	+ 1.64 793	+ 116	9.37 014	— 25
— 0.326	9 ₁₁ 86 063	+ 54	9 ₁₁ 92 533	— 7	+ 1.64 909	+ 117	9.36 989	— 24
— 0.325	9 ₁₁ 86 117	+ 53	9 ₁₁ 92 526	— 8	+ 1.65 026	+ 116	9.36 965	— 24
— 0.324	9 ₁₁ 86 170	+ 53	9 ₁₁ 92 518	— 7	+ 1.65 142	+ 117	9.36 941	— 24
— 0.323	9 ₁₁ 86 223	+ 53	9 ₁₁ 92 511	— 8	+ 1.65 259	+ 116	9.36 917	— 24
— 0.322	9 ₁₁ 86 276	+ 53	9 ₁₁ 92 503	— 8	+ 1.65 375	+ 117	9.36 893	— 24
— 0.321	9 ₁₁ 86 329	+ 53	9 ₁₁ 92 495	— 7	+ 1.65 492	+ 116	9.36 869	— 24
— 0.320	9 ₁₁ 86 382	+ 52	9 ₁₁ 92 488	— 8	+ 1.65 608	+ 116	9.36 845	— 24
— 0.319	9 ₁₁ 86 434	+ 53	9 ₁₁ 92 480	— 7	+ 1.65 724	+ 117	9.36 821	— 24
— 0.318	9 ₁₁ 86 487	+ 52	9 ₁₁ 92 473	— 8	+ 1.65 841	+ 116	9.36 797	— 24
— 0.317	9 ₁₁ 86 539	+ 53	9 ₁₁ 92 465	— 7	+ 1.65 957	+ 116	9.36 773	— 24
— 0.316	9 ₁₁ 86 592	+ 52	9 ₁₁ 92 458	— 8	+ 1.66 073	+ 116	9.36 749	— 24
— 0.315	9 ₁₁ 86 644	+ 53	9 ₁₁ 92 450	— 7	+ 1.66 189	+ 116	9.36 725	— 24
— 0.314	9 ₁₁ 86 697	+ 52	9 ₁₁ 92 443	— 8	+ 1.66 305	+ 115	9.36 701	— 24
— 0.313	9 ₁₁ 86 749	+ 52	9 ₁₁ 92 435	— 7	+ 1.66 420	+ 116	9.36 677	— 24
— 0.312	9 ₁₁ 86 801	+ 52	9 ₁₁ 92 428	— 8	+ 1.66 536	+ 116	9.36 653	— 24
— 0.311	9 ₁₁ 86 853	+ 52	9 ₁₁ 92 420	— 7	+ 1.66 652	+ 116	9.36 629	— 24
— 0.310	9 ₁₁ 86 905	+ 52	9 ₁₁ 92 413	— 7	+ 1.66 768	+ 115	9.36 605	— 24
— 0.309	9 ₁₁ 86 957	+ 52	9 ₁₁ 92 406	— 8	+ 1.66 883	+ 116	9.36 581	— 23
— 0.308	9 ₁₁ 87 009	+ 51	9 ₁₁ 92 398	— 7	+ 1.66 999	+ 115	9.36 558	— 24
— 0.307	9 ₁₁ 87 060	+ 52	9 ₁₁ 92 391	— 8	+ 1.67 114	+ 116	9.36 534	— 24
— 0.306	9 ₁₁ 87 112	+ 52	9 ₁₁ 92 383	— 7	+ 1.67 230	+ 115	9.36 510	— 24
— 0.305	9 ₁₁ 87 164	+ 51	9 ₁₁ 92 376	— 8	+ 1.67 345	+ 115	9.36 486	— 23
— 0.304	9 ₁₁ 87 215	+ 51	9 ₁₁ 92 368	— 7	+ 1.67 460	+ 115	9.36 463	— 24
— 0.303	9 ₁₁ 87 266	+ 52	9 ₁₁ 92 361	— 8	+ 1.67 575	+ 116	9.36 439	— 24
— 0.302	9 ₁₁ 87 318	+ 51	9 ₁₁ 92 353	— 7	+ 1.67 691	+ 115	9.36 415	— 23
— 0.301	9 ₁₁ 87 369	+ 51	9 ₁₁ 92 346	— 7	+ 1.67 806	+ 115	9.36 392	— 24
— 0.300	9 ₁₁ 87 420		9 ₁₁ 92 339		+ 1.67 921		9.36 368	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2''$	Diff.	$\log E_4''$	Diff.	E_0''	Diff.	$\log E_4''$	Diff.
— 0.300	9.87 420	+ 51	9.92 339	— 8	+ 1.67 921	+ 115	9.36 368	— 23
— 0.299	9.87 471	+ 51	9.92 331	— 7	+ 1.68 036	+ 115	9.36 345	— 24
— 0.298	9.87 522	+ 51	9.92 324	— 8	+ 1.68 151	+ 114	9.36 321	— 24
— 0.297	9.87 573	+ 51	9.92 316	— 7	+ 1.68 265	+ 115	9.36 297	— 23
— 0.296	9.87 624	+ 51	9.92 309	— 7	+ 1.68 380	+ 115	9.36 274	— 24
— 0.295	9.87 675	+ 51	9.92 302	— 8	+ 1.68 495	+ 115	9.36 250	— 23
— 0.294	9.87 726	+ 50	9.92 294	— 7	+ 1.68 610	+ 114	9.36 227	— 24
— 0.293	9.87 776	+ 51	9.92 287	— 8	+ 1.68 724	+ 115	9.36 203	— 23
— 0.292	9.87 827	+ 50	9.92 279	— 7	+ 1.68 839	+ 114	9.36 180	— 23
— 0.291	9.87 877	+ 51	9.92 272	— 7	+ 1.68 953	+ 114	9.36 157	— 24
— 0.290	9.87 928	+ 50	9.92 265	— 8	+ 1.69 067	+ 115	9.36 133	— 23
— 0.289	9.87 978	+ 50	9.92 257	— 7	+ 1.69 182	+ 114	9.36 110	— 24
— 0.288	9.88 028	+ 50	9.92 250	— 7	+ 1.69 296	+ 114	9.36 086	— 23
— 0.287	9.88 078	+ 50	9.92 243	— 8	+ 1.69 410	+ 114	9.36 063	— 23
— 0.286	9.88 128	+ 50	9.92 235	— 7	+ 1.69 524	+ 115	9.36 040	— 24
— 0.285	9.88 178	+ 50	9.92 228	— 7	+ 1.69 639	+ 114	9.36 016	— 23
— 0.284	9.88 228	+ 50	9.92 221	— 8	+ 1.69 753	+ 114	9.35 993	— 23
— 0.283	9.88 278	+ 50	9.92 213	— 7	+ 1.69 867	+ 113	9.35 970	— 23
— 0.282	9.88 328	+ 50	9.92 206	— 7	+ 1.69 980	+ 114	9.35 947	— 24
— 0.281	9.88 378	+ 49	9.92 199	— 8	+ 1.70 094	+ 114	9.35 923	— 23
— 0.280	9.88 427	+ 50	9.92 191	— 7	+ 1.70 208	+ 114	9.35 900	— 23
— 0.279	9.88 477	+ 49	9.92 184	— 7	+ 1.70 322	+ 113	9.35 877	— 23
— 0.278	9.88 526	+ 50	9.92 177	— 8	+ 1.70 435	+ 114	9.35 854	— 23
— 0.277	9.88 576	+ 49	9.92 169	— 7	+ 1.70 549	+ 114	9.35 831	— 23
— 0.276	9.88 625	+ 49	9.92 162	— 7	+ 1.70 663	+ 113	9.35 808	— 23
— 0.275	9.88 674	+ 50	9.92 155	— 7	+ 1.70 776	+ 114	9.35 785	— 23
— 0.274	9.88 724	+ 49	9.92 148	— 8	+ 1.70 890	+ 113	9.35 762	— 23
— 0.273	9.88 773	+ 49	9.92 140	— 7	+ 1.71 003	+ 113	9.35 739	— 23
— 0.272	9.88 822	+ 49	9.92 133	— 7	+ 1.71 116	+ 113	9.35 716	— 23
— 0.271	9.88 871	+ 49	9.92 126	— 8	+ 1.71 229	+ 114	9.35 693	— 23
— 0.270	9.88 920	+ 48	9.92 118	— 7	+ 1.71 343	+ 113	9.35 670	— 23
— 0.269	9.88 968	+ 49	9.92 111	— 7	+ 1.71 456	+ 113	9.35 647	— 23
— 0.268	9.89 017	+ 49	9.92 104	— 7	+ 1.71 569	+ 113	9.35 624	— 23
— 0.267	9.89 066	+ 48	9.92 097	— 8	+ 1.71 682	+ 113	9.35 601	— 23
— 0.266	9.89 114	+ 49	9.92 089	— 7	+ 1.71 795	+ 113	9.35 578	— 23
— 0.265	9.89 163	+ 48	9.92 082	— 7	+ 1.71 908	+ 112	9.35 555	— 23
— 0.264	9.89 211	+ 49	9.92 075	— 7	+ 1.72 020	+ 113	9.35 532	— 23
— 0.263	9.89 260	+ 48	9.92 068	— 8	+ 1.72 133	+ 113	9.35 509	— 23
— 0.262	9.89 308	+ 48	9.92 060	— 7	+ 1.72 246	+ 113	9.35 486	— 22
— 0.261	9.89 356	+ 49	9.92 053	— 7	+ 1.72 359	+ 112	9.35 464	— 23
— 0.260	9.89 405	+ 48	9.92 046	— 7	+ 1.72 471	+ 113	9.35 441	— 23
— 0.259	9.89 453	+ 48	9.92 039	— 7	+ 1.72 584	+ 112	9.35 418	— 23
— 0.258	9.89 501	+ 48	9.92 032	— 8	+ 1.72 696	+ 113	9.35 395	— 22
— 0.257	9.89 549	+ 48	9.92 024	— 7	+ 1.72 809	+ 112	9.35 373	— 23
— 0.256	9.89 597	+ 47	9.92 017	— 7	+ 1.72 921	+ 112	9.35 350	— 23
— 0.255	9.89 644	+ 48	9.92 010	— 7	+ 1.73 033	+ 113	9.35 327	— 22
— 0.254	9.89 692	+ 48	9.92 003	— 7	+ 1.73 146	+ 112	9.35 305	— 23
— 0.253	9.89 740	+ 48	9.91 996	— 8	+ 1.73 258	+ 112	9.35 282	— 23
— 0.252	9.89 788	+ 47	9.91 988	— 7	+ 1.73 370	+ 112	9.35 259	— 22
— 0.251	9.89 835	+ 48	9.91 981	— 7	+ 1.73 482	+ 112	9.35 237	— 23
— 0.250	9.89 883		9.91 974		+ 1.73 594		9.35 214	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2''$	Diff.	$\log E_4''$	Diff.	E_0'	Diff.	$\log E_4'$	Diff.
— 0.250	9 _n 89 883	+ 47	9 _n 91 974	— 7	+ 1.73 594	+ 112	9.35 214	— 22
— 0.249	9 _n 89 930	+ 47	9 _n 91 967	— 7	+ 1.73 706	+ 112	9.35 192	— 23
— 0.248	9 _n 89 977	+ 48	9 _n 91 960	— 8	+ 1.73 818	+ 112	9.35 169	— 22
— 0.247	9 _n 90 025	+ 47	9 _n 91 952	— 7	+ 1.73 930	+ 111	9.35 147	— 23
— 0.246	9 _n 90 072	+ 47	9 _n 91 945	— 7	+ 1.74 041	+ 112	9.35 124	— 22
— 0.245	9 _n 90 119	+ 47	9 _n 91 938	— 7	+ 1.74 153	+ 112	9.35 102	— 23
— 0.244	9 _n 90 166	+ 47	9 _n 91 931	— 7	+ 1.74 265	+ 111	9.35 079	— 22
— 0.243	9 _n 90 213	+ 47	9 _n 91 924	— 7	+ 1.74 376	+ 112	9.35 057	— 23
— 0.242	9 _n 90 260	+ 47	9 _n 91 917	— 7	+ 1.74 488	+ 111	9.35 034	— 22
— 0.241	9 _n 90 307	+ 47	9 _n 91 910	— 7	+ 1.74 599	+ 112	9.35 012	— 23
— 0.240	9 _n 90 354	+ 46	9 _n 91 903	— 8	+ 1.74 711	+ 111	9.34 989	— 22
— 0.239	9 _n 90 400	+ 47	9 _n 91 895	— 7	+ 1.74 822	+ 112	9.34 967	— 22
— 0.238	9 _n 90 447	+ 47	9 _n 91 888	— 7	+ 1.74 934	+ 111	9.34 945	— 23
— 0.237	9 _n 90 494	+ 46	9 _n 91 881	— 7	+ 1.75 045	+ 111	9.34 922	— 22
— 0.236	9 _n 90 540	+ 47	9 _n 91 874	— 7	+ 1.75 156	+ 111	9.34 900	— 22
— 0.235	9 _n 90 587	+ 46	9 _n 91 867	— 7	+ 1.75 267	+ 111	9.34 878	— 22
— 0.234	9 _n 90 633	+ 47	9 _n 91 860	— 7	+ 1.75 378	+ 111	9.34 856	— 23
— 0.233	9 _n 90 680	+ 46	9 _n 91 853	— 7	+ 1.75 489	+ 111	9.34 833	— 22
— 0.232	9 _n 90 726	+ 46	9 _n 91 846	— 7	+ 1.75 600	+ 111	9.34 811	— 22
— 0.231	9 _n 90 772	+ 46	9 _n 91 839	— 8	+ 1.75 711	+ 111	9.34 789	— 22
— 0.230	9 _n 90 818	+ 46	9 _n 91 831	— 7	+ 1.75 822	+ 111	9.34 767	— 22
— 0.229	9 _n 90 864	+ 46	9 _n 91 824	— 7	+ 1.75 933	+ 111	9.34 745	— 23
— 0.228	9 _n 90 910	+ 46	9 _n 91 817	— 7	+ 1.76 044	+ 110	9.34 722	— 22
— 0.227	9 _n 90 956	+ 46	9 _n 91 810	— 7	+ 1.76 154	+ 111	9.34 700	— 22
— 0.226	9 _n 91 002	+ 46	9 _n 91 803	— 7	+ 1.76 265	+ 111	9.34 678	— 22
— 0.225	9 _n 91 048	+ 46	9 _n 91 796	— 7	+ 1.76 376	+ 110	9.34 656	— 22
— 0.224	9 _n 91 094	+ 45	9 _n 91 789	— 7	+ 1.76 486	+ 111	9.34 634	— 22
— 0.223	9 _n 91 139	+ 46	9 _n 91 782	— 7	+ 1.76 597	+ 110	9.34 612	— 22
— 0.222	9 _n 91 185	+ 46	9 _n 91 775	— 7	+ 1.76 707	+ 110	9.34 590	— 22
— 0.221	9 _n 91 231	+ 45	9 _n 91 768	— 7	+ 1.76 817	+ 111	9.34 568	— 22
— 0.220	9 _n 91 276	+ 46	9 _n 91 761	— 7	+ 1.76 928	+ 110	9.34 546	— 22
— 0.219	9 _n 91 322	+ 45	9 _n 91 754	— 7	+ 1.77 038	+ 110	9.34 524	— 22
— 0.218	9 _n 91 367	+ 45	9 _n 91 747	— 7	+ 1.77 148	+ 110	9.34 502	— 22
— 0.217	9 _n 91 412	+ 46	9 _n 91 740	— 7	+ 1.77 258	+ 110	9.34 480	— 22
— 0.216	9 _n 91 458	+ 45	9 _n 91 733	— 7	+ 1.77 368	+ 111	9.34 458	— 22
— 0.215	9 _n 91 503	+ 45	9 _n 91 726	— 7	+ 1.77 479	+ 109	9.34 436	— 22
— 0.214	9 _n 91 548	+ 45	9 _n 91 719	— 7	+ 1.77 588	+ 110	9.34 414	— 22
— 0.213	9 _n 91 593	+ 45	9 _n 91 712	— 7	+ 1.77 698	+ 110	9.34 392	— 21
— 0.212	9 _n 91 638	+ 45	9 _n 91 705	— 7	+ 1.77 808	+ 110	9.34 371	— 22
— 0.211	9 _n 91 683	+ 45	9 _n 91 698	— 7	+ 1.77 918	+ 110	9.34 349	— 22
— 0.210	9 _n 91 728	+ 45	9 _n 91 691	— 7	+ 1.78 028	+ 110	9.34 327	— 22
— 0.209	9 _n 91 773	+ 45	9 _n 91 684	— 7	+ 1.78 138	+ 109	9.34 305	— 22
— 0.208	9 _n 91 818	+ 44	9 _n 91 677	— 7	+ 1.78 247	+ 110	9.34 283	— 21
— 0.207	9 _n 91 862	+ 45	9 _n 91 670	— 7	+ 1.78 357	+ 109	9.34 262	— 22
— 0.206	9 _n 91 907	+ 44	9 _n 91 663	— 7	+ 1.78 466	+ 110	9.34 240	— 22
— 0.205	9 _n 91 951	+ 45	9 _n 91 656	— 7	+ 1.78 576	+ 109	9.34 218	— 22
— 0.204	9 _n 91 996	+ 44	9 _n 91 649	— 7	+ 1.78 685	+ 110	9.34 196	— 21
— 0.203	9 _n 92 040	+ 45	9 _n 91 642	— 7	+ 1.78 795	+ 109	9.34 175	— 22
— 0.202	9 _n 92 085	+ 44	9 _n 91 635	— 7	+ 1.78 904	+ 109	9.34 153	— 22
— 0.201	9 _n 92 129	+ 44	9 _n 91 628	— 7	+ 1.79 013	+ 110	9.34 131	— 21
— 0.200	9 _n 92 173		9 _n 91 621		+ 1.79 123		9.34 110	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2^r$	Diff.	$\log E_4^r$	Diff.	E_0^r	Diff.	$\log E_4^r$	Diff.
— 0.200	9n92 173	+ 45	9n91 621	— 7	+ 1.79 123	+ 109	9.34 110	— 22
— 0.199	9n92 218	+ 44	9n91 614	— 7	+ 1.79 232	+ 109	9.34 088	— 22
— 0.198	9n92 262	+ 44	9n91 607	— 7	+ 1.79 341	+ 109	9.34 066	— 21
— 0.197	9n92 306	+ 44	9n91 600	— 7	+ 1.79 450	+ 109	9.34 045	— 22
— 0.196	9n92 350	+ 44	9n91 593	— 7	+ 1.79 559	+ 109	9.34 023	— 21
— 0.195	9n92 394	+ 44	9n91 586	— 7	+ 1.79 668	+ 109	9.34 002	— 22
— 0.194	9n92 438	+ 44	9n91 579	— 7	+ 1.79 777	+ 109	9.33 980	— 21
— 0.193	9n92 482	+ 44	9n91 572	— 6	+ 1.79 886	+ 109	9.33 959	— 22
— 0.192	9n92 526	+ 43	9n91 566	— 7	+ 1.79 995	+ 108	9.33 937	— 21
— 0.191	9n92 569	+ 44	9n91 559	— 7	+ 1.80 103	+ 109	9.33 916	— 22
— 0.190	9n92 613	+ 44	9n91 552	— 7	+ 1.80 212	+ 109	9.33 894	— 21
— 0.189	9n92 657	+ 43	9n91 545	— 7	+ 1.80 321	+ 108	9.33 873	— 22
— 0.188	9n92 700	+ 44	9n91 538	— 7	+ 1.80 429	+ 109	9.33 851	— 21
— 0.187	9n92 744	+ 43	9n91 531	— 7	+ 1.80 538	+ 108	9.33 830	— 21
— 0.186	9n92 787	+ 44	9n91 524	— 7	+ 1.80 646	+ 109	9.33 809	— 22
— 0.185	9n92 831	+ 43	9n91 517	— 7	+ 1.80 755	+ 108	9.33 787	— 21
— 0.184	9n92 874	+ 43	9n91 510	— 7	+ 1.80 863	+ 109	9.33 766	— 21
— 0.183	9n92 917	+ 43	9n91 503	— 6	+ 1.80 972	+ 108	9.33 745	— 22
— 0.182	9n92 960	+ 44	9n91 497	— 7	+ 1.81 080	+ 108	9.33 723	— 21
— 0.181	9n93 004	+ 43	9n91 490	— 7	+ 1.81 188	+ 108	9.33 702	— 21
— 0.180	9n93 047	+ 43	9n91 483	— 7	+ 1.81 296	+ 109	9.33 681	— 22
— 0.179	9n93 090	+ 43	9n91 476	— 7	+ 1.81 405	+ 108	9.33 659	— 21
— 0.178	9n93 133	+ 43	9n91 469	— 7	+ 1.81 513	+ 108	9.33 638	— 21
— 0.177	9n93 176	+ 43	9n91 462	— 7	+ 1.81 621	+ 108	9.33 617	— 21
— 0.176	9n93 219	+ 42	9n91 455	— 6	+ 1.81 729	+ 108	9.33 596	— 21
— 0.175	9n93 261	+ 43	9n91 449	— 7	+ 1.81 837	+ 107	9.33 575	— 22
— 0.174	9n93 304	+ 43	9n91 442	— 7	+ 1.81 944	+ 108	9.33 553	— 21
— 0.173	9n93 347	+ 43	9n91 435	— 7	+ 1.82 052	+ 108	9.33 532	— 21
— 0.172	9n93 390	+ 42	9n91 428	— 7	+ 1.82 160	+ 108	9.33 511	— 21
— 0.171	9n93 432	+ 43	9n91 421	— 7	+ 1.82 268	+ 107	9.33 490	— 21
— 0.170	9n93 475	+ 42	9n91 414	— 6	+ 1.82 375	+ 108	9.33 469	— 21
— 0.169	9n93 517	+ 43	9n91 408	— 7	+ 1.82 483	+ 108	9.33 448	— 21
— 0.168	9n93 560	+ 42	9n91 401	— 7	+ 1.82 591	+ 107	9.33 427	— 21
— 0.167	9n93 602	+ 42	9n91 394	— 7	+ 1.82 698	+ 108	9.33 406	— 21
— 0.166	9n93 644	+ 43	9n91 387	— 7	+ 1.82 806	+ 107	9.33 385	— 22
— 0.165	9n93 687	+ 42	9n91 380	— 6	+ 1.82 913	+ 107	9.33 363	— 21
— 0.164	9n93 729	+ 42	9n91 374	— 7	+ 1.83 020	+ 108	9.33 342	— 21
— 0.163	9n93 771	+ 42	9n91 367	— 7	+ 1.83 128	+ 107	9.33 321	— 20
— 0.162	9n93 813	+ 42	9n91 360	— 7	+ 1.83 235	+ 107	9.33 301	— 21
— 0.161	9n93 855	+ 42	9n91 353	— 7	+ 1.83 342	+ 107	9.33 280	— 21
— 0.160	9n93 897	+ 42	9n91 346	— 6	+ 1.83 449	+ 108	9.33 259	— 21
— 0.159	9n93 939	+ 42	9n91 340	— 7	+ 1.83 557	+ 107	9.33 238	— 21
— 0.158	9n93 981	+ 42	9n91 333	— 7	+ 1.83 664	+ 107	9.33 217	— 21
— 0.157	9n94 023	+ 42	9n91 326	— 7	+ 1.83 771	+ 107	9.33 196	— 21
— 0.156	9n94 065	+ 41	9n91 319	— 7	+ 1.83 878	+ 107	9.33 175	— 21
— 0.155	9n94 106	+ 42	9n91 312	— 6	+ 1.83 985	+ 106	9.33 154	— 21
— 0.154	9n94 148	+ 42	9n91 306	— 7	+ 1.84 091	+ 107	9.33 133	— 21
— 0.153	9n94 190	+ 41	9n91 299	— 7	+ 1.84 198	+ 107	9.33 112	— 20
— 0.152	9n94 231	+ 42	9n91 292	— 7	+ 1.84 305	+ 107	9.33 092	— 21
— 0.151	9n94 273	+ 41	9n91 285	— 6	+ 1.84 412	+ 106	9.33 071	— 21
— 0.150	9n94 314		9n91 279		+ 1.84 518		9.33 050	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2^r$	Diff.	$\log E_4^r$	Diff.	E_0^r	Diff.	$\log E_4^r$	Diff.
— 0.150	9n94 314	+ 42	9n91 279	— 7	+ 1.84 518	+ 107	9.33 050	— 21
— 0.149	9n94 356	+ 41	9n91 272	— 7	+ 1.84 625	+ 107	9.33 029	— 20
— 0.148	9n94 397	+ 41	9n91 265	— 7	+ 1.84 732	+ 106	9.33 009	— 21
— 0.147	9n94 438	+ 42	9n91 258	— 6	+ 1.84 838	+ 107	9.32 988	— 21
— 0.146	9n94 480	+ 41	9n91 252	— 7	+ 1.84 945	+ 106	9.32 967	— 21
— 0.145	9n94 521	+ 41	9n91 245	— 7	+ 1.85 051	+ 106	9.32 946	— 20
— 0.144	9n94 562	+ 41	9n91 238	— 6	+ 1.85 157	+ 107	9.32 926	— 21
— 0.143	9n94 603	+ 41	9n91 232	— 7	+ 1.85 264	+ 106	9.32 905	— 21
— 0.142	9n94 644	+ 41	9n91 225	— 7	+ 1.85 370	+ 106	9.32 884	— 20
— 0.141	9n94 685	+ 41	9n91 218	— 7	+ 1.85 476	+ 106	9.32 864	— 21
— 0.140	9n94 726	+ 41	9n91 211	— 6	+ 1.85 582	+ 107	9.32 843	— 20
— 0.139	9n94 767	+ 41	9n91 205	— 7	+ 1.85 689	+ 106	9.32 823	— 21
— 0.138	9n94 808	+ 41	9n91 198	— 7	+ 1.85 795	+ 106	9.32 802	— 21
— 0.137	9n94 849	+ 40	9n91 191	— 6	+ 1.85 901	+ 106	9.32 781	— 20
— 0.136	9n94 889	+ 41	9n91 185	— 7	+ 1.86 007	+ 106	9.32 761	— 21
— 0.135	9n94 930	+ 41	9n91 178	— 7	+ 1.86 113	+ 106	9.32 740	— 20
— 0.134	9n94 971	+ 40	9n91 171	— 6	+ 1.86 219	+ 105	9.32 720	— 21
— 0.133	9n95 011	+ 41	9n91 165	— 7	+ 1.86 324	+ 106	9.32 699	— 20
— 0.132	9n95 052	+ 40	9n91 158	— 7	+ 1.86 430	+ 106	9.32 679	— 21
— 0.131	9n95 092	+ 41	9n91 151	— 6	+ 1.86 536	+ 106	9.32 658	— 20
— 0.130	9n95 133	+ 40	9n91 145	— 7	+ 1.86 642	+ 105	9.32 638	— 21
— 0.129	9n95 173	+ 40	9n91 138	— 7	+ 1.86 747	+ 106	9.32 617	— 20
— 0.128	9n95 213	+ 41	9n91 131	— 6	+ 1.86 853	+ 106	9.32 597	— 20
— 0.127	9n95 254	+ 40	9n91 125	— 7	+ 1.86 959	+ 105	9.32 577	— 21
— 0.126	9n95 294	+ 40	9n91 118	— 7	+ 1.87 064	+ 105	9.32 556	— 20
— 0.125	9n95 334	+ 40	9n91 111	— 6	+ 1.87 169	+ 106	9.32 536	— 21
— 0.124	9n95 374	+ 40	9n91 105	— 7	+ 1.87 275	+ 105	9.32 515	— 20
— 0.123	9n95 414	+ 40	9n91 098	— 7	+ 1.87 380	+ 106	9.32 495	— 20
— 0.122	9n95 454	+ 40	9n91 091	— 6	+ 1.87 486	+ 105	9.32 475	— 21
— 0.121	9n95 494	+ 40	9n91 085	— 7	+ 1.87 591	+ 105	9.32 454	— 20
— 0.120	9n95 534	+ 40	9n91 078	— 6	+ 1.87 696	+ 105	9.32 434	— 20
— 0.119	9n95 574	+ 40	9n91 072	— 7	+ 1.87 801	+ 105	9.32 414	— 20
— 0.118	9n95 614	+ 40	9n91 065	— 7	+ 1.87 906	+ 106	9.32 394	— 21
— 0.117	9n95 654	+ 40	9n91 058	— 6	+ 1.88 012	+ 105	9.32 373	— 20
— 0.116	9n95 694	+ 39	9n91 052	— 7	+ 1.88 117	+ 105	9.32 353	— 20
— 0.115	9n95 733	+ 40	9n91 045	— 7	+ 1.88 222	+ 105	9.32 333	— 20
— 0.114	9n95 773	+ 40	9n91 038	— 6	+ 1.88 327	+ 104	9.32 313	— 21
— 0.113	9n95 813	+ 39	9n91 032	— 7	+ 1.88 431	+ 105	9.32 292	— 20
— 0.112	9n95 852	+ 40	9n91 025	— 6	+ 1.88 536	+ 105	9.32 272	— 20
— 0.111	9n95 892	+ 39	9n91 019	— 7	+ 1.88 641	+ 105	9.32 252	— 20
— 0.110	9n95 931	+ 39	9n91 012	— 6	+ 1.88 746	+ 105	9.32 232	— 20
— 0.109	9n95 970	+ 40	9n91 006	— 7	+ 1.88 851	+ 104	9.32 212	— 20
— 0.108	9n96 010	+ 39	9n90 999	— 7	+ 1.88 955	+ 105	9.32 192	— 20
— 0.107	9n96 049	+ 39	9n90 992	— 6	+ 1.89 060	+ 104	9.32 172	— 20
— 0.106	9n96 088	+ 40	9n90 986	— 7	+ 1.89 164	+ 105	9.32 152	— 21
— 0.105	9n96 128	+ 39	9n90 979	— 6	+ 1.89 269	+ 104	9.32 131	— 20
— 0.104	9n96 167	+ 39	9n90 973	— 7	+ 1.89 373	+ 105	9.32 111	— 20
— 0.103	9n96 206	+ 39	9n90 966	— 6	+ 1.89 478	+ 104	9.32 091	— 20
— 0.102	9n96 245	+ 39	9n90 960	— 7	+ 1.89 582	+ 105	9.32 071	— 20
— 0.101	9n96 284	+ 39	9n90 953	— 7	+ 1.89 687	+ 104	9.32 051	— 20
— 0.100	9n96 323		9n90 946		+ 1.89 791		9.32 031	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2^r$	Diff.	$\log E_4^r$	Diff.	E_0^r	Diff.	$\log E_4^r$	Diff.
— 0.100	9n96 323	+ 39	9n90 946	— 6	+ 1.89 791	+ 104	9.32 031	— 20
— 0.099	9n96 362	+ 39	9n90 940	— 7	+ 1.89 895	+ 104	9.32 011	— 20
— 0.098	9n96 401	+ 39	9n90 933	— 6	+ 1.89 999	+ 105	9.31 991	— 20
— 0.097	9n96 440	+ 38	9n90 927	— 7	+ 1.90 104	+ 104	9.31 971	— 20
— 0.096	9n96 478	+ 39	9n90 920	— 6	+ 1.90 208	+ 104	9.31 951	— 19
— 0.095	9n96 517	+ 39	9n90 914	— 7	+ 1.90 312	+ 104	9.31 932	— 20
— 0.094	9n96 556	+ 38	9n90 907	— 6	+ 1.90 416	+ 104	9.31 912	— 20
— 0.093	9n96 594	+ 39	9n90 901	— 7	+ 1.90 520	+ 104	9.31 892	— 20
— 0.092	9n96 633	+ 39	9n90 894	— 6	+ 1.90 624	+ 104	9.31 872	— 20
— 0.091	9n96 672	+ 38	9n90 888	— 7	+ 1.90 728	+ 103	9.31 852	— 20
— 0.090	9n96 710	+ 39	9n90 881	— 6	+ 1.90 831	+ 104	9.31 832	— 20
— 0.089	9n96 749	+ 38	9n90 875	— 7	+ 1.90 935	+ 104	9.31 812	— 20
— 0.088	9n96 787	+ 38	9n90 868	— 6	+ 1.91 039	+ 104	9.31 792	— 19
— 0.087	9n96 825	+ 39	9n90 862	— 7	+ 1.91 143	+ 103	9.31 773	— 20
— 0.086	9n96 864	+ 38	9n90 855	— 6	+ 1.91 246	+ 104	9.31 753	— 20
— 0.085	9n96 902	+ 38	9n90 849	— 7	+ 1.91 350	+ 104	9.31 733	— 20
— 0.084	9n96 940	+ 38	9n90 842	— 6	+ 1.91 454	+ 103	9.31 713	— 19
— 0.083	9n96 978	+ 39	9n90 836	— 7	+ 1.91 557	+ 104	9.31 694	— 20
— 0.082	9n97 017	+ 38	9n90 829	— 6	+ 1.91 661	+ 103	9.31 674	— 20
— 0.081	9n97 055	+ 38	9n90 823	— 7	+ 1.91 764	+ 103	9.31 654	— 20
— 0.080	9n97 093	+ 38	9n90 816	— 6	+ 1.91 867	+ 104	9.31 634	— 19
— 0.079	9n97 131	+ 38	9n90 810	— 7	+ 1.91 971	+ 103	9.31 615	— 20
— 0.078	9n97 169	+ 38	9n90 803	— 6	+ 1.92 074	+ 103	9.31 595	— 20
— 0.077	9n97 207	+ 37	9n90 797	— 7	+ 1.92 177	+ 104	9.31 575	— 19
— 0.076	9n97 244	+ 38	9n90 790	— 6	+ 1.92 281	+ 103	9.31 556	— 20
— 0.075	9n97 282	+ 38	9n90 784	— 7	+ 1.92 384	+ 103	9.31 536	— 19
— 0.074	9n97 320	+ 38	9n90 777	— 6	+ 1.92 487	+ 103	9.31 517	— 20
— 0.073	9n97 358	+ 38	9n90 771	— 7	+ 1.92 590	+ 103	9.31 497	— 20
— 0.072	9n97 396	+ 37	9n90 764	— 6	+ 1.92 693	+ 103	9.31 477	— 19
— 0.071	9n97 433	+ 38	9n90 758	— 7	+ 1.92 796	+ 103	9.31 458	— 20
— 0.070	9n97 471	+ 37	9n90 751	— 6	+ 1.92 899	+ 103	9.31 438	— 19
— 0.069	9n97 508	+ 38	9n90 745	— 6	+ 1.93 002	+ 103	9.31 419	— 20
— 0.068	9n97 546	+ 37	9n90 739	— 7	+ 1.93 105	+ 103	9.31 399	— 19
— 0.067	9n97 583	+ 38	9n90 732	— 6	+ 1.93 208	+ 102	9.31 380	— 20
— 0.066	9n97 621	+ 37	9n90 726	— 7	+ 1.93 310	+ 103	9.31 360	— 19
— 0.065	9n97 658	+ 38	9n90 719	— 6	+ 1.93 413	+ 103	9.31 341	— 20
— 0.064	9n97 696	+ 37	9n90 713	— 7	+ 1.93 516	+ 102	9.31 321	— 19
— 0.063	9n97 733	+ 37	9n90 706	— 6	+ 1.93 618	+ 103	9.31 302	— 20
— 0.062	9n97 770	+ 37	9n90 700	— 6	+ 1.93 721	+ 103	9.31 282	— 19
— 0.061	9n97 807	+ 38	9n90 694	— 7	+ 1.93 824	+ 102	9.31 263	— 20
— 0.060	9n97 845	+ 37	9n90 687	— 6	+ 1.93 926	+ 103	9.31 243	— 19
— 0.059	9n97 882	+ 37	9n90 681	— 7	+ 1.94 029	+ 102	9.31 224	— 19
— 0.058	9n97 919	+ 37	9n90 674	— 6	+ 1.94 131	+ 102	9.31 205	— 20
— 0.057	9n97 956	+ 37	9n90 668	— 6	+ 1.94 233	+ 103	9.31 185	— 19
— 0.056	9n97 993	+ 37	9n90 662	— 7	+ 1.94 336	+ 102	9.31 166	— 20
— 0.055	9n98 030	+ 37	9n90 655	— 6	+ 1.94 438	+ 102	9.31 146	— 19
— 0.054	9n98 067	+ 37	9n90 649	— 7	+ 1.94 540	+ 103	9.31 127	— 19
— 0.053	9n98 104	+ 36	9n90 642	— 6	+ 1.94 643	+ 102	9.31 108	— 19
— 0.052	9n98 140	+ 37	9n90 636	— 6	+ 1.94 745	+ 102	9.31 089	— 20
— 0.051	9n98 177	+ 37	9n90 630	— 7	+ 1.94 847	+ 102	9.31 069	— 19
— 0.050	9n98 214		9n90 623		+ 1.94 949		9.31 050	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2^r$	Diff.	$\log E_4^r$	Diff.	E_0^r	Diff.	$\log E_4^r$	Diff.
— 0.050	9 _n 98 214	+ 37	9 _n 90 623	— 6	+ 1.94 949	+ 102	9.31 050	— 19
— 0.049	9 _n 98 251	+ 36	9 _n 90 617	— 6	+ 1.95 051	+ 102	9.31 031	— 20
— 0.048	9 _n 98 287	+ 37	9 _n 90 611	— 7	+ 1.95 153	+ 102	9.31 011	— 19
— 0.047	9 _n 98 324	+ 37	9 _n 90 604	— 6	+ 1.95 255	+ 102	9.30 992	— 19
— 0.046	9 _n 98 361	+ 36	9 _n 90 598	— 6	+ 1.95 357	+ 102	9.30 973	— 19
— 0.045	9 _n 98 397	+ 37	9 _n 90 592	— 7	+ 1.95 459	+ 102	9.30 954	— 19
— 0.044	9 _n 98 434	+ 36	9 _n 90 585	— 6	+ 1.95 561	+ 101	9.30 935	— 20
— 0.043	9 _n 98 470	+ 37	9 _n 90 579	— 7	+ 1.95 662	+ 102	9.30 915	— 19
— 0.042	9 _n 98 507	+ 36	9 _n 90 572	— 6	+ 1.95 764	+ 102	9.30 896	— 19
— 0.041	9 _n 98 543	+ 36	9 _n 90 566	— 6	+ 1.95 866	+ 101	9.30 877	— 19
— 0.040	9 _n 98 579	+ 37	9 _n 90 560	— 7	+ 1.95 967	+ 102	9.30 858	— 19
— 0.039	9 _n 98 616	+ 36	9 _n 90 553	— 6	+ 1.96 069	+ 102	9.30 839	— 19
— 0.038	9 _n 98 652	+ 36	9 _n 90 547	— 6	+ 1.96 171	+ 101	9.30 820	— 19
— 0.037	9 _n 98 688	+ 36	9 _n 90 541	— 7	+ 1.96 272	+ 102	9.30 801	— 20
— 0.036	9 _n 98 724	+ 36	9 _n 90 534	— 6	+ 1.96 374	+ 101	9.30 781	— 19
— 0.035	9 _n 98 760	+ 36	9 _n 90 528	— 6	+ 1.96 475	+ 102	9.30 762	— 19
— 0.034	9 _n 98 796	+ 36	9 _n 90 522	— 6	+ 1.96 577	+ 101	9.30 743	— 19
— 0.033	9 _n 98 832	+ 36	9 _n 90 516	— 7	+ 1.96 678	+ 101	9.30 724	— 19
— 0.032	9 _n 98 868	+ 36	9 _n 90 509	— 6	+ 1.96 779	+ 102	9.30 705	— 19
— 0.031	9 _n 98 904	+ 36	9 _n 90 503	— 6	+ 1.96 881	+ 101	9.30 686	— 19
— 0.030	9 _n 98 940	+ 36	9 _n 90 497	— 7	+ 1.96 982	+ 101	9.30 667	— 19
— 0.029	9 _n 98 976	+ 36	9 _n 90 490	— 6	+ 1.97 083	+ 101	9.30 648	— 19
— 0.028	9 _n 99 012	+ 36	9 _n 90 484	— 6	+ 1.97 184	+ 101	9.30 629	— 19
— 0.027	9 _n 99 048	+ 36	9 _n 90 478	— 7	+ 1.97 285	+ 101	9.30 610	— 19
— 0.026	9 _n 99 084	+ 35	9 _n 90 471	— 6	+ 1.97 386	+ 101	9.30 591	— 19
— 0.025	9 _n 99 119	+ 36	9 _n 90 465	— 6	+ 1.97 487	+ 101	9.30 572	— 19
— 0.024	9 _n 99 155	+ 36	9 _n 90 459	— 6	+ 1.97 588	+ 101	9.30 553	— 19
— 0.023	9 _n 99 191	+ 35	9 _n 90 453	— 7	+ 1.97 689	+ 101	9.30 534	— 18
— 0.022	9 _n 99 226	+ 36	9 _n 90 446	— 6	+ 1.97 790	+ 101	9.30 516	— 19
— 0.021	9 _n 99 262	+ 35	9 _n 90 440	— 6	+ 1.97 891	+ 101	9.30 497	— 19
— 0.020	9 _n 99 297	+ 36	9 _n 90 434	— 7	+ 1.97 992	+ 101	9.30 478	— 19
— 0.019	9 _n 99 333	+ 35	9 _n 90 427	— 6	+ 1.98 093	+ 100	9.30 459	— 19
— 0.018	9 _n 99 368	+ 36	9 _n 90 421	— 6	+ 1.98 193	+ 101	9.30 440	— 19
— 0.017	9 _n 99 404	+ 35	9 _n 90 415	— 6	+ 1.98 294	+ 101	9.30 421	— 19
— 0.016	9 _n 99 439	+ 36	9 _n 90 409	— 7	+ 1.98 395	+ 100	9.30 402	— 18
— 0.015	9 _n 99 475	+ 35	9 _n 90 402	— 6	+ 1.98 495	+ 101	9.30 384	— 19
— 0.014	9 _n 99 510	+ 35	9 _n 90 396	— 6	+ 1.98 596	+ 101	9.30 365	— 19
— 0.013	9 _n 99 545	+ 35	9 _n 90 390	— 6	+ 1.98 697	+ 100	9.30 346	— 19
— 0.012	9 _n 99 580	+ 36	9 _n 90 384	— 7	+ 1.98 797	+ 101	9.30 327	— 18
— 0.011	9 _n 99 616	+ 35	9 _n 90 377	— 6	+ 1.98 898	+ 100	9.30 309	— 19
— 0.010	9 _n 99 651	+ 35	9 _n 90 371	— 6	+ 1.98 998	+ 100	9.30 290	— 19
— 0.009	9 _n 99 686	+ 35	9 _n 90 365	— 6	+ 1.99 098	+ 101	9.30 271	— 19
— 0.008	9 _n 99 721	+ 35	9 _n 90 359	— 6	+ 1.99 199	+ 100	9.30 252	— 18
— 0.007	9 _n 99 756	+ 35	9 _n 90 353	— 7	+ 1.99 299	+ 100	9.30 234	— 19
— 0.006	9 _n 99 791	+ 35	9 _n 90 346	— 6	+ 1.99 399	+ 101	9.30 215	— 19
— 0.005	9 _n 99 826	+ 35	9 _n 90 340	— 6	+ 1.99 500	+ 100	9.30 196	— 18
— 0.004	9 _n 99 861	+ 35	9 _n 90 334	— 6	+ 1.99 600	+ 100	9.30 178	— 19
— 0.003	9 _n 99 896	+ 34	9 _n 90 328	— 7	+ 1.99 700	+ 100	9.30 159	— 19
— 0.002	9 _n 99 930	+ 35	9 _n 90 321	— 6	+ 1.99 800	+ 100	9.30 140	— 18
— 0.001	9 _n 99 965	+ 35	9 _n 90 315	— 6	+ 1.99 900	+ 100	9.30 122	— 19
0.000	0 _n 00 000		9 _n 90 309		+ 2.00 000		9.30 103	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2''$	Diff.	$\log E_4''$	Diff.	E_0''	Diff.	$\log E_4''$	Diff.
0.000	0.00 000		9.90 309		+ 2.00 000		9.30 103	
+ 0.001	0.00 035	+ 35	9.90 303	— 6	+ 2.00 100	+ 100	9.30 084	— 19
+ 0.002	0.00 069	+ 34	9.90 297	— 6	+ 2.00 200	+ 100	9.30 066	— 18
+ 0.003	0.00 104	+ 35	9.90 290	— 7	+ 2.00 300	+ 100	9.30 047	— 19
+ 0.004	0.00 139	+ 35	9.90 284	— 6	+ 2.00 400	+ 100	9.30 029	— 18
		+ 34		— 6		+ 100		— 19
+ 0.005	0.00 173	+ 35	9.90 278	— 6	+ 2.00 500	+ 99	9.30 010	— 18
+ 0.006	0.00 208	+ 34	9.90 272	— 6	+ 2.00 599	+ 100	9.29 992	— 19
+ 0.007	0.00 242	+ 34	9.90 266	— 7	+ 2.00 699	+ 100	9.29 973	— 18
+ 0.008	0.00 277	+ 35	9.90 259	— 6	+ 2.00 799	+ 99	9.29 955	— 19
+ 0.009	0.00 311	+ 34	9.90 253	— 6	+ 2.00 898	+ 100	9.29 936	— 18
		+ 35		— 6		+ 100		— 18
+ 0.010	0.00 346	+ 34	9.90 247	— 6	+ 2.00 998	+ 100	9.29 918	— 19
+ 0.011	0.00 380	+ 34	9.90 241	— 6	+ 2.01 098	+ 99	9.29 899	— 18
+ 0.012	0.00 414	+ 35	9.90 235	— 6	+ 2.01 197	+ 100	9.29 881	— 19
+ 0.013	0.00 449	+ 34	9.90 229	— 7	+ 2.01 297	+ 99	9.29 862	— 18
+ 0.014	0.00 483	+ 34	9.90 222	— 6	+ 2.01 396	+ 100	9.29 844	— 19
		+ 34		— 6		+ 100		— 18
+ 0.015	0.00 517	+ 34	9.90 216	— 6	+ 2.01 496	+ 99	9.29 825	— 18
+ 0.016	0.00 551	+ 34	9.90 210	— 6	+ 2.01 595	+ 99	9.29 807	— 19
+ 0.017	0.00 585	+ 34	9.90 204	— 6	+ 2.01 694	+ 100	9.29 788	— 18
+ 0.018	0.00 619	+ 34	9.90 198	— 6	+ 2.01 794	+ 99	9.29 770	— 18
+ 0.019	0.00 653	+ 34	9.90 192	— 6	+ 2.01 893	+ 99	9.29 752	— 19
		+ 34		— 6		+ 99		— 18
+ 0.020	0.00 687	+ 34	9.90 186	— 7	+ 2.01 992	+ 99	9.29 733	— 18
+ 0.021	0.00 721	+ 34	9.90 179	— 6	+ 2.02 091	+ 99	9.29 715	— 18
+ 0.022	0.00 755	+ 34	9.90 173	— 6	+ 2.02 190	+ 100	9.29 697	— 19
+ 0.023	0.00 789	+ 34	9.90 167	— 6	+ 2.02 290	+ 99	9.29 678	— 18
+ 0.024	0.00 823	+ 34	9.90 161	— 6	+ 2.02 389	+ 99	9.29 660	— 18
		+ 34		— 6		+ 99		— 18
+ 0.025	0.00 857	+ 34	9.90 155	— 6	+ 2.02 488	+ 99	9.29 642	— 19
+ 0.026	0.00 891	+ 34	9.90 149	— 6	+ 2.02 587	+ 99	9.29 623	— 18
+ 0.027	0.00 925	+ 34	9.90 143	— 6	+ 2.02 686	+ 99	9.29 605	— 18
+ 0.028	0.00 958	+ 33	9.90 137	— 7	+ 2.02 785	+ 98	9.29 587	— 18
+ 0.029	0.00 992	+ 34	9.90 130	— 6	+ 2.02 883	+ 99	9.29 569	— 19
		+ 34		— 6		+ 99		— 18
+ 0.030	0.01 026	+ 33	9.90 124	— 6	+ 2.02 982	+ 99	9.29 550	— 18
+ 0.031	0.01 059	+ 34	9.90 118	— 6	+ 2.03 081	+ 99	9.29 532	— 18
+ 0.032	0.01 093	+ 34	9.90 112	— 6	+ 2.03 180	+ 99	9.29 514	— 18
+ 0.033	0.01 126	+ 33	9.90 106	— 6	+ 2.03 279	+ 98	9.29 496	— 19
+ 0.034	0.01 160	+ 34	9.90 100	— 6	+ 2.03 377	+ 99	9.29 477	— 18
		+ 33		— 6		+ 99		— 18
+ 0.035	0.01 193	+ 34	9.90 094	— 6	+ 2.03 476	+ 98	9.29 459	— 18
+ 0.036	0.01 227	+ 33	9.90 088	— 6	+ 2.03 574	+ 99	9.29 441	— 18
+ 0.037	0.01 260	+ 34	9.90 082	— 6	+ 2.03 673	+ 99	9.29 423	— 18
+ 0.038	0.01 294	+ 33	9.90 076	— 7	+ 2.03 772	+ 98	9.29 405	— 18
+ 0.039	0.01 327	+ 33	9.90 069	— 6	+ 2.03 870	+ 99	9.29 387	— 19
		+ 33		— 6		+ 99		— 18
+ 0.040	0.01 360	+ 34	9.90 063	— 6	+ 2.03 969	+ 98	9.29 368	— 18
+ 0.041	0.01 394	+ 33	9.90 057	— 6	+ 2.04 067	+ 98	9.29 350	— 18
+ 0.042	0.01 427	+ 33	9.90 051	— 6	+ 2.04 165	+ 99	9.29 332	— 18
+ 0.043	0.01 460	+ 33	9.90 045	— 6	+ 2.04 264	+ 98	9.29 314	— 18
+ 0.044	0.01 493	+ 33	9.90 039	— 6	+ 2.04 362	+ 98	9.29 296	— 18
		+ 33		— 6		+ 98		— 18
+ 0.045	0.01 526	+ 34	9.90 033	— 6	+ 2.04 460	+ 99	9.29 278	— 18
+ 0.046	0.01 560	+ 33	9.90 027	— 6	+ 2.04 559	+ 98	9.29 260	— 18
+ 0.047	0.01 593	+ 33	9.90 021	— 6	+ 2.04 657	+ 98	9.29 242	— 18
+ 0.048	0.01 626	+ 33	9.90 015	— 6	+ 2.04 755	+ 98	9.29 224	— 18
+ 0.049	0.01 659	+ 33	9.90 009	— 6	+ 2.04 853	+ 98	9.29 206	— 18
		+ 33		— 6		+ 98		— 18
+ 0.050	0.01 692		9.90 003		+ 2.04 951		9.29 188	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2^r$	Diff.	$\log E_4^r$	Diff.	E_0^r	Diff.	$\log E_4^r$	Diff.
+ 0.050	0,01 692	+ 33	9,90 003	— 6	+ 2.04 951	+ 98	9.29 188	— 18
+ 0.051	0,01 725	+ 32	9,90 997	— 6	+ 2.05 049	+ 98	9.29 170	— 18
+ 0.052	0,01 757	+ 33	9,90 991	— 6	+ 2.05 147	+ 98	9.29 152	— 18
+ 0.053	0,01 790	+ 33	9,90 985	— 6	+ 2.05 245	+ 98	9.29 134	— 18
+ 0.054	0,01 823	+ 33	9,90 979	— 6	+ 2.05 343	+ 98	9.29 116	— 18
+ 0.055	0,01 856	+ 33	9,90 973	— 6	+ 2.05 441	+ 98	9.29 098	— 18
+ 0.056	0,01 889	+ 32	9,90 967	— 6	+ 2.05 539	+ 98	9.29 080	— 18
+ 0.057	0,01 921	+ 33	9,90 961	— 6	+ 2.05 637	+ 97	9.29 062	— 18
+ 0.058	0,01 954	+ 33	9,90 955	— 6	+ 2.05 734	+ 98	9.29 044	— 18
+ 0.059	0,01 987	+ 32	9,90 948	— 6	+ 2.05 832	+ 98	9.29 026	— 18
+ 0.060	0,02 019	+ 33	9,90 942	— 6	+ 2.05 930	+ 97	9.29 008	— 17
+ 0.061	0,02 052	+ 33	9,90 936	— 6	+ 2.06 027	+ 98	9.28 991	— 18
+ 0.062	0,02 085	+ 32	9,90 930	— 6	+ 2.06 125	+ 98	9.28 973	— 18
+ 0.063	0,02 117	+ 33	9,90 924	— 6	+ 2.06 223	+ 97	9.28 955	— 18
+ 0.064	0,02 150	+ 32	9,90 918	— 6	+ 2.06 320	+ 98	9.28 937	— 18
+ 0.065	0,02 182	+ 32	9,90 912	— 6	+ 2.06 418	+ 97	9.28 919	— 18
+ 0.066	0,02 214	+ 33	9,90 906	— 6	+ 2.06 515	+ 98	9.28 901	— 17
+ 0.067	0,02 247	+ 32	9,90 900	— 6	+ 2.06 613	+ 97	9.28 884	— 18
+ 0.068	0,02 279	+ 33	9,90 894	— 6	+ 2.06 710	+ 98	9.28 866	— 18
+ 0.069	0,02 312	+ 32	9,90 888	— 6	+ 2.06 808	+ 97	9.28 848	— 18
+ 0.070	0,02 344	+ 32	9,90 882	— 6	+ 2.06 905	+ 97	9.28 830	— 18
+ 0.071	0,02 376	+ 32	9,90 876	— 6	+ 2.07 002	+ 97	9.28 812	— 17
+ 0.072	0,02 408	+ 33	9,90 870	— 5	+ 2.07 099	+ 98	9.28 795	— 18
+ 0.073	0,02 441	+ 32	9,90 865	— 6	+ 2.07 197	+ 97	9.28 777	— 18
+ 0.074	0,02 473	+ 32	9,90 859	— 6	+ 2.07 294	+ 97	9.28 759	— 18
+ 0.075	0,02 505	+ 32	9,90 853	— 6	+ 2.07 391	+ 97	9.28 741	— 17
+ 0.076	0,02 537	+ 32	9,90 847	— 6	+ 2.07 488	+ 97	9.28 724	— 18
+ 0.077	0,02 569	+ 32	9,90 841	— 6	+ 2.07 585	+ 97	9.28 706	— 18
+ 0.078	0,02 601	+ 32	9,90 835	— 6	+ 2.07 682	+ 97	9.28 688	— 17
+ 0.079	0,02 633	+ 32	9,90 829	— 6	+ 2.07 779	+ 97	9.28 671	— 18
+ 0.080	0,02 665	+ 32	9,90 823	— 6	+ 2.07 876	+ 97	9.28 653	— 18
+ 0.081	0,02 697	+ 32	9,90 817	— 6	+ 2.07 973	+ 97	9.28 635	— 17
+ 0.082	0,02 729	+ 32	9,90 811	— 6	+ 2.08 070	+ 97	9.28 618	— 18
+ 0.083	0,02 761	+ 32	9,90 805	— 6	+ 2.08 167	+ 97	9.28 600	— 17
+ 0.084	0,02 793	+ 31	9,90 799	— 6	+ 2.08 264	+ 97	9.28 583	— 18
+ 0.085	0,02 824	+ 32	9,90 793	— 6	+ 2.08 361	+ 96	9.28 565	— 18
+ 0.086	0,02 856	+ 32	9,90 787	— 6	+ 2.08 457	+ 97	9.28 547	— 17
+ 0.087	0,02 888	+ 32	9,90 781	— 6	+ 2.08 554	+ 97	9.28 530	— 18
+ 0.088	0,02 920	+ 31	9,90 775	— 6	+ 2.08 651	+ 96	9.28 512	— 17
+ 0.089	0,02 951	+ 32	9,90 769	— 6	+ 2.08 747	+ 97	9.28 495	— 18
+ 0.090	0,02 983	+ 32	9,90 763	— 6	+ 2.08 844	+ 97	9.28 477	— 17
+ 0.091	0,03 015	+ 31	9,90 757	— 6	+ 2.08 941	+ 96	9.28 460	— 18
+ 0.092	0,03 046	+ 32	9,90 751	— 5	+ 2.09 037	+ 97	9.28 442	— 18
+ 0.093	0,03 078	+ 31	9,90 746	— 6	+ 2.09 134	+ 96	9.28 424	— 17
+ 0.094	0,03 109	+ 32	9,90 740	— 6	+ 2.09 230	+ 96	9.28 407	— 18
+ 0.095	0,03 141	+ 31	9,90 734	— 6	+ 2.09 326	+ 97	9.28 389	— 17
+ 0.096	0,03 172	+ 32	9,90 728	— 6	+ 2.09 423	+ 96	9.28 372	— 17
+ 0.097	0,03 204	+ 31	9,90 722	— 6	+ 2.09 519	+ 97	9.28 355	— 18
+ 0.098	0,03 235	+ 32	9,90 716	— 6	+ 2.09 616	+ 96	9.28 337	— 17
+ 0.099	0,03 267	+ 31	9,90 710	— 6	+ 2.09 712	+ 96	9.28 320	— 18
+ 0.100	0,03 298		9,90 704		+ 2.09 808		9.28 302	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2''$	Diff.	$\log E_4''$	Diff.	E_0''	Diff.	$\log E_4''$	Diff.
+ 0.100	0 ₀ 03 298	+ 31	9 ₀ 89 704	- 6	+ 2.09 808	+ 96	9.28 302	- 17
+ 0.101	0 ₀ 03 329	+ 31	9 ₀ 89 698	- 6	+ 2.09 904	+ 97	9.28 285	- 18
+ 0.102	0 ₀ 03 360	+ 32	9 ₀ 89 692	- 6	+ 2.10 001	+ 96	9.28 267	- 17
+ 0.103	0 ₀ 03 392	+ 31	9 ₀ 89 686	- 5	+ 2.10 097	+ 96	9.28 250	- 17
+ 0.104	0 ₀ 03 423	+ 31	9 ₀ 89 681	- 6	+ 2.10 193	+ 96	9.28 233	- 18
+ 0.105	0 ₀ 03 454	+ 31	9 ₀ 89 675	- 6	+ 2.10 289	+ 96	9.28 215	- 17
+ 0.106	0 ₀ 03 485	+ 31	9 ₀ 89 669	- 6	+ 2.10 385	+ 96	9.28 198	- 18
+ 0.107	0 ₀ 03 516	+ 31	9 ₀ 89 663	- 6	+ 2.10 481	+ 96	9.28 180	- 17
+ 0.108	0 ₀ 03 547	+ 32	9 ₀ 89 657	- 6	+ 2.10 577	+ 96	9.28 163	- 17
+ 0.109	0 ₀ 03 579	+ 31	9 ₀ 89 651	- 6	+ 2.10 673	+ 96	9.28 146	- 18
+ 0.110	0 ₀ 03 610	+ 31	9 ₀ 89 645	- 6	+ 2.10 769	+ 96	9.28 128	- 17
+ 0.111	0 ₀ 03 641	+ 31	9 ₀ 89 639	- 5	+ 2.10 865	+ 95	9.28 111	- 17
+ 0.112	0 ₀ 03 672	+ 31	9 ₀ 89 634	- 6	+ 2.10 960	+ 96	9.28 094	- 18
+ 0.113	0 ₀ 03 703	+ 30	9 ₀ 89 628	- 6	+ 2.11 056	+ 96	9.28 076	- 17
+ 0.114	0 ₀ 03 733	+ 31	9 ₀ 89 622	- 6	+ 2.11 152	+ 96	9.28 059	- 17
+ 0.115	0 ₀ 03 764	+ 31	9 ₀ 89 616	- 6	+ 2.11 248	+ 95	9.28 042	- 17
+ 0.116	0 ₀ 03 795	+ 31	9 ₀ 89 610	- 6	+ 2.11 343	+ 96	9.28 025	- 18
+ 0.117	0 ₀ 03 826	+ 31	9 ₀ 89 604	- 6	+ 2.11 439	+ 96	9.28 007	- 17
+ 0.118	0 ₀ 03 857	+ 31	9 ₀ 89 598	- 5	+ 2.11 535	+ 95	9.27 990	- 17
+ 0.119	0 ₀ 03 888	+ 30	9 ₀ 89 593	- 6	+ 2.11 630	+ 96	9.27 973	- 17
+ 0.120	0 ₀ 03 918	+ 31	9 ₀ 89 587	- 6	+ 2.11 726	+ 95	9.27 956	- 18
+ 0.121	0 ₀ 03 949	+ 31	9 ₀ 89 581	- 6	+ 2.11 821	+ 96	9.27 938	- 17
+ 0.122	0 ₀ 03 980	+ 30	9 ₀ 89 575	- 6	+ 2.11 917	+ 95	9.27 921	- 17
+ 0.123	0 ₀ 04 010	+ 31	9 ₀ 89 569	- 6	+ 2.12 012	+ 96	9.27 904	- 17
+ 0.124	0 ₀ 04 041	+ 31	9 ₀ 89 563	- 5	+ 2.12 108	+ 95	9.27 887	- 17
+ 0.125	0 ₀ 04 072	+ 30	9 ₀ 89 558	- 6	+ 2.12 203	+ 96	9.27 870	- 17
+ 0.126	0 ₀ 04 102	+ 31	9 ₀ 89 552	- 6	+ 2.12 299	+ 95	9.27 853	- 18
+ 0.127	0 ₀ 04 133	+ 30	9 ₀ 89 546	- 6	+ 2.12 394	+ 95	9.27 835	- 17
+ 0.128	0 ₀ 04 163	+ 31	9 ₀ 89 540	- 6	+ 2.12 489	+ 95	9.27 818	- 17
+ 0.129	0 ₀ 04 194	+ 30	9 ₀ 89 534	- 6	+ 2.12 584	+ 96	9.27 801	- 17
+ 0.130	0 ₀ 04 224	+ 30	9 ₀ 89 528	- 5	+ 2.12 680	+ 95	9.27 784	- 17
+ 0.131	0 ₀ 04 254	+ 31	9 ₀ 89 523	- 6	+ 2.12 775	+ 95	9.27 767	- 17
+ 0.132	0 ₀ 04 285	+ 30	9 ₀ 89 517	- 6	+ 2.12 870	+ 95	9.27 750	- 17
+ 0.133	0 ₀ 04 315	+ 30	9 ₀ 89 511	- 6	+ 2.12 965	+ 95	9.27 733	- 17
+ 0.134	0 ₀ 04 345	+ 31	9 ₀ 89 505	- 6	+ 2.13 060	+ 95	9.27 716	- 17
+ 0.135	0 ₀ 04 376	+ 30	9 ₀ 89 499	- 5	+ 2.13 155	+ 95	9.27 699	- 17
+ 0.136	0 ₀ 04 406	+ 30	9 ₀ 89 494	- 6	+ 2.13 250	+ 95	9.27 682	- 18
+ 0.137	0 ₀ 04 436	+ 30	9 ₀ 89 488	- 6	+ 2.13 345	+ 95	9.27 664	- 17
+ 0.138	0 ₀ 04 466	+ 31	9 ₀ 89 482	- 6	+ 2.13 440	+ 95	9.27 647	- 17
+ 0.139	0 ₀ 04 497	+ 30	9 ₀ 89 476	- 6	+ 2.13 535	+ 95	9.27 630	- 17
+ 0.140	0 ₀ 04 527	+ 30	9 ₀ 89 470	- 5	+ 2.13 630	+ 95	9.27 613	- 17
+ 0.141	0 ₀ 04 557	+ 30	9 ₀ 89 465	- 6	+ 2.13 725	+ 94	9.27 596	- 17
+ 0.142	0 ₀ 04 587	+ 30	9 ₀ 89 459	- 6	+ 2.13 819	+ 95	9.27 579	- 17
+ 0.143	0 ₀ 04 617	+ 30	9 ₀ 89 453	- 6	+ 2.13 914	+ 95	9.27 562	- 17
+ 0.144	0 ₀ 04 647	+ 30	9 ₀ 89 447	- 5	+ 2.14 009	+ 95	9.27 545	- 16
+ 0.145	0 ₀ 04 677	+ 30	9 ₀ 89 442	- 6	+ 2.14 104	+ 94	9.27 529	- 17
+ 0.146	0 ₀ 04 707	+ 30	9 ₀ 89 436	- 6	+ 2.14 198	+ 95	9.27 512	- 17
+ 0.147	0 ₀ 04 737	+ 30	9 ₀ 89 430	- 6	+ 2.14 293	+ 95	9.27 495	- 17
+ 0.148	0 ₀ 04 767	+ 30	9 ₀ 89 424	- 5	+ 2.14 388	+ 94	9.27 478	- 17
+ 0.149	0 ₀ 04 797	+ 30	9 ₀ 89 419	- 6	+ 2.14 482	+ 95	9.27 461	- 17
+ 0.150	0 ₀ 04 827		9 ₀ 89 413		+ 2.14 577		9.27 444	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2''$	Diff.	$\log E_4''$	Diff.	E_0''	Diff.	$\log E_4''$	Diff.
+ 0.150	0.04 827	+ 29	9.89 413	— 6	+ 2.14 577	+ 94	9.27 444	— 17
+ 0.151	0.04 856	+ 30	9.89 407	— 6	+ 2.14 671	+ 95	9.27 427	— 17
+ 0.152	0.04 886	+ 30	9.89 401	— 5	+ 2.14 766	+ 94	9.27 410	— 17
+ 0.153	0.04 916	+ 30	9.89 396	— 6	+ 2.14 860	+ 95	9.27 393	— 17
+ 0.154	0.04 946	+ 30	9.89 390	— 6	+ 2.14 955	+ 94	9.27 376	— 17
+ 0.155	0.04 976	+ 29	9.89 384	— 6	+ 2.15 049	+ 94	9.27 359	— 16
+ 0.156	0.05 005	+ 30	9.89 378	— 5	+ 2.15 143	+ 95	9.27 343	— 17
+ 0.157	0.05 035	+ 30	9.89 373	— 6	+ 2.15 238	+ 94	9.27 326	— 17
+ 0.158	0.05 065	+ 29	9.89 367	— 6	+ 2.15 332	+ 94	9.27 309	— 17
+ 0.159	0.05 094	+ 30	9.89 361	— 6	+ 2.15 426	+ 94	9.27 292	— 17
+ 0.160	0.05 124	+ 29	9.89 355	— 5	+ 2.15 520	+ 94	9.27 275	— 16
+ 0.161	0.05 153	+ 30	9.89 350	— 6	+ 2.15 614	+ 95	9.27 259	— 17
+ 0.162	0.05 183	+ 29	9.89 344	— 6	+ 2.15 709	+ 94	9.27 242	— 17
+ 0.163	0.05 212	+ 30	9.89 338	— 6	+ 2.15 803	+ 94	9.27 225	— 17
+ 0.164	0.05 242	+ 29	9.89 332	— 5	+ 2.15 897	+ 94	9.27 208	— 17
+ 0.165	0.05 271	+ 30	9.89 327	— 6	+ 2.15 991	+ 94	9.27 191	— 16
+ 0.166	0.05 301	+ 29	9.89 321	— 6	+ 2.16 085	+ 94	9.27 175	— 17
+ 0.167	0.05 330	+ 29	9.89 315	— 5	+ 2.16 179	+ 94	9.27 158	— 17
+ 0.168	0.05 359	+ 30	9.89 310	— 6	+ 2.16 273	+ 94	9.27 141	— 16
+ 0.169	0.05 389	+ 29	9.89 304	— 6	+ 2.16 367	+ 94	9.27 125	— 17
+ 0.170	0.05 418	+ 29	9.89 298	— 6	+ 2.16 461	+ 93	9.27 108	— 17
+ 0.171	0.05 447	+ 30	9.89 292	— 5	+ 2.16 554	+ 94	9.27 091	— 17
+ 0.172	0.05 477	+ 29	9.89 287	— 6	+ 2.16 648	+ 94	9.27 074	— 16
+ 0.173	0.05 506	+ 29	9.89 281	— 6	+ 2.16 742	+ 94	9.27 058	— 17
+ 0.174	0.05 535	+ 29	9.89 275	— 5	+ 2.16 836	+ 93	9.27 041	— 17
+ 0.175	0.05 564	+ 29	9.89 270	— 6	+ 2.16 929	+ 94	9.27 024	— 16
+ 0.176	0.05 593	+ 29	9.89 264	— 6	+ 2.17 023	+ 94	9.27 008	— 17
+ 0.177	0.05 622	+ 30	9.89 258	— 5	+ 2.17 117	+ 93	9.26 991	— 17
+ 0.178	0.05 652	+ 29	9.89 253	— 6	+ 2.17 210	+ 94	9.26 974	— 16
+ 0.179	0.05 681	+ 29	9.89 247	— 6	+ 2.17 304	+ 94	9.26 958	— 17
+ 0.180	0.05 710	+ 29	9.89 241	— 5	+ 2.17 398	+ 93	9.26 941	— 16
+ 0.181	0.05 739	+ 29	9.89 236	— 6	+ 2.17 491	+ 94	9.26 925	— 17
+ 0.182	0.05 768	+ 29	9.89 230	— 6	+ 2.17 585	+ 93	9.26 908	— 17
+ 0.183	0.05 797	+ 29	9.89 224	— 5	+ 2.17 678	+ 93	9.26 891	— 16
+ 0.184	0.05 826	+ 28	9.89 219	— 6	+ 2.17 771	+ 94	9.26 875	— 17
+ 0.185	0.05 854	+ 29	9.89 213	— 6	+ 2.17 865	+ 93	9.26 858	— 16
+ 0.186	0.05 883	+ 29	9.89 207	— 5	+ 2.17 958	+ 93	9.26 842	— 17
+ 0.187	0.05 912	+ 29	9.89 202	— 6	+ 2.18 051	+ 94	9.26 825	— 16
+ 0.188	0.05 941	+ 29	9.89 196	— 6	+ 2.18 145	+ 93	9.26 809	— 17
+ 0.189	0.05 970	+ 29	9.89 190	— 5	+ 2.18 238	+ 93	9.26 792	— 16
+ 0.190	0.05 999	+ 28	9.89 185	— 6	+ 2.18 331	+ 93	9.26 776	— 17
+ 0.191	0.06 027	+ 29	9.89 179	— 6	+ 2.18 424	+ 94	9.26 759	— 16
+ 0.192	0.06 056	+ 29	9.89 173	— 5	+ 2.18 518	+ 93	9.26 743	— 17
+ 0.193	0.06 085	+ 28	9.89 168	— 6	+ 2.18 611	+ 93	9.26 726	— 16
+ 0.194	0.06 113	+ 29	9.89 162	— 6	+ 2.18 704	+ 93	9.26 710	— 17
+ 0.195	0.06 142	+ 29	9.89 156	— 5	+ 2.18 797	+ 93	9.26 693	— 16
+ 0.196	0.06 171	+ 28	9.89 151	— 6	+ 2.18 890	+ 93	9.26 677	— 17
+ 0.197	0.06 199	+ 29	9.89 145	— 6	+ 2.18 983	+ 93	9.26 660	— 16
+ 0.198	0.06 228	+ 28	9.89 139	— 5	+ 2.19 076	+ 93	9.26 644	— 16
+ 0.199	0.06 256	+ 29	9.89 134	— 6	+ 2.19 169	+ 93	9.26 628	— 17
+ 0.200	0.06 285		9.89 128		+ 2.19 262		9.26 611	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2''$	Diff.	$\log E_4''$	Diff.	E_0''	Diff.	$\log E_4'$	Diff.
+ 0.200	0,06 285	+ 28	9,89 128	— 5	+ 2.19 262	+ 93	9.26 611	— 16
+ 0.201	0,06 313	+ 29	9,89 123	— 6	+ 2.19 355	+ 93	9.26 595	— 17
+ 0.202	0,06 342	+ 28	9,89 117	— 6	+ 2.19 448	+ 92	9.26 578	— 16
+ 0.203	0,06 370	+ 29	9,89 111	— 5	+ 2.19 540	+ 93	9.26 562	— 16
+ 0.204	0,06 399	+ 28	9,89 106	— 6	+ 2.19 633	+ 93	9.26 546	— 17
+ 0.205	0,06 427	+ 28	9,89 100	— 6	+ 2.19 726	+ 93	9.26 529	— 16
+ 0.206	0,06 455	+ 29	9,89 094	— 5	+ 2.19 819	+ 92	9.26 513	— 17
+ 0.207	0,06 484	+ 28	9,89 089	— 6	+ 2.19 911	+ 93	9.26 496	— 16
+ 0.208	0,06 512	+ 28	9,89 083	— 5	+ 2.20 004	+ 93	9.26 480	— 16
+ 0.209	0,06 540	+ 29	9,89 078	— 6	+ 2.20 097	+ 92	9.26 464	— 17
+ 0.210	0,06 569	+ 28	9,89 072	— 6	+ 2.20 189	+ 93	9.26 447	— 16
+ 0.211	0,06 597	+ 28	9,89 066	— 5	+ 2.20 282	+ 92	9.26 431	— 16
+ 0.212	0,06 625	+ 28	9,89 061	— 6	+ 2.20 374	+ 93	9.26 415	— 16
+ 0.213	0,06 653	+ 28	9,89 055	— 5	+ 2.20 467	+ 92	9.26 399	— 17
+ 0.214	0,06 681	+ 28	9,89 050	— 6	+ 2.20 559	+ 93	9.26 382	— 16
+ 0.215	0,06 709	+ 29	9,89 044	— 6	+ 2.20 652	+ 92	9.26 366	— 16
+ 0.216	0,06 738	+ 28	9,89 038	— 5	+ 2.20 744	+ 93	9.26 350	— 16
+ 0.217	0,06 766	+ 28	9,89 033	— 6	+ 2.20 837	+ 92	9.26 334	— 17
+ 0.218	0,06 794	+ 28	9,89 027	— 5	+ 2.20 929	+ 92	9.26 317	— 16
+ 0.219	0,06 822	+ 28	9,89 022	— 6	+ 2.21 021	+ 92	9.26 301	— 16
+ 0.220	0,06 850	+ 28	9,89 016	— 5	+ 2.21 113	+ 93	9.26 285	— 16
+ 0.221	0,06 878	+ 28	9,89 011	— 6	+ 2.21 206	+ 92	9.26 269	— 17
+ 0.222	0,06 906	+ 28	9,89 005	— 6	+ 2.21 298	+ 92	9.26 252	— 16
+ 0.223	0,06 934	+ 27	9,88 999	— 5	+ 2.21 390	+ 92	9.26 236	— 16
+ 0.224	0,06 961	+ 28	9,88 994	— 6	+ 2.21 482	+ 92	9.26 220	— 16
+ 0.225	0,06 989	+ 28	9,88 988	— 5	+ 2.21 574	+ 93	9.26 204	— 16
+ 0.226	0,07 017	+ 28	9,88 983	— 6	+ 2.21 667	+ 92	9.26 188	— 17
+ 0.227	0,07 045	+ 28	9,88 977	— 5	+ 2.21 759	+ 92	9.26 171	— 16
+ 0.228	0,07 073	+ 28	9,88 972	— 6	+ 2.21 851	+ 92	9.26 155	— 16
+ 0.229	0,07 101	+ 27	9,88 966	— 5	+ 2.21 943	+ 92	9.26 139	— 16
+ 0.230	0,07 128	+ 28	9,88 961	— 6	+ 2.22 035	+ 92	9.26 123	— 16
+ 0.231	0,07 156	+ 28	9,88 955	— 6	+ 2.22 127	+ 92	9.26 107	— 16
+ 0.232	0,07 184	+ 27	9,88 949	— 5	+ 2.22 219	+ 91	9.26 091	— 16
+ 0.233	0,07 211	+ 28	9,88 944	— 6	+ 2.22 310	+ 92	9.26 075	— 16
+ 0.234	0,07 239	+ 28	9,88 938	— 5	+ 2.22 402	+ 92	9.26 059	— 16
+ 0.235	0,07 267	+ 27	9,88 933	— 6	+ 2.22 494	+ 92	9.26 043	— 17
+ 0.236	0,07 294	+ 28	9,88 927	— 5	+ 2.22 586	+ 92	9.26 026	— 16
+ 0.237	0,07 322	+ 28	9,88 922	— 6	+ 2.22 678	+ 91	9.26 010	— 16
+ 0.238	0,07 350	+ 27	9,88 916	— 5	+ 2.22 769	+ 92	9.25 994	— 16
+ 0.239	0,07 377	+ 28	9,88 911	— 6	+ 2.22 861	+ 92	9.25 978	— 16
+ 0.240	0,07 405	+ 27	9,88 905	— 5	+ 2.22 953	+ 91	9.25 962	— 16
+ 0.241	0,07 432	+ 28	9,88 900	— 6	+ 2.23 044	+ 92	9.25 946	— 16
+ 0.242	0,07 460	+ 27	9,88 894	— 5	+ 2.23 136	+ 92	9.25 930	— 16
+ 0.243	0,07 487	+ 27	9,88 889	— 6	+ 2.23 228	+ 91	9.25 914	— 16
+ 0.244	0,07 514	+ 28	9,88 883	— 5	+ 2.23 319	+ 92	9.25 898	— 16
+ 0.245	0,07 542	+ 27	9,88 878	— 6	+ 2.23 411	+ 91	9.25 882	— 16
+ 0.246	0,07 569	+ 28	9,88 872	— 5	+ 2.23 502	+ 92	9.25 866	— 16
+ 0.247	0,07 596	+ 27	9,88 867	— 6	+ 2.23 594	+ 91	9.25 850	— 16
+ 0.248	0,07 624	+ 27	9,88 861	— 5	+ 2.23 685	+ 91	9.25 834	— 16
+ 0.249	0,07 651	+ 27	9,88 856	— 6	+ 2.23 776	+ 92	9.25 818	— 16
+ 0.250	0,07 678		9,88 850		+ 2.23 868		9.25 802	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2''$	Diff.	$\log E_4''$	Diff.	E_0''	Diff.	$\log E_4''$	Diff.
+ 0.250	0 _h 07 678	+ 28	9 _h 88 850	— 5	+ 2.23 868	+ 91	9.25 802	— 16
+ 0.251	0 _h 07 706	+ 27	9 _h 88 845	— 6	+ 2.23 959	+ 92	9.25 786	— 16
+ 0.252	0 _h 07 733	+ 27	9 _h 88 839	— 5	+ 2.24 051	+ 91	9.25 770	— 16
+ 0.253	0 _h 07 760	+ 27	9 _h 88 834	— 6	+ 2.24 142	+ 91	9.25 754	— 15
+ 0.254	0 _h 07 787	+ 27	9 _h 88 828	— 5	+ 2.24 233	+ 91	9.25 739	— 16
+ 0.255	0 _h 07 814	+ 27	9 _h 88 823	— 6	+ 2.24 324	+ 91	9.25 723	— 16
+ 0.256	0 _h 07 841	+ 28	9 _h 88 817	— 5	+ 2.24 415	+ 92	9.25 707	— 16
+ 0.257	0 _h 07 869	+ 27	9 _h 88 812	— 6	+ 2.24 507	+ 91	9.25 691	— 16
+ 0.258	0 _h 07 896	+ 27	9 _h 88 806	— 5	+ 2.24 598	+ 91	9.25 675	— 16
+ 0.259	0 _h 07 923	+ 27	9 _h 88 801	— 6	+ 2.24 689	+ 91	9.25 659	— 16
+ 0.260	0 _h 07 950	+ 27	9 _h 88 795	— 5	+ 2.24 780	+ 91	9.25 643	— 16
+ 0.261	0 _h 07 977	+ 27	9 _h 88 790	— 6	+ 2.24 871	+ 91	9.25 627	— 15
+ 0.262	0 _h 08 004	+ 27	9 _h 88 784	— 5	+ 2.24 962	+ 91	9.25 612	— 16
+ 0.263	0 _h 08 031	+ 27	9 _h 88 779	— 6	+ 2.25 053	+ 91	9.25 596	— 16
+ 0.264	0 _h 08 058	+ 27	9 _h 88 773	— 5	+ 2.25 144	+ 91	9.25 580	— 16
+ 0.265	0 _h 08 085	+ 26	9 _h 88 768	— 6	+ 2.25 235	+ 91	9.25 564	— 16
+ 0.266	0 _h 08 111	+ 27	9 _h 88 762	— 5	+ 2.25 326	+ 91	9.25 548	— 16
+ 0.267	0 _h 08 138	+ 27	9 _h 88 757	— 6	+ 2.25 417	+ 90	9.25 532	— 15
+ 0.268	0 _h 08 165	+ 27	9 _h 88 751	— 5	+ 2.25 507	+ 91	9.25 517	— 16
+ 0.269	0 _h 08 192	+ 27	9 _h 88 746	— 6	+ 2.25 598	+ 91	9.25 501	— 16
+ 0.270	0 _h 08 219	+ 27	9 _h 88 740	— 5	+ 2.25 689	+ 91	9.25 485	— 16
+ 0.271	0 _h 08 246	+ 26	9 _h 88 735	— 5	+ 2.25 780	+ 91	9.25 469	— 15
+ 0.272	0 _h 08 272	+ 27	9 _h 88 730	— 6	+ 2.25 871	+ 90	9.25 454	— 16
+ 0.273	0 _h 08 299	+ 27	9 _h 88 724	— 5	+ 2.25 961	+ 91	9.25 438	— 16
+ 0.274	0 _h 08 326	+ 27	9 _h 88 719	— 6	+ 2.26 052	+ 91	9.25 422	— 16
+ 0.275	0 _h 08 353	+ 26	9 _h 88 713	— 5	+ 2.26 143	+ 90	9.25 406	— 15
+ 0.276	0 _h 08 379	+ 27	9 _h 88 708	— 6	+ 2.26 233	+ 91	9.25 391	— 16
+ 0.277	0 _h 08 406	+ 26	9 _h 88 702	— 5	+ 2.26 324	+ 90	9.25 375	— 16
+ 0.278	0 _h 08 432	+ 27	9 _h 88 697	— 6	+ 2.26 414	+ 91	9.25 359	— 16
+ 0.279	0 _h 08 459	+ 27	9 _h 88 691	— 5	+ 2.26 505	+ 90	9.25 343	— 15
+ 0.280	0 _h 08 486	+ 26	9 _h 88 686	— 5	+ 2.26 595	+ 91	9.25 328	— 16
+ 0.281	0 _h 08 512	+ 27	9 _h 88 681	— 6	+ 2.26 686	+ 90	9.25 312	— 16
+ 0.282	0 _h 08 539	+ 26	9 _h 88 675	— 5	+ 2.26 776	+ 91	9.25 296	— 15
+ 0.283	0 _h 08 565	+ 27	9 _h 88 670	— 6	+ 2.26 867	+ 90	9.25 281	— 16
+ 0.284	0 _h 08 592	+ 26	9 _h 88 664	— 5	+ 2.26 957	+ 90	9.25 265	— 16
+ 0.285	0 _h 08 618	+ 27	9 _h 88 659	— 5	+ 2.27 047	+ 91	9.25 249	— 15
+ 0.286	0 _h 08 645	+ 26	9 _h 88 654	— 6	+ 2.27 138	+ 90	9.25 234	— 16
+ 0.287	0 _h 08 671	+ 26	9 _h 88 648	— 5	+ 2.27 228	+ 90	9.25 218	— 15
+ 0.288	0 _h 08 697	+ 27	9 _h 88 643	— 6	+ 2.27 318	+ 90	9.25 203	— 16
+ 0.289	0 _h 08 724	+ 26	9 _h 88 637	— 5	+ 2.27 408	+ 91	9.25 187	— 16
+ 0.290	0 _h 08 750	+ 26	9 _h 88 632	— 6	+ 2.27 499	+ 90	9.25 171	— 15
+ 0.291	0 _h 08 776	+ 27	9 _h 88 626	— 5	+ 2.27 589	+ 90	9.25 156	— 16
+ 0.292	0 _h 08 803	+ 26	9 _h 88 621	— 5	+ 2.27 679	+ 90	9.25 140	— 15
+ 0.293	0 _h 08 829	+ 26	9 _h 88 616	— 6	+ 2.27 769	+ 90	9.25 125	— 16
+ 0.294	0 _h 08 855	+ 27	9 _h 88 610	— 5	+ 2.27 859	+ 90	9.25 109	— 16
+ 0.295	0 _h 08 882	+ 26	9 _h 88 605	— 6	+ 2.27 949	+ 90	9.25 093	— 15
+ 0.296	0 _h 08 908	+ 26	9 _h 88 599	— 5	+ 2.28 039	+ 90	9.25 078	— 16
+ 0.297	0 _h 08 934	+ 26	9 _h 88 594	— 5	+ 2.28 129	+ 90	9.25 062	— 15
+ 0.298	0 _h 08 960	+ 26	9 _h 88 589	— 6	+ 2.28 219	+ 90	9.25 047	— 16
+ 0.299	0 _h 08 986	+ 26	9 _h 88 583	— 5	+ 2.28 309	+ 90	9.25 031	— 15
+ 0.300	0 _h 09 012		9 _h 88 578		+ 2.28 399		9.25 016	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2''$	Diff.	$\log E_4''$	Diff.	E_0''	Diff.	$\log E_4''$	Diff.
+ 0.300	0.09 012	+ 27	9.88 578	— 5	+ 2.28 399	+ 90	9.25 016	— 16
+ 0.301	0.09 039	+ 26	9.88 573	— 6	+ 2.28 489	+ 90	9.25 000	— 15
+ 0.302	0.09 065	+ 26	9.88 567	— 5	+ 2.28 579	+ 90	9.24 985	— 16
+ 0.303	0.09 091	+ 26	9.88 562	— 6	+ 2.28 669	+ 89	9.24 969	— 15
+ 0.304	0.09 117	+ 26	9.88 556	— 5	+ 2.28 758	+ 90	9.24 954	— 16
+ 0.305	0.09 143	+ 26	9.88 551	— 5	+ 2.28 848	+ 90	9.24 938	— 15
+ 0.306	0.09 169	+ 26	9.88 546	— 6	+ 2.28 938	+ 90	9.24 923	— 16
+ 0.307	0.09 195	+ 26	9.88 540	— 5	+ 2.29 028	+ 89	9.24 907	— 15
+ 0.308	0.09 221	+ 26	9.88 535	— 5	+ 2.29 117	+ 90	9.24 892	— 15
+ 0.309	0.09 247	+ 26	9.88 530	— 6	+ 2.29 207	+ 90	9.24 877	— 16
+ 0.310	0.09 273	+ 25	9.88 524	— 5	+ 2.29 297	+ 89	9.24 861	— 15
+ 0.311	0.09 298	+ 26	9.88 519	— 6	+ 2.29 386	+ 90	9.24 846	— 16
+ 0.312	0.09 324	+ 26	9.88 513	— 5	+ 2.29 476	+ 89	9.24 830	— 15
+ 0.313	0.09 350	+ 26	9.88 508	— 5	+ 2.29 565	+ 90	9.24 815	— 16
+ 0.314	0.09 376	+ 26	9.88 503	— 6	+ 2.29 655	+ 89	9.24 799	— 15
+ 0.315	0.09 402	+ 26	9.88 497	— 5	+ 2.29 744	+ 90	9.24 784	— 15
+ 0.316	0.09 428	+ 25	9.88 492	— 5	+ 2.29 834	+ 89	9.24 769	— 16
+ 0.317	0.09 453	+ 26	9.88 487	— 6	+ 2.29 923	+ 90	9.24 753	— 15
+ 0.318	0.09 479	+ 26	9.88 481	— 5	+ 2.30 013	+ 89	9.24 738	— 15
+ 0.319	0.09 505	+ 26	9.88 476	— 5	+ 2.30 102	+ 89	9.24 723	— 16
+ 0.320	0.09 531	+ 25	9.88 471	— 6	+ 2.30 191	+ 90	9.24 707	— 15
+ 0.321	0.09 556	+ 26	9.88 465	— 5	+ 2.30 281	+ 89	9.24 692	— 15
+ 0.322	0.09 582	+ 26	9.88 460	— 5	+ 2.30 370	+ 89	9.24 677	— 16
+ 0.323	0.09 608	+ 25	9.88 455	— 6	+ 2.30 459	+ 89	9.24 661	— 15
+ 0.324	0.09 633	+ 26	9.88 449	— 5	+ 2.30 548	+ 90	9.24 646	— 15
+ 0.325	0.09 659	+ 25	9.88 444	— 5	+ 2.30 638	+ 89	9.24 631	— 16
+ 0.326	0.09 684	+ 26	9.88 439	— 6	+ 2.30 727	+ 89	9.24 615	— 15
+ 0.327	0.09 710	+ 25	9.88 433	— 5	+ 2.30 816	+ 89	9.24 600	— 15
+ 0.328	0.09 735	+ 26	9.88 428	— 5	+ 2.30 905	+ 89	9.24 585	— 16
+ 0.329	0.09 761	+ 25	9.88 423	— 6	+ 2.30 994	+ 89	9.24 569	— 15
+ 0.330	0.09 786	+ 26	9.88 417	— 5	+ 2.31 083	+ 89	9.24 554	— 15
+ 0.331	0.09 812	+ 25	9.88 412	— 5	+ 2.31 172	+ 89	9.24 539	— 15
+ 0.332	0.09 837	+ 26	9.88 407	— 5	+ 2.31 261	+ 89	9.24 524	— 16
+ 0.333	0.09 863	+ 25	9.88 402	— 6	+ 2.31 350	+ 89	9.24 508	— 15
+ 0.334	0.09 888	+ 26	9.88 396	— 5	+ 2.31 439	+ 89	9.24 493	— 15
+ 0.335	0.09 914	+ 25	9.88 391	— 5	+ 2.31 528	+ 89	9.24 478	— 15
+ 0.336	0.09 939	+ 25	9.88 386	— 6	+ 2.31 617	+ 89	9.24 463	— 16
+ 0.337	0.09 964	+ 26	9.88 380	— 5	+ 2.31 706	+ 89	9.24 447	— 15
+ 0.338	0.09 990	+ 25	9.88 375	— 5	+ 2.31 795	+ 89	9.24 432	— 15
+ 0.339	0.10 015	+ 25	9.88 370	— 6	+ 2.31 884	+ 88	9.24 417	— 15
+ 0.340	0.10 040	+ 25	9.88 364	— 5	+ 2.31 972	+ 89	9.24 402	— 15
+ 0.341	0.10 065	+ 26	9.88 359	— 5	+ 2.32 061	+ 89	9.24 387	— 15
+ 0.342	0.10 091	+ 25	9.88 354	— 5	+ 2.32 150	+ 89	9.24 372	— 16
+ 0.343	0.10 116	+ 25	9.88 349	— 6	+ 2.32 239	+ 88	9.24 356	— 15
+ 0.344	0.10 141	+ 25	9.88 343	— 5	+ 2.32 327	+ 89	9.24 341	— 15
+ 0.345	0.10 166	+ 25	9.88 338	— 5	+ 2.32 416	+ 89	9.24 326	— 15
+ 0.346	0.10 191	+ 26	9.88 333	— 6	+ 2.32 505	+ 88	9.24 311	— 15
+ 0.347	0.10 217	+ 25	9.88 327	— 5	+ 2.32 593	+ 89	9.24 296	— 15
+ 0.348	0.10 242	+ 25	9.88 322	— 5	+ 2.32 682	+ 88	9.24 281	— 15
+ 0.349	0.10 267	+ 25	9.88 317	— 5	+ 2.32 770	+ 89	9.24 266	— 16
+ 0.350	0.10 292		9.88 312		+ 2.32 859		9.24 250	

Tafel XVI.

θ	$\log E_2^r$	Diff.	$\log E_4^r$	Diff.	E_0^r	Diff.	$\log E_4^r$	Diff.
+ 0.350	0.10 292		9.88 312		+ 2.32 859	+ 88	9.24 250	
+ 0.351	0.10 317	+ 25	9.88 306	— 6	+ 2.32 947	+ 89	9.24 235	— 15
+ 0.352	0.10 342	+ 25	9.88 301	— 5	+ 2.33 036	+ 88	9.24 220	— 15
+ 0.353	0.10 367	+ 25	9.88 296	— 5	+ 2.33 124	+ 89	9.24 205	— 15
+ 0.354	0.10 392	+ 25	9.88 291	— 5	+ 2.33 213	+ 88	9.24 190	— 15
		+ 25		— 6		+ 88		— 15
+ 0.355	0.10 417	+ 25	9.88 285	— 5	+ 2.33 301	+ 88	9.24 175	— 15
+ 0.356	0.10 442	+ 25	9.88 280	— 5	+ 2.33 389	+ 89	9.24 160	— 15
+ 0.357	0.10 467	+ 25	9.88 275	— 5	+ 2.33 478	+ 88	9.24 145	— 15
+ 0.358	0.10 492	+ 25	9.88 270	— 6	+ 2.33 566	+ 88	9.24 130	— 15
+ 0.359	0.10 517	+ 25	9.88 264	— 5	+ 2.33 654	+ 89	9.24 115	— 15
		+ 25		— 5		+ 88		— 15
+ 0.360	0.10 542	+ 24	9.88 259	— 5	+ 2.33 743	+ 88	9.24 100	— 15
+ 0.361	0.10 566	+ 25	9.88 254	— 5	+ 2.33 831	+ 88	9.24 085	— 15
+ 0.362	0.10 591	+ 25	9.88 249	— 6	+ 2.33 919	+ 88	9.24 070	— 15
+ 0.363	0.10 616	+ 25	9.88 243	— 5	+ 2.34 007	+ 88	9.24 055	— 15
+ 0.364	0.10 641	+ 25	9.88 238	— 5	+ 2.34 095	+ 89	9.24 040	— 15
		+ 25		— 5		+ 88		— 15
+ 0.365	0.10 666	+ 24	9.88 233	— 5	+ 2.34 184	+ 88	9.24 025	— 15
+ 0.366	0.10 690	+ 25	9.88 228	— 6	+ 2.34 272	+ 88	9.24 010	— 15
+ 0.367	0.10 715	+ 25	9.88 222	— 5	+ 2.34 360	+ 88	9.23 995	— 15
+ 0.368	0.10 740	+ 25	9.88 217	— 5	+ 2.34 448	+ 88	9.23 980	— 15
+ 0.369	0.10 765	+ 25	9.88 212	— 5	+ 2.34 536	+ 88	9.23 965	— 15
		+ 24		— 5		+ 88		— 15
+ 0.370	0.10 789	+ 25	9.88 207	— 6	+ 2.34 624	+ 88	9.23 950	— 15
+ 0.371	0.10 814	+ 25	9.88 201	— 5	+ 2.34 712	+ 88	9.23 935	— 15
+ 0.372	0.10 839	+ 24	9.88 196	— 5	+ 2.34 800	+ 88	9.23 920	— 15
+ 0.373	0.10 863	+ 25	9.88 191	— 5	+ 2.34 888	+ 87	9.23 905	— 15
+ 0.374	0.10 888	+ 24	9.88 186	— 5	+ 2.34 975	+ 88	9.23 890	— 15
		+ 24		— 5		+ 88		— 15
+ 0.375	0.10 912	+ 25	9.88 181	— 6	+ 2.35 063	+ 88	9.23 875	— 15
+ 0.376	0.10 937	+ 24	9.88 175	— 5	+ 2.35 151	+ 88	9.23 860	— 15
+ 0.377	0.10 961	+ 25	9.88 170	— 5	+ 2.35 239	+ 88	9.23 845	— 15
+ 0.378	0.10 986	+ 24	9.88 165	— 5	+ 2.35 327	+ 87	9.23 831	— 15
+ 0.379	0.11 010	+ 25	9.88 160	— 5	+ 2.35 414	+ 88	9.23 816	— 15
		+ 25		— 5		+ 88		— 15
+ 0.380	0.11 035	+ 24	9.88 155	— 6	+ 2.35 502	+ 88	9.23 801	— 15
+ 0.381	0.11 059	+ 25	9.88 149	— 5	+ 2.35 590	+ 87	9.23 786	— 15
+ 0.382	0.11 084	+ 24	9.88 144	— 5	+ 2.35 677	+ 88	9.23 771	— 15
+ 0.383	0.11 108	+ 25	9.88 139	— 5	+ 2.35 765	+ 88	9.23 756	— 15
+ 0.384	0.11 133	+ 24	9.88 134	— 5	+ 2.35 853	+ 87	9.23 741	— 14
		+ 24		— 5		+ 87		— 14
+ 0.385	0.11 157	+ 24	9.88 129	— 6	+ 2.35 940	+ 88	9.23 727	— 15
+ 0.386	0.11 181	+ 25	9.88 123	— 5	+ 2.36 028	+ 87	9.23 712	— 15
+ 0.387	0.11 206	+ 24	9.88 118	— 5	+ 2.36 115	+ 88	9.23 697	— 15
+ 0.388	0.11 230	+ 24	9.88 113	— 5	+ 2.36 203	+ 87	9.23 682	— 15
+ 0.389	0.11 254	+ 25	9.88 108	— 5	+ 2.36 290	+ 88	9.23 667	— 15
		+ 25		— 5		+ 88		— 15
+ 0.390	0.11 279	+ 24	9.88 103	— 6	+ 2.36 378	+ 87	9.23 652	— 14
+ 0.391	0.11 303	+ 24	9.88 097	— 5	+ 2.36 465	+ 88	9.23 638	— 15
+ 0.392	0.11 327	+ 25	9.88 092	— 5	+ 2.36 553	+ 87	9.23 623	— 15
+ 0.393	0.11 352	+ 24	9.88 087	— 5	+ 2.36 640	+ 87	9.23 608	— 15
+ 0.394	0.11 376	+ 24	9.88 082	— 5	+ 2.36 727	+ 88	9.23 593	— 14
		+ 24		— 5		+ 88		— 14
+ 0.395	0.11 400	+ 24	9.88 077	— 5	+ 2.36 815	+ 87	9.23 579	— 15
+ 0.396	0.11 424	+ 24	9.88 072	— 6	+ 2.36 902	+ 87	9.23 564	— 15
+ 0.397	0.11 448	+ 24	9.88 066	— 5	+ 2.36 989	+ 88	9.23 549	— 15
+ 0.398	0.11 472	+ 25	9.88 061	— 5	+ 2.37 077	+ 87	9.23 534	— 14
+ 0.399	0.11 497	+ 24	9.88 056	— 5	+ 2.37 164	+ 87	9.23 520	— 15
		+ 24		— 5		+ 87		— 15
+ 0.400	0.11 521		9.88 051		+ 2.37 251		9.23 505	

Tafel XVII.

vergl. pag. 468.

A	$\log Q$	Diff.	A	$\log Q$	Diff.	A	$\log Q$	Diff.	A	$\log Q$	Diff.
— 0.240	9.193 1369	+ 1102	— 0.180	9.199 8779	+ 1146	— 0.120	9.206 8926	+ 1194	— 0.060	9.214 2065	+ 1246
— 0.239	9.193 2471	+ 1103	— 0.179	9.199 9925	+ 1147	— 0.119	9.207 0120	+ 1194	— 0.059	9.214 3311	+ 1247
— 0.238	9.193 3574	+ 1104	— 0.178	9.200 1072	+ 1147	— 0.118	9.207 1314	+ 1196	— 0.058	9.214 4558	+ 1248
— 0.237	9.193 4678	+ 1105	— 0.177	9.200 2219	+ 1148	— 0.117	9.207 2510	+ 1196	— 0.057	9.214 5806	+ 1248
— 0.236	9.193 5783	+ 1105	— 0.176	9.200 3367	+ 1149	— 0.116	9.207 3706	+ 1197	— 0.056	9.214 7054	+ 1250
— 0.235	9.193 6888	+ 1105	— 0.175	9.200 4516	+ 1150	— 0.115	9.207 4903	+ 1198	— 0.055	9.214 8304	+ 1250
— 0.234	9.193 7993	+ 1107	— 0.174	9.200 5666	+ 1151	— 0.114	9.207 6101	+ 1199	— 0.054	9.214 9554	+ 1252
— 0.233	9.193 9100	+ 1107	— 0.173	9.200 6817	+ 1151	— 0.113	9.207 7300	+ 1199	— 0.053	9.215 0806	+ 1252
— 0.232	9.194 0207	+ 1108	— 0.172	9.200 7968	+ 1152	— 0.112	9.207 8499	+ 1201	— 0.052	9.215 2058	+ 1253
— 0.231	9.194 1315	+ 1109	— 0.171	9.200 9120	+ 1153	— 0.111	9.207 9700	+ 1201	— 0.051	9.215 3311	+ 1255
— 0.230	9.194 2424	+ 1109	— 0.170	9.201 0273	+ 1154	— 0.110	9.208 0901	+ 1202	— 0.050	9.215 4566	+ 1255
— 0.229	9.194 3533	+ 1110	— 0.169	9.201 1427	+ 1155	— 0.109	9.208 2103	+ 1203	— 0.049	9.215 5821	+ 1256
— 0.228	9.194 4643	+ 1111	— 0.168	9.201 2582	+ 1155	— 0.108	9.208 3306	+ 1204	— 0.048	9.215 7077	+ 1257
— 0.227	9.194 5754	+ 1111	— 0.167	9.201 3737	+ 1156	— 0.107	9.208 4510	+ 1204	— 0.047	9.215 8334	+ 1258
— 0.226	9.194 6865	+ 1112	— 0.166	9.201 4893	+ 1157	— 0.106	9.208 5714	+ 1206	— 0.046	9.215 9592	+ 1258
— 0.225	9.194 7977	+ 1113	— 0.165	9.201 6050	+ 1157	— 0.105	9.208 6920	+ 1206	— 0.045	9.216 0850	+ 1260
— 0.224	9.194 9090	+ 1114	— 0.164	9.201 7207	+ 1158	— 0.104	9.208 8126	+ 1207	— 0.044	9.216 2110	+ 1261
— 0.223	9.195 0204	+ 1114	— 0.163	9.201 8365	+ 1160	— 0.103	9.208 9333	+ 1208	— 0.043	9.216 3371	+ 1262
— 0.222	9.195 1318	+ 1115	— 0.162	9.201 9525	+ 1159	— 0.102	9.209 0541	+ 1209	— 0.042	9.216 4633	+ 1262
— 0.221	9.195 2433	+ 1116	— 0.161	9.202 0684	+ 1161	— 0.101	9.209 1750	+ 1210	— 0.041	9.216 5895	+ 1264
— 0.220	9.195 3549	+ 1117	— 0.160	9.202 1845	+ 1162	— 0.100	9.209 2960	+ 1210	— 0.040	9.216 7159	+ 1264
— 0.219	9.195 4666	+ 1117	— 0.159	9.202 3007	+ 1162	— 0.099	9.209 4170	+ 1212	— 0.039	9.216 8423	+ 1266
— 0.218	9.195 5783	+ 1118	— 0.158	9.202 4169	+ 1163	— 0.098	9.209 5382	+ 1212	— 0.038	9.216 9689	+ 1266
— 0.217	9.195 6901	+ 1118	— 0.157	9.202 5332	+ 1164	— 0.097	9.209 6594	+ 1213	— 0.037	9.217 0955	+ 1267
— 0.216	9.195 8019	+ 1120	— 0.156	9.202 6496	+ 1164	— 0.096	9.209 7807	+ 1214	— 0.036	9.217 2222	+ 1268
— 0.215	9.195 9139	+ 1120	— 0.155	9.202 7660	+ 1166	— 0.095	9.209 9021	+ 1215	— 0.035	9.217 3490	+ 1270
— 0.214	9.196 0259	+ 1120	— 0.154	9.202 8826	+ 1166	— 0.094	9.210 0236	+ 1216	— 0.034	9.217 4760	+ 1270
— 0.213	9.196 1379	+ 1122	— 0.153	9.202 9992	+ 1167	— 0.093	9.210 1452	+ 1217	— 0.033	9.217 6030	+ 1271
— 0.212	9.196 2501	+ 1122	— 0.152	9.203 1159	+ 1168	— 0.092	9.210 2669	+ 1217	— 0.032	9.217 7301	+ 1272
— 0.211	9.196 3623	+ 1123	— 0.151	9.203 2327	+ 1168	— 0.091	9.210 3886	+ 1218	— 0.031	9.217 8573	+ 1273
— 0.210	9.196 4746	+ 1124	— 0.150	9.203 3495	+ 1170	— 0.090	9.210 5104	+ 1220	— 0.030	9.217 9846	+ 1274
— 0.209	9.196 5870	+ 1124	— 0.149	9.203 4665	+ 1170	— 0.089	9.210 6324	+ 1220	— 0.029	9.218 1120	+ 1275
— 0.208	9.196 6994	+ 1126	— 0.148	9.203 5835	+ 1171	— 0.088	9.210 7544	+ 1221	— 0.028	9.218 2395	+ 1276
— 0.207	9.196 8120	+ 1125	— 0.147	9.203 7006	+ 1171	— 0.087	9.210 8765	+ 1221	— 0.027	9.218 3671	+ 1276
— 0.206	9.196 9245	+ 1127	— 0.146	9.203 8177	+ 1173	— 0.086	9.210 9986	+ 1223	— 0.026	9.218 4947	+ 1278
— 0.205	9.197 0372	+ 1127	— 0.145	9.203 9350	+ 1173	— 0.085	9.211 1209	+ 1224	— 0.025	9.218 6225	+ 1279
— 0.204	9.197 1499	+ 1128	— 0.144	9.204 0523	+ 1174	— 0.084	9.211 2433	+ 1224	— 0.024	9.218 7504	+ 1280
— 0.203	9.197 2627	+ 1129	— 0.143	9.204 1697	+ 1175	— 0.083	9.211 3657	+ 1226	— 0.023	9.218 8784	+ 1280
— 0.202	9.197 3756	+ 1130	— 0.142	9.204 2872	+ 1176	— 0.082	9.211 4883	+ 1226	— 0.022	9.218 0064	+ 1282
— 0.201	9.197 4886	+ 1130	— 0.141	9.204 4048	+ 1177	— 0.081	9.211 6109	+ 1227	— 0.021	9.219 1346	+ 1283
— 0.200	9.197 6016	+ 1131	— 0.140	9.204 5225	+ 1177	— 0.080	9.211 7336	+ 1228	— 0.020	9.219 2629	+ 1283
— 0.199	9.197 7147	+ 1132	— 0.139	9.204 6402	+ 1178	— 0.079	9.211 8564	+ 1229	— 0.019	9.219 3912	+ 1285
— 0.198	9.197 8279	+ 1133	— 0.138	9.204 7580	+ 1179	— 0.078	9.211 9793	+ 1229	— 0.018	9.219 5197	+ 1285
— 0.197	9.197 9412	+ 1133	— 0.137	9.204 8759	+ 1180	— 0.077	9.212 1022	+ 1231	— 0.017	9.219 6482	+ 1287
— 0.196	9.198 0545	+ 1134	— 0.136	9.204 9939	+ 1180	— 0.076	9.212 2253	+ 1232	— 0.016	9.219 7769	+ 1287
— 0.195	9.198 1679	+ 1135	— 0.135	9.205 1119	+ 1182	— 0.075	9.212 3485	+ 1232	— 0.015	9.219 9056	+ 1289
— 0.194	9.198 2814	+ 1135	— 0.134	9.205 2301	+ 1182	— 0.074	9.212 4717	+ 1233	— 0.014	9.220 0345	+ 1289
— 0.193	9.198 3949	+ 1136	— 0.133	9.205 3483	+ 1183	— 0.073	9.212 5950	+ 1235	— 0.013	9.220 1634	+ 1291
— 0.192	9.198 5085	+ 1137	— 0.132	9.205 4666	+ 1184	— 0.072	9.212 7185	+ 1235	— 0.012	9.220 2925	+ 1291
— 0.191	9.198 6222	+ 1138	— 0.131	9.205 5850	+ 1184	— 0.071	9.212 8420	+ 1236	— 0.011	9.220 4216	+ 1293
— 0.190	9.198 7360	+ 1138	— 0.130	9.205 7034	+ 1186	— 0.070	9.212 9656	+ 1237	— 0.010	9.220 5509	+ 1293
— 0.189	9.198 8498	+ 1140	— 0.129	9.205 8220	+ 1186	— 0.069	9.213 0893	+ 1237	— 0.009	9.220 6802	+ 1294
— 0.188	9.198 9638	+ 1140	— 0.128	9.205 9406	+ 1187	— 0.068	9.213 2130	+ 1239	— 0.008	9.220 8096	+ 1296
— 0.187	9.199 0778	+ 1140	— 0.127	9.206 0593	+ 1188	— 0.067	9.213 3369	+ 1240	— 0.007	9.220 9392	+ 1296
— 0.186	9.199 1918	+ 1142	— 0.126	9.206 1781	+ 1189	— 0.066	9.213 4609	+ 1240	— 0.006	9.221 0688	+ 1298
— 0.185	9.199 3060	+ 1142	— 0.125	9.206 2970	+ 1190	— 0.065	9.213 5849	+ 1241	— 0.005	9.221 1986	+ 1298
— 0.184	9.199 4202	+ 1143	— 0.124	9.206 4160	+ 1190	— 0.064	9.213 7090	+ 1243	— 0.004	9.221 3284	+ 1299
— 0.183	9.199 5345	+ 1144	— 0.123	9.206 5350	+ 1191	— 0.063	9.213 8333	+ 1243	— 0.003	9.221 4583	+ 1301
— 0.182	9.199 6489	+ 1144	— 0.122	9.206 6541	+ 1192	— 0.062	9.213 9576	+ 1244	— 0.002	9.221 5884	+ 1301
— 0.181	9.199 7633	+ 1146	— 0.121	9.206 7733	+ 1193	— 0.061	9.214 0820	+ 1245	— 0.001	9.221 7185	+ 1302
— 0.180	9.199 8779		— 0.120	9.206 8926		— 0.060	9.214 2065		0.000	9.221 8487	

Tafel XVII.

<i>A</i>	log <i>Q</i>	Diff.	<i>A</i>	log <i>Q</i>	Diff.	<i>A</i>	log <i>Q</i>	Diff.	<i>A</i>	log <i>Q</i>	Diff.
0.000	9.221 8487		+ 0.060	9.229 8533		+ 0.120	9.238 2600		+ 0.180	9.247 1159	
+ 0.001	9.221 9791	+ 1304	+ 0.061	9.229 9900	+ 1367	+ 0.121	9.238 4038	+ 1438	+ 0.181	9.247 2676	+ 1517
+ 0.002	9.222 1095	+ 1304	+ 0.062	9.230 1268	+ 1368	+ 0.122	9.238 5477	+ 1439	+ 0.182	9.247 4194	+ 1518
+ 0.003	9.222 2401	+ 1306	+ 0.063	9.230 2637	+ 1369	+ 0.123	9.238 6917	+ 1440	+ 0.183	9.247 5714	+ 1520
+ 0.004	9.222 3707	+ 1306	+ 0.064	9.230 4008	+ 1371	+ 0.124	9.238 8358	+ 1441	+ 0.184	9.247 7236	+ 1522
		+ 1308			+ 1371			+ 1443			+ 1522
+ 0.005	9.222 5015	+ 1308	+ 0.065	9.230 5379	+ 1373	+ 0.125	9.238 9801	+ 1444	+ 0.185	9.247 8758	+ 1525
+ 0.006	9.222 6323	+ 1309	+ 0.066	9.230 6752	+ 1373	+ 0.126	9.239 1245	+ 1445	+ 0.186	9.248 0283	+ 1525
+ 0.007	9.222 7632	+ 1311	+ 0.067	9.230 8125	+ 1375	+ 0.127	9.239 2690	+ 1447	+ 0.187	9.248 1808	+ 1527
+ 0.008	9.222 8943	+ 1311	+ 0.068	9.230 9500	+ 1376	+ 0.128	9.239 4137	+ 1448	+ 0.188	9.248 3335	+ 1529
+ 0.009	9.223 0254	+ 1313	+ 0.069	9.231 0876	+ 1377	+ 0.129	9.239 5585	+ 1449	+ 0.189	9.248 4864	+ 1529
		+ 1313			+ 1378			+ 1450			+ 1532
+ 0.010	9.223 1567	+ 1313	+ 0.070	9.231 2253	+ 1378	+ 0.130	9.239 7034	+ 1452	+ 0.190	9.248 6393	+ 1532
+ 0.011	9.223 2880	+ 1315	+ 0.071	9.231 3631	+ 1380	+ 0.131	9.239 8484	+ 1452	+ 0.191	9.248 7925	+ 1532
+ 0.012	9.223 4195	+ 1315	+ 0.072	9.231 5011	+ 1380	+ 0.132	9.239 9936	+ 1453	+ 0.192	9.248 9457	+ 1535
+ 0.013	9.223 5511	+ 1316	+ 0.073	9.231 6391	+ 1382	+ 0.133	9.240 1389	+ 1454	+ 0.193	9.249 0992	+ 1535
+ 0.014	9.223 6827	+ 1318	+ 0.074	9.231 7773	+ 1383	+ 0.134	9.240 2843	+ 1455	+ 0.194	9.249 2527	+ 1537
		+ 1318			+ 1384			+ 1457			+ 1539
+ 0.015	9.223 8145	+ 1318	+ 0.075	9.231 9156	+ 1384	+ 0.135	9.240 4298	+ 1457	+ 0.195	9.249 4064	+ 1540
+ 0.016	9.223 9463	+ 1320	+ 0.076	9.232 0540	+ 1385	+ 0.136	9.240 5755	+ 1458	+ 0.196	9.249 5603	+ 1540
+ 0.017	9.224 0783	+ 1321	+ 0.077	9.232 1925	+ 1386	+ 0.137	9.240 7213	+ 1459	+ 0.197	9.249 7143	+ 1541
+ 0.018	9.224 2104	+ 1322	+ 0.078	9.232 3311	+ 1387	+ 0.138	9.240 8672	+ 1461	+ 0.198	9.249 8684	+ 1543
+ 0.019	9.224 3426	+ 1322	+ 0.079	9.232 4698	+ 1389	+ 0.139	9.241 0133	+ 1462	+ 0.199	9.250 0227	+ 1544
		+ 1322			+ 1390			+ 1463			+ 1546
+ 0.020	9.224 4748	+ 1324	+ 0.080	9.232 6087	+ 1390	+ 0.140	9.241 1595	+ 1463	+ 0.200	9.250 1771	+ 1546
+ 0.021	9.224 6072	+ 1325	+ 0.081	9.232 7477	+ 1391	+ 0.141	9.241 3058	+ 1464	+ 0.201	9.250 3317	+ 1547
+ 0.022	9.224 7397	+ 1326	+ 0.082	9.232 8868	+ 1392	+ 0.142	9.241 4522	+ 1466	+ 0.202	9.250 4864	+ 1549
+ 0.023	9.224 8723	+ 1327	+ 0.083	9.233 0260	+ 1393	+ 0.143	9.241 5988	+ 1467	+ 0.203	9.250 6413	+ 1550
+ 0.024	9.225 0050	+ 1328	+ 0.084	9.233 1653	+ 1394	+ 0.144	9.241 7455	+ 1468	+ 0.204	9.250 7963	+ 1552
		+ 1328			+ 1396			+ 1470			+ 1553
+ 0.025	9.225 1378	+ 1329	+ 0.085	9.233 3047	+ 1396	+ 0.145	9.241 8923	+ 1470	+ 0.205	9.250 9515	+ 1553
+ 0.026	9.225 2707	+ 1330	+ 0.086	9.233 4443	+ 1396	+ 0.146	9.242 0393	+ 1471	+ 0.206	9.251 1068	+ 1554
+ 0.027	9.225 4037	+ 1332	+ 0.087	9.233 5839	+ 1398	+ 0.147	9.242 1864	+ 1472	+ 0.207	9.251 2622	+ 1556
+ 0.028	9.225 5369	+ 1332	+ 0.088	9.233 7237	+ 1399	+ 0.148	9.242 3336	+ 1474	+ 0.208	9.251 4178	+ 1558
+ 0.029	9.225 6701	+ 1333	+ 0.089	9.233 8636	+ 1400	+ 0.149	9.242 4810	+ 1475	+ 0.209	9.251 5736	+ 1559
		+ 1333			+ 1402			+ 1476			+ 1560
+ 0.030	9.225 8034	+ 1334	+ 0.090	9.234 0036	+ 1402	+ 0.150	9.242 6285	+ 1478	+ 0.210	9.251 7295	+ 1562
+ 0.031	9.225 9368	+ 1336	+ 0.091	9.234 1438	+ 1402	+ 0.151	9.242 7761	+ 1478	+ 0.211	9.251 8855	+ 1562
+ 0.032	9.226 0704	+ 1336	+ 0.092	9.234 2840	+ 1404	+ 0.152	9.242 9239	+ 1479	+ 0.212	9.252 0417	+ 1564
+ 0.033	9.226 2040	+ 1338	+ 0.093	9.234 4244	+ 1405	+ 0.153	9.243 0718	+ 1480	+ 0.213	9.252 1981	+ 1565
+ 0.034	9.226 3378	+ 1338	+ 0.094	9.234 5649	+ 1406	+ 0.154	9.243 2198	+ 1481	+ 0.214	9.252 3546	+ 1567
		+ 1340			+ 1407			+ 1483			+ 1568
+ 0.035	9.226 4716	+ 1340	+ 0.095	9.234 7055	+ 1407	+ 0.155	9.243 3679	+ 1483	+ 0.215	9.252 5113	+ 1568
+ 0.036	9.226 6056	+ 1341	+ 0.096	9.234 8462	+ 1409	+ 0.156	9.243 5162	+ 1485	+ 0.216	9.252 6681	+ 1569
+ 0.037	9.226 7397	+ 1342	+ 0.097	9.234 9871	+ 1409	+ 0.157	9.243 6647	+ 1485	+ 0.217	9.252 8250	+ 1571
+ 0.038	9.226 8739	+ 1342	+ 0.098	9.235 1280	+ 1411	+ 0.158	9.243 8132	+ 1487	+ 0.218	9.252 9821	+ 1573
+ 0.039	9.227 0081	+ 1344	+ 0.099	9.235 2691	+ 1412	+ 0.159	9.243 9619	+ 1488	+ 0.219	9.253 1394	+ 1574
		+ 1345			+ 1414			+ 1490			+ 1575
+ 0.040	9.227 1425	+ 1345	+ 0.100	9.235 4103	+ 1414	+ 0.160	9.244 1107	+ 1490	+ 0.220	9.253 2968	+ 1575
+ 0.041	9.227 2770	+ 1347	+ 0.101	9.235 5517	+ 1414	+ 0.161	9.244 2597	+ 1491	+ 0.221	9.253 4543	+ 1578
+ 0.042	9.227 4117	+ 1347	+ 0.102	9.235 6931	+ 1416	+ 0.162	9.244 4088	+ 1492	+ 0.222	9.253 6121	+ 1578
+ 0.043	9.227 5464	+ 1348	+ 0.103	9.235 8347	+ 1417	+ 0.163	9.244 5580	+ 1494	+ 0.223	9.253 7699	+ 1580
+ 0.044	9.227 6812	+ 1349	+ 0.104	9.235 9764	+ 1418	+ 0.164	9.244 7074	+ 1495	+ 0.224	9.253 9279	+ 1582
		+ 1351			+ 1419			+ 1496			+ 1584
+ 0.045	9.227 8161	+ 1351	+ 0.105	9.236 1182	+ 1421	+ 0.165	9.244 8569	+ 1498	+ 0.225	9.254 0861	+ 1584
+ 0.046	9.227 9512	+ 1351	+ 0.106	9.236 2601	+ 1421	+ 0.166	9.245 0065	+ 1499	+ 0.226	9.254 2445	+ 1587
+ 0.047	9.228 0863	+ 1353	+ 0.107	9.236 4022	+ 1421	+ 0.167	9.245 1563	+ 1501	+ 0.227	9.254 4029	+ 1588
+ 0.048	9.228 2216	+ 1354	+ 0.108	9.236 5443	+ 1423	+ 0.168	9.245 3062	+ 1501	+ 0.228	9.254 5616	+ 1589
+ 0.049	9.228 3570	+ 1354	+ 0.109	9.236 6866	+ 1424	+ 0.169	9.245 4563	+ 1501	+ 0.229	9.254 7204	+ 1589
		+ 1356			+ 1426			+ 1504			+ 1591
+ 0.050	9.228 4924	+ 1356	+ 0.110	9.236 8290	+ 1427	+ 0.170	9.245 6064	+ 1504	+ 0.230	9.254 8793	+ 1591
+ 0.051	9.228 6280	+ 1357	+ 0.111	9.236 9716	+ 1427	+ 0.171	9.245 7568	+ 1504	+ 0.231	9.255 0384	+ 1593
+ 0.052	9.228 7637	+ 1358	+ 0.112	9.237 1143	+ 1427	+ 0.172	9.245 9072	+ 1506	+ 0.232	9.255 1977	+ 1594
+ 0.053	9.228 8995	+ 1360	+ 0.113	9.237 2570	+ 1429	+ 0.173	9.246 0578	+ 1508	+ 0.233	9.255 3571	+ 1596
+ 0.054	9.229 0355	+ 1360	+ 0.114	9.237 3999	+ 1431	+ 0.174	9.246 2086	+ 1508	+ 0.234	9.255 5167	+ 1597
		+ 1361			+ 1431			+ 1510			+ 1599
+ 0.055	9.229 1715	+ 1361	+ 0.115	9.237 5430	+ 1431	+ 0.175	9.246 3594	+ 1512	+ 0.235	9.255 6764	+ 1600
+ 0.056	9.229 3076	+ 1363	+ 0.116	9.237 6861	+ 1433	+ 0.176	9.246 5104	+ 1513	+ 0.236	9.255 8363	+ 1602
+ 0.057	9.229 4439	+ 1364	+ 0.117	9.237 8294	+ 1434	+ 0.177	9.246 6616	+ 1514	+ 0.237	9.255 9963	+ 1604
+ 0.058	9.229 5803	+ 1364	+ 0.118	9.237 9728	+ 1435	+ 0.178	9.246 8129	+ 1516	+ 0.238	9.256 1565	+ 1604
+ 0.059	9.229 7167	+ 1366	+ 0.119	9.238 1163	+ 1437	+ 0.179	9.246 9643	+ 1516	+ 0.239	9.256 3169	+ 1605
+ 0.060	9.229 8533		+ 0.120	9.238 2600		+ 0.180	9.247 1159		+ 0.240	9.256 4774	

Tafel XVIII.

vergl. pag. 479.

θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.	θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.
—0.300	2.171 2355	—4337	1.772 3333	—7291	—0.250	2.150 3724	—4010	1.737 0306	—6832
—0.299	2.170 8018	—4330	1.771 6042	—7280	—0.249	2.149 9714	—4004	1.736 3474	—6823
—0.298	2.170 3688	—4322	1.770 8762	—7272	—0.248	2.149 5710	—3998	1.735 6651	—6814
—0.297	2.169 9366	—4316	1.770 1490	—7261	—0.247	2.149 1712	—3992	1.734 9837	—6806
—0.296	2.169 5050	—4309	1.769 4229	—7251	—0.246	2.148 7720	—3986	1.734 3031	—6797
—0.295	2.169 0741	—4301	1.768 6978	—7242	—0.245	2.148 3734	—3979	1.733 6234	—6789
—0.294	2.168 6440	—4295	1.767 9736	—7233	—0.244	2.147 9755	—3974	1.732 9445	—6780
—0.293	2.168 2145	—4288	1.767 2503	—7222	—0.243	2.147 5781	—3968	1.732 2665	—6772
—0.292	2.167 7857	—4281	1.766 5281	—7213	—0.242	2.147 1813	—3962	1.731 5893	—6764
—0.291	2.167 3576	—4275	1.765 8068	—7203	—0.241	2.146 7851	—3956	1.730 9129	—6755
—0.290	2.166 9301	—4267	1.765 0865	—7194	—0.240	2.146 3895	—3951	1.730 2374	—6747
—0.289	2.166 5034	—4261	1.764 3671	—7185	—0.239	2.145 9944	—3944	1.729 5627	—6738
—0.288	2.166 0773	—4253	1.763 6486	—7174	—0.238	2.145 6000	—3938	1.728 8889	—6730
—0.287	2.165 6520	—4247	1.762 9312	—7166	—0.237	2.145 2062	—3933	1.728 2159	—6722
—0.286	2.165 2273	—4241	1.762 2146	—7155	—0.236	2.144 8129	—3927	1.727 5437	—6713
—0.285	2.164 8032	—4233	1.761 4991	—7147	—0.235	2.144 4202	—3921	1.726 8724	—6706
—0.284	2.164 3799	—4227	1.760 7844	—7137	—0.234	2.144 0281	—3915	1.726 2018	—6696
—0.283	2.163 9572	—4220	1.760 0707	—7127	—0.233	2.143 6366	—3909	1.725 5322	—6689
—0.282	2.163 5352	—4214	1.759 3580	—7118	—0.232	2.143 2457	—3903	1.724 8633	—6681
—0.281	2.163 1138	—4207	1.758 6462	—7109	—0.231	2.142 8554	—3898	1.724 1952	—6672
—0.280	2.162 6931	—4200	1.757 9353	—7100	—0.230	2.142 4656	—3892	1.723 5280	—6664
—0.279	2.162 2731	—4193	1.757 2253	—7090	—0.229	2.142 0764	—3887	1.722 8616	—6656
—0.278	2.161 8538	—4187	1.756 5163	—7081	—0.228	2.141 6877	—3880	1.722 1960	—6648
—0.277	2.161 4351	—4181	1.755 8082	—7072	—0.227	2.141 2997	—3875	1.721 5312	—6639
—0.276	2.161 0170	—4174	1.755 1010	—7062	—0.226	2.140 9122	—3869	1.720 8673	—6632
—0.275	2.160 5996	—4167	1.754 3948	—7054	—0.225	2.140 5253	—3864	1.720 2041	—6624
—0.274	2.160 1829	—4161	1.753 6894	—7044	—0.224	2.140 1389	—3858	1.719 5417	—6615
—0.273	2.159 7668	—4154	1.752 9850	—7035	—0.223	2.139 7531	—3852	1.718 8802	—6608
—0.272	2.159 3514	—4148	1.752 2815	—7026	—0.222	2.139 3679	—3847	1.718 2194	—6599
—0.271	2.158 9366	—4141	1.751 5789	—7017	—0.221	2.138 9832	—3841	1.717 5595	—6592
—0.270	2.158 5225	—4135	1.750 8772	—7008	—0.220	2.138 5991	—3835	1.716 9003	—6583
—0.269	2.158 1090	—4129	1.750 1764	—6999	—0.219	2.138 2156	—3830	1.716 2420	—6576
—0.268	2.157 6961	—4122	1.749 4765	—6989	—0.218	2.137 8326	—3824	1.715 5844	—6567
—0.267	2.157 2839	—4116	1.748 7766	—6981	—0.217	2.137 4502	—3819	1.714 9277	—6560
—0.266	2.156 8723	—4109	1.748 0795	—6972	—0.216	2.137 0683	—3813	1.714 2717	—6552
—0.265	2.156 4614	—4103	1.747 3823	—6963	—0.215	2.136 6870	—3808	1.713 6165	—6544
—0.264	2.156 0511	—4097	1.746 6860	—6954	—0.214	2.136 3062	—3802	1.712 9621	—6536
—0.263	2.155 6414	—4090	1.745 9906	—6945	—0.213	2.135 9260	—3797	1.712 3085	—6529
—0.262	2.155 2324	—4085	1.745 2961	—6936	—0.212	2.135 5463	—3791	1.711 6556	—6520
—0.261	2.154 8239	—4077	1.744 6025	—6927	—0.211	2.135 1672	—3786	1.711 0036	—6513
—0.260	2.154 4162	—4072	1.743 9098	—6919	—0.210	2.134 7886	—3780	1.710 3523	—6505
—0.259	2.154 0090	—4065	1.743 2179	—6910	—0.209	2.134 4106	—3775	1.709 7018	—6497
—0.258	2.153 6025	—4059	1.742 5269	—6901	—0.208	2.134 0331	—3770	1.709 0521	—6489
—0.257	2.153 1966	—4053	1.741 8368	—6892	—0.207	2.133 6561	—3764	1.708 4032	—6482
—0.256	2.152 7913	—4047	1.741 1476	—6883	—0.206	2.133 2797	—3759	1.707 7550	—6474
—0.255	2.152 3866	—4041	1.740 4593	—6875	—0.205	2.132 9038	—3753	1.707 1076	—6467
—0.254	2.151 9825	—4034	1.739 7718	—6866	—0.204	2.132 5285	—3748	1.706 4609	—6458
—0.253	2.151 5791	—4028	1.739 0852	—6857	—0.203	2.132 1537	—3743	1.705 8151	—6451
—0.252	2.151 1763	—4023	1.738 3995	—6849	—0.202	2.131 7794	—3737	1.705 1700	—6444
—0.251	2.150 7740	—4016	1.737 7146	—6840	—0.201	2.131 4057	—3733	1.704 5256	—6436
—0.250	2.150 3724		1.737 0306		—0.200	2.131 0324		1.703 8820	

Tafel XVIII.

θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.	θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.
— 0.200	2.131 0324	— 3726	1.703 8820	— 6428	— 0.150	2.113 0187	— 3479	1.672 6329	— 6072
— 0.199	2.130 6598	— 3722	1.703 2392	— 6421	— 0.149	2.112 6708	— 3474	1.672 0257	— 6064
— 0.198	2.130 2876	— 3716	1.702 5971	— 6413	— 0.148	2.112 3234	— 3470	1.671 4193	— 6058
— 0.197	2.129 9160	— 3711	1.701 9558	— 6406	— 0.147	2.111 9764	— 3465	1.670 8135	— 6051
— 0.196	2.129 5449	— 3706	1.701 3152	— 6398	— 0.146	2.111 6299	— 3461	1.670 2084	— 6045
— 0.195	2.129 1743	— 3700	1.700 6754	— 6390	— 0.145	2.111 2838	— 3456	1.669 6039	— 6037
— 0.194	2.128 8043	— 3696	1.700 0364	— 6384	— 0.144	2.110 9382	— 3451	1.669 0002	— 6032
— 0.193	2.128 4347	— 3690	1.699 3980	— 6375	— 0.143	2.110 5931	— 3447	1.668 3970	— 6024
— 0.192	2.128 0657	— 3685	1.698 7605	— 6369	— 0.142	2.110 2484	— 3442	1.667 7946	— 6018
— 0.191	2.127 6972	— 3680	1.698 1236	— 6360	— 0.141	2.109 9042	— 3438	1.667 1928	— 6011
— 0.190	2.127 3292	— 3674	1.697 4876	— 6354	— 0.140	2.109 5604	— 3433	1.666 5917	— 6005
— 0.189	2.126 9618	— 3670	1.696 8522	— 6346	— 0.139	2.109 2171	— 3429	1.665 9912	— 5998
— 0.188	2.126 5948	— 3664	1.696 2176	— 6339	— 0.138	2.108 8742	— 3424	1.665 3914	— 5992
— 0.187	2.126 2284	— 3660	1.695 5837	— 6331	— 0.137	2.108 5318	— 3420	1.664 7922	— 5985
— 0.186	2.125 8624	— 3654	1.694 9506	— 6324	— 0.136	2.108 1898	— 3415	1.664 1937	— 5978
— 0.185	2.125 4970	— 3649	1.694 3182	— 6317	— 0.135	2.107 8483	— 3411	1.663 5959	— 5972
— 0.184	2.125 1321	— 3644	1.693 6865	— 6309	— 0.134	2.107 5072	— 3406	1.662 9987	— 5966
— 0.183	2.124 7677	— 3639	1.693 0556	— 6302	— 0.133	2.107 1666	— 3402	1.662 4021	— 5959
— 0.182	2.124 4038	— 3634	1.692 4254	— 6295	— 0.132	2.106 8264	— 3397	1.661 8062	— 5952
— 0.181	2.124 0404	— 3628	1.691 7959	— 6288	— 0.131	2.106 4867	— 3393	1.661 2110	— 5946
— 0.180	2.123 6776	— 3624	1.691 1671	— 6280	— 0.130	2.106 1474	— 3389	1.660 6164	— 5940
— 0.179	2.123 3152	— 3619	1.690 5391	— 6273	— 0.129	2.105 8085	— 3384	1.660 0224	— 5933
— 0.178	2.122 9533	— 3614	1.689 9118	— 6266	— 0.128	2.105 4701	— 3379	1.659 4291	— 5927
— 0.177	2.122 5919	— 3609	1.689 2852	— 6259	— 0.127	2.105 1322	— 3376	1.658 8364	— 5920
— 0.176	2.122 2310	— 3604	1.688 6593	— 6252	— 0.126	2.104 7946	— 3370	1.658 2444	— 5914
— 0.175	2.121 8706	— 3599	1.688 0341	— 6244	— 0.125	2.104 4576	— 3367	1.657 6530	— 5908
— 0.174	2.121 5107	— 3594	1.687 4097	— 6238	— 0.124	2.104 1209	— 3362	1.657 0622	— 5901
— 0.173	2.121 1513	— 3589	1.686 7859	— 6230	— 0.123	2.103 7847	— 3358	1.656 4721	— 5895
— 0.172	2.120 7924	— 3584	1.686 1629	— 6223	— 0.122	2.103 4489	— 3354	1.655 8826	— 5889
— 0.171	2.120 4340	— 3579	1.685 5406	— 6216	— 0.121	2.103 1135	— 3349	1.655 2937	— 5882
— 0.170	2.120 0761	— 3574	1.684 9190	— 6209	— 0.120	2.102 7786	— 3345	1.654 7055	— 5876
— 0.169	2.119 7187	— 3570	1.684 2981	— 6202	— 0.119	2.102 4441	— 3340	1.654 1179	— 5870
— 0.168	2.119 3617	— 3564	1.683 6779	— 6195	— 0.118	2.102 1101	— 3336	1.653 5309	— 5863
— 0.167	2.119 0053	— 3560	1.683 0584	— 6188	— 0.117	2.101 7765	— 3332	1.652 9446	— 5857
— 0.166	2.118 6493	— 3555	1.682 4396	— 6181	— 0.116	2.101 4433	— 3328	1.652 3589	— 5851
— 0.165	2.118 2938	— 3550	1.681 8215	— 6174	— 0.115	2.101 1105	— 3323	1.651 7738	— 5845
— 0.164	2.117 9388	— 3545	1.681 2041	— 6167	— 0.114	2.100 7782	— 3320	1.651 1893	— 5838
— 0.163	2.117 5843	— 3541	1.680 5874	— 6160	— 0.113	2.100 4462	— 3315	1.650 6055	— 5833
— 0.162	2.117 2302	— 3535	1.679 9714	— 6153	— 0.112	2.100 1147	— 3310	1.650 0222	— 5826
— 0.161	2.116 8767	— 3531	1.679 3561	— 6147	— 0.111	2.099 7837	— 3307	1.649 4396	— 5820
— 0.160	2.116 5236	— 3526	1.678 7414	— 6139	— 0.110	2.099 4530	— 3302	1.648 8576	— 5813
— 0.159	2.116 1710	— 3522	1.678 1275	— 6133	— 0.109	2.099 1228	— 3298	1.648 2763	— 5808
— 0.158	2.115 8188	— 3516	1.677 5142	— 6125	— 0.108	2.098 7930	— 3294	1.647 6955	— 5801
— 0.157	2.115 4672	— 3512	1.676 9017	— 6119	— 0.107	2.098 4636	— 3290	1.647 1154	— 5796
— 0.156	2.115 1160	— 3507	1.676 2898	— 6112	— 0.106	2.098 1346	— 3285	1.646 5358	— 5789
— 0.155	2.114 7653	— 3503	1.675 6786	— 6105	— 0.105	2.097 8061	— 3281	1.645 9569	— 5783
— 0.154	2.114 4150	— 3497	1.675 0681	— 6098	— 0.104	2.097 4780	— 3278	1.645 3786	— 5777
— 0.153	2.114 0653	— 3494	1.674 4583	— 6092	— 0.103	2.097 1502	— 3273	1.644 8009	— 5771
— 0.152	2.113 7159	— 3488	1.673 8491	— 6084	— 0.102	2.096 8229	— 3269	1.644 2238	— 5765
— 0.151	2.113 3671	— 3484	1.673 2407	— 6078	— 0.101	2.096 4960	— 3264	1.643 6473	— 5759
— 0.150	2.113 0187		1.672 6329		— 0.100	2.096 1696		1.643 0714	

Tafel XVIII.

θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.	θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.
— 0.100	2.096 1696	— 3261	1.643 0714	— 5753	— 0.050	2.080 3505	— 3067	1.615 0198	— 5467
— 0.099	2.095 8435	— 3257	1.642 4961	— 5747	— 0.049	2.080 0438	— 3063	1.614 4731	— 5461
— 0.098	2.095 5178	— 3252	1.641 9214	— 5740	— 0.048	2.079 7375	— 3060	1.613 9270	— 5457
— 0.097	2.095 1926	— 3248	1.641 3474	— 5735	— 0.047	2.079 4315	— 3056	1.613 3813	— 5450
— 0.096	2.094 8678	— 3245	1.640 7739	— 5729	— 0.046	2.079 1259	— 3052	1.612 8363	— 5446
— 0.095	2.094 5433	— 3240	1.640 2010	— 5723	— 0.045	2.078 8207	— 3049	1.612 2917	— 5440
— 0.094	2.094 2193	— 3236	1.639 6287	— 5717	— 0.044	2.078 5158	— 3045	1.611 7477	— 5435
— 0.093	2.093 8957	— 3232	1.639 0570	— 5711	— 0.043	2.078 2113	— 3041	1.611 2042	— 5429
— 0.092	2.093 5725	— 3229	1.638 4859	— 5705	— 0.042	2.077 9072	— 3038	1.610 6613	— 5424
— 0.091	2.093 2496	— 3224	1.637 9154	— 5699	— 0.041	2.077 6034	— 3034	1.610 1189	— 5419
— 0.090	2.092 9272	— 3220	1.637 3455	— 5693	— 0.040	2.077 3000	— 3031	1.609 5770	— 5413
— 0.089	2.092 6052	— 3216	1.636 7762	— 5688	— 0.039	2.076 9969	— 3027	1.609 0357	— 5408
— 0.088	2.092 2836	— 3212	1.636 2074	— 5681	— 0.038	2.076 6942	— 3023	1.608 4949	— 5403
— 0.087	2.091 9624	— 3208	1.635 6393	— 5676	— 0.037	2.076 3919	— 3020	1.607 9546	— 5397
— 0.086	2.091 6416	— 3204	1.635 0717	— 5670	— 0.036	2.076 0899	— 3017	1.607 4149	— 5393
— 0.085	2.091 3212	— 3200	1.634 5047	— 5664	— 0.035	2.075 7882	— 3012	1.606 8756	— 5387
— 0.084	2.091 0012	— 3196	1.633 9383	— 5658	— 0.034	2.075 4870	— 3010	1.606 3369	— 5381
— 0.083	2.090 6816	— 3193	1.633 3725	— 5652	— 0.033	2.075 1860	— 3005	1.605 7988	— 5377
— 0.082	2.090 3623	— 3188	1.632 8073	— 5646	— 0.032	2.074 8855	— 3003	1.605 2611	— 5371
— 0.081	2.090 0435	— 3184	1.632 2427	— 5641	— 0.031	2.074 5852	— 2998	1.604 7240	— 5366
— 0.080	2.089 7251	— 3181	1.631 6786	— 5635	— 0.030	2.074 2854	— 2996	1.604 1874	— 5361
— 0.079	2.089 4070	— 3176	1.631 1151	— 5629	— 0.029	2.073 9858	— 2992	1.603 6513	— 5355
— 0.078	2.089 0894	— 3173	1.630 5522	— 5624	— 0.028	2.073 6866	— 2988	1.603 1158	— 5351
— 0.077	2.088 7721	— 3169	1.629 9898	— 5617	— 0.027	2.073 3878	— 2985	1.602 5807	— 5345
— 0.076	2.088 4552	— 3164	1.629 4281	— 5612	— 0.026	2.073 0893	— 2981	1.602 0462	— 5340
— 0.075	2.088 1388	— 3161	1.628 8669	— 5606	— 0.025	2.072 7912	— 2978	1.601 5122	— 5335
— 0.074	2.087 8227	— 3157	1.628 3063	— 5601	— 0.024	2.072 4934	— 2974	1.600 9787	— 5329
— 0.073	2.087 5070	— 3154	1.627 7462	— 5595	— 0.023	2.072 1960	— 2971	1.600 4458	— 5325
— 0.072	2.087 1916	— 3149	1.627 1867	— 5589	— 0.022	2.071 8989	— 2968	1.599 9133	— 5319
— 0.071	2.086 8767	— 3145	1.626 6278	— 5583	— 0.021	2.071 6021	— 2964	1.599 3814	— 5315
— 0.070	2.086 5622	— 3142	1.626 0695	— 5578	— 0.020	2.071 3057	— 2960	1.598 8499	— 5309
— 0.069	2.086 2480	— 3138	1.625 5117	— 5572	— 0.019	2.071 0097	— 2958	1.598 3190	— 5304
— 0.068	2.085 9342	— 3134	1.624 9545	— 5567	— 0.018	2.070 7139	— 2953	1.597 7886	— 5299
— 0.067	2.085 6208	— 3130	1.624 3978	— 5561	— 0.017	2.070 4186	— 2951	1.597 2587	— 5294
— 0.066	2.085 3078	— 3127	1.623 8417	— 5555	— 0.016	2.070 1235	— 2947	1.596 7293	— 5289
— 0.065	2.084 9951	— 3122	1.623 2862	— 5550	— 0.015	2.069 8288	— 2943	1.596 2004	— 5284
— 0.064	2.084 6829	— 3119	1.622 7312	— 5544	— 0.014	2.069 5345	— 2941	1.595 6720	— 5278
— 0.063	2.084 3710	— 3115	1.622 1768	— 5538	— 0.013	2.069 2404	— 2937	1.595 1442	— 5274
— 0.062	2.084 0595	— 3112	1.621 6230	— 5533	— 0.012	2.068 9467	— 2933	1.594 6168	— 5269
— 0.061	2.083 7483	— 3107	1.621 0697	— 5528	— 0.011	2.068 6534	— 2930	1.594 0899	— 5263
— 0.060	2.083 4376	— 3104	1.620 5169	— 5521	— 0.010	2.068 3604	— 2927	1.593 5636	— 5259
— 0.059	2.083 1272	— 3100	1.619 9648	— 5517	— 0.009	2.068 0677	— 2923	1.593 0377	— 5254
— 0.058	2.082 8172	— 3097	1.619 4131	— 5510	— 0.008	2.067 7754	— 2921	1.592 5123	— 5248
— 0.057	2.082 5075	— 3092	1.618 8621	— 5506	— 0.007	2.067 4833	— 2916	1.591 9875	— 5244
— 0.056	2.082 1983	— 3089	1.618 3115	— 5500	— 0.006	2.067 1917	— 2914	1.591 4631	— 5239
— 0.055	2.081 8894	— 3085	1.617 7615	— 5494	— 0.005	2.066 9003	— 2910	1.590 9392	— 5233
— 0.054	2.081 5809	— 3082	1.617 2121	— 5489	— 0.004	2.066 6093	— 2907	1.590 4159	— 5229
— 0.053	2.081 2727	— 3078	1.616 6632	— 5483	— 0.003	2.066 3186	— 2903	1.589 8930	— 5224
— 0.052	2.080 9649	— 3074	1.616 1149	— 5478	— 0.002	2.066 0283	— 2901	1.589 3706	— 5219
— 0.051	2.080 6575	— 3070	1.615 5671	— 5473	— 0.001	2.065 7382	— 2896	1.588 8487	— 5214
— 0.050	2.080 3505		1.615 0198		0.000	2.065 4486		1.588 3273	

Tafel XVIII.

θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.	θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.
0.000	2.065 4486	—2894	1.588 3273	—5209	+0.050	2.051 3681	—2738	1.562 8647	—4975
+0.001	2.065 1592	—2890	1.587 8064	—5204	+0.051	2.051 0943	—2735	1.562 3672	—4971
+0.002	2.064 8702	—2888	1.587 2860	—5200	+0.052	2.050 8208	—2732	1.561 8701	—4966
+0.003	2.064 5814	—2883	1.586 7660	—5194	+0.053	2.050 5476	—2730	1.561 3735	—4962
+0.004	2.064 2931	—2881	1.586 2466	—5189	+0.054	2.050 2746	—2726	1.560 8773	—4957
+0.005	2.064 0050	—2877	1.585 7277	—5185	+0.055	2.050 0020	—2723	1.560 3816	—4953
+0.006	2.063 7173	—2875	1.585 2092	—5180	+0.056	2.049 7297	—2721	1.559 8863	—4948
+0.007	2.063 4298	—2870	1.584 6912	—5175	+0.057	2.049 4576	—2717	1.559 3915	—4944
+0.008	2.063 1428	—2868	1.584 1737	—5170	+0.058	2.049 1859	—2715	1.558 8971	—4939
+0.009	2.062 8560	—2865	1.583 6567	—5165	+0.059	2.048 9144	—2712	1.558 4032	—4936
+0.010	2.062 5695	—2861	1.583 1402	—5161	+0.060	2.048 6432	—2709	1.557 9096	—4930
+0.011	2.062 2834	—2858	1.582 6241	—5155	+0.061	2.048 3723	—2706	1.557 4166	—4927
+0.012	2.061 9976	—2855	1.582 1086	—5151	+0.062	2.048 1017	—2703	1.556 9239	—4922
+0.013	2.061 7121	—2851	1.581 5935	—5146	+0.063	2.047 8314	—2700	1.556 4317	—4917
+0.014	2.061 4270	—2849	1.581 0789	—5142	+0.064	2.047 5614	—2698	1.555 9400	—4914
+0.015	2.061 1421	—2845	1.580 5647	—5136	+0.065	2.047 2916	—2694	1.555 4486	—4909
+0.016	2.060 8576	—2842	1.580 0511	—5132	+0.066	2.047 0222	—2692	1.554 9577	—4904
+0.017	2.060 5734	—2839	1.579 5379	—5127	+0.067	2.046 7530	—2688	1.554 4673	—4900
+0.018	2.060 2895	—2836	1.579 0252	—5122	+0.068	2.046 4842	—2686	1.553 9773	—4896
+0.019	2.060 0059	—2832	1.578 5130	—5117	+0.069	2.046 2156	—2684	1.553 4877	—4892
+0.020	2.059 7227	—2830	1.578 0013	—5113	+0.070	2.045 9472	—2680	1.552 9985	—4887
+0.021	2.059 4397	—2826	1.577 4900	—5108	+0.071	2.045 6792	—2677	1.552 5098	—4883
+0.022	2.059 1571	—2823	1.576 9792	—5104	+0.072	2.045 4115	—2675	1.552 0215	—4879
+0.023	2.058 8748	—2820	1.576 4688	—5098	+0.073	2.045 1440	—2672	1.551 5336	—4874
+0.024	2.058 5928	—2817	1.575 9590	—5094	+0.074	2.044 8768	—2669	1.551 0462	—4871
+0.025	2.058 3111	—2814	1.575 4496	—5089	+0.075	2.044 6099	—2666	1.550 5591	—4865
+0.026	2.058 0297	—2811	1.574 9407	—5085	+0.076	2.044 3433	—2663	1.550 0726	—4862
+0.027	2.057 7486	—2808	1.574 4322	—5080	+0.077	2.044 0770	—2661	1.549 5864	—4857
+0.028	2.057 4678	—2804	1.573 9242	—5075	+0.078	2.043 8109	—2657	1.549 1007	—4854
+0.029	2.057 1874	—2802	1.573 4167	—5071	+0.079	2.043 5452	—2655	1.548 6153	—4848
+0.030	2.056 9072	—2798	1.572 9096	—5066	+0.080	2.043 2797	—2653	1.548 1305	—4845
+0.031	2.056 6274	—2795	1.572 4030	—5061	+0.081	2.043 0144	—2649	1.547 6460	—4841
+0.032	2.056 3479	—2793	1.571 8969	—5057	+0.082	2.042 7495	—2647	1.547 1619	—4836
+0.033	2.056 0686	—2789	1.571 3912	—5052	+0.083	2.042 4848	—2643	1.546 6783	—4832
+0.034	2.055 7897	—2786	1.570 8860	—5048	+0.084	2.042 2205	—2642	1.546 1951	—4828
+0.035	2.055 5111	—2783	1.570 3812	—5042	+0.085	2.041 9563	—2638	1.545 7123	—4823
+0.036	2.055 2328	—2780	1.569 8770	—5039	+0.086	2.041 6925	—2636	1.545 2300	—4820
+0.037	2.054 9548	—2777	1.569 3731	—5034	+0.087	2.041 4289	—2632	1.544 7480	—4815
+0.038	2.054 6771	—2774	1.568 8697	—5029	+0.088	2.041 1657	—2631	1.544 2665	—4811
+0.039	2.054 3997	—2771	1.568 3668	—5024	+0.089	2.040 9026	—2627	1.543 7854	—4807
+0.040	2.054 1226	—2768	1.567 8644	—5020	+0.090	2.040 6399	—2625	1.543 3047	—4803
+0.041	2.053 8458	—2765	1.567 3624	—5016	+0.091	2.040 3774	—2622	1.542 8244	—4798
+0.042	2.053 5693	—2762	1.566 8608	—5011	+0.092	2.040 1152	—2619	1.542 3446	—4795
+0.043	2.053 2931	—2759	1.566 3597	—5006	+0.093	2.039 8533	—2616	1.541 8651	—4790
+0.044	2.053 0172	—2756	1.565 8591	—5002	+0.094	2.039 5917	—2614	1.541 3861	—4786
+0.045	2.052 7416	—2753	1.565 3589	—4998	+0.095	2.039 3303	—2611	1.540 9075	—4782
+0.046	2.052 4663	—2750	1.564 8591	—4993	+0.096	2.039 0692	—2609	1.540 4293	—4778
+0.047	2.052 1913	—2747	1.564 3598	—4988	+0.097	2.038 8083	—2605	1.539 9515	—4774
+0.048	2.051 9166	—2744	1.563 8610	—4984	+0.098	2.038 5478	—2603	1.539 4741	—4770
+0.049	2.051 6422	—2741	1.563 3626	—4979	+0.099	2.038 2875	—2601	1.538 9971	—4766
+0.050	2.051 3681		1.562 8647		+0.100	2.038 0274		1.538 5205	

Tafel XVIII.

θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.	θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.
+ 0.100	2.038 0274	— 2598	1.538 5205	— 4761	+ 0.150	2.025 3561	— 2471	1.515 1982	— 4566
+ 0.101	2.037 7676	— 2595	1.538 0444	— 4758	+ 0.151	2.025 1090	— 2468	1.514 7416	— 4563
+ 0.102	2.037 5081	— 2592	1.537 5686	— 4753	+ 0.152	2.024 8622	— 2465	1.514 2853	— 4558
+ 0.103	2.037 2489	— 2590	1.537 0933	— 4750	+ 0.153	2.024 6157	— 2463	1.513 8295	— 4556
+ 0.104	2.036 9899	— 2587	1.536 6183	— 4745	+ 0.154	2.024 3694	— 2461	1.513 3739	— 4551
+ 0.105	2.036 7312	— 2584	1.536 1438	— 4741	+ 0.155	2.024 1233	— 2458	1.512 9188	— 4547
+ 0.106	2.036 4728	— 2582	1.535 6697	— 4737	+ 0.156	2.023 8775	— 2456	1.512 4641	— 4544
+ 0.107	2.036 2146	— 2579	1.535 1960	— 4734	+ 0.157	2.023 6319	— 2453	1.512 0097	— 4541
+ 0.108	2.035 9567	— 2576	1.534 7226	— 4729	+ 0.158	2.023 3866	— 2452	1.511 5556	— 4536
+ 0.109	2.035 6991	— 2574	1.534 2497	— 4725	+ 0.159	2.023 1414	— 2448	1.511 1020	— 4533
+ 0.110	2.035 4417	— 2572	1.533 7772	— 4721	+ 0.160	2.022 8966	— 2446	1.510 6487	— 4529
+ 0.111	2.035 1845	— 2568	1.533 3051	— 4717	+ 0.161	2.022 6520	— 2444	1.510 1958	— 4525
+ 0.112	2.034 9277	— 2566	1.532 8334	— 4713	+ 0.162	2.022 4076	— 2442	1.509 7433	— 4522
+ 0.113	2.034 6711	— 2564	1.532 3621	— 4710	+ 0.163	2.022 1634	— 2439	1.509 2911	— 4518
+ 0.114	2.034 4147	— 2560	1.531 8911	— 4705	+ 0.164	2.021 9195	— 2437	1.508 8393	— 4515
+ 0.115	2.034 1587	— 2559	1.531 4206	— 4701	+ 0.165	2.021 6758	— 2434	1.508 3878	— 4511
+ 0.116	2.033 9028	— 2555	1.530 9505	— 4697	+ 0.166	2.021 4324	— 2432	1.507 9367	— 4507
+ 0.117	2.033 6473	— 2553	1.530 4808	— 4693	+ 0.167	2.021 1892	— 2430	1.507 4860	— 4503
+ 0.118	2.033 3920	— 2551	1.530 0115	— 4690	+ 0.168	2.020 9462	— 2427	1.507 0357	— 4500
+ 0.119	2.033 1369	— 2547	1.529 5425	— 4685	+ 0.169	2.020 7035	— 2425	1.506 5857	— 4496
+ 0.120	2.032 8822	— 2546	1.529 0740	— 4682	+ 0.170	2.020 4610	— 2423	1.506 1361	— 4493
+ 0.121	2.032 6276	— 2542	1.528 6058	— 4677	+ 0.171	2.020 2187	— 2420	1.505 6868	— 4489
+ 0.122	2.032 3734	— 2541	1.528 1381	— 4674	+ 0.172	2.019 9767	— 2418	1.505 2379	— 4486
+ 0.123	2.032 1193	— 2537	1.527 6707	— 4669	+ 0.173	2.019 7349	— 2416	1.504 7893	— 4481
+ 0.124	2.031 8656	— 2535	1.527 2038	— 4666	+ 0.174	2.019 4933	— 2413	1.504 3412	— 4479
+ 0.125	2.031 6121	— 2533	1.526 7372	— 4662	+ 0.175	2.019 2520	— 2411	1.503 8933	— 4474
+ 0.126	2.031 3588	— 2530	1.526 2710	— 4658	+ 0.176	2.019 0109	— 2409	1.503 4459	— 4471
+ 0.127	2.031 1058	— 2527	1.525 8052	— 4654	+ 0.177	2.018 7700	— 2406	1.502 9988	— 4468
+ 0.128	2.030 8531	— 2525	1.525 3398	— 4650	+ 0.178	2.018 5294	— 2404	1.502 5520	— 4464
+ 0.129	2.030 6006	— 2522	1.524 8748	— 4646	+ 0.179	2.018 2890	— 2402	1.502 1056	— 4460
+ 0.130	2.030 3484	— 2520	1.524 4102	— 4642	+ 0.180	2.018 0488	— 2400	1.501 6596	— 4457
+ 0.131	2.030 0964	— 2517	1.523 9460	— 4639	+ 0.181	2.017 8088	— 2397	1.501 2139	— 4453
+ 0.132	2.029 8447	— 2515	1.523 4821	— 4635	+ 0.182	2.017 5691	— 2395	1.500 7686	— 4449
+ 0.133	2.029 5932	— 2513	1.523 0186	— 4630	+ 0.183	2.017 3296	— 2392	1.500 3237	— 4447
+ 0.134	2.029 3419	— 2509	1.522 5556	— 4627	+ 0.184	2.017 0904	— 2390	1.499 8790	— 4442
+ 0.135	2.029 0910	— 2508	1.522 0929	— 4623	+ 0.185	2.016 8514	— 2388	1.499 4348	— 4439
+ 0.136	2.028 8402	— 2504	1.521 6306	— 4620	+ 0.186	2.016 6126	— 2386	1.498 9909	— 4436
+ 0.137	2.028 5898	— 2503	1.521 1686	— 4615	+ 0.187	2.016 3740	— 2384	1.498 5473	— 4432
+ 0.138	2.028 3395	— 2499	1.520 7071	— 4612	+ 0.188	2.016 1356	— 2381	1.498 1041	— 4428
+ 0.139	2.028 0896	— 2498	1.520 2459	— 4608	+ 0.189	2.015 8975	— 2379	1.497 6613	— 4425
+ 0.140	2.027 8398	— 2495	1.519 7851	— 4603	+ 0.190	2.015 6596	— 2377	1.497 2188	— 4421
+ 0.141	2.027 5903	— 2492	1.519 3248	— 4601	+ 0.191	2.015 4219	— 2374	1.496 7767	— 4418
+ 0.142	2.027 3411	— 2490	1.518 8647	— 4596	+ 0.192	2.015 1845	— 2372	1.496 3349	— 4415
+ 0.143	2.027 0921	— 2487	1.518 4051	— 4593	+ 0.193	2.014 9473	— 2370	1.495 8934	— 4411
+ 0.144	2.026 8434	— 2485	1.517 9458	— 4588	+ 0.194	2.014 7103	— 2368	1.495 4523	— 4407
+ 0.145	2.026 5949	— 2483	1.517 4870	— 4585	+ 0.195	2.014 4735	— 2365	1.495 0116	— 4404
+ 0.146	2.026 3466	— 2480	1.517 0285	— 4582	+ 0.196	2.014 2370	— 2364	1.494 5712	— 4401
+ 0.147	2.026 0986	— 2478	1.516 5703	— 4577	+ 0.197	2.014 0006	— 2361	1.494 1311	— 4397
+ 0.148	2.025 8508	— 2475	1.516 1126	— 4574	+ 0.198	2.013 7645	— 2358	1.493 6914	— 4393
+ 0.149	2.025 6033	— 2472	1.515 6552	— 4570	+ 0.199	2.013 5287	— 2357	1.493 2521	— 4391
+ 0.150	2.025 3561		1.515 1982		+ 0.200	2.013 2930		1.492 8130	

Tafel XVIII.

θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.	θ	$\log P_1$	Diff.	$\log P_3$	Diff.
+ 0.200	2.013 2930	— 2354	1.492 8130	— 4386	+ 0.250	2.001 7851	— 2248	1.471 2906	— 4221
+ 0.201	2.013 0576	— 2352	1.492 3744	— 4384	+ 0.251	2.001 5603	— 2246	1.470 8685	— 4218
+ 0.202	2.012 8224	— 2350	1.491 9360	— 4379	+ 0.252	2.001 3357	— 2244	1.470 4467	— 4214
+ 0.203	2.012 5874	— 2348	1.491 4981	— 4377	+ 0.253	2.001 1113	— 2243	1.470 0253	— 4212
+ 0.204	2.012 3526	— 2345	1.491 0604	— 4373	+ 0.254	2.000 8870	— 2240	1.469 6041	— 4208
+ 0.205	2.012 1181	— 2344	1.490 6231	— 4369	+ 0.255	2.000 6630	— 2238	1.469 1833	— 4206
+ 0.206	2.011 8837	— 2341	1.490 1862	— 4366	+ 0.256	2.000 4392	— 2236	1.468 7627	— 4202
+ 0.207	2.011 6496	— 2339	1.489 7496	— 4363	+ 0.257	2.000 2156	— 2234	1.468 3425	— 4199
+ 0.208	2.011 4157	— 2336	1.489 3133	— 4359	+ 0.258	1.999 9922	— 2232	1.467 9226	— 4196
+ 0.209	2.011 1821	— 2335	1.488 8774	— 4356	+ 0.259	1.999 7690	— 2230	1.467 5030	— 4192
+ 0.210	2.010 9486	— 2332	1.488 4418	— 4353	+ 0.260	1.999 5460	— 2229	1.467 0838	— 4190
+ 0.211	2.010 7154	— 2330	1.488 0065	— 4349	+ 0.261	1.999 3231	— 2226	1.466 6648	— 4186
+ 0.212	2.010 4824	— 2328	1.487 5716	— 4346	+ 0.262	1.999 1005	— 2224	1.466 2462	— 4184
+ 0.213	2.010 2496	— 2326	1.487 1370	— 4342	+ 0.263	1.998 8781	— 2222	1.465 8278	— 4180
+ 0.214	2.010 0170	— 2324	1.486 7028	— 4339	+ 0.264	1.998 6559	— 2220	1.465 4098	— 4177
+ 0.215	2.009 7846	— 2321	1.486 2689	— 4336	+ 0.265	1.998 4339	— 2218	1.464 9921	— 4174
+ 0.216	2.009 5525	— 2320	1.485 8353	— 4332	+ 0.266	1.998 2121	— 2217	1.464 5747	— 4171
+ 0.217	2.009 3205	— 2317	1.485 4021	— 4329	+ 0.267	1.997 9904	— 2214	1.464 1576	— 4167
+ 0.218	2.009 0888	— 2315	1.484 9692	— 4326	+ 0.268	1.997 7690	— 2212	1.463 7409	— 4165
+ 0.219	2.008 8573	— 2313	1.484 5366	— 4322	+ 0.269	1.997 5478	— 2210	1.463 3244	— 4161
+ 0.220	2.008 6260	— 2311	1.484 1044	— 4319	+ 0.270	1.997 3268	— 2209	1.462 9083	— 4159
+ 0.221	2.008 3949	— 2308	1.483 6725	— 4315	+ 0.271	1.997 1059	— 2206	1.462 4924	— 4155
+ 0.222	2.008 1641	— 2307	1.483 2410	— 4313	+ 0.272	1.996 8853	— 2204	1.462 0769	— 4152
+ 0.223	2.007 9334	— 2304	1.482 8097	— 4309	+ 0.273	1.996 6649	— 2203	1.461 6617	— 4150
+ 0.224	2.007 7030	— 2303	1.482 3788	— 4305	+ 0.274	1.996 4446	— 2200	1.461 2467	— 4146
+ 0.225	2.007 4727	— 2300	1.481 9483	— 4302	+ 0.275	1.996 2246	— 2199	1.460 8321	— 4143
+ 0.226	2.007 2427	— 2298	1.481 5181	— 4299	+ 0.276	1.996 0047	— 2197	1.460 4178	— 4140
+ 0.227	2.007 0129	— 2296	1.481 0882	— 4296	+ 0.277	1.995 7850	— 2194	1.460 0038	— 4137
+ 0.228	2.006 7833	— 2293	1.480 6586	— 4292	+ 0.278	1.995 5656	— 2193	1.459 5901	— 4134
+ 0.229	2.006 5540	— 2292	1.480 2294	— 4289	+ 0.279	1.995 3463	— 2191	1.459 1767	— 4131
+ 0.230	2.006 3248	— 2290	1.479 8005	— 4286	+ 0.280	1.995 1272	— 2189	1.458 7636	— 4127
+ 0.231	2.006 0958	— 2287	1.479 3719	— 4283	+ 0.281	1.994 9083	— 2187	1.458 3509	— 4125
+ 0.232	2.005 8671	— 2286	1.478 9436	— 4279	+ 0.282	1.994 6896	— 2185	1.457 9384	— 4122
+ 0.233	2.005 6385	— 2283	1.478 5157	— 4276	+ 0.283	1.994 4711	— 2183	1.457 5262	— 4119
+ 0.234	2.005 4102	— 2281	1.478 0881	— 4273	+ 0.284	1.994 2528	— 2181	1.457 1143	— 4115
+ 0.235	2.005 1821	— 2279	1.477 6608	— 4269	+ 0.285	1.994 0347	— 2179	1.456 7028	— 4113
+ 0.236	2.004 9542	— 2277	1.477 2339	— 4266	+ 0.286	1.993 8168	— 2178	1.456 2915	— 4110
+ 0.237	2.004 7265	— 2275	1.476 8073	— 4263	+ 0.287	1.993 5990	— 2175	1.455 8805	— 4106
+ 0.238	2.004 4990	— 2273	1.476 3810	— 4260	+ 0.288	1.993 3815	— 2174	1.455 4699	— 4104
+ 0.239	2.004 2717	— 2271	1.475 9550	— 4256	+ 0.289	1.993 1641	— 2171	1.455 0595	— 4101
+ 0.240	2.004 0446	— 2269	1.475 5294	— 4254	+ 0.290	1.992 9470	— 2170	1.454 6494	— 4097
+ 0.241	2.003 8177	— 2266	1.475 1040	— 4249	+ 0.291	1.992 7300	— 2168	1.454 2397	— 4095
+ 0.242	2.003 5911	— 2265	1.474 6791	— 4247	+ 0.292	1.992 5132	— 2166	1.453 8302	— 4092
+ 0.243	2.003 3646	— 2262	1.474 2544	— 4244	+ 0.293	1.992 2966	— 2164	1.453 4210	— 4088
+ 0.244	2.003 1384	— 2261	1.473 8300	— 4240	+ 0.294	1.992 0802	— 2162	1.453 0122	— 4086
+ 0.245	2.002 9123	— 2258	1.473 4060	— 4237	+ 0.295	1.991 8640	— 2160	1.452 6036	— 4083
+ 0.246	2.002 6865	— 2257	1.472 9823	— 4234	+ 0.296	1.991 6480	— 2159	1.452 1953	— 4079
+ 0.247	2.002 4608	— 2254	1.472 5589	— 4231	+ 0.297	1.991 4321	— 2156	1.451 7874	— 4077
+ 0.248	2.002 2354	— 2252	1.472 1358	— 4227	+ 0.298	1.991 2165	— 2155	1.451 3797	— 4074
+ 0.249	2.002 0102	— 2251	1.471 7131	— 4225	+ 0.299	1.991 0010	— 2153	1.450 9723	— 4071
+ 0.250	2.001 7851		1.471 2906		+ 0.300	1.990 7857		1.450 5652	

Tafel XIX.

vergl. pag. 512.

Jahr.	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
oo	{g. K.} 001	032	060	091	121	152	182	213	244	274	305	335													
00	000	031	060	091	121	152	182	213	244	274	305	335	50	18 263	294	322	353	383	414	444	475	506	536	567	597
01	366	397	425	456	486	517	547	578	609	639	670	700	51	628	659	687	718	748	779	809	840	871	901	932	962
02	731	762	790	821	851	882	912	943	974	1004	1035	1065	52	993	1024	1053	1084	1114	1145	1175	1206	1237	1267	1298	1328
03	096	127	155	186	216	247	277	308	339	369	400	430	53	19 359	390	418	449	479	510	540	571	602	632	663	693
04	401	492	521	552	582	613	643	674	705	735	766	796	54	724	755	783	814	844	875	905	936	967	997	1028	1058
05	827	858	886	917	947	978	1008	1039	1070	1100	1131	1161	55	20 089	120	148	179	209	240	270	301	332	362	393	423
06	192	223	251	282	312	343	373	404	435	465	496	526	56	454	485	514	545	575	606	636	667	698	728	759	789
07	557	588	616	647	677	708	738	769	800	830	861	891	57	820	851	879	910	940	971	1001	1032	1063	1093	1124	1154
08	922	953	982	1013	1043	1074	1104	1135	1166	1196	1227	1257	58	21 185	216	244	275	305	336	366	397	428	458	489	519
09	288	319	347	378	408	439	469	500	531	561	592	622	59	550	581	609	640	670	701	731	762	793	823	854	884
10	653	684	712	743	773	804	834	865	896	926	957	987	60	915	946	975	1006	1036	1067	1097	1128	1159	1189	1220	1250
11	018	049	077	108	138	169	199	230	261	291	322	352	61	22 281	312	340	371	401	432	462	493	524	554	585	615
12	383	414	443	474	504	535	565	596	627	657	688	718	62	646	677	705	736	766	797	827	858	889	919	950	980
13	749	780	808	839	869	900	930	961	992	1022	1053	1083	63	23 011	042	070	101	131	162	192	223	254	284	315	345
14	114	145	173	204	234	265	295	326	357	387	418	448	64	376	407	436	467	497	528	558	589	620	650	681	711
15	479	510	538	569	599	630	660	691	722	752	783	813	65	742	773	801	832	862	893	923	954	985	1015	1046	1076
16	844	875	904	935	965	996	1026	1057	1088	1118	1149	1179	66	24 107	138	166	197	227	258	288	319	350	380	411	441
17	210	241	269	300	330	361	391	422	453	483	514	544	67	472	503	531	562	592	623	653	684	715	745	776	806
18	575	606	634	665	695	726	756	787	818	848	879	909	68	837	868	897	928	958	989	1019	1050	1081	1111	1142	1172
19	940	971	999	1030	1060	1091	1121	1152	1183	1213	1244	1274	69	25 203	234	262	293	323	354	384	415	446	476	507	537
20	305	336	365	396	426	457	487	518	549	579	610	640	70	568	599	627	658	688	719	749	780	811	841	872	902
21	671	702	730	761	791	822	852	883	914	944	975	1005	71	933	964	992	1023	1053	1084	1114	1145	1176	1206	1237	1267
22	036	067	095	126	156	187	217	248	279	309	340	370	72	26 298	329	358	389	419	450	480	511	542	572	603	633
23	401	432	460	491	521	552	582	613	644	674	705	735	73	664	695	723	754	784	815	845	876	907	937	968	998
24	766	797	826	857	887	918	948	979	1010	1040	1071	1101	74	27 029	060	088	119	149	180	210	241	272	302	333	363
25	132	163	191	222	252	283	313	344	375	405	436	466	75	394	425	453	484	514	545	575	606	637	667	698	728
26	497	528	556	587	617	648	678	709	740	770	801	831	76	759	790	819	850	880	911	941	972	1003	1033	1064	1094
27	862	893	921	952	982	1013	1043	1074	1105	1135	1166	1196	77	28 125	156	184	215	245	276	306	337	368	398	429	459
28	227	258	287	318	348	379	409	440	471	501	532	562	78	490	521	549	580	610	641	671	702	733	763	794	824
29	593	624	652	683	713	744	774	805	836	866	897	927	79	855	886	914	945	975	1006	1036	1067	1097	1128	1159	1189
30	958	989	1017	1048	1078	1109	1139	1170	1201	1231	1262	1292	80	29 220	251	280	311	341	372	402	433	464	494	525	555
31	323	354	382	413	443	474	504	535	566	596	627	657	81	586	617	645	676	707	737	767	798	829	859	890	920
32	688	719	748	779	809	840	870	901	932	962	993	1023	82	951	982	1010	1041	1071	1102	1132	1163	1194	1224	1255	1285
33	054	085	113	144	174	205	235	266	297	327	358	388	83	30 316	347	375	406	436	467	497	528	559	589	620	650
34	419	450	478	509	539	570	600	631	662	692	723	753	84	681	712	741	772	802	833	863	894	925	955	986	1016
35	784	815	843	874	904	935	965	996	1027	1057	1088	1118	85	31 047	078	106	137	167	198	228	259	290	320	351	381
36	149	180	209	240	270	301	331	362	393	423	454	484	86	412	443	471	502	532	563	593	624	655	685	716	746
37	515	546	574	605	635	666	696	727	758	788	819	849	87	777	808	836	867	897	928	958	989	1020	1050	1081	1111
38	880	911	939	970	1000	1031	1061	1092	1123	1153	1184	1214	88	32 142	173	202	233	263	294	324	355	386	416	447	477
39	245	276	304	335	365	396	426	457	488	518	549	579	89	508	539	567	598	628	659	689	720	751	781	812	842
40	610	641	670	701	731	762	792	823	854	884	915	945	90	873	904	932	963	993	1024	1054	1085	1116	1146	1177	1207
41	976	1007	1035	1066	1096	1127	1157	1188	1219	1249	1280	1310	91	33 238	269	297	328	358	389	419	450	481	511	542	572
42	341	372	400	431	461	492	522	553	584	614	645	675	92	603	634	663	694	724	755	785	816	847	877	908	938
43	706	737	765	796	826	857	887	918	949	979	1010	1040	93	960	990	1018	1050	1080	1110	1140	1170	1200	1230	1260	1290
44	071	102	131	162	192	223	253	284	315	345	376	406	94	34 334	365	393	424	454	485	515	546	577	607	638	668
45	437	468	496	527	557	588	618	649	680	710	741	771	95	699	730	758	789	819	850	880	911	942	972	1003	1033
46	802	833	861	892	922	953	983	1014	1045	1075	1106	1136	96	35 064	095	124	155	185	216	246	277	308	338	369	399
47	167	198	226	257	287	318	348	379	410	440	471	501	97	430	461	489	520	550	581	611	642	673	703	734	764
48	532	563	592	623	653	684	714	745	776	806	837	867	98	795	826	854	885	915	946	976	1007	1038	1068	1099	1129
49	898	929	957	988	1018	1049	1079	1110	1141	1171	1202	1232	99	36 160	191	219	250	280	311	341	372	403	433	464	494

Tageszahl der Jahrhunderte + Tageszahl für Jahr und Monat + Monatsdatum = Tageszahl der julianischen Periode für den Tagesanfang.
Für negative Jahreszahlen hat man vom nächst höheren negativen Jahrhunderte auszugehen, also z. B. — 386 = — 400 + 14.

Tafel XIX.

Julianischer Kalender v. Chr.		Julianischer Kalender n. Chr.		$\frac{1}{2}h$	m	s	$\frac{1}{2}h$	m	s	$\frac{1}{2}h$	m	s	$\frac{1}{2}h$	m	s	$\frac{1}{2}h$	m	s	$\frac{1}{2}h$	m	s	
Jahrh.		Jahrh.		o.			o.			o.			o.			o.			o.			
		o	1721 057	00		0 ^h 0 ^m 0 ^s	50	12 ^h 0 ^m 0 ^s	00	0 ^m 0 ^s 00	50	7 ^m 12 ^s 00	00	0 ^m 0 ^s 00	50	4 ^m 32 ^s 00			00	0 ^m 0 ^s 00	50	4 ^m 32 ^s 00
		100	1757 582	01		0 ^h 14 ^m 24 ^s	51	12 ^h 14 ^m 24 ^s	01	0 ^m 8 ^s 64	51	7 ^m 20 ^s 64	01	0 ^m 8 ^s 64	51	4 ^m 40 ^s 64			01	0 ^m 8 ^s 64	51	4 ^m 40 ^s 64
		200	1794 107	02		0 ^h 28 ^m 48 ^s	52	12 ^h 28 ^m 48 ^s	02	0 ^m 17 ^s 28	52	7 ^m 29 ^s 28	02	0 ^m 17 ^s 28	52	4 ^m 49 ^s 28			02	0 ^m 17 ^s 28	52	4 ^m 49 ^s 28
— 4 ⁰⁰	+ 382	300	1830 632	03		0 ^h 43 ^m 12 ^s	53	12 ^h 43 ^m 12 ^s	03	0 ^m 25 ^s 92	53	7 ^m 37 ^s 92	03	0 ^m 25 ^s 92	53	4 ^m 57 ^s 92			03	0 ^m 25 ^s 92	53	4 ^m 57 ^s 92
— 4600	40 907	400	1867 157	04		0 ^h 57 ^m 36 ^s	54	12 ^h 57 ^m 36 ^s	04	0 ^m 34 ^s 56	54	7 ^m 46 ^s 56	04	0 ^m 34 ^s 56	54	4 ^m 66 ^s 56			04	0 ^m 34 ^s 56	54	4 ^m 66 ^s 56
— 4500	77 432	500	1903 682	05		1 ^h 12 ^m 0 ^s	55	13 ^h 12 ^m 0 ^s	05	0 ^m 43 ^s 20	55	7 ^m 55 ^s 20	05	0 ^m 43 ^s 20	55	4 ^m 75 ^s 20			05	0 ^m 43 ^s 20	55	4 ^m 75 ^s 20
— 4400	113 957	600	1940 207	06		1 ^h 26 ^m 24 ^s	56	13 ^h 26 ^m 24 ^s	06	0 ^m 51 ^s 84	56	8 ^m 3 ^s 84	06	0 ^m 51 ^s 84	56	4 ^m 83 ^s 84			06	0 ^m 51 ^s 84	56	4 ^m 83 ^s 84
— 4300	150 482	700	1976 732	07		1 ^h 40 ^m 48 ^s	57	13 ^h 40 ^m 48 ^s	07	1 ^m 0 ^s 48	57	8 ^m 12 ^s 48	07	1 ^m 0 ^s 48	57	4 ^m 92 ^s 48			07	1 ^m 0 ^s 48	57	4 ^m 92 ^s 48
— 4200	187 007	800	2013 257	08		1 ^h 55 ^m 12 ^s	58	13 ^h 55 ^m 12 ^s	08	1 ^m 9 ^s 12	58	8 ^m 21 ^s 12	08	1 ^m 9 ^s 12	58	4 ^m 101 ^s 12			08	1 ^m 9 ^s 12	58	4 ^m 101 ^s 12
— 4100	223 532	900	2049 782	09		2 ^h 9 ^m 36 ^s	59	14 ^h 9 ^m 36 ^s	09	1 ^m 17 ^s 36	59	8 ^m 29 ^s 36	09	1 ^m 17 ^s 36	59	4 ^m 109 ^s 36			09	1 ^m 17 ^s 36	59	4 ^m 109 ^s 36
— 4000	260 057	1000	2086 307	10		2 ^h 24 ^m 0 ^s	60	14 ^h 24 ^m 0 ^s	10	1 ^m 26 ^s 40	60	8 ^m 38 ^s 40	10	1 ^m 26 ^s 40	60	4 ^m 118 ^s 40			10	1 ^m 26 ^s 40	60	4 ^m 118 ^s 40
— 3900	296 582	1100	2122 832	11		2 ^h 38 ^m 24 ^s	61	14 ^h 38 ^m 24 ^s	11	1 ^m 35 ^s 04	61	8 ^m 47 ^s 04	11	1 ^m 35 ^s 04	61	4 ^m 127 ^s 04			11	1 ^m 35 ^s 04	61	4 ^m 127 ^s 04
— 3800	333 107	1200	2159 357	12		2 ^h 52 ^m 48 ^s	62	14 ^h 52 ^m 48 ^s	12	1 ^m 43 ^s 68	62	8 ^m 55 ^s 68	12	1 ^m 43 ^s 68	62	4 ^m 136 ^s 68			12	1 ^m 43 ^s 68	62	4 ^m 136 ^s 68
— 3700	369 632	1300	2195 882	13		3 ^h 6 ^m 12 ^s	63	15 ^h 6 ^m 12 ^s	13	1 ^m 52 ^s 32	63	9 ^m 4 ^s 32	13	1 ^m 52 ^s 32	63	4 ^m 145 ^s 32			13	1 ^m 52 ^s 32	63	4 ^m 145 ^s 32
— 3600	406 157	1400	2232 407	14		3 ^h 21 ^m 36 ^s	64	15 ^h 21 ^m 36 ^s	14	2 ^m 0 ^s 96	64	9 ^m 12 ^s 96	14	2 ^m 0 ^s 96	64	4 ^m 154 ^s 96			14	2 ^m 0 ^s 96	64	4 ^m 154 ^s 96
— 3500	442 682	1500	2268 932	15		3 ^h 36 ^m 0 ^s	65	15 ^h 36 ^m 0 ^s	15	2 ^m 9 ^s 60	65	9 ^m 21 ^s 60	15	2 ^m 9 ^s 60	65	4 ^m 163 ^s 60			15	2 ^m 9 ^s 60	65	4 ^m 163 ^s 60
— 3400	479 207	1600	2305 457	16		3 ^h 50 ^m 24 ^s	66	15 ^h 50 ^m 24 ^s	16	2 ^m 18 ^s 24	66	9 ^m 30 ^s 24	16	2 ^m 18 ^s 24	66	4 ^m 172 ^s 24			16	2 ^m 18 ^s 24	66	4 ^m 172 ^s 24
— 3300	515 732	1700	2341 982	17		4 ^h 4 ^m 48 ^s	67	16 ^h 4 ^m 48 ^s	17	2 ^m 26 ^s 88	67	9 ^m 38 ^s 88	17	2 ^m 26 ^s 88	67	4 ^m 181 ^s 88			17	2 ^m 26 ^s 88	67	4 ^m 181 ^s 88
— 3200	552 257	1800	2378 507	18		4 ^h 19 ^m 12 ^s	68	16 ^h 19 ^m 12 ^s	18	2 ^m 35 ^s 52	68	9 ^m 47 ^s 52	18	2 ^m 35 ^s 52	68	4 ^m 190 ^s 52			18	2 ^m 35 ^s 52	68	4 ^m 190 ^s 52
— 3100	588 782	1900	2415 032	19		4 ^h 33 ^m 36 ^s	69	16 ^h 33 ^m 36 ^s	19	2 ^m 44 ^s 16	69	9 ^m 56 ^s 16	19	2 ^m 44 ^s 16	69	4 ^m 199 ^s 16			19	2 ^m 44 ^s 16	69	4 ^m 199 ^s 16
— 3000	625 307	2000	2451 557	20		4 ^h 48 ^m 0 ^s	70	16 ^h 48 ^m 0 ^s	20	2 ^m 52 ^s 80	70	10 ^m 4 ^s 80	20	2 ^m 52 ^s 80	70	4 ^m 208 ^s 80			20	2 ^m 52 ^s 80	70	4 ^m 208 ^s 80
— 2900	661 832	2100	2488 082	21		5 ^h 2 ^m 24 ^s	71	17 ^h 2 ^m 24 ^s	21	3 ^m 1 ^s 44	71	10 ^m 13 ^s 44	21	3 ^m 1 ^s 44	71	4 ^m 217 ^s 44			21	3 ^m 1 ^s 44	71	4 ^m 217 ^s 44
— 2800	698 357	2200	2524 607	22		5 ^h 16 ^m 48 ^s	72	17 ^h 16 ^m 48 ^s	22	3 ^m 10 ^s 08	72	10 ^m 22 ^s 08	22	3 ^m 10 ^s 08	72	4 ^m 226 ^s 08			22	3 ^m 10 ^s 08	72	4 ^m 226 ^s 08
— 2700	734 882	2300	2561 132	23		5 ^h 31 ^m 12 ^s	73	17 ^h 31 ^m 12 ^s	23	3 ^m 18 ^s 52	73	10 ^m 30 ^s 52	23	3 ^m 18 ^s 52	73	4 ^m 235 ^s 52			23	3 ^m 18 ^s 52	73	4 ^m 235 ^s 52
— 2600	771 407	2400	2597 657	24		5 ^h 45 ^m 36 ^s	74	17 ^h 45 ^m 36 ^s	24	3 ^m 27 ^s 36	74	10 ^m 39 ^s 36	24	3 ^m 27 ^s 36	74	4 ^m 244 ^s 36			24	3 ^m 27 ^s 36	74	4 ^m 244 ^s 36
— 2500	807 932	2500	2634 182	25		6 ^h 0 ^m 0 ^s	75	18 ^h 0 ^m 0 ^s	25	3 ^m 36 ^s 00	75	10 ^m 48 ^s 00	25	3 ^m 36 ^s 00	75	4 ^m 253 ^s 00			25	3 ^m 36 ^s 00	75	4 ^m 253 ^s 00
— 2400	844 457	2600	2670 707	26		6 ^h 14 ^m 24 ^s	76	18 ^h 14 ^m 24 ^s	26	3 ^m 44 ^s 64	76	10 ^m 56 ^s 64	26	3 ^m 44 ^s 64	76	4 ^m 262 ^s 64			26	3 ^m 44 ^s 64	76	4 ^m 262 ^s 64
— 2300	880 982	2700	2707 232	27		6 ^h 28 ^m 48 ^s	77	18 ^h 28 ^m 48 ^s	27	3 ^m 53 ^s 28	77	11 ^m 5 ^s 28	27	3 ^m 53 ^s 28	77	4 ^m 271 ^s 28			27	3 ^m 53 ^s 28	77	4 ^m 271 ^s 28
— 2200	917 507	2800	2743 757	28		6 ^h 43 ^m 12 ^s	78	18 ^h 43 ^m 12 ^s	28	4 ^m 1 ^s 92	78	11 ^m 13 ^s 92	28	4 ^m 1 ^s 92	78	4 ^m 280 ^s 92			28	4 ^m 1 ^s 92	78	4 ^m 280 ^s 92
— 2100	954 032	2900	2780 282	29		6 ^h 57 ^m 36 ^s	79	18 ^h 57 ^m 36 ^s	29	4 ^m 10 ^s 56	79	11 ^m 22 ^s 56	29	4 ^m 10 ^s 56	79	4 ^m 289 ^s 56			29	4 ^m 10 ^s 56	79	4 ^m 289 ^s 56
— 2000	990 557	Gregorianischer Kalender n. Chr.		30		7 ^h 12 ^m 0 ^s	80	19 ^h 12 ^m 0 ^s	30	4 ^m 19 ^s 20	80	11 ^m 31 ^s 20	30	4 ^m 19 ^s 20	80	4 ^m 298 ^s 20			30	4 ^m 19 ^s 20	80	4 ^m 298 ^s 20
— 1900	1027 082			31		7 ^h 26 ^m 24 ^s	81	19 ^h 26 ^m 24 ^s	31	4 ^m 27 ^s 84	81	11 ^m 39 ^s 84	31	4 ^m 27 ^s 84	81	4 ^m 307 ^s 84			31	4 ^m 27 ^s 84	81	4 ^m 307 ^s 84
— 1800	1063 607			32		7 ^h 40 ^m 48 ^s	82	19 ^h 40 ^m 48 ^s	32	4 ^m 36 ^s 48	82	11 ^m 48 ^s 48	32	4 ^m 36 ^s 48	82	4 ^m 316 ^s 48			32	4 ^m 36 ^s 48	82	4 ^m 316 ^s 48
— 1700	1100 132			33		7 ^h 55 ^m 12 ^s	83	19 ^h 55 ^m 12 ^s	33	4 ^m 45 ^s 12	83	11 ^m 57 ^s 12	33	4 ^m 45 ^s 12	83	4 ^m 325 ^s 12			33	4 ^m 45 ^s 12	83	4 ^m 325 ^s 12
— 1600	1136 657	Jahrh.		34		8 ^h 9 ^m 36 ^s	84	20 ^h 9 ^m 36 ^s	34	4 ^m 53 ^s 76	84	12 ^m 5 ^s 76	34	4 ^m 53 ^s 76	84	4 ^m 334 ^s 76			34	4 ^m 53 ^s 76	84	4 ^m 334 ^s 76
— 1500	1173 182	1500	2268 922	35		8 ^h 24 ^m 0 ^s	85	20 ^h 24 ^m 0 ^s	35	5 ^m 2 ^s 40	85	12 ^m 14 ^s 40	35	5 ^m 2 ^s 40	85	4 ^m 343 ^s 40			35	5 ^m 2 ^s 40	85	4 ^m 343 ^s 40
— 1400	1209 707	1600	2305 447	36		8 ^h 38 ^m 24 ^s	86	20 ^h 38 ^m 24 ^s	36	5 ^m 11 ^s 04	86	12 ^m 23 ^s 04	36	5 ^m 11 ^s 04	86	4 ^m 352 ^s 04			36	5 ^m 11 ^s 04	86	4 ^m 352 ^s 04
— 1300	1246 232	170																				

Berichtigungen.

Seite 4 Zeile 4 von oben sind die Aufschriften der 2. und 3. Columnne zu vertauschen

» 5 Formel 3) statt $\sum_{i=i_1}^{i=i_0-1} f(a + [i + 1] w)$ lies: $\sum_{i=i_1}^{i=i_0-1} f(a + [i + 1] w)$

» 5 » 4. » $\sum_{i=i_1}^{i=i_0-1} f(a + [i + \frac{1}{2}] w)$ » $\sum_{i=i_1}^{i=i_0-1} f(a + [i + \frac{1}{2}] w)$

» 11 Zeile 4 von oben statt $1^2, 3^2, \dots$ lies: $1^2, 3^2, \dots$

» 18 » 2 » unten » $C^3\{1^1 \dots 7^2\}$ » $C^3\{1^2 \dots 7^2\}$

» 19 in $N_2^{10}(n)$ statt $9.10n^2$ lies: $9.10n^4$

» 20 » $M_2^9(m)$ » $6.7m^2$ » $6.7m^4$

» 38 Zeile 11 von oben statt »von der oberen« lies: »von jenem der oberen«

» 53 » 7 » unten » f^{ua} lies: f^{ua}

» 63 » 8 » » » »gebildete Summationsreihe« lies: »gebildeten Summationsreihen«

» 89 » 15 » oben am Schlusse statt $\mathcal{J}(p)$ lies: $\mathcal{J}(\sqrt{p})$

» 89 » 7 » unten statt $\left(\frac{\sqrt{p_0} + \mathcal{J}\sqrt{p}}{k}\right)$ lies: $\left(\frac{\sqrt{p_0} + \mathcal{J}\sqrt{p}}{k}\right)$

» 99 » 18 » oben statt $\sin 1''$ lies: $\sin 1''$

» 100 » 12 » » » vortesslt lies: vorstellt

» 100 2. Zeile in Formel I statt $-\sin \varphi \cos i_0$ lies: $-\sin \varphi_0 \cos i_0$

» 105 Zeile 4 von oben statt 6.8 lies: 6''8

» 105 » 13 » » » $\sin \vartheta$ lies: $\varrho \sin \vartheta$

» 108 Formel IV₁ ist durchaus statt ω der Buchstabe w zu setzen

» 112 Zeile 2 von oben Columnne 1) statt -257.64 lies: -257.61

» 112 » 4 » » » $11f$ » $+10.78$ » $+10.87$

» 133 » 15 » » statt $s - \frac{1}{2} [\varrho_0 + \varrho_0]$ lies: $S - \frac{1}{2} [\varrho + \varrho_0]$

» 146 » 3 » unten im 3. Gliede links vom = statt $\frac{k^2}{r^2}$ lies: $\frac{k^2}{(r)^2}$

» 148 in der 3. Gleichung in IX statt $\frac{d^2 z}{dt^2}$ lies: $\frac{d^2 z}{dt^2}$

» 156 Zeile 14 von oben statt W lies: W_1

» 170 4. Zeile der Formel II) statt r lies: r_1

» 181 Zeile 5 von oben fehlt = nach $1 + v$

» 209 » 4 » » statt Formel lies: Formeln

» 235 » 8 » unten » $3 kw$ lies: $\log 3 kw$

» 256 » 2 » oben » »die Folge« lies: »in Folge«

» 278 » 10 » » fehlen die Schlussworte ,ersetzt und F' ($-\mathcal{J}$) mit $-F'$ (\mathcal{J}) vertauscht, was für die folgende Schlussfolgerung erlaubt ist:«

» 283 » 17 » unten statt $\frac{y}{l}$ lies: $\frac{l}{y}$

» 293 Formel 3) im Nenner statt $1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt{\frac{k}{2}}$ lies: $1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt{\frac{k}{2}}$ nicht in allen Abzügen.

Seite 303 Zeile 10 von unten statt und lies: und

» 310 » 10 » oben » das » dass

» 332 » 16 » » » nan » man

» 336 » 8 » » fällt am Schlusse »er-« weg

» 344 » 14 » unten statt untersten lies: unteren

» 344 » 10 » » » Verticalcolumne lies: Verticalecolumne

» 348 » 15 » » » $-\frac{[cf^2]}{[c^2e^2]}_2$ lies: $-\frac{cf^2}{[c^2e^2]} B_2$

» 353 im Titel statt § 3 lies: § 5

» 388 Zeile 4 und 5 von oben statt vorsetzen, lies: voraussetzen

» 392 » 3 von unten statt $\frac{\cos \frac{1}{2}(\pi - \pi_0)}{\cos \frac{1}{2}(\pi - \pi_0)} \partial \varphi$ lies: $\frac{\cos \frac{1}{2}(\pi + \pi_0)}{\cos \frac{1}{2}(\pi - \pi_0)} \partial \varphi$

» 415 » 6 » » » » noch erwähnen« lies: »noch zu erwähnen«

» 432 Formel 16 statt $\frac{\partial A^3}{\partial \xi_0}$ lies: $\frac{\partial A_3}{\partial \xi_0}$

» 432 » 16 ist in $\frac{\partial A_4}{\partial x_0}$ rechter Hand ξ_0 mit x_0 zu vertauschen

» 447 Zeile 4 von unten statt $\partial b : \partial r_0$ lies: $\partial a : \partial r_0$

» 454 » 1 » oben » $6_{n1960} \partial_0$ lies: $6_{n1960} \partial \xi_0$

» 460 » 7 » » » Systeme, lies: , Systeme

» 468 » 17 » » » -0.25 und 0.25 lies: -0.24 und 0.24

» 470 » 11 » unten » 9.9999446 lies: 8.9999446

» 471 » 2 » » » Zeichen lies: Zeichen

» 483 Formel C erste Zeile statt $\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\right)$ lies: $\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\right)$

» 486 Zeile 8 von oben statt $\mathcal{A}y$ lies: $\mathcal{A}y$

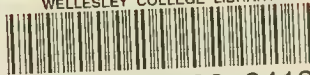
» 500 » 7 » » in den beiden Nennern statt dy lies: ∂y .







WELLESLEY COLLEGE LIBRARY



3 5002 03506 9413

Science qQB 355 .07 2

Oppolzer, Theodor von,
1841-1886.

Lehrbuch zur Bahnbestimmung
der Kometen und Planeten

